Калінін Є.І.,
Романченко В.М.
Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка,
E-mail: kalininhntusg@gmail.ru

ОЦІНКА МІЦНОСТІ ПРИ ДІЇ ЛОКАЛЬНОГО НАВАНТАЖЕННЯ НА ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНУ БЕЗМОМЕНТНУ ОБОЛОНКУ

УДК 539.3

В сучасній теорії еластичного пневматика попередньо напружена безмоментна оболонка може розглядатися як одна з розрахункових моделей безкордової пневматичної шини. При цьому, одним з основних видів розрахунку шин є розрахунок її радіального обтиснення. В такій постановці й виникає задача оцінки дії локальних силових впливів на оболонку. Розглянуто напружений стан пневматичної безмоментної оболонки поблизу точки прикладення зосередженого нормального навантаження. В ході теоретичних досліджень отримано асимптотичний розв'язок, який рекомендується використовувати для виключення особливості при розрахунку безкордних шин на дію локального навантаження.

***Ключові слова**: безмоментна оболонка, безкордова шина, навантаження, коливання.*

Вступ. Попередньо напружена безмоментна оболонка є однією з можливих розрахункових моделей литої (безкордової) пневматичної шини. При розрахунку радіального обтиснення шини виникає задача про локальні силові впливи на оболонку.

Слід зазначити, що кордові і литі шини ведуть себе по-різному при радіальному стисненні. В кордових шинах дія місцевих навантажень поширюється уздовж ниток корду на значні відстані [1]. Це пояснюється тим, що жорсткість гуми значно менше жорсткості ниток, що ускладнює перерозподіл зусиль.

Литі шини майже ізотропні в початковому стані і мають слабку анізотропією після внутрішнього навантаження тиском повітря. Місцеві ефекти, які викликані дією зосереджених навантажень, тут швидко згасають.

Тому при розрахунку литих шин можна виділити напружено-деформований стан, що швидко змінюється, який не достатньо ефективно представляється рядами Фур'є і ускладнює чисельний розв'язок з огляду на необхідність згущення сітки.

В роботах [2 – 4] будується локально напружений стан моментної оболонки, яка піддається дії зосереджених сил.

Постановка проблеми. Метою статті є аналітичний аналіз функціонування еластичного пневматика як попередньо напруженої безмоментної оболонки під дією локального навантаження.

Результати дослідження. Нехай на оболонку, форму і несуча здатність якої підтримуються внутрішнім тиском p_0, діє додаткове нормальне навантаження p.

Будемо вважати, що напрямки головних початкових натягів (${}^0T_1 > 0$, ${}^0T_2 > 0$) і головних кривизн (k_1, k_1) оболонки збігаються.

Відомо [5], що розв'язок типу точкового крайового ефекту можна шукати для нескінченної області на основі рівнянь теорії пологих оболонок.

Рівняння рівноваги отримаємо із загальних рівнянь роботи [6], з огляду на лише головні члени:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial x_2}+\frac{\partial S}{\partial x_1}=0; \tag{1}$$

$$^{0}T_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+{}^{0}T_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-k_1T_1-k_2T_2=p,$$

де T_1, T_2, S – додаткові зусилля; x_1, x_2 – ортогональна система гауссових координат.

В лінеаризованих співвідношеннях пружності для додаткових сил $T_1=C_{11}\varepsilon_1+C_{12}\varepsilon_2$, $T_2=C_{21}\varepsilon_1+C_{22}\varepsilon_2$, $S=C_{33}\gamma$ коефіцієнти C_{ij} повинні задовольняти умові існування пружного потенціалу [7].

Наприклад, оболонка обертання після надувки стає ортотропною, і ця умова має вигляд – $^{0}T_1+C_{12}={}^{0}T_2+C_{21}$.

Якщо початкові деформації малі ($^{0}\varepsilon_1, {}^{0}\varepsilon_2<<1$), то співвідношення пружності можна прийняти в звичайному вигляді:

$$T_1=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1-\mu\varepsilon_2),$$

$$T_2=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2-\mu\varepsilon_1), \tag{2}$$

$$S=\frac{Eh}{2(1+\mu)}\gamma.$$

Використовуючи при обчисленні деформацій геометричні співвідношення теорії пологих оболонок [8], отримаємо рівняння рівноваги (1), які записані в переміщеннях:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+(\mu+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+(k_1+\mu k_2)\frac{\partial w}{\partial x_1}=0,$$

$$(\mu+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\nu\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x_2^2}+(k_2+\mu k_1)\frac{\partial w}{\partial x_2}=0, \tag{3}$$

$$-(k_1+\mu k_2)\frac{\partial u}{\partial x_1}-(k_2+\mu k_1)\frac{\partial \upsilon}{\partial x_2}+{}^{0}t_1\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}+$$
$$+{}^{0}t_2\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}-(k_1^2+2\mu k_1k_2+k_2^2)=\frac{p(1-\mu^2)}{Eh},$$

де $\nu=\frac{1-\mu}{2}$, $^{0}t_i=\frac{^{0}T_i(1-\mu^2)}{Eh}$.

