



**Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ**

**Факультет економічних відносин та фінансів
Кафедра економіки та бізнесу**

О.Д. Тімченко

ЕКОНОМЕТРИКА

**Методичні вказівки та завдання
до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності 051 Економіка
292 Міжнародні економічні відносини
071 Облік і оподаткування
072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок**

Харків

2024

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет економічних відносин та фінансів
Кафедра економіки та бізнесу

О.Д. Тімченко

ЕКОНОМЕТРИКА

**Методичні вказівки та завдання
до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності 051 Економіка
292 Міжнародні економічні відносини
071 Облік і оподаткування
072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок**

Затверджено рішенням науково –
методичної комісії факультету
економічних відносин та фінансів
Протокол № 1 від 25.09.2024 р.

Харків
2024

УДК 330.43(071)

Схвалено
на засіданні кафедри економіки та бізнесу,
протокол № 2 від 02.09.2024 р.

Рецензенти:

Т.О. Ставерська, кандидат економічних наук, доцент, завідувач кафедри фінансів, банківської справи та страхування Державного біотехнологічного університету

Н.Б. Кащена, доктор економічних наук, професор, завідувач кафедри обліку, аудиту та оподаткування Державного біотехнологічного університету

Економетрика: методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 051 Економіка, 292 Міжнародні економічні відносини, 071 Облік і оподаткування, 072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок / укладач: О.Д. Тімченко; ДБТУ.- Харків:, 2024. - 73 с.

У методичних вказівках на основі освітньо-професійних програм з підготовки бакалаврів розкрито методику для виконання лабораторних робіт з дисципліни «Економетрика».

Метою лабораторної роботи є закріплення та поглиблення теоретичних знань, набутих студентом у процесі вивчення курсу, виробленні умінь самостійно працювати з навчальною, спеціальною літературою і статистичними матеріалами, робити узагальнення та висновки.

Під час виконання лабораторних робіт здобувач досліджує конкретний економічний процес формалізований на основі математичних змінних, систематизує основні тенденції та формулює висновки щодо напрямків розвитку економіки у динаміці.

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт включають опис лабораторних робіт з дисципліни «Економетрика», включаючи теоретичний матеріал, рекомендації по виконанню лабораторних робіт, необхідні статистичні таблиці.

УДК 330.43(071)

Відповідальний за випуск: О.Д. Тімченко, доц. кафедри економіки та бізнесу

© Тімченко

О.Д., 2024

ЗМІСТ

ВСТУП	5
ПРОСТА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ ТА КОРЕЛЯЦІЯ В ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ	6
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 1	
Контрольні запитання	
МНОЖИННА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ ТА КОРЕЛЯЦІЯ	12
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 2	
Контрольні запитання	
НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ	18
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 3	
Контрольні запитання	
МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ	23
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 4	
Контрольні запитання	
ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ	28
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 5	
Контрольні запитання	
АВТОКОРЕЛЯЦІЯ В ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЯХ	33
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 6	
Контрольні запитання	
ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ ОДНОЧАСНИХ СТРУКТУРНИХ РІВНЯНЬ	40
Мета роботи та методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів	
Порядок виконання лабораторної роботи № 7	
Контрольні запитання	
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА	46
ДОДАТКИ	47

ВСТУП

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт призначені для формування у здобувачів вищої освіти практичних навичок в області побудови економетричних моделей і застосування економетричних методів дослідження.

Методичні вказівки з виконання лабораторних робіт складаються зі вступу, сьоми лабораторних робіт з описанням мети роботи, вказівок з організації самостійної роботи здобувачів, порядку виконання лабораторної роботи, контрольних запитань, додатків і списку рекомендованої літератури.

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт включають основні теми дисципліни «Економетрика».

Опис кожної лабораторної роботи включає:

- короткий виклад теорії;
- завдання до лабораторної роботи;
- контрольні запитання до лабораторної роботи.

Методичні вказівки та завдання до виконання лабораторних робіт доповнені додатками, які допомагають здобувачам виявляти критеріальні характеристики такі як F- критерій Фішера, t-критерій Стюдента, критичні значення d_N і d_L та інші.

1 ПРОСТА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ ТА КОРЕЛЯЦІЯ В ЕКОНОМЕТРИЧНИХ ДОСЛІДЖЕННЯХ

1.1 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL знайти оцінки парної лінійної регресії за методом найменших квадратів.

1.2 Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

Об'єктами дослідження стохастичної залежності соціально-економічних процесів можуть бути різні статистичні показники. *Статистичний показник* — це узагальнена характеристика певної властивості сукупності, групи. До статистичних показників в економіці можна віднести: обсяг реалізованої продукції, собівартість продукції, прибуток підприємства, галузі та ін. На макроекономічному рівні показниками можуть виступати: валовий внутрішній продукт, суспільний продукт та інше.

Зв'язок між різними явищами в економіці складний і різноманітний. На рівень розвитку одного показника можуть впливати багато факторів, рівень впливу яких різний. Ці закономірності потрібно враховувати під час планування, прогнозування і проведення економічного аналізу. Для вивчення форми зв'язку між показником і факторами на основі статистичних даних використовується регресійний аналіз.

Серед парних регресій найбільш поширеною, вивченою й простою в практиці моделювання є парна лінійна регресія. *Парною лінійною регресією* Y на X називається одностороння стохастична лінійна залежність між випадковими величинами показника Y і фактора X , які знаходяться в причинно-наслідкових відношеннях, причому зміна фактора викликає зміну показника. Слід відрізнити стохастичну залежність від функціональної. При стохастичній залежності одному значенню фактора може відповідати декілька значень показника. При функціональній залежності одному значенню аргументу відповідає лише одне значення функції. Між аргументом і функцією існує взаємооднозначна відповідність.

Розглянемо модель лінійної регресії. Припустимо, що маємо результати n пар незалежних спостережень, зображених у вигляді множини точок у декартовій системі координат. Припустимо гіпотезу, що між показником Y і фактором X існує стохастична лінійна залежність. Суть задачі полягає в тому, щоб у декартовій системі координат знайти згладжувальну лінію, яка “найкращим” чином проходить через задану множину точок.

Найпоширенішим методом при розв'язанні подібних задач є метод найменших квадратів (МНК). Основоположниками методу найменших квадратів є К. Гаусс і П. Лаплас.

Зв'язок між показником (регресантом, відгуком) Y і фактором

(регресором, факторною ознакою) X з урахування можливих відхилень запишемо у вигляді

$$Y = \alpha X + \beta + l,$$

де α і β – невідомі параметри регресії;

l – випадкова змінна, що характеризує відхилення паралельно осі OY спостережуваних точок від лінії регресії.

Таким чином, показник Y зображується у вигляді систематичної складової $\alpha X + \beta$ і випадкової величини l . Залежність $\hat{Y} = \alpha X + \beta$, яка характеризує середнє значення показника Y для даного значення фактора X , називається регресією. Можемо сказати інакше. Регресія характеризує тенденцію зміни показника, зумовлену впливом зміни фактора. Залежність $Y = \alpha X + \beta + l$ характеризує індивідуальне значення показника Y з урахуванням можливих відхилень від середніх значень.

Справжні значення параметрів обчислити не можна, оскільки ми маємо обмежене число спостережень, тому здобуті розрахункові значення параметрів α і β є статистичними оцінками справжніх параметрів α і β . Позначимо оцінки параметрів відповідно через a і b . Тоді рівняння парної регресії $\hat{Y} = aX + b$ (рис.1.1) буде оцінкою моделі $Y = \alpha X + \beta + l$.

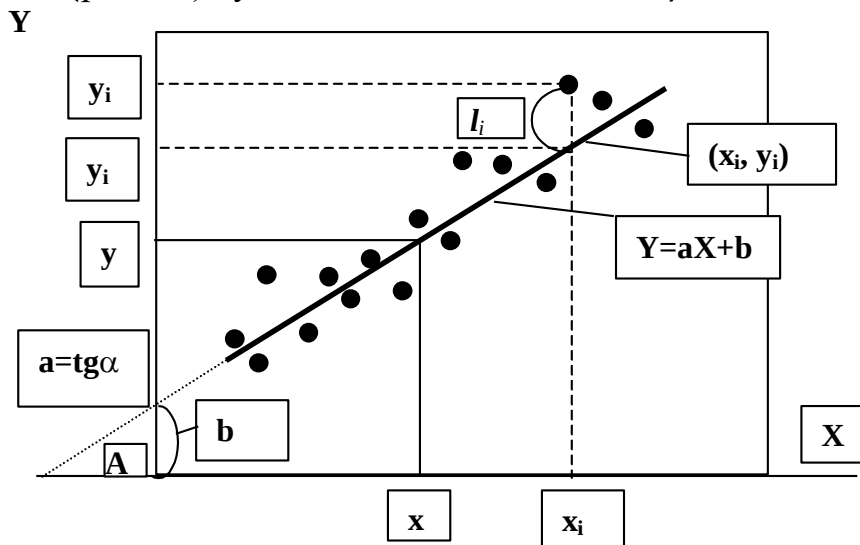


Рисунок 1.1 – Парна лінійна регресія.

Розглянемо різницю

$$y_i - \tilde{y}_i, \quad (i=1,n),$$

де y_i – фактичні,

$\tilde{y}_i$ – розрахункові значення показника;

l – відхилення спостережуваної точки (x_i, y_i) від точки $(x_i, \tilde{y}_i)$ згладжуваної кривої.

МНК для парної лінійної регресії полягає в підборі таких оцінок параметрів регресії a і b , для яких сума квадратів відхилень спостережуваних значень показника від згладжувальних буде мінімальною. Сума квадратів

відхилень має вигляд

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n l_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2. \quad (1.1)$$

Оцінки параметрів a і b лінії регресії $Y=aX+b$ мають бути підібрані методом найменших квадратів так, щоб функціонал $Q(a, b)$ був мінімальним, тобто

$$Q(a, b) = \sum_{i=1}^n l_i^2 \Rightarrow \min. \quad (1.2)$$

Необхідною умовою мінімуму цього функціонала є рівність нулю частинних похідних цього функціонала по a і b .

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(a, b)}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \frac{\partial Q(a, b)}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}. \quad (1.3)$$

Розкриємо дужки і дістанемо нормальну форму рівняння

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + n \cdot b = \sum_{i=1}^n y_i \end{cases}. \quad (1.4)$$

Система нормальних рівнянь має єдиний розв'язок (єдину критичну точку)

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left[\sum_{i=1}^n x_i \right]^2};$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - a \sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$
(1.5)

Кореляційний момент (коваріація) - це статистична характеристика системи випадкових величин, яка описує не лише зв'язок між випадковими величинами X і Y , а й їх розсіювання.

$$\text{cov}(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}. \quad (1.6)$$

Для визначення лише зв'язку між величинами вводиться коефіцієнт кореляції

$$r(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma[x] \cdot \sigma[y]} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (1.7)$$

Коефіцієнт кореляції характеризує ступінь щільності лінійної залежності між випадковими величинами (X, Y) і змінюється в межах від -1 до 1 , причому: якщо $r(x, y) > 0$, то між випадковими величинами X і Y існує пряма залежність, якщо $r(x, y) < 0$, то між цими випадковими величинами існує обернена залежність.

Параметр a має такий же знак, що й коефіцієнт кореляції. З математики відомо, якщо $a > 0$, то між величинами X та Y існує прямий зв'язок, тобто якщо зростає (спадає) чинник X , то відповідно зростає (спадає) показник Y . Якщо $a < 0$ ($r[X, Y] < 0$), то між і величинами X та Y існує зворотній зв'язок, тобто якщо зростає (спадає) чинник X , то спадає (зростає) показник Y , що потрібно було довести.

Вибірковий коефіцієнт кореляції, здобутий за вибірковими даними, є точковою оцінкою коефіцієнта кореляції і, свою чергу, є випадковою величиною. Тому доцільно зробити перевірку гіпотези про відсутність кореляційного зв'язку. Для цього перевіряється нульова гіпотеза $H_0: r[X, Y] = 0$ і альтернативна гіпотеза $H_1: r[X, Y] \neq 0$.

Припускаємо, що двовимірний випадковий вектор розподілений за нормальним законом. Для вибірки обчислюється статистика

$$t = \frac{r(x, y)}{\sigma_r} = \frac{r(x, y) \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2(x, y)}}, \quad (1.8)$$

яка має розподіл Ст'юдента з $k = n - 2$ ступенями вільності.

Для задані ймовірності p і k ступенів вільності знаходять табличне значення $t_{p,k}$ -статистики. Якщо $t_{расч} \geq t_{p,k}$, то із заданою надійністю p гіпотезу про відсутність кореляційного зв'язку між випадковими величинами (X, Y) слід відкинути і прийняти альтернативну їй гіпотезу H_1 про наявність залежності між цими випадковими величинами.

Позначимо $k_i = (\tilde{y}_i - \bar{y}) = a(x_i - \bar{x})$

Знайдемо відношення суми квадратів теоретичних відхилень $\tilde{y}_i$, від середнього значення $\bar{y}$ до суми квадратів відхилень спостережуваних значень y_i , від середнього значення $\bar{y}$ для лінійної регресії. Після перетворень отримаємо

$$R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n k_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = r^2(x, y) . \quad (1.9)$$

Величину R^2 називають *вибірковим коефіцієнтом детермінації*. Для парної лінійної регресії коефіцієнт детермінації дорівнює квадрату коефіцієнта кореляції. Чим ближче R^2 наближується до одиниці, тим більше експериментальні значення наближуються до лінії регресії. Значущість коефіцієнта детермінації перевіряється за допомогою F-статистики

$$F_R = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m} , \quad (1.10)$$

де n —кількість вимірів;

m —кількість параметрів рівняння регресії.

Для заданої надійності p , ступенів вільності $k_1=m$, $k_2=n-m-1$ знаходять за таблицями F_{p,k_1,k_2} -статистику.

Якщо $F_R \geq F_{p,k_1,k_2}$ з надійністю p коефіцієнт детермінації статистично значимий.

