УДК 539.3

М.С. Синєкоп, д-р техн. наук, проф.
Л.О. Пархоменко, ст. викл.

ВЛАСНІ КОЛИВАННЯ ЦИЛІНДРА ІЗ ЖОРСТКИМ ЯДРОМ

Розглянуто задачу теорії пружності про розрахунок власних коливань пружного циліндра скінченної довжини із жорстким порожнистим ядром у формі кулі. Її розв'язання здійснюється сумісним застосуванням методу R-функцій і варіаційного, що дозволяє звести вихідну задачу до задачі на власні значення.

Рассматривается задача теории упругости о расчете собственных колебаний упругого цилиндра конечной длины с жестким полым ядром в форме шара. Ее решение осуществляется совместным использованием метода R-функций и вариационного, что позволяет свести исходную задачу к задаче на собственные значения.

The elasticity theory problem of the calculation of free vibrations for an elastic cylinder of finite length with the hard hollow globular kernal is considered. Combined using R-function method and variational method for solving problem is proposed, at that the original problem is reduced to the eigenvalue problem.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Циліндр скінченної довжини широко використовується в машинобудуванні, а також часто зустрічається в конструкціях двигунів та енергетичному устаткуванні. Збільшення навантаження на такі деталі зумовлює необхідність дослідження їх власних коливань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача про розрахунок коливань циліндра класичної форми розглянута в [1]. Відхилення геометрії циліндра від класичної потребує використання наближених методів, зокрема – методу скінченних елементів [2].

Мета та завдання статті. У цій роботі пропонується наближений метод розрахунку усталених коливань циліндра скінченної довжини із жорстким порожнистим ядром у формі кулі шляхом сумісного використання методу R-функцій і варіаційного.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай Ω – круговий циліндр з межею $\partial\Omega$ радіуса R і висоти h із жорстким ядром у формі кулі радіуса R_0, що розглядається в циліндричній системі координат Orz (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Досліджується випадок відсутності масових і поверхневих сил. Рух пружного тіла визначається векторним рівнянням [3]

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,U - \mu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,U = \rho\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

де $U(t,r,z)$ – вектор зміщень; λ, μ – сталі Ламе; ρ – густина матеріалу.

Припускаємо періодичність коливальних процесів у часі та вважаємо, що

$$U(t,r,z) = e^{-i\gamma t}\cdot u(r,z); \;\; u(r,z) = \begin{pmatrix} u_r(r,z) \\ u_z(r,z) \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

де γ – кругова частота процесу.

Позначимо через β відношення швидкості розповсюдження поперечних хвиль c_2 до швидкості розповсюдження повздовжніх хвиль c_1 в нескінченному пружному середовищі, тобто $\beta = c_2 / c_1$, при цьому $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $c_2^2 = \mu/\rho$.

Ураховуючи співвідношення (2), рівняння (1) в безрозмірних величинах набуває вигляду

$$1/\beta^2\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u = -\gamma^2 u. \qquad (3)$$

Нехай $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, де $\partial\Omega_1$ – жорстке ядро циліндра, а на ділянці $\partial\Omega_2$ задані нульові нормальне σ_ν та дотичне τ_ν напруження:

$$u = 0,\; (r,z) \in \partial\Omega_1;$$

$$\sigma_\nu = 0;\; \tau_\nu = 0,\; (r,z) \in \partial\Omega_2. \qquad (4)$$

Рівняння (3) можна переписати в операторному вигляді як

$$Au = ku, \qquad (5)$$

де

$$k = \gamma^2;\;\; Au = -\left(1/\beta^2\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,u - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,u\right). \qquad (6)$$

Таким чином, дослідження коливань тіла, що розглядається, зводиться до задачі на власні значення (5) за умов (4).

