



Конструкція і теорія сільськогосподарських машин Construction and theory of agricultural machines

УДК 534.1:539.3

[https://doi.org/10.37700/enm.2021.1\(19\).57](https://doi.org/10.37700/enm.2021.1(19).57) - 62

Інтегральне рівняння удару пружного конуса об перешкоду і його наближений розв'язок

В.П. Ольшанський¹, М.В. Сліпченко², **О.І. Спольнік**³

*Харківський національний технічний університет сільського господарства
імені Петра Василенка (м. Харків, Україна)*

email: ¹ OlshanskiyVP@gmail.com; ² Slipchenko_M@ukr.net;

ORCID: ¹ 0000-0003-1407-4476, ² 000-0002-9728-661X, ³ 0000-0002-4389-8813

Побудовано наближений аналітичний розв'язок інтегрального рівняння удару з невеликою швидкістю двох пружних тіл, одне з яких конус обертання. Для цього використано метод послідовних наближень і формулу Шенкса, яка в замкненій формі наближено виражає суму степеневих ряду. Одержані розв'язки дають розгортку в часі процесу удару та можливість обчислення максимуму сили стискання, максимуму зближення центрів мас тіл і тривалості удару. Викладений спосіб побудови наближених розв'язків інтегральних рівнянь сили удару незакріплених тіл є досить універсальним. Він може бути використаним для теоретичного дослідження удару тіл, обмежених поверхнями високих порядків, що описують щільний контакт, а також поверхнями з сингулярними точками, для яких існують аналітичні розв'язки контактної задачі теорії пружності. При складанні інтегрального рівняння сили удару задіяні теорія Г. Герца і розв'язок вісесиметричної контактної задачі теорії пружності, одержаний І.Я. Штаерманом. Показано, що побудовані наближені розв'язки можна використовувати і для апроксимації тих періодичних Ateb-функцій, в першій чверті їх періоду, через які виражається точний аналітичний розв'язок цієї задачі удару. Похибки наближених розв'язків менші 0,5 %. Це встановлено порівнянням числових результатів, до яких вони призводять, з результатами інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Наведено приклади розрахунків, що підтверджують вірогідність отриманих аналітичних рішень. Викладена теорія стосується малих швидкостей удару, коли при динамічній взаємодії тіл не виникає великої області пластичних деформацій. Поява малої області таких деформацій неминуха в околі вершини конуса і при малих швидкостях зіткнення тіл, але її не враховуємо в роботі.

Ключові слова: удар пружних тіл, конус, теорія Герца, інтегральне рівняння, аналітичний розв'язок, апроксимація Ateb-функцій.

Вступ. Контактна взаємодія тіл є широко розповсюдженим явищем в техніці. Воно моделює як взаємодію деталей машин при роботі, так і різноманітні технологічні процеси, що відбуваються як в машинобудуванні так і сільськогосподарському виробництві. Реальні моделі, як правило нелінійні, і мають найпростіший розв'язок за допомогою чисельних методів. Актуальною задачею є отримання аналітичних розв'язків, а де це неможливе – наближених, що значно спрощує обчислення сили удару.

Аналіз літературних даних та постановка проблеми. Для розрахунку сили удару, як функції часу при пружному ударі, зазвичай, складають нелінійні інтегральні рівняння, які розв'язують чисельними методами [1-4]. Це досягають заміною інтегралів на скінченні суми. Певний виняток в

дослідженнях становлять роботи [5, 6]. В статті [5] аналітичний розв'язок рівняння сили удару виражено через Ateb-синус. В монографії [6] побудовано в елементарних функціях наближений розв'язок інтегрального рівняння динамічної контактної взаємодії двох незакріплених пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, де розглядали класичну задачу Г. Герца. Для тіл, обмежених іншими поверхнями немає таких розв'язків. Тому тут поставлено завдання знайти аналітичний розв'язок інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, одне з яких конус обертання. Наявність вершини в конуса призводить до нескінченного тиску в центрі області контакту, що виводить задачу за межі пружності, але на це не звертав увагу І.Я. Штаерман [7]. Зберігаючи його підхід, тут розв'язуємо динамічну задачу теж в пружній

постановці, усвідомлюючи що це дещо ідеалізує теорію. Щоб запобігти появі великої зони пластичних деформацій в зоні контакту тіл, далі обмежимо модель удару малими швидкостями.