В економічних задачах для оцінки впливу на показники будь-якого фактора часто використовують коефіцієнт еластичності. В загальній статистиці коефіцієнт еластичності одержують на основі статистичного ряду.

Коефіцієнт еластичності для значення фактора знаходять за формулою

$$K_{X_i} = \frac{\Delta y_i}{y_i} \div \frac{\Delta x_i}{x_i}, \quad \text{де} \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad \Delta x_i = x_{i+1} - x_i . \quad (1.11)$$

Якщо зробити граничний перехід при $\Delta x \Rightarrow 0$, то одержимо формулу для точкової оцінки коефіцієнта еластичності

$$K_{X_i} = \frac{Y' \cdot X}{Y} . \quad (1.12)$$

Коефіцієнт еластичності показує, на скільки відсотків зміниться показник, якщо фактор зміниться на один відсоток.

Для парної лінійної регресії $Y=aX+b$ коефіцієнт еластичності знаходиться за формулою

$$K_{X_i} = \frac{(aX + b)' \cdot X}{Y} = \frac{a \cdot X}{Y} . \quad (1.13)$$

1.3 Порядок виконання лабораторної роботи №1

1. Отримати у викладача відомі значення фактора X та показника Y (Додаток 5).
2. Уводиться гіпотеза, що між фактором і показником існує стохастична залежність $Y=aX+b$.
3. Побудувати електронну таблицю за допомогою пакету EXCEL відповідно табл.1.1.
4. Визначити оцінки параметрів регресії.
5. Визначити коефіцієнт детермінації R^2 .
6. Перевірити R^2 на значущість за допомогою F критерію (Додаток 4).
7. Визначити коефіцієнт кореляції r .
8. Перевірити значущість коефіцієнта кореляції за допомогою критерію Стьюдента.
9. Побудувати графіки залежностей фактичних значень та лінії регресії.
10. Розрахувати коефіцієнт еластичності.
11. Зробити висновки.

Таблиця 1.1 – Форма для побудови лінійної регресійної моделі за допомогою електронних таблиць

Y_i	X_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$x_i y_i$	x_i^2	Y_p	K_{el}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ		
Рівняння регресії $y=ax+b$									
$r(x,y)=$				$t_{розр}=$					
$R^2(x,y)=$				$F_{розр}=$					

1.4 Зміст звіту

1. Таблиця, побудована за формою.
2. Оцінки параметрів парної лінійної регресії.
3. Коефіцієнти кореляції та детермінації.
4. Результати перевірки адекватності моделі статистичним даним.
5. Коефіцієнти еластичності.
6. Висновки.

1.5 Контрольні запитання

1. Наведіть визначення та зміст парної лінійної регресії.
2. За яким методом визначаються оцінки параметрів лінійної регресії? Його сутність.
4. Викладіть методику визначаються оцінки параметрів лінійної регресії за допомогою можливостей електронної таблиці.
5. Що характеризують коефіцієнти кореляції та детермінації? Як вони визначаються та як перевіряється їхня статистична значущість? Як оцінити адекватність прийнятої моделі статистичним даним?
6. Що таке коефіцієнти еластичності та як вони визначаються?

2 МНОЖИННА ЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ ТА КОРЕЛЯЦІЯ

2.1 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL знайти оцінки множинної лінійної регресії за методом найменших квадратів.

2.2 Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

Під час підготовки до виконання даної лабораторної роботи слід вивчити теоретичний матеріал за літературою та конспектом лекцій.

Економічні процеси залежать від багатьох факторів. Тільки їх комплекс у взаємозв'язку може дати більш менш повне уявлення про характер явища. Етапи множинного кореляційного аналізу наступні:

1. Визначення факторів, що визначають показник та вибір найбільш вагомих з них.

Правила відбору:

- необхідно враховувати причинно-наслідковий зв'язок між показниками, а не аналізувати фактори, які знаходяться тільки у математичних співвідношеннях з результативним показником;
- необхідно відбирати тільки самі значні фактори. Ті, що мають критерій Стюдента менше за табличний, не рекомендується вводити у модель;
- не рекомендується включати до моделі взаємопов'язані фактори.

2. Перевірка однорідності інформації.

Критерієм однорідності інформації є середньквadraticне відхилення та коефіцієнт варіації, які розраховуються для кожного факторного та результативного показника.

Середньквadraticне відхилення показує абсолютне відхилення індивідуальних значень від середнєарифметичного

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} . \quad (2.1)$$

Коефіцієнт варіації показує відносну міру відхилення окремих значень від середнєарифметичної

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100 . \quad (2.2)$$

Чим більше V , тим більше розкид варіаційного ряду:

- якщо $V < 10\%$ – мінливість варіаційного ряду незначна;
- якщо $10\% < V < 20\%$ – середня мінливість варіаційного ряду;
- якщо $20\% < V < 33\%$ – велика мінливість варіаційного ряду;
- якщо $V > 33\%$ – інформація неоднорідна та її необхідно виключити або відкинути нетипові спостереження, які звичайно знаходяться у перших та останніх ранжированих рядах вибірки.

На підставі найвищого показника варіації визначається необхідний обсяг вибірки даних

$$N \geq \frac{V^2 \cdot t^2}{m^2} , \quad (2.3)$$

де V – варіація, %;

t – показник надійності зв'язку, який при рівні ймовірності $P=0,05$ дорівнює 1,96;

m – показник точності розрахунків, %. Для економічних розрахунків припустима помилка 5–8%.

4. Перевірка відповідності даних нормальному закону розподілення. Здійснюється розрахунком асиметрії A , ексцесу E та їх помилок ε_a , ε_e .

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{n \cdot \sigma^3} ; \quad \varepsilon_a = \sqrt{\frac{6}{n}} ; \quad (2.4)$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{n \cdot \sigma^4} ; \quad \varepsilon_e = \sqrt{\frac{24}{n}} . \quad (2.5)$$

Межа припустимості відхилення від нормального закону розподілення визнається умовами

$$\frac{A}{\varepsilon_a} < 3; \quad \frac{E}{\varepsilon_e} < 3 . \quad (2.6)$$

5. Визначення та аналіз коефіцієнтів парної кореляції.

Для цього розраховується вибіркова кореляційна матриця

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mm} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

де r_{ij} – вибіркового коефіцієнт кореляції

$$r_{ij} = \frac{\sum_{l=1}^n (x_{il} - \bar{x}_i) \cdot (x_{jl} - \bar{x}_j)}{S_i \cdot S_j \cdot (n-1)}; \quad i=1, m; \quad j=1, m; \quad (2.8)$$

S_i, S_j – вибіркової дисперсії факторів X_i та X_j .

6. Визначення та аналіз коефіцієнтів частинної кореляції.

Частинною кореляцією між X_i та X_j називається кореляційна залежність між ними при фіксованих значеннях інших показників Вони визначаються через елементи матриці, зворотної до кореляційної

$$r_{ij \ 1,2\dots m} = \frac{Z_{ij}}{\sqrt{Z_{ii} \cdot Z_{jj}}}, \quad (2.9)$$

де Z_{ij}, Z_{ii}, Z_{jj} елементи матриці $[Z] = [R]^{-1}$.

Значущість коефіцієнтів кореляції перевіряється розрахунком t -критерію

$$t_{ij \ 1,2\dots m} = r_{ij \ 1,2\dots m} \cdot \sqrt{\frac{n-m-1}{1-r_{ij \ 1,2\dots m}^2}}, \quad (2.10)$$

який має розподілення Стюдента з $k=n-m-1$ ступенями вільності, де n – кількість спостережень, m – порядок кореляційної матриці. Якщо $|t_{ij}| \geq t_{p,k}$ із заданою надійністю P кореляційний зв'язок існує.

Парні коефіцієнти кореляції отримуються при умові діяння інших факторів на результат, а частинні – із виключенням впливу інших факторів. Якщо парні більше за частинні, тоді вплив інших факторів на тісноту зв'язку між результативним показником та факторами вельми значний, тобто фактори, що входять у модель впливають на показник не тільки прямо, але й посередньо.

Дослідження тісноти зв'язку між факторами дозволяє обрати незалежні між собою фактори.

7. Побудова моделі множинної регресії.

Лінійна модель з m незалежними змінними має вигляд

$$y_i = a_0 + a_1 \cdot x_{1i} + a_2 \cdot x_{2i} + \dots + a_m \cdot x_{mi}. \quad (2.11)$$

У матричному вигляді регресія запишеться у вигляді

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

або у матричному вигляді

$$\vec{Y} = [X] \times \vec{a}.$$

Вектор коефіцієнтів знаходиться вирішенням матричного рівняння

$$\vec{a} = \left[[X]^T \times [X] \right]^{-1} \times [X]^T \times \vec{Y}. \quad (2.13)$$

8. Оцінка значущості параметрів регресії здійснюється за допомогою Т-статистики

$$t_i = \frac{a_i}{S_{ai}}, \quad (2.14)$$

де S_{ai} – квадратична похибка (середньоквадратичне відхилення) параметрів. У свою чергу вона розраховується за виразом

$$S_{ai} = S \cdot \sqrt{b_{ij}}, \quad (2.15)$$

де b_{ij} – діагональний елемент оберненої матриці $\left[[X]^T \times [X] \right]^{-1}$;

S – оцінка середньоквадратичного відхилення похибок апроксимації

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n - m - 1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m - 1}}. \quad (2.16)$$

Коли $t_{розр} \geq t_{p,k}$ для ступеня вільності $k=n-m-1$ та ймовірності $P=0.95$, тоді гіпотеза про значущість параметрів регресії приймається. В противному разі i -ий параметр та фактор виключаються із регресії та необхідно виконати оцінку для іншого набору факторів.

9. Визначення коефіцієнтів множинної кореляції та детермінації.

Вибірковий коефіцієнт множинної кореляції характеризує ступінь зв'язку між факторами та показником та розраховується за формулою

$$R = \sqrt{1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2}}, \quad (2.17)$$

де y_i – експериментальні значення показника;

$\hat{y}_i$ – передбачені відповідно із рівнянням регресії значення показника;

$\bar{y}$ – середнєарифметичне значення показника.

Множинний коефіцієнт детермінації дорівнює R^2 , знаходиться у межах від 0 до 1 та характеризує наближення експериментальної кривої до лінії регресії: чим більше до 1, тим ближче наближуються лінія регресії та експериментальна крива.

Перевірка значущості коефіцієнтів здійснюється розрахунком F-статистики

$$F = \frac{\sigma_{\text{відтв}}^2}{\sigma_{\text{остат}}^2}, \quad (2.18)$$

$$\text{де } \sigma_{\text{відтв}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{m - 1} - \text{дисперсія відтворності};$$

$$\sigma_{\text{остат}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - m} - \text{остаточна дисперсія.}$$

Коли відомий коефіцієнт детермінації F-критерій також можна знайти за виразом

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m}{m - 1}. \quad (2.19)$$

Коли $F_{\text{розр}} \geq F_{p, k_1, k_2}$ для надійності $p=0,95$, ступенів вільності $k_1=m$, $k_2=n-m-1$, тоді гіпотеза про значущість коефіцієнту детермінації приймається.

2.3 Порядок виконання лабораторної роботи №2

1. Отримати у викладача вибірку факторів $X_1, X_2, \dots, X_n$ та показника Y (Додаток 5).

2. Вводиться гіпотеза, що між факторами та показником існує стохастична залежність виду (2.11).

3. Виконати аналіз однорідності вихідних даних та їх відповідності нормальному закону розподілення. Заповнити таблицю 2.1 та зробити висновки. Використати вбудовані функції СКОС та ЕКСЦЕСС (Додаток 1).

Таблиця 2.1

Показник	Середн. Арифм. знач.	Середн. квадр. відхил.	Варіація, %	Асиметрія, А	Екссес, Е	Помилка	
						ε_a	ε_e
Y							
X ₁							
X ₂							
X _n							

4. Сформувати матриці показника та факторів виробничої регресії.

5. Виконати розрахунки частинних та парних коефіцієнтів кореляції, та перевірити їхню статистичну значущість. Зробити висновки.

6. Вирішити матричне рівняння (2.13) та знайти вектор оцінок параметрів множинної регресії, користуючись вбудованими у EXCEL функціями МОПРЕД, ТРАНСП, МОБР, МУМНОЖ.

7. Виконати перевірку статистичної значимості параметрів регресії за допомогою t-критерія. Для цього розрахувати передбачені значення показника Y та похибку апроксимації e, склавши таблицю 2.2.

Таблиця 2.2 – Форма для аналізу значущості параметрів регресії

N	y_i	$\hat{y}_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$e = y_i - \hat{y}_i$	$e^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1						
2						
....						
n						
	$\bar{y}$			$\sum (y_i - \bar{y})^2$		$\sum e^2$

8. Визначити множинний коефіцієнт кореляції та коефіцієнт детермінації. Виконати оцінку значимості коефіцієнту детермінації з надійністю $P=0.95$. Використати статистичні функції ФРАСП, ДИСП, СРЗНАЧ.

9. Аналізуючи результати розрахунків, зробити висновки.

2.4 Зміст звіту

1. Вихідні дані.

2. Таблиця оцінки вихідних даних.

3. Кореляційна матриця та обернена до неї матриця, розрахунки частинних та парних коефіцієнтів кореляції. Оцінка статистичної значимості коефіцієнтів кореляції. Висновки за результатами.

4. Проміжні результати вирішення матричного рівняння (2.13): вихідна, транспонована, обернена матриці та результати множення матриць.
5. Вектор оцінок параметрів множинної регресії.
6. Оцінка значимості параметрів регресії.
7. Розрахунок коефіцієнта множинної кореляції та коефіцієнта детермінації. Результати перевірки їх значимості за F-критерієм..
8. Висновки.