Розглянемо дію на оболонку зосередженої сили $p=P\delta(x_1,x_2)$.

Двовимірне перетворення Фур'є

$$\bar{f}(\omega_1,\omega_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{i(\omega_1x_1+\omega_2x_2)}dx_1dx_2$$

приводить (1), (3) до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, вирішуючи яку, знайдемо:

$$\overline{T}_{1,2} = -\frac{P(1-\mu^2)}{2\pi}\frac{\omega_{2,1}^2(k_2\omega_1^2 + k_1\omega_2^2)}{\Delta},$$
$$\overline{S} = \frac{P(1-\mu^2)}{2\pi}\frac{\omega_{1,2}^2(k_2\omega_1^2 + k_1\omega_2^2)}{\Delta},$$
$$\overline{u} = \frac{P(1-\mu^2)}{2\pi Eh}\frac{i\omega_1\{(k_1+\mu k_2)\omega_1^2 + [(2+\mu)k_1 - k_2]\omega_2^2\}}{\Delta}, \tag{4}$$
$$\overline{v} = \frac{P(1-\mu^2)}{2\pi Eh}\frac{i\omega_2\{(k_2+\mu k_1)\omega_2^2 + [(2+\mu)k_2 - k_1]\omega_1^2\}}{\Delta},$$
$$\vec{w} = -\frac{P(1-\mu^2)}{2\pi Eh}\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}{\Delta},$$

де $\Delta = ({}^{\circ}t_1\omega_1^2 + {}^{\circ}t_2\omega_2^2)(\omega_1^2+\omega_2^2)^2 + (1-\mu^2)(k_2\omega_1^2 + k_1\omega_2^2)^2$.

Зворотне перетворення Фур'є

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\bar{f}(\omega_1,\omega_2)e^{-i(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2)}d\omega_1 d\omega_2$$

проілюструємо на прикладі отримання функції w. Використовуємо метод і результати роботи [4]. На підставі формули обернення

$$w = -\frac{P(1-\mu^2)}{2\pi Eh}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{(\omega_1^2+\omega_2^2)^2}{\Delta}\cos\omega_1 x_1 \cos\omega_2 x_2 d\omega_1 d\omega_2 \tag{5}$$

проведемо заміну змінних

$$\omega_1 = \alpha\cos\gamma,\ \omega_2 = \alpha c\sin\gamma,\ x_1 = r\cos\varphi,\ x_2 = r\cos\varphi$$

і використаємо розкладання Якобі [9]

$$\cos\omega_1 x_1 \cos_2 x_2 = \frac{1}{2}\{\cos[\alpha r\cos(\gamma+\varphi)] + \cos[\alpha r\cos(\gamma-\varphi)]\} = 2\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n j_{2n}(\alpha r)\cos 2n\gamma\cos 2n\varphi,$$

після чого отримаємо

$$w = -\frac{P}{\pi^{2\circ}T}\sum_{n=0}^{\infty}{}'(-1)^n\cos 2n\varphi\int_0^{\pi}\frac{\cos nydy}{1+\lambda_2\cos y}\int_0^{\infty}\frac{J_{2n}(\alpha r)\alpha d\alpha}{a^2+b^2}, \tag{6}$$

де символ $\sum_{n=0}^{\infty}{}'$ відрізняється від символу $\sum_{n=0}^{\infty}$ тим, що при $n=0$ вводиться коефіцієнт ½;

$J_{2\pi}(\alpha r)$ – функція Бесселя;

$$y = 2\gamma;$$
$${}^{\circ}T = \frac{1}{2}({}^{\circ}T_1 + {}^{\circ}T_2);$$
$$b = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{{}^{\circ}t}}k\frac{1-\lambda_1\cos y}{\sqrt{1+\lambda_2\cos y}},$$

де ${}^{\circ}t = \frac{1}{2}({}^{\circ}t_1 + {}^{\circ}t_2)$; $k = \frac{1}{2}(k_1+k_2)$; $\lambda_1 = \frac{k_1-k_2}{2k}$; $\lambda_2 = \frac{{}^{\circ}t_1 - {}^{\circ}t_2}{2{}^{\circ}t}$

Невласний інтеграл, що входить до виразу (6), розрахований в [4]:

$$\int_0^\infty \frac{J_{2n}(\alpha r)\alpha d\alpha}{a^2+b^2} = (-1)^n \Phi_{2n}(br);$$

$$\Phi_{2n}(br) = K_{2n}(br) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(2n-k-1)!}{k!}\left(\frac{br}{2}\right)^{-2n+2k}, \tag{7}$$

де $K_{2n}(br)$ – функція Макдональда.