Метою статті є складання інтегрального рівняння сили удару пружних тіл, одне з яких конус і побудова його наближеного аналітичного розв'язку, з аналізом похибок і можливостей використане в інженерних розрахунках.

Для порівняння числових результатів, одержаних різними методами, крім аналітичних рішень, проводимо числове інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Одержані цим способом результати вважаємо «умовно точними», при оцінці похибок наближених аналітичних розв'язків.

Викладення основного матеріалу.

1. Інтегральне рівняння і його перетворення до безрозмірної форми.

Ударне стискання пружних тіл, одне з яких конус, описується інтегральним рівнянням:

$$KP^{1/2} = v_0 t - \frac{1}{M} \int_0^t \int_0^{t_1} P(t_2) dt_2 dt_1, \quad (1)$$

у якому $P = P(t)$ – сила стискання; v_0 – початкова відносна швидкість зіткненням тіл; t – час;

$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ – зведена маса тіл, задіяних в ударі,

причому m_1 – маса першого, а m_2 – маса другого тіла.

Коефіцієнт K залежить від фізичних і геометричних характеристик пружних тіл. Він визначається статичним розв'язком контактної задачі теорії пружності. У відповідності з [7]:

$$K = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (Q_1 + Q_2) \operatorname{ctg} \gamma,$$

де $Q_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1}$; $Q_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2}$; E_1, E_2, μ_1, μ_2 – відпо-

відно модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл; 2γ – кут розкриття конуса (рис. 1).

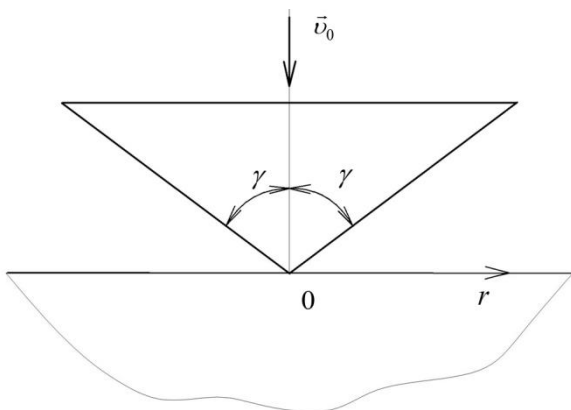


Рис. 1. Схема взаємодії тіл

Підставимо в (1) вирази:

$$P(t) = \alpha \cdot f(\tau); \quad t = \beta \tau,$$

де α, β – сталі множники; $f(\tau)$ – невідома функція.

Вказана підстановка дає:

$$f^{1/2}(\tau) = \frac{\beta v_0}{K \alpha^{1/2}} \tau - \frac{\alpha^{1/2} \beta^2}{KM} \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1.$$

Виберемо α і β такими, щоб:

$$\frac{\beta v_0}{K \alpha^{1/2}} = 1 \quad \text{і} \quad \frac{\alpha^{1/2} \beta^2}{KM} = 1.$$

Ці умови виконуються, коли:

$$\alpha = \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{2/3}, \quad \beta = \left(\frac{MK^2}{v_0} \right)^{1/3}.$$

Отже:

$$P(t) = \left(\frac{M v_0^2}{K} \right)^{2/3} f(\tau), \quad t = \left(\frac{MK^2}{v_0} \right)^{1/3} \tau, \quad (2)$$

а функція $f(\tau)$ є розв'язком інтегрального рівняння:

$$f^{1/2}(\tau) = \tau - \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1, \quad (3)$$

куди не входять фізичні параметри моделі. Рівняння такого типу в [6] називають «універсальним».

2. Побудова наближених розв'язків інтегрального рівняння. Для цього скористаємось методом ітерацій, подавши (3) у вигляді співвідношення:

$$f_{n+1}(\tau) = \left(\tau - \int_0^{\tau} \int_0^{\tau_1} f_n(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Обмежившись трьома ітераціями одержуємо:

$$f_0(\tau) = 0; \quad f_1(\tau) = \tau^2; \quad f_2(\tau) = \tau^2 - \frac{\tau^5}{6} + \frac{\tau^8}{144};$$

$$f(\tau) \approx f_3(\tau) = \left(\tau - \frac{\tau^4}{12} + \frac{\tau^7}{252} - \frac{\tau^{10}}{12960} \right)^2. \quad (4)$$

При виборі кількості ітерацій врахували, що на етапі динамічного стискання тіл $\tau \in (0; \tau_c)$, де $\tau_c \approx 1,605098$.