2.5 Контрольні запитання та завдання

1. Наведіть визначення та зміст множинної регресії.
2. Для чого та як виконується аналіз вихідних даних?
3. Що таке частинні та парні коефіцієнти кореляції? В чому полягає їх різниця?
4. Як перевіряється значимість коефіцієнтів кореляції?
5. Як вирішується система нормальних рівнянь множинної регресії у матричному виді?
4. Викладіть методику розв'язання системи лінійних рівнянь за допомогою можливостей пакету EXCEL.
5. Як оцінити адекватність параметрів множинної регресії?
6. Що таке коефіцієнти множинної кореляції та детермінації? Як виконується перевірка їх статистичної значимості?

3 НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

3.1.1 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL знайти оцінки параметрів регресії попиту за методом найменших квадратів, проаналізувати отримані результати та побудувати графіки попиту, товарообігу та еластичності.

3.2.1 Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

Під час підготовки до виконання даної лабораторної роботи слід вивчити теоретичний матеріал за літературою та конспект лекцій.

Однією із задач економічного аналізу є оцінка оптимальної ціни на даний вид товару. При цьому сама таблиця та крива попиту на дає можливості знайти оцінки оптимальної ціни.

Припустимо, що між ціною P та попитом D існує стохастична залежність вигляду

$$D = a_0 + a_1 \cdot P + a_2 \cdot P^2. \quad (3.1)$$

Коли відома регресія попиту на окремий вид товару $D=f(P)$, тоді товарообіг у грошовому виразі

$$Z=P \cdot D=P \cdot f(P) . \quad (3.2)$$

Виробника цікавлять зміни товарообігу у залежності від зміни ціни на даний вид товару. Для того щоб визначити зміну товарообігу від зміни ціни треба взяти похідну

$$\frac{dZ}{dP} = \frac{d(P \cdot f'(p))}{dp} = f(p) \cdot [1 + K_D] , \quad (3.3)$$

де $K_D = \frac{P \cdot f'(P)}{f(P)}$ – коефіцієнт еластичності попиту.

Отже товарообіг є функцією еластичності попиту. Таким чином отримавши оцінки параметрів регресії попиту можна дослідити вплив зміни ціни на товарообіг та визначити критичні точки та інтервали зростання та падіння товарообігу.

$$Z = f(P) \cdot P = a_0 \cdot P + a_1 \cdot P^2 + a_2 \cdot P^3 . \quad (3.4)$$

Критичні точки знаходяться із умов екстремуму $Z'_p = 0$.

Припустимо собівартість продукції S складається із сталих C та змінних витрат, пропорційних обсягу продукції $V \cdot D$. У цьому випадку прибуток підприємства буде дорівнювати різниці між товарообігом у грошовому виразі і собівартістю продукції

$$F = D \cdot P - (C + V \cdot D) = a_2 \cdot P^3 + (a_1 - V \cdot a_2) \cdot P^2 + (a_0 - V \cdot a_1) \cdot P - C - V \cdot a_0 . \quad (3.5)$$

Для того щоб знайти ціну P_k , за якої прибуток буде максимальним, необхідно визначити критичні точки з умови дорівнювання похідної нулю $\frac{dF}{dP} = 0$.

3.3.1 Порядок виконання роботи лабораторної роботи №3

1. Вводиться гіпотеза, що між фактором P (ціна в умовних одиницях за одиницю товару) та показником D (кількість товару, проданого за певний період за ціною D) існує стохастична залежність виду (3.1).
2. Для розв'язування задачі скласти електронну таблицю в EXCEL.
3. Сформулювати матриці показника та факторів виробничої регресії. При цьому матриця факторів матиме вигляд

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & P_{11} & P_{1m}^2 \\ 1 & P_{21} & P_{2m}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & P_{n1} & P_{nm}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

4. Вирішити матричне рівняння

$$\vec{a} = \left[[P]^T \times [P] \right]^{-1} \times [P]^T \times \vec{Y} \quad (3.7)$$

та знайти оцінки параметрів регресії, користуючись вбудованими у EXCEL функціями МОПРЕД, ТРАНСП, МОБР, МУМНОЖ.

5. З надійністю $P=0.95$ встановити адекватність прийнятої математичної моделі статистичним даним. Використати статистичні функції ФРАСП, ДИСП, СРЗНАЧ.

6. Якщо модель адекватна статистичним даним, тоді знайти:

- коефіцієнти еластичності для кожної ціни;
- проміжки цін зростання та спадання товарообігу у грошовому виразі;
- ціну на товар, за якої товарообіг у грошовому виразі буде максимальним;
- проміжки цін зростання та спадання прибутку;
- ціну на товар, за якої прибуток буде максимальним, та його значення.

7. Використовуючи графічні можливості пакету EXCEL, побудувати графіки:

- статистичних даних;
- лінії регресії;
- товарообігу в грошовому вираженні для статистичних даних;
- лінії еластичності;
- товарообігу в грошовому вираженні для розрахункових значень;
- прибутку в залежності від обсягу випуску.

8. Використовуючи розрахунки, зробити висновки.

3.4.1 Зміст звіту

1. Вихідні дані.
2. Проміжні результати вирішення матричного рівняння: вихідна, транспонована, обернена матриці та результати множення матриць.
3. Вектор оцінок параметрів регресії.
4. Результати перевірки адекватності моделі статистичним даним.
5. Коефіцієнти еластичності.
6. Критичні значення ціни у визначенні інтервалів зростання/падіння товарообігу та прибутку.
7. Графічну інтерпретацію результатів аналізу.
8. Висновки за результатами аналізу.

3.5.1 Контрольні запитання

1. Наведіть визначення та сутність нелінійної регресії у вигляді многочлена другого порядку для оцінювання індивідуального ринку.
2. Як скласти систему нормальних рівнянь для оцінки параметрів приведеної нелінійної регресії?
4. Викладіть методику знаходження оцінок параметрів регресії у вигляді многочлена k-го порядку за допомогою можливостей пакету EXCEL.
5. Як оцінити адекватність прийнятої моделі статистичним даним?
6. Як знайти оцінки коефіцієнтів еластичності та їх сутність?
7. Як знаходяться критичні точки у зміні ціни при яких товарообіг та прибуток максимальні?

3 НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЯ

3.1.2 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL дослідити залежність між податковими ставками й обсягом податкових надходжень.

3.2.2 Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

В економічній політиці країни при стимулюванні сфери виробництва і розподілі національного прибутку важливу роль відіграє рівень податкової ставки. Одне з важливих питань у податковій системі - розмір податкових ставок. Від ставки податків залежить обсяг податкових надходжень до бюджету країни. Крива, що відбиває залежність між податковими ставками й обсягом податкових надходжень, називається **кривою Лаффера**.

Нехай задано динамічний ряд з даними за певні періоди про розміри податкових ставок і відповідних їм податкових надходжень. Задамо регресію у вигляді

$$\hat{Y} = ae^{b(X-e)^2}, \quad (3.8)$$

де Y - податкові надходження,

X - податкова ставка.

Для оцінки параметрів цієї регресії прологарифмуємо наведену регресію:

$$\ln \hat{Y} = \ln a + bX^2 - 2bcX + bc^2. \quad (3.9)$$

Після заміни

$$\hat{Y}_1 = \ln \hat{Y}, \quad a_0 = \ln a + bc^2, \quad -2bc = d, \quad (3.10)$$

отримаємо таку регресію:

$$\hat{Y}_1 = a_0 + dX + bX^2. \quad (3.11)$$

Із системи нормальних рівнянь

$$\begin{cases} a_0 n + d \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_{1i}, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + d \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=2}^n y_{1i} x_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + d \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n y_{1i} x_i^2. \end{cases}$$

отримаємо оцінки параметрів регресії a_0, d, b . З рівняння $-2bc=d$ отримаємо оцінку параметра c :

$$c = -\frac{d}{2b}. \quad (3.12)$$

Відповідно з рівняння $a_0 = \ln a + bc^2$ отримаємо

$$\ln a = a_0 - bc^2 \Rightarrow a = EXP\left(a_0 - \frac{d^2}{4b}\right). \quad (3.13)$$

Якщо $b < 0$, то графік кривої Лаффера буде мати вигляд, приведений на рис. 3.1.

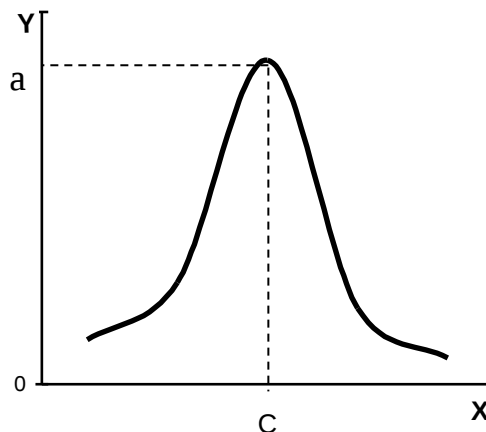


Рисунок 3.1– Крива залежності обсягу податкових надходжень від податкової ставки (крива Лаффера).

Звідси впливає економічний зміст параметрів. C - оцінка податкової ставки, при якій податкові надходження є максимальними і їх обсяг дорівнює значенню a .

3.3.2 Порядок виконання роботи лабораторної роботи №3

1. Заданий динамічний ряд з даними за певні періоди про розміри податкових ставок і відповідних їм податкових надходжень.

2. Визначити оцінки параметрів кривої Лаффера. Для розв'язування задачі скласти електронну таблицю в EXCEL, користуючись вбудованими у EXCEL функціями МОПРЕД, ТРАНСП, МОБР, МУМНОЖ.

3. З надійністю $R=0.95$ встановити адекватність прийнятої математичної моделі статистичним даним. Використати статистичні функції ФРАСП, ДИСП, СРЗНАЧ.

4. Знайти податкову ставку, за якої податкові надходження є максимальними та їх обсяг.

5. Використовуючи графічні можливості пакету EXCEL, побудувати графік залежності обсягу податкових надходжень від податкових ставок.

6. Використовуючи розрахунки, зробити висновки.

3.4.2 Зміст звіту

1. Вихідні дані.

2. Проміжні результати перетворень та замін змінних.

3. Проміжні результати визначення параметрів кривої Лаффера.

Вектор оцінок параметрів регресії.

4. Результати перевірки адекватності моделі статистичним даним.

5. Значення податкової ставки, за якої податкові надходження є максимальними та їх обсяг.

6. Графічну інтерпретацію результатів аналізу.

4. Висновки за результатами аналізу.

3.5.2 Контрольні запитання

1. Наведіть визначення та сутність нелінійної регресії для оцінювання рівня податкових ставок.

2. Як скласти систему нормальних рівнянь для оцінки параметрів приведеної нелінійної регресії?

4. Викладіть методику знаходження оцінок параметрів регресії у вигляді многочлена k -го порядку за допомогою можливостей пакету EXCEL.

5. Як оцінити адекватність прийнятої моделі статистичним даним?

6. Поясніть сутність параметрів рівняння регресії Лаффера?

7. Як знаходяться значення податкової ставки, за якої податкові надходження є максимальними та їх обсяг?

4 МУЛЬТИКОЛІНЕАРНІСТЬ

4.1 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL, навчитися нормалізувати пояснюючі змінні, знаходити кореляційну матрицю, визначати коефіцієнти кореляції та робити висновки щодо мультиколінеарності.

4.2. Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

На практиці при кількісному оцінюванні параметрів економетричної моделі часто стикаються з проблемою взаємозв'язку між пояснюючими змінними. Якщо такий взаємозв'язок досить тісний, то оцінки параметрів моделі можуть мати зміщення. Такий взаємозв'язок між пояснюючими змінними називається *мультиколінеарністю*. Мультиколінеарність пояснюючих змінних призводить до зміщення оцінок параметрів моделі, обчислених за методом 1 МНК. На підставі цих оцінок не можна дійти конкретних висновків про результати взаємозв'язку між пояснюваною і пояснюючими змінними.

До ознак мультиколінеарності відносяться:

Якщо серед парних коефіцієнтів кореляції пояснюючих змінних є такі, рівень яких наближається до множинного коефіцієнта кореляції або дорівнює йому, це свідчить про можливість існування мультиколінеарності. Інформацію про парну залежність може дати симетрична матриця коефіцієнтів парної кореляції, або, як її ще називають, матриця кореляції нульового порядку:

$$r = \begin{pmatrix} r_{x_1x_1} & r_{x_1x_2} & r_{x_1x_3} & \dots & r_{x_1x_k} \\ r_{x_2x_1} & r_{x_2x_2} & r_{x_2x_3} & \dots & r_{x_2x_k} \\ r_{x_3x_1} & r_{x_3x_2} & r_{x_3x_3} & \dots & r_{x_3x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_kx_1} & r_{x_kx_2} & r_{x_kx_3} & \dots & r_{x_kx_k} \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Проте якщо в моделі включено як дві пояснюючі змінні, вивчення питання про мультиколінеарність не може обмежуватись інформацією, яку дає ця матриця. Явище мультиколінеарності в жодному разі не зводиться лише до існування парної кореляції між пояснюючими змінними.

Загальніша перевірка передбачає застосування визначника (детермінанта) матриці r , який називається детермінантом кореляції і позначається $|r|$. Числові значення детермінанта кореляції містяться на інтервалі $|r| \in [0, 1]$.

Якщо $|r| = 0$, то існує повна мультиколінеарність. У разі $|r| = 1$ мультиколінеарність відсутня. Чим ближче $|r|$ до нуля, тим певніше можна стверджувати, що між пояснюючими змінними існує мультиколінеарність. Незважаючи на те, що числове значення $|r|$ зазнає впливу дисперсії пояснюючих змінних, цей показник можна вважати точковою мірою рівня мультиколінеарності.

Якщо в економетричній моделі знайдено мале значення параметра $\hat{a}_k$ в разі високого рівня коефіцієнта детермінації, це також свідчить про наявність мультиколінеарності.

Коли коефіцієнт детермінації R^2 , який обчислено для регресійних залежностей між однією пояснюючою змінною та іншими такими змінними, близький до одиниці, то можна говорити про наявність мультиколінеарності.