Використовуючи вирази (6) та (7), отримаємо:

$$w = -\frac{P}{\pi^2 {}^\circ T}\sum_{n=0}^{\infty}{}' \cos 2n\varphi \int_0^\pi \frac{\Phi_{2n}(br)\cos ny dy}{1+\lambda_2 \cos y}. \tag{8}$$

В результаті аналогічних викладок отримуємо:

$$\begin{gathered}
\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = -\frac{P}{2\pi^2 {}^\circ T}\sqrt{\frac{{}^\circ t}{1-\mu^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2n-1)\varphi\int_0^\pi \frac{\Phi_{2n-1}(br)[(1+\mu)(1-\lambda_1\cos y)\pm}{\sqrt{1+\lambda_2\cos y(1-\lambda_1\cos y)}} \to \\
\to \frac{\pm 2\lambda_1]\cdot[\cos(n-1)y \pm \cos ny]dy}{1}, \\
T_{1,2} = -\frac{P(1-\mu^2)k}{2\pi^2 {}^\circ t}\sum_{n=0}^{\infty}\cos 2n\varphi\int_0^\pi \frac{\Phi_{2n}(br)\cos ny(1\pm\cos y)(1-\lambda_1\cos y)dy}{1+\lambda_2\cos y}, \\
S = \frac{P(1-\mu^2)k}{2\pi^{2\circ} t}\sum_{n=1}^{\infty}\sin 2n\varphi\int_0^\pi \frac{\Phi_{2n}(br)\sin ny \sin y(1-\lambda_1\cos y)dy}{1+\lambda_2\cos y}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Зауважимо, що напрямки переміщень u, v і зусиль T_1, T_2, S пов'язані з введеною первинною системою координат x_1, x_2.

В формулах (9)

$$\Phi_{2n-1}(br) = K_{2n-1}(br) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{(2n-2-k)!}{k!}\left(\frac{br}{2}\right)^{-2n+1+2k}, \tag{10}$$

причому верхні знаки відповідають u та T_1, а нижні – v та T_2. В нулі $\Phi_o(br) \equiv K_o(br)$ має логарифмічну особливість, а інші функції обмежені $\Phi_{2n}(0) = \frac{(-1)^n}{2n}$ та $\Phi_{2n-1}(0) = 0$.

Відповідно до цього логарифмічну особливість мають w, T_1, T_2. Для рівномірно натягнутої пологої сферичної оболонки ($\lambda_1 \equiv \lambda_2 \equiv 0$) інтеграли (8), (9) легко обчислюються. Переміщення і зусилля вдається представити в кінцевому вигляді

$$\begin{gathered}
w = -\frac{P}{2\pi {}^\circ T}K_o(\rho) \quad \begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = -\frac{P}{2\pi {}^\circ T}\sqrt{\frac{{}^\circ t(1+\mu)}{1-\mu}}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varphi[K_1(\rho)-\rho^{-1}], \\
T_{1,2} = -\frac{P(1-\mu^2)k}{4\pi {}^\circ t}\{K_o(\rho) \pm \cos 2\varphi[K_2(\rho)-2\rho^{-2}]\}, \\
S = -\frac{P(1-\mu^2)k}{4\pi {}^\circ t}\sin 2\varphi[K_2(\rho)-2\rho^{-2}].
\end{gathered} \tag{11}$$

де $\rho = \sqrt{\frac{1-\mu^2}{{}^\circ t}}kr$.

Порівняння (8), (9) з (11) вказує, що вищі гармоніки, які відсутні в формулах для сферичної оболонки, характеризують відхилення напруженого стану довільної оболонки від напруженого стану оболонки сферичної.

Висновки. Розрахунки свідчать про те, що вплив різниці кривизн і натягів позначається більшою мірою на достатньому видаленні від полюса. В рядах (8), (9) це проявляється в деякому зростанні відносного вкладу вищих гармонік з ростом ρ . Однак в обмеженій ділянці полюса, де розв'язок (8), (9) правильно описує напружений стан оболонки [5], збіжність рядів майже не погіршується. Збіжність розв'язання є хорошою завдяки наявності коливальних множників $\cos ny$ і $\sin ny$, що входять в подінтегральні вирази (8), (9).