Щоб отримати більш компактний наближений розв'язок, перетворимо ряд в (4) методом Шенкса [6]. За вказаним методом сума ряду пов'язана з сумою його n – членів S_n залежністю [8]:

$$S \approx S_n - \frac{a_n a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n},$$

в якій a_n і a_{n+1} – відповідно n – й і $(n+1)$ – й члени ряду.

Прийmemo:

$$S_n = \tau - \frac{\tau^4}{12}; \quad a_n = -\frac{\tau^4}{12}; \quad a_{n+1} = -\frac{\tau^7}{252}.$$

Тоді:

$$S \approx \tau - \frac{\tau^4}{12} + \frac{\tau^7}{12(\tau^3 + 21)} = \tau - \frac{7\tau^4}{4(\tau^3 + 21)}.$$

Таким чином, (4) заміняємо на більш компактний вираз:

$$f(\tau) = \left[\tau - \frac{7\tau^4}{4(\tau^3 + 21)} \right]^2. \quad (5)$$

З'ясуємо похибки цього наближеного розв'язку. В роботі [9] показано, що максимуми сили удару і динамічного стискання становлять відповідно:

$$P_c = \left(\frac{3M}{2K} v_0^2 \right)^{2/3}; \quad x_c = \left(\frac{3M}{2K} K^2 v_0^2 \right)^{1/3} \quad (6)$$

і досягаються вони, коли:

$$\eta = \frac{v_0 t}{x_c} = I \approx 1,402182; \quad t = t_c = \frac{I \cdot x_c}{v_0}.$$

Використовуючи (2) і (6), одержуємо відношення:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left(\frac{2}{3} \right)^{2/3} \cdot f(\tau); \quad \frac{\tau}{\eta} = \left(\frac{3}{2} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

В роботі [9] встановлено, що:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \left[\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \right]^2, \quad (8)$$

де $\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right)$ – Атеб-синус. Таблиця його значень наведена в указаній публікації.

Із виразів (7) і (8) впливає формула апроксимації Атеб-синуса в першій чверті його періоду $\eta \in (0; I)$:

$$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \approx \left(\frac{2}{3} \right)^{1/3} \left[\tau - \frac{7\tau^4}{4(\tau^3 + 21)} \right]$$

або

$$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \approx \eta - \frac{1,75 \cdot \eta^4}{\eta^3 + 14}. \quad (9)$$

Для апроксимації Атеб-косинуса на вказаному проміжку одержуємо формулу:

$$\text{Ca} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right) \approx I - \eta - \frac{1,75(I - \eta)^4}{(I - \eta)^3 + 14}.$$

Для порівняння, в табл. 1 записано значення Атеб-синуса, обчислені за формулою (9), та запозичені з таблиці в [10].

Як бачимо, компактна формула (9) з досить високою точністю апроксимує значення Атеб-синуса в першій чверті його періоду.

Отже, зміни сили удару та зближення центрів мас тіл у часі на етапі стискання можна наближено розрахувати за формулами:

$$P(t) \approx \left(\frac{3M}{2K} v_0^2 \right)^{2/3} \cdot \left(\eta - \frac{1,75\eta^4}{\eta^3 + 14} \right)^2; \quad (10)$$

$$x(t) \approx \left(\frac{3}{2} MK^2 v_0^2 \right)^{1/3} \cdot \left(\eta - \frac{1,75\eta^4}{\eta^3 + 14} \right), \quad (11)$$

де $\eta = \frac{v_0 t}{x_c}$; $\eta \in (0; I)$.

При $\eta > I$ починається процес розтискання тіл. Він проходить на проміжку $\eta \in (I; 2I)$. Обчислення $P(t)$ і $x(t)$ теж можна проводити за формулами (10), (11), але в них треба замінити η на $2I - \eta$. Процес удару закінчується при $t = t_y = 2t_c$.

Таблиця 1. Наближені та точні значення Атеб-синуса

η	$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right)$		η	$\text{Sa} \left(2, 1, \frac{3}{2} \eta \right)$	
	формула (9)	таблиця в [10]		формула (9)	таблиця в [10]
0,0	0,0000	0,0000	0,8	0,7506	0,7506
0,2	0,1998	0,1998	1,0	0,8833	0,8834
0,4	0,3968	0,3968	1,2	0,9693	0,9697
0,6	0,5840	0,5840	I	0,9985	1,0000

Зазначимо, що при моделюванні процесу удару, крім (9), можна використовувати й інші варіанти апроксимації Атеб-функцій [11].