Якщо при побудові економетричної моделі на основі покрокової регресії включення нової пояснюючої змінної істотно змінює оцінку параметрів моделі при незначному підвищенні (або зниженні) коефіцієнтів кореляції чи детермінації, то ця змінна перебуває, очевидно, у лінійній залежності від інших, які було введено в модель раніше.

Усі ці методи виявлення мультиколінеарності мають один спільний недолік: жодний із них чітко не розмежовує випадок, коли мультиколінеарність, яку слід вважати “істотною” та неодмінно враховувати, і випадок, коли мультиколінеарністю можна знехтувати.

Найповніше дослідити мультиколінеарність можна за допомогою алгоритму Фаррара-Глобера. Цей алгоритм містить три види статистичних критеріїв, згідно з якими перевіряється відповідно мультиколінеарність:

- а) усього масиву пояснюючих змінних (χ^2 , - “хі-квадрат”);
- б) кожної пояснюючої змінної з рештою пояснюючих змінних (F – критерій);
- в) кожної пари пояснюючих змінних (t- критерій).

Усі ці критерії при порівнянні з їх критичними значеннями дають змогу зробити конкретні висновки щодо наявності чи відсутності мультиколінеарності пояснюючих змінних.

Опишемо алгоритм Фаррара-Глобера.

1. Нормалізація змінних

Нехай $X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$ – вектори пояснювальних змінних економетричної моделі. Елементи стандартизованих векторів обчислимо за формулою:

$$X^*_{ik} = \frac{X_{ik} - \bar{X}_k}{\sqrt{n\sigma^2_{X_k}}}, \text{ або } X^*_{ik} = \frac{X_{ik} - \bar{X}_k}{\sigma_{X_k}}, \quad (4.2)$$

де n – число спостережень ($i=1, n$);

m – число пояснювальних змінних ($k=1, m$);

$\bar{X}_k$ – середня арифметична k -ї пояснювальної змінної;

$\sigma^2_{X_k}$ – дисперсія k -ї пояснювальної змінної.

2. Знаходження кореляційної матриці першого порядку

$$r = X^* X^*, \quad (4.3)$$

де X^* – матриця нормалізованих пояснювальних змінних;

X^* – матриця, транспонована до матриці X^* .

3. Визначення критерію “хі-квадрат”:

$$\chi^2 = - \left[n - 1 - \frac{1}{6}(2m + 5) \right] \ln |r|, \quad (4.4)$$

де $|r|$ - визначник кореляційної матриці r .

Значення цього критерію порівнюється з табличним за таких умов:

$\frac{1}{2} m(m-1)$ ступенів свободи і рівень значущості α . Якщо $\chi^2_{\text{факт}} < \chi^2_{\text{табл}}$, то в масиві незалежних змінних мультиколінеарність відсутня.

4. Визначення матриці, оберненої до r :

$$C = r^{-1} = (X^* X)^{-1} \quad (4.5)$$

5. Розрахунок F-критеріїв:

$$F_k = (c_{kk} - 1) \frac{n - m}{m - 1}, \quad (4.6)$$

де c_{kk} – діагональні елементи матриці C .

Фактичні значення критеріїв F_k порівнюються з табличними, коли маємо $m-1$ і $n-m$ ступенів свободи і рівень значущості α . Якщо $F_{k \text{ факт}} > F_{\text{табл}}$, відповідна k -та пояснююча змінна мультиколінеарна з іншими.

Коефіцієнт детермінації для кожної змінної обчислюється так:

$$R^2_{X_k} = 1 - \frac{1}{c_{kk}} \quad (4.7)$$

6. Знаходження частинних коефіцієнтів кореляції:

$$r_{kj} = \frac{-c_{kj}}{\sqrt{c_{kk} * c_{jj}}}, \quad (4.8)$$

де c_{kj} – елемент матриці C , що міститься в k -му рядку і j -му стовпці ($k=1, m, j=1, m, c_{kk}$ і c_{jj} - діагональні елементи матриці C).

7. Розрахунок t-критеріїв:

$$t_{kj} = \frac{r_{kj} \sqrt{n - m}}{\sqrt{1 - r^2_{kj}}} \quad (4.9)$$

Фактичні значення критеріїв t_{kj} порівнюються з табличними, коли маємо $n - m$ ступенів свободи і рівень значущості α . Якщо $t_{kj \text{ факт}} > t_{\text{табл}}$, то між пояснюючими змінними X_k і X_j існує мультиколінеарність.

4.3. Порядок виконання лабораторної роботи №4

1. Отримати у викладача дані про статистичну сукупність спостережень

2. Обчислити середнє значення та стандартнє відхилення пояснювальних змінних X_1 , X_2 , X_3 , використовуючи стандартнє функції EXCEL “CP3HACH” та “CTAHNDBIBXIL”.

3. Нормалізувати пояснюючі змінні X_1 , X_2 , X_3 за допомогою функції “HOPMABIAIA”.

4. Знайти кореляційну матрицю r .

5. Визначити визначник матриці r ($\det r$), скориставшись математичною функцією EXCEL “MOHPPEA”.

6. Обчислити критерій χ^2 та порівняємо його з табличним значенням.

7. Визначити F-критерій, скориставшись розрахунком матриці C , яка є оберненою до матриці r , та порівняти отримані значення з табличними.

8. Визначити частинні коефіцієнти кореляції r та зробити висновки щодо щільності зв’язку між пояснювальними змінними.

9. Визначити t-критерій для визначення мультиколінеарності між двома пояснювальними змінними та порівняти обчислені дані з табличними значеннями.

10. Зробити висновки щодо наявності мультиколінеарності.

4.4 Зміст звіту

1. Вихідні дані.

2. Розраховані середні значення та середні відхилення пояснювальних змінних.

3. Нормалізовані пояснюючі змінні (нормалізована, транспонована, обернена матриці та результати множення матриць).

4. Кореляційна матриця та її визначник.

5. Обчислені критерії та їх табличні значення у вигляді таблиці:

χ^2	F - критерій		t – критерій	
$X^2_{\text{табл}}$	$F_{\text{табл}}$	F_1	$t_{\text{табл}}$	t_{12}
$X^2_{\text{факт}}$		F_2		t_{13}
		F_3		t_{23}

6. Обчислені частинні коефіцієнти кореляції r та висновки щодо наявності мультиколінеарності між пояснювальними змінними.

7. Загальні висновки та пропозиції щодо звільнення від мультиколінеарності.

4.5 Контрольні запитання

1. Надайте визначення мультиколінеарності та основні причини її виникнення.

2. Перелічите ознаки мультиколінеарності. До яких наслідків може спричинити наявність мультиколінеарності?

3. Опишіть коротко кроки алгоритму Фаррара-Глобера. Для чого він застосовується?

4. Обчисліть F- критерій для визначення мультиколінеарності трьох пояснюючих змінних, знаючи матрицю (n=20)

$$r = \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 1 & 0.5 \\ 0.6 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

5. ГЕТЕРОСКЕДАСТИЧНІСТЬ

5.1. Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL, навчитися визначати наявність гетероскедастичності та оцінювати параметри моделі згідно з узагальненим методом найменших квадратів (методом Ейткена)

5.2. Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

Якщо дисперсія залишків при побудові економетричної моделі змінюється для кожного спостереження або груп спостережень, то це явище називається *гетероскедастичністю*. При гетероскедастичності дисперсія залишків така:

$$M(uu') = \sigma_u^2 S, \quad (5.1)$$

де S — діагональна додатна визначена матриця розміром n x n.

Гетероскедастичність призводить до порушення властивостей незміщеності та ефективності оцінок параметрів моделі, здобутих за допомогою МНК. Тому завжди постає потреба вивчати це явище і, якщо воно існує, для оцінювання параметрів застосовувати узагальнений метод найменших квадратів (метод Ейткена).

Для визначення гетероскедастичності вдають до таких чотирьох критеріїв:

1. критерій μ ;
2. параметричний тест Гольдфеля – Квандта;
3. непараметричний тест Гольдфеля – Квандта;
4. тест Глейсера.

Критерій μ

Цей метод прийнятний тоді, коли вихідна сукупність спостережень досить велика. Розглянемо відповідний алгоритм.

1. Вихідні дані вектора залежної змінної Y розбиваються на r груп ($r = \overline{1, k}$) згідно зі зміною абсолютної величини його компонентів. Вектор Y доцільно спочатку впорядкувати від меншого до більшого значення компонентів.

2. Для кожної групи даних обчислюють суму квадратів відхилень:

$$S_r = \sum_{i=1}^{n_r} (Y_{ir} - \bar{Y}_r)^2. \quad (5.2)$$

3. Обчислюється сума квадратів відхилень у цілому по всій сукупності спостережень:

$$\sum_{r=1}^k S_r = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{r=1}^k (Y_{ir} - \bar{Y}_r)^2 \quad (5.3)$$

4. Обчислюється параметр λ :

$$\lambda = \prod_{r=1}^k \left(\frac{S_r}{n_r} \right)^{n_r / 2} / \left(\frac{\sum_{r=1}^k S_r}{n} \right)^{n / 2}, \quad (5.4)$$

де n – загальна сукупність спостережень;

n_r – кількість спостережень r -ї групи.

5. Обчислюється критерій μ :

$$\mu = -2 \ln \lambda, \quad (5.5)$$

який наближатиметься до розподілу χ^2 при ступенях свободи $k-1$, коли дисперсія всіх спостережень стала. Тобто, якщо значення μ менше від табличного значення χ^2 за вибраного рівня значущості і ступеня свободи $k-1$, то явище гетероскедастичності відсутнє.

Параметричний тест Гольдфеля – Квандта

Коли ступінь спостережень невелика, то розглянутий метод визначення гетероскедастичності не застосовний.

Гольдфельд та Квандт розглянули випадок, коли $M(uu') = \sigma^2 x_{ij}^2$, тобто дисперсія залишків зростає пропорційно до квадрата однієї з незалежних змінних моделі:

$$Y = XA + u. \quad (5.6)$$

Для виявлення гетероскедастичності вони запропонували параметричний тест, який потребує виконання таких кроків.

1. Упорядкувати спостереження одного з векторів пояснюючих змінних, який може призвести до гетероскедастичності.

2. Відкинути c спостережень, які міститимуться в центрі цього вектора. Автори тесту запропонували оптимальні співвідношення між параметрами c та n , де n – кількість елементів вектора X_j :

$$\frac{c}{n} = \frac{4}{15}.$$

3. Побудувати дві економетричні моделі на основі 1 МНК за двома створеними сукупностями спостережень $(n-c)/2$ за умови, що $(n-c)/2$ перевищує кількість змінних m .

4. Знайти суму квадратів залишків S_1 і S_2 за першою та другою моделями:

$$S_1 = \hat{u}'_1 \hat{u}_1, \text{ де } \hat{u}_1 - \text{залишки за першою моделлю};$$

$$S_2 = \hat{u}'_2 \hat{u}_2, \text{ де } \hat{u}_2 - \text{залишки за другою моделлю}.$$

5. Обчислити критерій

$$R^* = \frac{S_2}{S_1}, \quad (5.7)$$

який наближено матиме F-розподіл із $(n-c-2m)/2$ і $(n-c-2m)/2$ ступенями свободи, де n – кількість спостережень, m – кількість пояснюючих змінних. Обчислене значення R^* порівнюється з табличним значенням F-критерію при ступенях свободи $(n-c-2m)/2$ і $(n-c-2m)/2$ і вибраному рівні значущості. Якщо $R^* \leq F_{\text{табл}}$, то гетероскедастичності немає.

Непараметричний тест Гольдфелда – Квандта

Висновки про наявність гетероскедастичності за цим тестом робляться на основі графіка зміни залишків після упорядкування спостережень за тією пояснювальною змінною, яка може призвести до гетероскедастичності.

Тест Глейсера

Ще один тест для перевірки гетероскедастичності запропонував Глейсер: за цим тестом будується регресійне рівняння значень залишків $|u_i|$ від тієї пояснюючої змінної, яка може призвести до гетероскедастичності, тобто відповідає зміні дисперсії σ_u^2 . Для цього застосовуються такі види функцій:

$$1) |u| = a_0 + a_1 X_j;$$

$$2) |u| = a_0 + a_1 X_j^{-1};$$

$$3) |u| = a_0 + a_1 X_j^{-1/2}.$$

Висновок про відсутність гетероскедастичності залишків робиться на підставі статистичної значущості коефіцієнтів a_0 і a_1 . Переваги цього тесту полягають у можливості розрізняти випадок чистої та змішаної гетероскедастичності. Чиста гетероскедастичність зумовлюється тільки

однією змінною, а *змішана* – кількома. Чистій гетероскедастичності відповідають значення параметрів $a_0 = 0, a_1 \neq 0$; а змішаній - $a_0 \neq 0, a_1 \neq 0$. Залежно від цього потрібно користуватися різними матрицями S . Нагадаємо, що

$$M(uu') = \sigma_u^2 S = V.$$

Якщо при економетричному моделюванні для перших вихідних даних буде виявлене явище гетероскедастичності, то оцінювання параметрів моделі потрібно виконувати згідно з узагальненим методом найменших квадратів. Оператор оцінювання цим методом записується так:

$$\hat{A} = (X' S^{-1} X)^{-1} X' S^{-1} Y, \quad (5.8)$$

де X – матриця пояснюючих змінних моделі;

X' – матриця, транспонована до матриці X ;

Y – вектор залежної змінної:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

У цій матриці залежно від висунутої гіпотези маємо:

- 1) або $\lambda_i = 1/x_{ij}$;
- 2) або $\lambda_i = 1/x_{ij}^2$;
- 3) або $\lambda_i = \{|\hat{u}_{ij}|\}^2$.

У разі чистої гетероскедастичності доцільно застосовувати першу або другу гіпотезу, при змішаній – третю.

Прогноз на основі економетричної моделі, в якій параметри оцінюються узагальненим методом найменших квадратів, можна дістати на підставі такого співвідношення:

$$\hat{Y}_{\text{прогноз}} = X_0 A + W' V^{-1} u, \quad (5.10)$$

де u – вектор залишків, який відповідає оцінці параметрів моделі на основі 1 МНК;

W' – вектор, транспонований до вектора коваріацій поточних і прогнозних значень залишків.