Обмеженість викладеної вище теорії обумовлена двома причинами. При її побудові, по-перше, використовувалися наближені розв'язки (3) з коефіцієнтами, які «заморожені» в точці прикладання сили; по-друге, не враховувалися граничні умови. Для циліндричної оболонки рівняння (3) є точними і перша причина усувається. Виправити другий недолік можна, додаючи розв'язок однорідної системи (3), який спільно з (8), (9) буде задовольняти граничним умовам.

Література:

1. Бидерман В.Л. Действие нагрузок локального типа на цилиндрическую сетчатую, предварительно напряженную оболочку. / В.Л. Бидерман, И.К. Николаев // Труды VI Конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966.
2. Чернышев Г.Н. Асимптотические методы в теории оболочек (сосредоточенные нагрузки) // Труды VI Конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1966.
3. Lukasiewicz S.A. The Solution for Concentrated Loads of Shells by Means of Thompson Functions. «ZAMM», 1968, Bd. 48, H 4.
4. Величко П.М. О действии сосредоточенных сил и моментов на оболочку положительной кривизны / П.М. Величко, В.П. Шевченко // Труды ММТ. – 1969. – № 2.
5. Чернышев Г.Н. О контактных задачах в теории оболочек // Труды VII Конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1970.
6. Балабух Л.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения / Л.И. Балабух, В.И. Усюкин // Труды VIII Конференции по теории оболочек и пластин. – М.: Наука, 1973.
7. Maurice A. Biot, Mechanics of Incremental Deformations. «Iohn Wiley & Sons». Ins., New-York-London-Sydney, 1965.
8. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – Л.:Судпромгиз, 1962.
9. Бейтман Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтман, А. Эрдейн – М.: Наука, 1974.

Summary

Y. Kalinin, V. Romanchenko. Assessment of strength of local load prestressed moment free shell

In the modern theory of elastic pneumatic previously tense moment free shell can be seen as one of the computer models pnevmatyc tire. Thus, one of the main types of payments is to calculate its radial compression. In such a setting and the challenge assess the actions of local power effects on shell.

We consider the stress state air moment free shell around a point of the concentrated normal load. During the theoretical studies obtained asymptotic solution that is recommended to exclude when calculating features cordless tires on the effect of local load.

The higher harmonics that are not in the formulas for a spherical shell, characterizing deviation arbitrary shell stress state of stress state of spherical shell.

Calculations indicate that the impact of the difference curves and tension affects more at a sufficient distance from the pole. At the series is evident in some growth relative contribution of higher harmonics with increasing curvature. However, in a limited area of the pole, where interchanges series correctly describes the stress state of the shell, the convergence of the series is almost worse. Convergence solution is good thanks to the vibrational factors included in podintehralni expressions.

Key words: *moment free shell, non-kord tire, load, oscillation*

References

1. Biderman V.L. Deystvie nagruzok lokalnogo tipa na tsilindricheskuyu setchatuyu, predvaritelno napryazhennuyu obolochku. / V.L. Biderman, I.K. Nikolaev // Trudyi VI Konferentsii po teorii obolochek i plastin. – M.: Nauka, 1966.
2. Chernyishev G.N. Asimptoticheskie metodyi v teorii obolochek (sosredotochennyie nagruzki) // Trudyi VI Konferentsii po teorii obolochek i plastin. – M.: Nauka, 1966.
3. Lukasiewicz S.A. The Solution for Concentrated Loads of Shells by Means of Thompson Functions. «ZAMM», 1968, Bd. 48, H 4.
4. Velichko P.M. O deystvii sosredotochennyih sil i momentov na obolochku polozhitelnoy kriviznyi / P.M. Velichko, V.P. Shevchenko // Trudyi MMT. – 1969. – # 2.
5. Chernyishev G.N. O kontaktnyih zadachah v teorii obolochek // Trudyi VII Konferentsii po teorii obolochek i plastin. – M.: Nauka, 1970.
6. Balabuh L.I. Priblizhennaya teoriya myagkih obolochek vrascheniya / L.I. Balabuh, V.I. Usyukin // Trudyi VIII Konferentsii po teorii obolochek i plastin. – M.: Nauka, 1973.
7. Maurice A. Biot, Mechanics of Incremental Deformations. «Iohn Wiley & Sons». Ins., New-York-London-Sydney, 1965.
8. Novozhilov V.V. Teoriya tonkih obolochek. – L.:Sudpromgiz, 1962.
9. Beytman G. Vyisshie transtsendentnyie funktsii / G. Beytman, A. Erdeyn – M.: Nauka, 1974.