Приклад. Використовуючи виведені формули, проведемо розрахунок параметрів удару сталевого конуса масою $m_1 = 0,8$ кг і кутом розкриття $2\gamma = 140^\circ$ з початковою швидкістю $v_0 = 5$ м/с по нерухомому гумовому півпростору ($m_2 = \infty$). Для вказаних матеріалів тіл: $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $\mu_1 = 0,25$; $E_2 = 5 \cdot 10^6$ Па, $\mu_2 = 0,5$. При таких вхідних даних: $Q_1 + Q_2 = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Па $^{-1}$; $K = 2,92845 \cdot 10^{-4}$ Па $^{-1/2}$. Обчислені: $P_c \approx 2189,3856$ Па; $x_c \approx 0,013702$ м; $t_y = 2t_c = 0,007685$ с. Знайдені по формулі (11) відношення $x(t)/x_c$ для різних t записано в табл. 2.

Для порівняння, тут також вказано відношення, одержані чисельним інтегруванням диференціального рівняння:

$$\frac{d^2 x}{d\eta^2} = -\frac{1}{M} \left(\frac{x_c}{K v_0} \right)^2 x^2 = -109,46173 x^2, \quad (12)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = 0, \quad \left. \frac{dx}{d\eta} \right|_{\eta=0} = x_c = 0,013702 \text{ м.}$$

Таблиця 2. Відношення $x(t)/x_c$

η	$x(t)/x_c$		η	$x(t)/x_c$	
	форм. (11)	чисел. інтегр.		форм. (11)	чисел. інтегр.
0,1	0,1000	0,1000	1,1	0,9329	0,9330
0,3	0,2990	0,2989	1,3	0,9914	0,9921
0,5	0,4923	0,4922	1,4022	0,9985	1,0000
0,7	0,6707	0,6706	1,5044	0,9914	0,9921
0,9	0,8220	0,8220	1,7044	0,9329	0,9330

Як бачимо, наближений аналітичний розв'язок дає високоточні результати.

В табл. 3 вказано обчислені двома способами відношення $P(t)/P_c$ при різних t .

Таблиця 3. Відношення $P(t)/P_c$

η	$P(t)/P_c$		η	$P(t)/P_c$	
	форм. (10)	чисел. інтегр.		форм. (10)	чисел. інтегр.
0,2	0,0399	0,0399	1,0	0,7802	0,7802
0,4	0,1575	0,1577	1,2	0,9395	0,9401
0,6	0,3411	0,3410	1,4022	0,9970	1,0000
0,8	0,5634	0,5633	1,6044	0,9395	0,9401

Тут також записано відношення $P(t)/P_c$, одержані числовим інтегруванням рівняння (12) на комп'ютері, з урахуванням того, що:

$$\frac{P(t)}{P_c} = \frac{x^2(t)}{x_c^2}.$$

Маємо гарну узгодженість результатів, одержаних двома способами, і в табл. 3, що підтверджує вірогідність наближених аналітичних розв'язків (10), (11). Їх похибка менша 0,5 %.

Перспективи подальших досліджень. Викладений спосіб побудови наближених розв'язків інтегральних рівнянь сили удару незакріплених тіл є досить універсальним. Він може бути використаним для теоретичного дослідження удару тіл, обмежених поверхнями високих порядків, що описують щільний контакт, а також поверхнями з сингулярними точками, для яких існують аналітичні розв'язки контактної задачі теорії пружності [7-10]. Задачі такого типу з використанням Атеб-функцій розглядали в [11-13].

Висновки. Складено інтегральне рівняння сили пружного удару та побудовано його наближений аналітичний розв'язок в елементарних функціях. Порівняльний аналіз підтвердив його вірогідність. Отримані з його використанням числові результати близькі до тих, що дає точний аналітичний розв'язок задачі в Атеб-функціях та чисельне інтегрування диференціального рівняння удару на комп'ютері. Одержані аналітичні результати

можна також використовувати для апроксимації періодичних Атеб-функцій, через які виражається точний розв'язок розглянутої задачі удару. Похибка апроксимацій менша одного відсотка.