Оскільки

$$V = \sigma_u^2 S, \text{ то } V^{-1} = S^{-1}. \quad (5.11)$$

5.3 Порядок виконання лабораторної роботи №5

1. Отримати у викладача значення факторів $X_1, X_2, \dots, X_n$ та показника Y . Проіндіфікувати змінні моделі.

2. За допомогою тесту Гольдфелда – Квандта встановити наявність гетероскедастичності.

2.1 Дістати дві сукупності n_1 та n_2 , оцінити кількісно параметри двох моделей, скориставшись стандартною програмою “ЛІНІЙН”.

2.2 Знайти суму квадратів залишків S_1 та S_2 .

2.3 Розрахувати критерій R^* за формулою (6.7) та порівняти з табличним значенням критерію Фишера з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

2.4 Зробити висновки.

3. За допомогою тесту Глейсера визначаємо регресійну залежність між модулем залишків та тією змінною, яка може спричинитися до гетероскедастичності.

3.1 Скориставшись стандартною програмою “ЛІНІЙН”, виконати обчислення, маючи на меті встановлення наявності гетероскедастичності залишків для $X_1, X_2, \dots, X_n$.

3.2 Визначити достовірність параметрів кожної моделі за критерієм Ст’юдента (t - критерієм) з рівнем значущості $\alpha = 0,05$.

3.3 Зробити висновки у разі, якщо табличне значення t – критерія більш або менш, ніж обчислене.

4. Оцінити параметри економетричної моделі узагальненим методом найменших квадратів.

4.1 Вибрати одну із умов відносно наявності або чистої гетероскедастичності, або змішаної.

4.2 Скориставшись функціями EXCEL для роботи з матрицями (МОБР, ТРАНСП, МУМНОЖ, МОПРЕД), записати оператор оцінювання $\hat{A}$.

4.3 Записати економетричну модель в наявному вигляді, зробити висновки.

5.4 Зміст звіту

1. Вихідні дані.

2. Ідентифікація змінних, тобто виявлення залежних та незалежних змінних.

3. Економетричні моделі, побудовані на даних двох сукупностей.

4. Обчислений R^* та його порівняння з табличним значенням критерієм Фишера.

5. Обчислені значення критерія Ст’юдента (t - критерій) та перевірка на достовірність параметрів моделі.

6. Проміжні результати вирішення матричного рівняння: вихідна, транспонована, обернена матриці та результати множення матриць.

7. Матриця оцінок параметрів економетричної моделі, знайдена за допомогою узагальненого методу найменших квадратів.

8. Висновки.

5.5 Контрольні запитання

1. В якому випадку виникає явище гетероскедастичності?
2. Який вигляд має дисперсія залишків економетричної моделі у разі гетероскедастичності?
3. До чого призводить наявність гетероскедастичності?
4. За допомогою яких критеріїв можна визначити гетероскедастичність?
5. Наведіть алгоритм кожного з них.
6. Надайте поняття “чистої” та “змішаної” гетероскедастичності.

6 АВТОКОРЕЛЯЦІЯ В ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЯХ

6.1. Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL, навчитися перевіряти наявність автокореляції та оцінювати параметри динамічної економетричної моделі методом Ейткена.

6.2. Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

В економетричних дослідженнях часто постають такі випадки, коли дисперсія залишків є сталою, але спостерігається їх коваріація. Це явище називають *автокореляцією залишків*.

Автокореляція залишків виникає часто тоді, коли економетрична модель будується на основі часових рядів. Якщо існує кореляція між послідовними значеннями деякої незалежної змінної, то спостерігатиметься й кореляція послідовних значень залишків. Отже, у такому разі також порушується гіпотеза, згідно з якою $M(uu') = \sigma_u^2 E$. Але при гетероскедастичності змінюється дисперсія залишків за відсутності їх коваріації, а при автокореляції – існує коваріація залишків за незмінної дисперсії.

При автокореляції залишків, як і при гетероскедастичності, дисперсія залишків буде така:

$$M(uu') = \sigma_u^2 E.$$

Проте матриця S має тут зовсім інший вигляд. Запишемо цю матрицю:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \rho^3 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho^2 & \rho^2 & \dots & \rho^{n-2} \\ \rho^2 & \rho & \rho & \rho & \dots & \rho^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \rho^{n-4} & \dots & \rho^{n-3} \end{pmatrix}$$

У цій матриці параметр ρ характеризує коваріацію кожного наступного значення залишків із попереднім. Наприклад, якщо для залишків записати авторегресійну модель першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

то ρ характеризує силу зв'язку залишків у період t від їх рівня в період $t-1$. Якщо знехтувати наявністю автокореляції та для оцінювання параметрів моделі застосувати метод 1 МНК, то можливі такі наслідки:

- оцінки параметрів моделі можуть бути незміщеними, але неефективними, тобто вибіркові дисперсії вектора оцінок $\hat{A}$ можуть бути не виправдано великими;
- статистичні критерії t і F -статистики, які отримані для класичної лінійної моделі, практично не можуть бути використані для дисперсійного аналізу, оскільки їх обчислення не враховує наявності коваріації залишків;
- неефективність оцінок параметрів економетричної моделі, як правило, призводить до неефективних прогнозів, тобто прогнозні значення матимуть велику вибіркову дисперсію.

Для перевірки наявності автокореляції залишків можна застосувати чотири методи.

1. Критерій Дарбіна – Уотсона.
2. Критерій фон Неймана.
3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції.
4. Циклічний коефіцієнт автокореляції.

1. Критерій Дарбіна – Уотсона:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^n (u_1 - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (6.1)$$

Критерій Дарбіна – Уотсона може набувати значень на множині $DW \in [0,4]$. Якщо залишки u_t є випадковими величинами, тобто не автокорельовані, то значення DW міститься поблизу 2. У разі додатної

автокореляції $DW < 2$, у разі від'ємної - $DW > 2$.

Значення критерію DW табульовані на інтервалі $DW_1 - DW_2$, де DW_1 – нижня межа; DW_2 – верхня межа. Фактичні значення критерію порівнюються з табличними (критичними) для числа спостережень n і числа незалежних змінних m при вибраному рівні довіри α . Якщо $DW_{\text{факт}} < DW_1$, залишки мають автокореляцію. Якщо $DW_{\text{факт}} > DW_2$, приймається гіпотеза про відсутність автокореляції. Якщо $DW_1 < DW < DW_2$, конкретних висновків зробити не можна, існує невизначеність. При від'ємній автокореляції залишків, розраховане значення критерію DW віднімається від верхньої межі його, тобто від 4, а потім порівнюється з критичними значеннями.

2. Критерій фон Неймана:

$$Q = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t - u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}. \quad (6.2)$$

Звідси $Q = DW \frac{n}{n-1}$ при $n \rightarrow \infty$; $Q = DW$. Фактичне значення критерію фон Неймана порівнюється з табличним при вибраному рівні значущості α і заданому числі спостережень. Якщо $Q_{\text{факт}} < Q_{\text{табл}}$, то існує додатна автокореляція.

3. Нециклічний коефіцієнт автокореляції:

$$r^* = \frac{\sum_{t=2}^n (u_t u_{t-1}) - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=2}^n u_t \right) \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)}{\sqrt{\left[\sum_{t=2}^n u_t^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=2}^n u_t \right)^2 \right] \left[\sum_{t=2}^n u_{t-1}^2 - \frac{1}{n-1} \left(\sum_{t=2}^n u_{t-1} \right)^2 \right]}} \quad (6.3)$$

може набувати значень в інтервалі $[-1; +1]$. Від'ємні значення свідчать про від'ємну автокореляцію, додатні – про додатну. Значення, що містяться в деякій критичній області поблизу нуля, свідчать про відсутність автокореляції.

4. Циклічний коефіцієнт автокореляції:

$$r^0 = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1} + u_n u_1 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}{\sum_{t=1}^n u_t^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{t=1}^n u_t \right)^2}. \quad (6.4)$$

Фактичне значення цього критерію порівнюється з табличним для вибраного рівня значущості і довжини ряду спостережень n . Якщо $r^0_{\text{факт}} \geq$

$r^0_{\text{табл}}$, то існує автокореляція. Припускаючи, що

$$\sum_{t=2}^n u_t \approx \sum u_{t-1} \approx 0, \quad (6.5)$$

циклічний коефіцієнт автокореляції можна подати у вигляді:

$$r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2}. \quad (6.6)$$

Оцінювати параметри моделі з автокорельованими залишками можна на базі чотирьох методів:

1. Ейткена;
2. Перетворення вихідної інформації;
3. Кочрена – Оркатта;
4. Дарбіна.

Перші два методи доцільно застосовувати тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю першого порядку:

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (6.7)$$

Ітеративні методи Кочрена – Оркатта і Дарбіна можна застосувати для оцінювання параметрів економетричної моделі й тоді, коли залишки описуються авторегресійною моделлю вищого порядку:

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_1 u_{t-2} + \varepsilon_t; \quad (6.8)$$

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_1 u_{t-2} + \rho_1 u_{t-3} + \varepsilon_t. \quad (6.9)$$

Метод Ейткена

Оператор оцінювання цим методом запишеться так:

$$\hat{A} = (X'S^{-1}X)X'S^{-1}Y;$$

або

$$\hat{A} = (X'V^{-1}X)X'V^{-1}Y, \quad (6.10)$$

де S^{-1} – матриця, обернена до матриці S ;

V^{-1} – матриця, обернена до матриці $V = \sigma_u^2 S$.

Оскільки в матриці S коваріація залишків ρ^s при $s > 2$ наближається до нуля, то матриця, обернена до матриці S , матиме такий вигляд:

$$S^{-1} = \frac{1}{1-\rho^2} \begin{pmatrix} 1 & -\rho & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1+\rho^2 & -\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

На практиці для обчислення ρ застосовують співвідношення:

$$\rho \approx r = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2},$$

або

$$\rho \approx r' = \frac{\sum_{t=2}^n u_t u_{t-1}}{\sum_{t=1}^n u_t^2} \cdot \frac{n}{n-1}. \quad (6.11)$$

Метод перетворення вихідної інформації

Цей метод передбачає виконання двох кроків:

1. перетворення вихідної інформації із застосуванням параметра ρ ;
2. застосування методу 1 МНК для оцінювання параметрів моделі на базі перетворених даних.

Перетворення вихідної інформації виконується за допомогою матриці T_1 або T_2 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\rho^2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} -\rho & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\rho & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\rho & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

тобто замість матриці X застосовується T_1X або T_2X , замість вектора Y — T_1Y або T_2Y .

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \rho^2} Y_1 \\ & Y_2 - \rho Y_1 \\ & Y_3 - \rho Y_2 \\ & Y_4 - \rho Y_3 \\ & \dots \\ & Y_n - \rho Y_{n-1} \end{aligned}$$

Метод Кочрена – Оркатта

Цей метод є ітеративним методом наближеного пошуку оцінок параметрів $\hat{a}_j$ і ρ ($j = \overline{0, m}$), які мінімізують суму квадратів залишків.

Коли економетрична модель має вигляд

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t;$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, n}, \quad |\rho| < 1, \quad (6.12)$$

то сума квадратів залишків подається так:

$$\sum_t \varepsilon_t^2 = \sum_t [(Y_t - \rho Y_{t-1}) - \hat{a}_0(1 - \rho) - \hat{a}_1(X_t - \rho X_{t-1})]. \quad (6.13)$$

Метод Дарбіна

Підставляємо значення залишків, яке задовольняє авторегресійну модель першого порядку $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, в економетричну модель

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + u_t.$$

Тоді

$$Y_t = a_0 + a_1 X_t + \rho u_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (6.14)$$

де $u_{t-1} = Y_{t-1} - a_0 - a_1 X_{t-1}$.

Звідси

$$Y_t = a_0(1 - \rho) + \rho Y_{t-1} + a_1 X_t + a_1(\rho X_{t-1}) + \varepsilon_t. \quad (6.15)$$

У даному разі ε_t має скалярну матрицю дисперсій:

$$M(\varepsilon_t \varepsilon_t') = \sigma_{\varepsilon_t}^2 E.$$

За методом 1 МНК обчислюємо оцінки параметрів $\hat{\rho}, \hat{a}_0, \hat{a}_1$.

Застосовуємо оцінку параметра $\hat{\rho}$ для перетворення змінних $(Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1})$ і $(X_t - \hat{\rho} X_{t-1})$, за методом 1 МНК – для перетворених даних.

Прогноз згідно з економетричною моделлю, що має автокорельовані залишки, подається так:

$$\hat{Y}_{n+1} = X_{n+1} A + \rho \varepsilon_n. \quad (6.16)$$

6.3. Порядок виконання лабораторної роботи №6

1. Отримати у викладача вибірку факторів $X_1, X_2, \dots, X_n$ та показника Y , між якими існує стохастична залежність.
2. Дослідити залишки, здобуті згідно з 1 МНК, на наявність автокореляції, обчисливши критерій Дарбіна-Уотсона та критерій фон Неймана (6.1 та 6.2);
3. Скориставшись методом Ейткена, оцінимо параметри економетричної моделі з автокорельованими залишками (5.10), використовуючи можливості пакету EXCEL, функціями МОПРЕД, ТРАНСП, МОБР, МУМНОЖ.
4. Дослідити статистичну значущість моделі та оцінок її параметрів, розрахувавши коефіцієнти детермінації та кореляції, F-критерій та t-критерій.
5. Визначити прогнозний рівень показника Y , використовуючи формулу прогнозу (6.16).
6. Проаналізувати розрахунки, зробити висновки.

6.4 Зміст звіту

1. Вихідні дані.
2. Проміжні результати вирішення матричного рівняння: вихідна, транспонована, обернена матриці та результати множення матриць.
3. Запис економетричної моделі у наявному вигляді.
4. Розрахунок коефіцієнтів кореляції та детермінації.
5. Результати перевірки їх значимості за F-критерієм.
6. Оцінка значимості параметрів регресії за допомогою t-критерію Ст'юдента.
7. Прогнозні значення показника Y .
8. Висновки за результатами розрахунків та прогнозу.