Для розв’язання отриманої задачі застосуємо варіаційний метод. Знаходження мінімального власного значення оператора A, визначеного рівністю (6), еквівалентно задачі про знаходження мінімуму функціонала енергії [1]

$$E(u)=\int_{\Omega}\left\{\frac{1-2\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\right.$$

$$\left.+2\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{u_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right)+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right\}\mathrm{d}\Omega \quad (7)$$

за умови

$$\int_{\Omega}\left(u_r^{\,2}+u_z^{\,2}\right)\mathrm{d}\Omega=1. \quad (8)$$

Згідно з методом R-функцій [4] наближений розв’язок задачі (7–8), що відповідає крайовим умовам (4), будемо шукати у вигляді:

$$u_r=\omega_1\Phi_1-\omega D_1(\omega_1\Phi_1)+2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1(\omega_1\Phi_1)-$$

$$-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\omega_1\Phi_1}{r}+\omega\left[\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_1\Phi_2);$$

$$u_z=\omega_1\Phi_2-\omega D_1(\omega_1\Phi_2)-2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1(\omega_1\Phi_2)-$$

$$-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\omega_1\Phi_1}{r}+\omega\left[(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_1\Phi_1). \quad (9)$$

Тут:

1. Функції $\omega_1(r,z)$, $\omega_2(r,z)$, $\omega(r,z)\in C^1(\Omega)$, побудовані за допомогою апарата R-функцій, є лівими частинами нормалізованих до першого порядку рівнянь меж $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ та $\partial\Omega$ відповідних областей [4] та мають такі властивості:

а) $\omega_1,\omega_2,\omega>0$, $(r,z)\in\Omega$;

б) $\omega_1\big|_{\partial\Omega_1}=0$, $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_1}=-1$; $\omega_2\big|_{\partial\Omega_2}=0$, $\left.\frac{\partial\omega_2}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_2}=-1$; $\omega\big|_{\partial\Omega}=0$; $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=-1$.

2. Оператори D_1 і T_1 визначаються рівностями

$$D_1 g = \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\,; \quad T_1 g = -\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z}\,.$$

3. Функції $\Phi_i(r,z)$ $(i=1,2)$ є довільними. За будь-якого їх вибору крайові умови (4) виконуються точно. У чисельній реалізації структур розв'язку (9) функції Φ_i подаються у вигляді розвинення за елементами деякої повної системи функцій (поліномів Чебишева, сплайнів та ін.):

$$\Phi_1(r,z) = \sum_{m=1}^{n_1} C_{1,m}\varphi_m^{(1)}(r,z)\,; \quad \Phi_2(r,z) = \sum_{m=1}^{n_2} C_{2,m}\varphi_m^{(2)}(r,z)\,. \tag{10}$$

Підставивши (10) у формули (9), надамо наближений розв'язок задачі (7–8) у вигляді:

$$u_{rn}(r,z) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{ri}(r,z)\,; \quad u_{zn}(r,z) = \sum_{i=1}^{n} C_i \Psi_{zi}(r,z)\,, \tag{11}$$

де $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}\,, & i \le n_1 \\ C_{2,i}\,, & n_1 < i \le n \end{cases}$; $\Psi_{ri}(r,z)$, $\Psi_{zi}(r,z)$ $(i=\overline{1,n})$ – деякі функції, що визначаються структурами (9).

Мінімізуючи функціонал (7) на множині функцій (11), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left(a_{ij} - k\cdot b_{ij}\right) = 0 \quad (j=\overline{1,n}), \tag{12}$$

де

$$a_{ij} = \int_\Omega \left\{ \frac{1-2\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial\Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}}{r} + \frac{\partial\Psi_{zi}}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial\Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{\partial\Psi_{zj}}{\partial z}\right) + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{\partial\Psi_{ri}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}\Psi_{rj}}{r^2} + \frac{\partial\Psi_{zi}}{\partial z}\frac{\partial\Psi_{zj}}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial\Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_{zi}}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial\Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_{zj}}{\partial r}\right)\right\} d\Omega\,;$$

$$b_{ij} = \int_{\Omega} (\Psi_{ri}\Psi_{rj} + \Psi_{zi}\Psi_{zj}) \, d\Omega; \; i, j = \overline{1, n}. \qquad (13)$$

Перші n власних значень $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ задачі (5) визначаються рівнянням, що випливає із системи (12)

$$\det(A - kB) = 0,$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Коефіцієнти C_i апроксимуючих розвинень (11) визначаються для кожного власного значення $k = k_i$ ($i = \overline{1, n}$) як розв'язки системи лінійних рівнянь (12) за умови (8). Вони визначають власні форми задачі (7–8).