Література:

1. Abrate S. Impact of composite structures. Cambridge : Cambr. Univ. Press, 1998. 306 p.
2. Smetankina N. V., Shupikov A. N., Sotrikhin S. Yu., Yareschenko V. G. Dynamic response of an elliptic plate to impact loading: Theory and experiment. *International journal of impact engineering*. 2007. V. 34. Is. 2. P. 264-276. doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.07.016.
3. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. Харьков : Миськдрук, 2011. 376 с.
4. Ольшанский В. П., Тищенко Л. Н., Ольшанский С. В. Колебания стержней и пластин при механическом ударе. Харьков : Миськдрук, 2012. 320 с.
5. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Атеб-синус у розв'язку задачі Герца про удар. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2018. № 3 (1279). С. 98-103.
6. Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар. Киев : Наукова думка, 1976. 319 с.
7. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. Москва-Ленинград : Гостехиздат, 1949. 272 с.
8. Ольшанський В. П. Порівняння наближених розв'язків інтегрального рівняння сили удару тіл в теорії Герца. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*. 2019. № 8 (1333). С. 40-45.
9. Ольшанський В. П. Аналітичний розв'язок задачі пружного удару конуса по півпростору. *Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Динаміка і міцність машин*. 2019. № 1. С. 40-45. doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187416.
10. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Рівняння удару пружних тіл, одне з яких конус. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2019. № 2 (93). С. 43-50. doi.org/10.37128/2306-8744-2019-2-7.
11. Ольшанський В. П., Ольшанський С. В. Про рух осцилятора зі степенною характеристикою пружності. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2017. № 3 (86). С. 34-40.
12. Olshanskiy V., Burlaka V., Slipchenko M. Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*. 2019. Vol. 5. No 2. P. 53-60. doi.org/10.23939/ujm-mems2019.02.053.
13. Ol'shanskii V., Spol'nik O., Slipchenko M., Znaidiuk V. Modeling the elastic impact of a body

with a special point at its surface. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. Vol. 1. No 7(97). P. 25-32. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.155854.

References:

1. Abrate, S. (1998) *Impact of composite structures*. Cambridge, Cambr. Univ. Press.
2. Smetankina, N.V., Shupikov, A.N., Sotrikhin, S.Yu. & Yareschenko, V.G. (2007) Dynamic response of an elliptic plate to impact loading: Theory and experiment. *International journal of impact engineering*. 34, 2, 264-276. doi.org/10.1016/j.ijimpeng.2005.07.016.
3. Smetankina, N.V. (2011) *Nestacionarnoe deformirovanie, termouprugost' i optimizacija mnogoslojnyh plastin i cilindricheskikh obolochek*. Kharkov, Miskdruk.
4. Olshanskiy, V.P., Tishchenko, L.N. & Olshanskiy S.V. (2012) *Kolebanija sterzhnej i plastin pri mehanicheskom udare*. Kharkov, Miskdruk.
5. Olshanskiy, V.P. & Olshanskiy, S.V. (2018) Ateb-sinus u rozv'jazku zadachi Gerca pro udar. *Visnik NTU «KhPI»*. Serija: *Matematichne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. 3 (1279), 98-103.
6. Kilchevskij, N.A. (1976) *Dinamicheskoe kontaktnoe szhatie tverdych tel. Udar*. Kiev, Naukova dumka.
7. Shtaerman, I.Ja. (1949) *Kontaktnaja zadacha teorii uprugosti*. Moskva-Leningrad, Gostehizdat.

8. Olshanskiy, V.P. (2019) Porivnannja nablyzhenyh rozv'jazkiv integralnogo rivnjannja syly udaru til v teorii Gerca. *Visnyk NTU «KhPI»*. Serija: *Matematychne modeljuvannja v tehnici ta tehnologijah*. 8 (1333), 40-45.

9. Olshanskiy, V.P. (2019) Analitychnyj rozv'jazok zadachi pruzhnogo udaru konusa po pivprostoru. *Visnyk NTU «KhPI»*. Serija: *Dynamika i micnist mashyn*. 1, 40-45. doi.org/10.20998/2078-9130.2019.1.187416.

10. Olshanskiy, V.P. & Olshanskiy, S.V. (2017) Rivnjannja udaru pruzhnyh til, odne z jakyh konus. *Vibracii v tehnici ta tehnologijah*. 2(93), 43-50. doi.org/10.37128/2306-8744-2019-2-7.

11. Olshanskiy, V.P. & Olshanskiy, S.V. (2017) *Pro ruh oscyljatora zi stepenevoju harakterystykoju pruzhnosti*. 3(86), 34-40.