6.5 Контрольні запитання

1. Надайте визначення поняття автокореляції та причини її виникнення.
2. Які наслідки можуть виникнути при оцінюванні параметрів методом 1 МНК, якщо знехтувати наявністю автокореляції?
3. Які методики використовуються для перевірки наявності автокореляції?
4. Охарактеризуйте кожен з наведених методик.
5. Які методи застосовуються для оцінювання параметрів моделі з автокорельованими залишками?
6. У чому полягає різниця між методом 1 МНК та методом Ейткена, які застосовуються при оцінці параметрів динамічної економетричної моделі з автокорельованими залишками?

7 ПОБУДОВА ЕКОНОМЕТРИЧНОЇ МОДЕЛІ НА ОСНОВІ СИСТЕМИ ОДНОЧАСНИХ СТРУКТУРНИХ РІВНЯНЬ

7.1 Мета роботи

Користуючись пакетом EXCEL, навчитися будувати структурну та зведену форми економетричної моделі на основі системи одночасних рівнянь та оцінювати їх методом 2 МНК.

7.2 Методичні вказівки по організації самостійної роботи здобувачів

При вивченні складних економічних явищ економетричний аналіз може базуватися на системі рівнянь, причому деякі змінні Y_t , X_t можуть входити більш ніж в одне рівняння, кожне з яких описує змінну та її взаємозв'язок з певними чинниками.

Такі економетричні моделі називаються *системами одночасних структурних рівнянь*.

Система одночасних рівнянь містить ендогенні та екзогенні змінні.

Ендогенними є ті змінні, які визначаються внутрішньою структурою досліджуваного економічного явища, тобто їх значення вивчаються на основі економетричної моделі (залежні змінні).

Екзогенні змінні не залежать від внутрішньої структури економічного явища і їх значення задаються поза моделлю (пояснювальні змінні).

Одночасні моделі мають дві форми: структурну і зведену.

Структурна форма моделі створюється у процесі формування моделі, спрямованому на відбиття причинно-наслідкового механізму, що реально

$$Y_t \cdot A^{-1*} + B \cdot X_t = A^{-1*} u_t, \quad (7.4)$$

або

$$Y_t = R X_t + v_t, \quad (7.5)$$

де $R = -A^{-1}B$, $v_t = A^{-1}u_t$;

R – матриця коефіцієнтів зведеної форми розмірності $(m \times n)$;

v_t – вектор-стовпець, складений з лінійних комбінацій випадкових змінних u_t , присутніх у структурній формі рівняння.

Частинним випадком системи одночасних рівнянь є *рекурсивні системи*, в яких матриця A параметрів ендогенних змінних має трикутний вигляд, а випадкові залишки не корелюють між собою.

Не завжди всі елементи матриць параметрів A та B можуть бути оцінені. Можливість їх оцінювання пов'язана з проблемою ідентифікації.

Коли система така, що визначення будь-якого структурного рівняння в ній неможливе, то це рівняння є не ідентифікованим і не може бути оцінене взагалі. Якщо умов, які допускають оцінювання, достатньо, але й не більш того, рівняння може бути строго ідентифіковане. І якщо умов більше, ніж потрібно для оцінювання рівняння, маємо його надідентифікацію.

Для оцінювання параметрів системи одночасних структурних рівнянь застосовують спеціальні методи (метод 1 МНК, який оцінює окремо кожне рівняння системи, дуже часто приводить до необґрунтованих оцінок). Найпоширенішими є дво- та трикроковий метод найменших квадратів.

Надідентифіковані рівняння оцінюються за допомогою двокрокового методу найменших квадратів (2 МНК).

Двокроковий метод найменших квадратів (2 МНК) дістав свою назву на тій підставі, що 1МНК тут застосовується на двох етапах.

На першому етапі за допомогою 1 МНК оцінюються параметри кожного регресійного рівняння, зокрема у зведеній формі, тобто оцінюється залежність між певною ендогенною змінною та всіма екзогенними змінними.

На другому етапі 1 МНК застосовується для оцінювання параметрів регресійних рівнянь у структурній формі, але у праву частину таких рівнянь включаються розрахункові значення ендогенних змінних, що дозволяє звільнитися від залежності пояснюючих змінних та стохастичної складової. Якщо такої залежності немає, то для оцінювання параметрів моделі доцільно застосовувати метод 1 МНК.

Формалізовано процедуру оцінювання параметрів 2 МНК опишемо у вигляді алгоритму.

1. Перевіряється кожне рівняння моделі на ідентифікованість. Якщо рівняння точно ідентифіковані або надідентифіковані, то для оцінювання параметрів кожного з них можна використати оператор оцінювання:

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1' X (X' X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y_1' X (X' X)^{-1} X' Y \\ X_1' Y \end{bmatrix}. \quad (7.6)$$

2. Знаходження добутку матриць поточних ендogenous змінних, які містяться у правій частині моделі, то матриці всіх екзогенних змінних моделі, тобто $Y_1' X$.

3. Обчислення матриці $X' X$ і знаходження оберненої матриці $(X' X)^{-1}$.

4. Визначення добутку $X' Y_1$ матриць усіх екзогенних і всіх ендogenous змінних у правій частині моделі.

5. Знаходження добутку $Y_1' X (X' X)^{-1} X' Y_1$ матриць, які здобуто на кроках 2, 3, 4.

6. Визначення добутку $Y_1' X$ матриць ендogenous змінних у правій частині моделі і екзогенних змінних, які внесені до даного рівняння.

7. Знаходження добутку $X Y_1$ матриць екзогенних змінних, які входять у дане рівняння, і ендogenous змінних правої частини системи рівнянь.

8. Визначення добутку $Y_1' X_1$ матриць екзогенних змінних даного рівняння.

9. Знаходження матриці, оберненої до блочної:

$$Q_S^{-1} = \begin{bmatrix} Y_1' X (X' X)^{-1} X' Y_1 & Y_1' X_1 \\ X_1' Y_1 & X_1' X \end{bmatrix}^{-1} \quad (7.7)$$

10. Визначення добутку матриць $X' Y_1$, де X' – матриця всіх ендogenous змінних моделі, Y_1 – вектор залежної ендogenous змінної лівої частини рівняння.

11. Знаходження добутку матриць:

$$q_s = Y_1' X_1' X_1 (X' X)^{-1} X' Y_1. \quad (7.8)$$

12. Визначення параметрів моделі:

$$\begin{bmatrix} \hat{b}_s \\ \hat{a}_s \end{bmatrix} = Q_S^{-1} q_s. \quad (7.9)$$

13. Обчислення s -ї залежної ендogenous змінної на основі знайдених параметрів a_s і b_s :

$$\hat{Y}_s = a_s Y_1 + b_s X_1. \quad (7.10)$$

14. Обчислення вектора залишків в s -му рівнянні системи:

$$u_s = Y_s - \hat{Y}_s. \quad (7.11)$$

15. Визначення дисперсії залишків для кожного рівняння:

$$\sigma_{u_s}^2 = \frac{1}{n - k - m + 1} u_s' u_s. \quad (7.12)$$

16. Знаходження матриці коваріацій для параметрів кожного рівняння:

$$\text{asy var} \begin{bmatrix} \hat{b}_s \\ \hat{a}_s \end{bmatrix} = \sigma_{u_s}^2 Q_s^{-1}. \quad (7.13)$$

17. Знаходження стандартної похибки параметрів і визначення довірчих інтервалів:

$$S \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \sqrt{\sigma_{u_s}^2 Q_s^{-1}}; \quad (7.14)$$

$$\hat{a} - t_{(\alpha)} S \leq a \leq \hat{a} + t_{(\alpha)} S; \quad (7.15)$$

$$\hat{b} - t_{(\alpha)} S \leq b \leq \hat{b} + t_{(\alpha)} S. \quad (7.16)$$

7.3 Порядок виконання завдання лабораторної роботи №7

1. Отримати у викладача значення факторів $X_1, X_2, \dots, X_n$ та показників Y_1 та Y_2 , між якими існує стохастична залежність.
2. Проіндіфікувати змінні моделі.
3. Специфікувати модель у лінійній (структурній) та зведений формах.
4. Оцінити параметри зведеної форми моделі 1 МНК, скориставшись стандартною функцією ЛІНІЙН пакету EXCEL.
5. Знайти розрахункові значення Y_1 (на основі першого рівняння) та Y_2 (на основі другого рівняння).
6. Оцінити параметри економетричної моделі у структурній формі, скориставшись стандартною функцією ЛІНІЙН пакету EXCEL.
7. Дослідити статистичну значущість моделі та оцінок її параметрів, розрахувавши коефіцієнти детермінації та кореляції, скориставшись статистичними функціями ФРАСП, ДИСП, СРЗНАЧ.
8. Оцінити параметри структурної моделі, скориставшись оператором 2 МНК за допомогою вбудованими у EXCEL функціями МОПРЕД, ТРАНСП, МОБР, МУМНОЖ.
9. Порівняти оцінку параметрів обидва рівняння, зробити висновки.

7.4 Зміст звіту

1. Вихідні дані.

2. Ідентифікація змінних, тобто виявлення залежних (ендогенних) та незалежних змінних (екзогенних).

3. Специфікація моделі у лінійній (структурній) та зведеній формах.

4. Оцінка параметрів за методом 1 МНК.

5. Розрахункові значення $\hat{Y}_1$ та $\hat{Y}_2$, зведені в таблиці:

Період	$\hat{Y}_1$	$\hat{Y}_2$

6. Масив змінних для побудови рівняння Y_1 у вигляді таблиці:

Y_1	$\hat{Y}_2$	X_1	X_2	X_4

7. Масив змінних для побудови рівняння Y_1 у вигляді таблиці:

Y_2	$\hat{Y}_1$	X_2	X_3	X_4

8. Вектор оцінок параметрів регресії.

9. Результати перевірки адекватності моделі статистичним даним.

10. Висновки.

7.5 Контрольні запитання

1. Які економетричні моделі називаються системою одночасних структурних рівнянь?

2. Дайте поняття ендогенним та екзогенним змінним. В чому полягає їх основна різниця?

3. Які форми може приймати система одночасних рівнянь? Надайте характеристику кожній із них.

4. В якому випадку системи одночасних рівнянь є рекурсивними системами?

5. За яких умов рівняння можуть бути строго ідентифіковане та надідентифіковане?

6. Застосування якого методу використовують при оцінюванні параметрів системи одночасних структурних рівнянь?

7. Охарактеризуйте алгоритм процедури оцінювання параметрів системи одночасних структурних рівнянь.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Березька К.М. Економетрика: основи теорії та комп'ютерний практикум. Тернопіль: ЗУНУ, 2022. 152 с.
2. Григорків, В.С. Моделювання економіки: підручник. Чернівці : ЧНУ ім. Ю. Федьковича, 2019. 360 с.
3. Диха М. В., Мороз В. С. Економетрія: Навчальний посібник. К.: Центр навчальної літератури (ЦУЛ), 2019. 206 с.
4. Економіко-математичне моделювання: навчальний посібник / за ред. О. Т. Іващука. – Тернопіль : ТНЕУ Економічна думка, 2008. – 704 с.
5. Єрмоменко В., Алілуйко А., Березька К., Мартинюк О. Економетрика : навчальний посібник. Тернопіль: Підручники і посібники, 2023. 168 с.
6. К.Ю. Величко, О.Д. Тімченко. Моделювання та прогнозування міжнародних економічних відносин: методичні вказівки для самостійного вивчення дисципліни для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 292 Міжнародні економічні відносини ОПП Міжнародна економіка [Електронний ресурс] – Х.: ДБТУ, 2024. – 82 с.
7. Ковальчук О. Я. Математичне моделювання та прогнозування в міжнародних відносинах: Підручник. Тернопіль: ТНЕУ, 2019. 412 с.
8. Козьменко О. В., Кузьменко О. В. Економіко-математичні методи та моделі (економетрика): Навч. посібник. Суми: Університетська книга, 2018. 406 с.
9. Лукьяненко І. Г. Економетрика : підручник / І. Г. Лукьяненко, Л. І. Краснікова – К. : Товариство «Знання», КОО, 1998. – 494 с.
10. Назаренко О. М. Основи економетрики : підручник вид. 2-ге, допов. та перероб. / О. М. Назаренко. – Київ : Центр навчальної літератури, 2005. – 395 с.
11. Руська Р. В. Економетрика: навчальний посібник. видання 2-е перероб. доп. Тернопіль: ЗУНУ, 2022. 224 с.
12. Тімченко О.Д. Економетрика: конспект лекцій для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти спеціальності 051 Економіка, 292 Міжнародні економічні відносини, 071 Облік і оподаткування, 072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок [Електронний ресурс] – Х.: ДБТУ, 2024. – 90 с.
13. Филипенко О.М. Економетрика : навч. посібник / О.М. Филипенко, О.Д. Тімченко. – Харків : ХДУХТ, 2021. – 149 с.

ДОДАТКИ

Додаток А

Використання ПЕОМ при виконанні лабораторних робіт

Наведені методичні вказівки до виконання лабораторних робіт за курсом «Економетрика» розв'язуються за допомогою персональних комп'ютерів та спеціальних прикладних програм. Найбільш поширеною програмою роботи з економічною інформацією є програма EXCEL, яку взято за базову для проведення лабораторних робіт із застосуванням ПЕОМ.

Нижче наведена таблиця, в якій перелічені основні функції програми EXCEL та дії, які вони виконують.