Чисельні результати. Отримаємо наближені розв'язки задачі про власні коливання пружного кругового циліндра із жорстким порожнистим ядром у формі кулі за граничних умов (4). Для побудови структур (9) наближених розв'язків введемо функції

$$\omega_1(r,z) = \frac{1}{2R_0}(r^2 + z^2 - R_0^{\,2}); \; \omega_2(r,z) = \frac{1}{h}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2\right);$$

$$\omega_3(r,z) = \frac{1}{2R}(R^2 - r^2); \; \omega(r,z) = \omega_3 \wedge_0 \omega_2 \wedge_0 \omega_1,$$

де функція $\omega(r,z)$ визначає рівняння межі циліндра $\omega(r,z) = 0$, $(r,z) \in \partial\Omega$. Тут символом «$\wedge_0$» позначено операцію R_0–кон'юнкції [4]

$$x \wedge_0 y = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

У розвиненнях (10) покладаємо

$$\{\varphi_m^{(1)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1} z^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty},$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1} r^{2(m-k-1)}, k = \overline{0, m-1}\}_{m=1}^{\infty}.$$

Інтеграли (13) обчислювались наближено за допомогою квадратурних формул Гаусса. Ураховуючи симетрію, обчислення виконувались за 1/4 частиною меридіанного перетину циліндра. З метою оцінки точності результатів розрахунки проводились із різним числом координатних функцій.

У таблиці наведено перші чотири власних значення, що знайдені за різним степенем n апроксимуючого полінома. Для обчислень покладено $R = 2$, $h = 4$, $R_0 = 1$, $\beta^2 = 1/4$.

Таблиця – **Розв'язок задачі на власні значення для кругового циліндра із жорстким ядром**

Власне значення	k_1	k_2	k_3	k_4
$n = 8$	1,974015	5,000186	5,788582	11,793960
$n = 10$	1,936634	4,821330	5,593235	11,107938

На рисунку показано власні форми, що відповідають першим чотирьом власним значенням, що отримані для циліндра із жорстким порожнистим ядром.

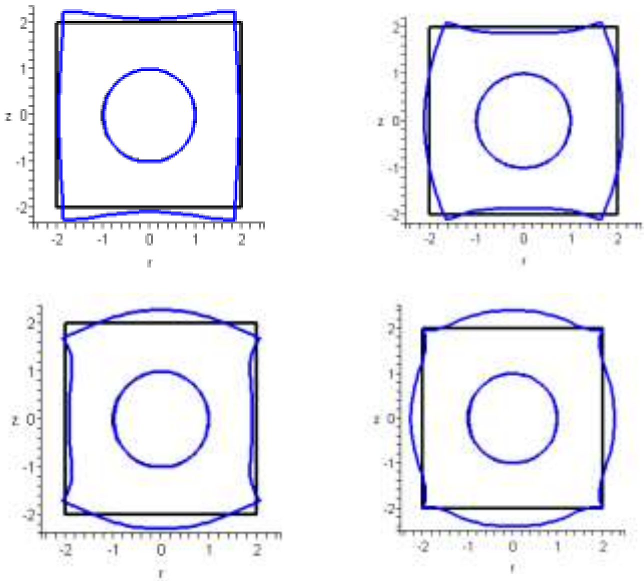

Рисунок – Власні форми коливання прямого кругового циліндра із жорстким ядром

Висновки. Розроблено алгоритм для розрахунку власних коливань циліндра із жорстким порожнистим ядром у формі кулі. Одержано власні значення та власні форми для циліндрів із вільною від навантажень поверхнею. Отримані результати дають змогу досліджувати вплив жорсткого ядра на власні форми коливань циліндра.

Список літератури

1. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах [Текст] / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко.– К. : Наук. думка, 1981.– 284 с.

2. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин.– М. : Наука, 1970.– 512 с.

3. Чирков, А. Ю. Применение смешанных вариационных формулировок МКЭ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел [Текст] / А. Ю. Чирков // Проблемы прочности. – 2008. – № 2. – С. 121–140.

4. Рвачев, В. Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности [Текст] / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекоп.– К. : Наук. думка, 1990. – 216 с.

Отримано 1.10.2010. ХДУХТ, Харків.