12. Olshanskiy, V., Burlaka, V. & Slipchenko, M. (2019) Solution of the equation of force of impact of solids expressed by the Ateb-sine. *Ukrainian Journal of Mechanical Engineering and Materials Science*. 5, 2, 53-60. doi.org/10.23939/ujmms2019.02.053.

13. Ol'shanskii, V., Spol'nik, O., Slipchenko, M. & Znaidiuk, V. (2019) Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 1, 7(97), 25-32. doi.org/10.15587/1729-4061.2019.155854.

Аннотация

Интегральное уравнение удара упругого конуса о препятствие и его приближенное решение

В.П. Ольшанский, М.В. Слипченко, **О.И. Спольник**

Построено приближенное аналитическое решение интегрального уравнения удара с небольшой скоростью двух упругих тел, одно из которых конус вращения. Для этого использован метод последовательных приближений и формула Шенкса, которая в замкнутой форме приближенно выражает сумму степенного ряда. Полученные решения дают развертку во времени процесса удара и возможность вычисления максимума силы сжатия, максимума сближения центров масс тел и длительности удара. Изложенный способ построения приближенных решений интегральных уравнений силы удара незакрепленных тел является достаточно универсальным. Он может быть использован для теоретического исследования удара тел, ограниченных поверхностями высоких порядков, описывающих плотный контакт, а также поверхностями с сингулярными точками, для которых существуют аналитические решения контактной задачи теории упругости. При составлении интегрального уравнения силы удара задействована теория Г. Герца и решение осесимметричной контактной задачи теории упругости, полученное И.Я. Штаерманом. Показано, что построенные приближенные решения можно использовать и для аппроксимации тех периодических Ateb-функций, в первой четверти их периода, через которые выражается точное аналитическое решение этой задачи удара. Погрешности приближенных решений меньше 0,5 %. Это установлено сравнением числовых результатов, к которым они приводят, с результатами интегрирования дифференциального уравнения удара на компьютере. Приведено примеры расчетов, подтверждают достоверность полученных аналитических решений. Изложенная теория касается только малых скоростей удара, когда при динамическом взаимодействии тел не возникает большой области пластических деформаций. Появление малой области таких деформаций неминуемо в окрестности вершины конуса и при малых скоростях столкновения тел, но ее не учитываем в работе.

Ключевые слова: удар упругих тел, конус, теория Герца, интегральное уравнение, аналитическое решение, аппроксимация Ateb-функций.

Abstract**The integral equation of the impact of the elastic cone on obstacle and its approximate solution****V.P. Olshanskiy, M.V. Slipchenko, O.I. Spolnik**

An approximate analytical solution of the integral equation of impact with a low velocity of two elastic bodies, one of which is a cone of revolution, is constructed. For this, the method of successive approximations and the Shanks' formula are used, which in a closed form approximately expresses the sum of a power series. The solutions obtained provide a time sweep of the impact process and the possibility of calculating the maximum compression force, the maximum convergence of the centers of mass of bodies and the impact duration. The described method for constructing approximate solutions of the integral equations of the impact force of unsecured bodies is quite universal. It can be used for the theoretical study of the impact of bodies bounded by high-order surfaces describing tight contact, as well as surfaces with singular points, for which there are analytical solutions of the contact problem of the theory of elasticity. In compiling the integral equation of the impact force, the theory of H. Hertz and the solution of the axisymmetric contact problem of the theory of elasticity obtained by I.Ya. Shtaerman. It is shown that the constructed approximate solutions can also be used to approximate those periodic Ateb-functions, in the first quarter of their period, through which the exact analytical solution of this impact problem is expressed. The errors of approximate solutions are less than 0,5 %. This is established by comparing the numerical results to which they lead to the results of integrating the differential equation of impact on a computer. Examples of calculations are given, confirming the reliability of the analytical solutions obtained. The stated theory concerns only low impact velocities, when a large area of plastic deformations does not arise during the dynamic interaction of bodies. The appearance of a small region of such deformations is inevitable in the vicinity of the apex of the cone and at low velocities of collisions of bodies, but we do not take it into account in this work.

Keywords: *impact of elastic bodies, cone, Hertz theory, integral equation, analytical solution, approximation of Ateb-functions.*

Бібліографічне посилання/ Bibliography citation: Harvard

Olshanskiy, V. P., Slipchenko, M. V. and Spolnik, O. I. (2021) 'The integral equation of the impact of the elastic cone on obstacle and its approximate solution', *Engineering of nature management*, (1(19), pp. 57 - 62.

Подано до редакції / Received: 11.03.2021