Таблиця 8.1

Функція	Дія, яка виконується
Функції для роботи з матрицями	
МУМНОЖ (масив 1, масив 2)	Повертає добуток матриць, які містяться в масивах Масив з тим самим числом рядків, як і масив 1, та таким самим числом стовпців, як і масив 2.
ТРАНСП	Повертає транспонований масив. Перший рядок вихідного масиву стає першим стовпцем, а другий рядок – другим його стовпцем і т.д.
МОПРЕД	Повертає визначник матриці. Матриця записується у масиві
МОБР	Повертає обернену матрицю. Матриця записується у масиві
Статистичні функції	
СРЗНАЧ	Функція обчислення середнього арифметичного
ДИСП	Обчислює дисперсію не більш 30 випадково взятих чисел
КВАДРОТКЛ	Обчислює суму квадратів відхилень точок даних від їх середнього
КОВАР	Обчислює коваріацію (середній добуток відхилень для кожної пари точок даних)
КОРРЕЛ	Обчислює коефіцієнт кореляції
ЛИНЕЙН	Ця функція застосовує метод найменших квадратів, щоб визначити оцінки параметрів лінійної регресії
НОРМАЛИЗАЦИЯ	Обчислює нормалізоване значення для розподілу, що характеризується середнім та стандартним відхиленням X-значення, що нормалізується

Функція	Дія, яка виконується
ТЕНДЕНЦИЯ	Функція передбачає, що тенденція зміни залежної змінної буде збережена
СРОТКЛ	Обчислює середні абсолютних значень відхилень точок даних від середнього
СТАНДОТКЛОН	Оцінює стандартне відхилення за вибіркою та характеризує розкид точок відносно їх середнього
FRASП	Це функція F-розподілу використовується для визначення розбіжностей щільності розподілу двох множин даних
СКОС	Повертає асиметрію розподілу
ЭКСЦЕСС	Повертає ексцес множини даних

Таблиця F- розподілу $P=0,95$

k_2	K_1												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	162	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.20	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26
9	5.12	4.26	3.68	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.98
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20
23	4.48	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	1.09
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.80
140	3.91	3.06	2.67	2.44	2.28	2.16	2.08	2.01	1.95	1.90	1.86	1.82	1.79
160	3.90	3.05	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.81	1.78
180	3.89	3.05	2.65	2.42	2.26	2.15	2.06	1.99	1.93	1.88	1.84	1.81	1.77
200	3.88	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.77
	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72

Таблиця F- розподілу $P=0,95$

k_1													
k_2	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50	100	200	
1	245	246	246	247	247	248	248	250	251	252	253	254	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	195	19.5	195	19.5
3	8.71	8.70	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.62	8.60	8.58	855	8.54	8.53
4	5.87	5.86	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.75	5.72	5.70	5.66	5.65	5.63
5	4.64	4.62	4.60	4.59	4.58	4.67	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.39	4.37
6	3.96	3.94	3.92	3.91	3.9	3.88	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.69	3.67
7	3.53	3.51	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.25	3.23
8	3.24	3.22	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.95	2.93
9	3.03	3.01	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.73	2.71
10	2.86	285	283	2.81	2.8	2.79	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.56	2.54
11	2.74	2.72	2.70	2.68	2.67	2.66	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.43	2.4
12	2.64	2.62	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.47	2.43	2.40	2.36	2.32	2.3
13	2.55	2.53	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	223	2.21
14	2.48	2.46	2.44	2.43	2.41	2.40	2.36	2.31	2.27	2.24	2.19	2.16	2.13
15	2.42	2.40	2.38	2.37	235	2.34	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.10	2.07
16	2.37	2.35	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.04	2.01
17	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.99	1.96
18	2.29	2.27	2.25	223	2.22	2.20	2.19	2.11	2.10	2.08	1.98	1.95	1.92
19	2.26	2.23	2.21	2.00	218	2.17	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.91	1.88
20	2.22	2.20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.04	1 99	1.97	1.91	1.88	1.84
21	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12	2.11	2.10	2.01	1.96	1.94	188	1.84	1.81
22	2.17	2.15	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.82	1.78
23	2.15	2.13	2.11	2.09	1.08	2.06	2.05	1.96	1.91	1.88	1.82	1.79	1.76
24	2.13	2.11	1.09	2.07	2.05	2.04	2.03	1.94	189	1.86	1.80	1.77	1.73
25	2.11	2.09	2.07	2.05	2.04	2.02	2.01	1.92	1.87	1.84	1.78	1.50	1.71
26	2.09	2.07	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.73	1.69
27	2.08	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.88	1.84	1.81	1.74	1.71	1.67
28	2.06	2.04	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.69	1.65
29	2.05	2.03	2.01	1.99	1.97	1.96	1.94	1.85	1.81	1.77	1.71	1.57	1.64
30	2.04	2.01	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.66	1.62
40	1.95	1.92	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.74	1.69	1.66	1.63	1.60	1.51
50	1.89	1.87	1.85	183	1.81	1.80	1.78	1.69	1.63	1.60	1.59	1.55	1.44
60	1.86	1.84	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.44	1.39
70	1.84	181	1 79	1.77	1.75	1.74	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.40	1.35
80	1.82	1.79	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.38	1.32
90	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.38	1.30
100	1.79	1.77	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.34	1.28
120	1.78	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.66	1.55	1.50	1.46	1.37	1.32	1.25
140	1.76	1.74	1.72	1.70	168	166	1.65	1.54	1.48	1.44	1.35	1.30	1.23
160	1.75	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	1.64	1.53	1.47	1.43	1.34	128	1.21
180	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.64	1.63	1.52	1.46	1.42	1.33	1.27	1.20
200	1.74	1.72	1.69	1.67	1.66	1.64	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.26	1.19
	1.69	1.67	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.17	1.00

Таблиця F- розподілу $P=0,99$

k_1

<i>K2</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6023	6056	6083	6106	6126
2	98.5	9.90	99.2	99.3	99.3	9.3	99.4	99.4	99.4	99.4	9.94	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.4	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	2.72	27.1	27.1	27.0
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.5	14.4	14.3
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	9.82
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65
11	9.64	7.2	6.21	5.67	5.31	5.07	4.88	4.74	4.63	4.54	4.46	4.39	4.34
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.10	4.02	3.96	3.90
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.8	3.73	3.67	3.61
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.50	3.51	3.43	3.37	3.32
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02
24	7.82	5.64	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.62	2.56	2.51
60	7.07	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	2.40
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36
90	6.92	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39	2.33
100	6.89	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31
120	6.84	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	2.28
140	6.81	4.76	3.92	3.46	3.15	2.93	2.77	2.64	2.54	2.45	2.38	2.31	2.26
160	6.79	4.74	3.90	3.44	3.13	2.92	2.75	2.62	2.52	2.43	2.36	2.30	2.24
180	6.77	4.72	3.89	3.43	3.12	2.9	2.74	2.61	2.51	2.42	2.35	2.28	2.23
200	6.75	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	2.22
	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.13

Таблиця F- розподілу P=0,99

k₁

k_2	14	15	16	17	18	19	20	30	40	50	100	200	
1	6143	6157	6169	6182	6192	6201	6209	6261	6287	6303	6335	6350	6366
2	89.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	26.9	26.9	26.8	26.8	26.8	26.7	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.2	26.1
4	14.2	14.2	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5	13.5
5	9.77	9.72	9.68	9.64	9.61	9.58	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.08	9.02
6	7.6	7.56	7.52	7.48	7.45	7.42	7.4	7.23	7.14	7.09	6.99	6.93	6.88
7	6.36	6.31	6.28	6.24	6.21	6.18	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.7	5.65
8	5.56	5.52	5.48	5.44	5.41	5.38	5.36	5.2	5.12	5.07	4.96	4.91	4.86
9	5.01	4.96	4.92	4.89	4.86	4.83	4.81	4.65	4.57	4.52	4.41	4.36	4.31
10	4.6	4.56	4.52	4.49	4.46	4.43	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.96	3.91
11	4.29	4.25	4.21	4.18	4.15	4.12	4.10	3.94	3.86	3.81	3.70	3.65	3.60
12	4.05	4.01	3.97	3.94	3.91	3.88	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.41	3.36
13	3.86	3.82	3.78	3.74	3.72	3.69	3.66	3.51	3.42	3.37	3.27	3.22	3.17
14	3.70	3.66	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.06	3.00
15	3.56	3.52	3.49	3.45	3.42	3.40	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.92	2.87
16	3.45	3.41	3.37	3.34	3.31	3.28	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.81	2.75
17	3.35	3.31	3.27	3.24	3.21	3.19	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.71	2.65
18	3.27	3.23	3.19	3.16	3.13	3.10	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.62	2.57
19	3.19	3.15	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.55	2.49
20	3.13	3.09	3.05	3.02	2.99	2.96	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.48	2.42
21	3.07	3.03	2.99	2.96	2.93	2.90	2.88	2.72	2.64	2.58	2.48	2.42	2.36
22	3.02	2.98	2.94	2.91	2.88	2.85	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.36	2.31
23	2.97	2.93	2.89	2.86	2.83	2.80	2.78	2.62	2.54	2.48	2.37	2.32	2.26
24	2.93	2.89	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.27	2.21
25	2.89	2.85	2.81	2.78	2.75	2.72	2.70	2.54	2.45	2.40	2.29	2.23	2.17
26	2.86	2.81	2.78	2.75	2.72	2.69	2.66	2.5	2.42	2.36	2.25	2.19	2.13
27	2.82	2.78	2.75	2.71	2.68	2.66	2.63	2.47	2.38	2.33	2.22	2.16	2.10
28	2.79	2.75	2.72	2.68	2.65	2.63	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.13	2.06
29	2.77	2.73	2.69	2.66	2.63	2.60	2.57	2.41	2.33	2.27	2.16	2.10	2.03
30	2.74	2.70	2.66	2.63	2.60	2.57	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.07	2.01
40	2.56	2.52	2.48	2.45	2.42	2.39	2.37	2.20	2.11	2.06	2.02	1.96	1.80
56	2.46	2.42	2.38	2.35	2.32	2.29	2.27	2.10	2.01	1.95	1.94	1.87	1.68
60	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.68	1.6
70	2.35	2.31	2.27	2.23	2.20	2.18	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.62	1.54
80	2.31	2.27	2.23	2.20	2.17	2.14	2.12	1.94	1.85	1.79	1.65	1.58	1.49
90	2.29	2.24	2.21	2.17	2.14	2.11	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.55	1.46
100	2.27	2.22	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	1.89	1.80	1.74	1.60	1.52	1.43
120	2.23	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.03	1.86	1.76	1.70	1.56	1.48	1.38
140	2.21	2.17	2.13	2.10	2.07	2.04	2.01	1.84	1.74	1.67	1.53	1.45	1.35
160	2.20	2.15	2.11	2.08	2.05	2.02	1.99	1.82	1.72	1.66	1.51	1.42	1.32
180	2.18	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.98	1.81	1.71	1.64	1.49	1.41	1.30
200	2.17	2.13	2.09	2.06	2.03	2.00	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.39	1.28
	2.08	2.04	2.00	1.97	1.93	1.90	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.25	1.00

Додаток В

Таблиця t -критерію ($t(p,k)$)

	P
--	-----

<i>k</i>	0.5	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.998	0.999
1	1.00	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.3	636.619
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33	31.598
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.210	12.941
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	1.173	8.610
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.689	1.333	1.74	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.688	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390

k – число ступенів вільності;

p – довірна ймовірність.

Додаток Г

**Критичні значення d_N і d_L для коефіцієнта автокореляції
Критерію Дарбіна-Уотсона для $P=0,95$**

Число	Число факторів
-------	----------------

спостережень	m=1		m=2		m=3		m=4		m=5	
	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N
6	0.61	1.40								
7	0.70	1.36	0.47	1.90						
8	0.76	1.33	0.56	1.78	0.37	2.29				
9	0.82	1.32	0.63	1.70	0.46	2.13	0.30	2.59		
10	0.88	1.32	0.70	1.64	0.53	2.02	0.38	2.41	0.24	2.82
11	0.93	1.32	0.76	1.60	0.60	1.93	0.44	2.28	0.32	2.65
12	0.97	1.33	0.81	1.58	0.66	1.86	0.51	2.18	0.38	2.51
13	1.01	1.34	0.86	1.56	0.72	1.82	0.57	2.09	0.45	2.39
14	1.05	1.35	0.91	1.55	0.77	1.78	0.63	2.03	0.51	2.30
15	1.08	1.36	0.95	1.54	0.81	1.75	0.69	1.98	0.56	2.22
16	1.11	1.37	0.98	1.54	0.86	1.73	0.73	1.94	0.62	2.16
17	1.13	1.38	1.02	1.54	0.90	1.71	0.78	1.90	0.66	2.10
18	1.16	1.39	1.05	1.54	0.93	1.70	0.82	1.87	0.71	2.06
19	1.18	1.40	1.07	1.54	0.97	1.69	0.86	1.85	0.75	2.02
20	1.20	1.41	1.10	1.54	1.00	1.68	0.89	1.83	0.79	1.99
21	1.22	1.42	1.13	1.54	1.03	1.67	0.93	1.81	0.83	1.96
22	1.24	1.43	1.15	1.54	1.05	1.66	0.96	1.80	0.86	1.94
23	1.26	1.44	1.17	1.54	1.06	1.86	0.99	1.79	0.90	1.92
24	1.27	1.45	1.19	1.55	1.10	1.66	1.01	1.78	0.93	1.90
25	1.29	1.45	1.21	1.55	1.12	1.65	1.04	1.77	0.95	1.89
26	1.30	1.46	1.23	1.55	1.14	1.65	1.06	1.76	0.98	1.87
37	1.32	1.47	1.24	1.56	1.16	1.65	1.08	1.75	1.00	1.86
28	1.33	1.48	1.26	1.56	1.18	1.65	1.10	1.75	1.03	1.85
29	1.34	1.48	1.27	1.56	1.20	1.65	1.12	1.74	1.05	1.84
30	1.35	1.49	1.28	1.57	1.21	1.65	1.14	1.74	1.07	1.83
31	1.36	1.50	1.30	1.57	1.23	1.65	1.16	1.74	0.09	1.83
32	1.37	1.50	1.31	1.57	1.24	1.65	1.18	1.73	1.11	1.82
33	1.38	1.51	1.32	1.58	1.26	1.65	1.19	1.73	1.13	1.81
34	1.39	1.51	1.33	1.58	1.27	1.65	1.21	1.73	1.14	1.81
35	1.40	1.52	1.34	1.58	1.28	1.65	1.22	1.73	1.16	1.80
36	1.41	1.53	1.35	1.59	1.30	1.65	1.24	1.72	1.18	1.80
37	1.42	1.53	1.36	1.59	1.31	1.66	1.25	1.72	1.19	1.80
38	1.43	1.54	1.37	1.59	1.32	1.66	1.26	1.72	1.20	1.79
39	1.44	1.54	1.38	1.60	1.33	1.66	1.37	1.72	1.22	1.79
40	1.44	1.54	1.39	1.60	1.34	1.66	1.29	1.72	1.23	1.79
45	1.48	1.57	1.43	1.62	1.38	1.87	1.34	1.72	1.29	1.78
50	1.50	1.59	1.46	1.63	1.42	1.67	1.38	1.72	1.34	1.77
55	1.53	1.60	1.49	1.64	1.45	1.68	1.41	1.72	1.37	1.77
60	1.55	1.62	1.51	1.65	1.48	1.69	1.44	1.73	1.41	1.77
65	1.57	1.63	1.54	1.66	1.50	1.70	1.47	1.73	1.44	1.77
70	1.58	1.64	1.55	1.67	1.53	1.70	1.49	1.74	1.46	1.77
75	1.60	1.65	1.57	1.68	1.54	1.71	1.52	1.79	1.49	1.77
80	1.61	1.66	1.59	1.69	1.56	1.72	1.53	1.74	1.51	1.77
85	1.62	1.67	1.60	1.70	1.58	1.72	1.55	1.75	1.53	1.77
90	1.64	1.68	1.61	1.70	1.59	1.73	1.57	1.75	1.54	1.78
95	1.65	1.69	1.62	1.71	1.60	1.73	1.58	1.76	1.56	1.78
100	1.65	1.69	1.63	1.72	1.61	1.74	1.59	1.76	1.57	1.78

Критичні значення d_N і d_L для коефіцієнта автокореляції
Критерію Дарбіна-Уотсона для $P=0,95$

Число спостережень	Число факторів									
	m=6		m=7		m=8		m=9		m=10	
	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N
11	0.12	2.89								

12	0.16	2.67	0.11	3.06						
13	0.21	2.49	0.14	2.64	0.09	3.18				
14	0.26	2.35	0.18	2.67	0.12	2.96	0.08	3.29		
15	0.30	2.24	0.23	2.53	0.16	2.82	0.11	3.10	0.07	3.37
16	0.35	2.15	0.27	2.42	0.20	2.68	0.14	2.94	0.09	3.20
17	0.39	2.08	0.31	2.31	0.24	2.57	0.18	2.81	0.13	3.05
18	0.44	2.02	0.37	2.24	0.28	2.47	0.22	2.70	0.16	2.93
19	0.48	1.96	0.40	2.17	0.32	2.36	0.26	2.60	0.20	2.81
20	0.52	1.92	0.44	2.11	0.36	2.31	0.29	2.51	0.23	2.71
21	1.55	1.88	0.47	2.06	0.40	2.24	0.33	2.43	0.27	2.63
22	1.57	1.85	0.51	2.02	0.44	2.19	0.37	2.37	0.30	2.55
23	1.62	1.82	0.55	1.98	0.47	2.14	0.40	2.31	0.34	2.48
24	1.65	1.79	0.58	1.94	0.51	2.10	0.44	2.26	0.38	2.42
25	1.68	1.78	0.61	1.92	0.54	2.06	0.47	2.21	0.41	2.37
26	0.71	1.76	0.64	1.89	0.57	2.03	0.51	2.17	0.44	2.31
27	0.74	1.74	0.67	1.87	0.60	2.00	0.54	2.13	0.47	2.27
28	0.76	1.73	0.70	1.85	0.66	1.97	0.57	2.10	0.50	2.23
29	0.79	1.72	0.72	1.83	0.69	1.98	0.60	2.07	0.53	2.19
30	0.81	1.71	0.76	1.82	0.69	1.93	0.62	2.04	0.56	2.16
31	0.83	1.70	0.77	1.80	0.71	1.91	0.65	2.02	0.59	2.13
32	0.86	1.69	0.79	1.78	0.73	1.89	0.67	2.00	0.62	2.10
33	0.88	1.68	0.82	1.78	0.76	1.87	0.70	1.98	0.64	2.00
34	0.90	1.68	0.84	1.77	0.78	1.86	0.72	1.96	0.67	2.06
35	0.91	1.67	0.86	1.76	0.80	1.85	0.74	1.94	0.69	2.04
36	0.93	1.67	0.88	1.75	0.82	1.84	0.77	1.93	0.71	2.01
37	0.95	1.66	0.90	1.74	0.84	1.83	0.79	1.91	0.73	2.00
38	0.97	1.66	0.91	1.74	0.86	1.82	0.81	1.90	0.75	1.99
39	0.98	1.66	0.93	1.73	0.88	1.81	0.83	1.89	0.77	1.98
40	1.00	1.65	0.95	1.72	0.90	1.80	0.84	1.88	0.79	1.96
45	1.07	1.64	1.02	1.71	0.97	1.77	0.93	1.83	0.86	1.90
50	1.12	1.64	1.06	1.69	1.04	1.75	1.00	1.81	0.96	1.96
55	1.17	1.64	1.13	1.69	1.10	1.73	1.06	1.79	1.02	1.84
60	1.21	1.64	1.18	1.68	1.14	1.73	1.11	1.77	1.07	1.82
65	1.25	1.64	1.22	1.68	1.19	1.72	1.15	1.76	1.12	1.80
70	1.28	1.65	1.25	1.68	1.22	1.72	1.19	1.75	1.16	1.79
75	1.31	1.65	1.28	1.68	1.26	1.72	1.23	1.75	1.20	1.79
80	1.34	1.65	1.31	1.68	1.29	1.71	1.26	1.75	1.23	1.78
85	1.36	1.66	1.34	1.69	1.31	1.71	1.29	1.74	1.26	1.77
90	1.38	1.66	1.36	1.69	1.34	1.71	1.31	1.74	1.29	1.77
95	1.40	1.67	1.38	1.69	1.36	1.72	1.34	1.74	1.31	1.77
100	1.42	1.67	1.40	1.69	1.38	1.72	1.36	1.74	1.34	1.77

**Критичні значення d_N і d_L для коефіцієнта автокореляції
Критерію Дарбіна-Уотсона для $P=0,95$**

Число спосте- режень	Число факторів									
	$m=11$		$m=12$		$m=13$		$m=14$		$m=15$	
	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N

16	0.06	3.45								
17	0.08	3.29	0.05	3.51						
18	0.11	3.15	0.08	3.36	0.05	3.56				
19	0.15	3.02	0.10	3.23	0.07	3.42	0.04	3.60		
20	0.18	2.91	0.13	3.11	0.09	3.30	0.61	3.47	0.04	3.64
21	0.21	2.82	0.16	3.00	0.12	3.19	0.08	3.36	0.06	3.52
22	0.25	2.73	0.19	2.91	0.15	3.08	0.11	3.25	0.08	3.41
23	0.28	2.65	0.23	2.82	0.18	2.99	0.14	3.16	0.10	3.31
24	0.32	2.58	0.26	2.74	0.21	2.91	0.17	3.07	0.13	3.22
25	0.35	2.52	0.29	2.67	0.24	2.83	0.19	2.98	0.15	3.13
26	0.38	2.46	0.32	2.61	0.27	2.76	0.22	2.91	0.18	3.05
27	0.41	2.41	0.36	2.55	0.30	2.69	0.25	2.84	0.21	2.98
28	0.44	2.36	0.39	2.50	0.33	2.64	0.28	2.77	0.24	2.91
29	0.48	2.32	0.42	2.45	0.36	2.58	0.31	2.71	0.27	2.84
30	0.50	2.28	0.45	2.41	0.39	2.53	0.34	2.66	0.29	2.79
31	0.53	2.25	0.48	2.37	0.42	2.49	0.37	2.61	0.32	2.73
32	0.56	2.22	0.50	2.33	0.45	2.45	0.40	2.56	0.35	2.68
33	0.59	2.19	0.53	2.30	0.48	2.41	0.43	2.52	0.38	2.63
34	0.61	2.16	0.56	2.27	0.50	2.37	0.45	2.48	0.40	2.59
35	0.63	2.14	0.58	2.24	0.53	2.34	0.48	2.44	0.43	2.55
36	0.66	2.11	0.61	2.21	0.55	2.31	0.50	2.41	0.46	2.51
37	0.68	2.09	0.63	2.19	0.58	2.28	0.53	2.38	0.48	2.48
38	0.70	2.07	0.65	2.16	0.60	2.26	0.55	2.35	0.50	2.45
39	0.72	2.06	0.67	2.14	0.62	2.23	0.58	2.32	0.53	2.41
40	0.74	2.04	0.07	2.12	0.65	2.21	0.60	2.30	0.55	2.39
45	0.84	1.97	0.79	2.04	0.74	2.12	0.70	2.19	0.66	2.27
50	0.94	1.93	0.87	1.99	0.83	2.05	0.87	2.12	0.75	2.18
55	0.98	1.89	0.94	1.95	0.90	2.00	0.86	2.06	0.83	2.12
80	1.04	1.86	1.00	1.95	0.97	1.96	0.93	2.02	0.89	2.07
65	1.09	1.85	1.05	1.89	1.02	1.93	0.99	1.98	0.95	2.03
70	1.13	1.83	1.10	1.87	1.07	1.91	1.04	1.95	1.01	2.00
75	1.17	1.82	1.14	1.86	1.11	1.89	1.08	1.93	1.05	1.97
80	1.21	1.81	1.18	1.84	1.15	1.88	1.12	1.91	1.09	1.95
85	1.23	1.80	1.21	1.83	1.18	1.87	1.16	1.90	1.13	1.93
90	1.26	1.80	1.24	1.83	1.22	1.86	1.19	1.89	1.17	1.92
95	1.29	1.79	1.27	1.82	1.24	1.85	1.22	1.88	1.20	1.91
100	1.31	1.79	1.29	1.82	1.27	1.84	1.25	1.87	1.23	1.90

**Критичні значення d_N і d_L для коефіцієнта автокореляції
Критерію Дарбіна-Уотсона для $P=0,95$**

Число спосте- режень	Число факторів									
	$m=16$		$m=17$		$m=18$		$m=19$		$m=20$	
	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N	d_L	d_N

21	0.04	3.67								
22	0.05	3.56	0.03	3.70						
23	0.07	3.46	0.05	3.60	0.03	3.73				
24	0.09	3.36	0.07	3.50	0.04	3.63	0.03	3.75		
25	0.12	3.27	0.09	3.41	0.06	3.54	0.04	3.66	0.03	3.77
26	0.14	3.19	0.11	3.33	0.08	3.45	0.06	3.57	0.04	3.68
27	0.17	3.11	0.13	3.25	0.10	3.37	0.07	3.49	0.05	3.60
28	0.19	3.04	0.16	3.17	0.12	3.30	0.93	3.41	0.07	3.52
29	0.22	2.97	0.18	3.10	0.15	3.22	0.11	3.34	0.09	3.45
30	0.25	2.91	0.21	3.03	0.17	3.15	0.14	3.27	0.11	3.38
31	0.28	2.65	0.23	2.97	0.20	3.09	0.16	3.20	0.13	3.31
32	0.30	2.80	0.26	2.91	0.22	3.03	0.18	3.14	0.15	3.25
33	0.33	2.75	0.29	2.86	0.25	2.97	0.21	3.08	0.17	3.14
34	0.36	2.70	0.31	2.81	0.27	2.92	0.23	3.02	0.20	3.13
35	0.38	2.66	0.34	2.76	0.30	2.87	0.26	2.97	0.22	3.07
36	0.41	2.61	0.36	2.72	0.32	2.82	0.28	2.92	0.24	3.02
37	0.43	2.58	0.39	2.68	0.35	2.77	0.31	2.87	0.27	2.97
38	0.46	2.54	0.41	2.64	0.37	2.73	0.33	2.83	0.29	2.92
39	0.48	2.51	0.44	2.60	0.40	2.69	0.35	2.79	0.32	2.88
40	0.51	2.48	0.46	2.57	0.42	2.66	0.38	2.75	0.34	2.84
45	0.61	2.35	0.57	2.42	0.53	2.50	0.49	2.58	0.45	2.66
50	0.71	2.25	0.67	2.32	0.63	2.39	0.59	2.46	0.55	2.53
55	0.79	2.18	0.75	2.24	0.71	2.30	0.67	2.36	0.64	2.42
60	0.86	2.12	0.82	2.17	0.79	2.23	0.75	2.28	0.72	2.34
65	0.92	2.08	0.89	2.12	0.85	2.17	0.82	2.22	0.79	2.27
70	0.97	2.04	0.94	2.06	0.91	2.13	0.88	2.17	0.85	2.22
75	1.02	2.01	0.99	2.05	0.96	2.09	0.93	2.13	0.91	2.17
80	1.07	1.96	1.04	2.02	1.01	2.06	0.99	2.10	0.96	2.14
85	1.11	1.97	1.08	2.00	1.05	2.03	1.03	2.07	1.01	2.10
90	1.14	1.95	1.12	1.48	1.09	2.01	1.07	2.04	1.04	2.08
95	1.17	1.93	1.15	1.96	1.13	1.99	1.10	2.02	1.08	2.05
100	1.20	1.92	1.18	1.95	1.16	1.98	1.14	2.01	1.11	2.03

Процентилі χ^2 – розподілу

Число ступенів вільності	Довірча імовірність									
	0,5	1	2,5	5	10	90	95	97,5	99	99,5

1	0,000039	0,00016	0,00098	0,0039	0,0158	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88
2	0,01	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,61	5,99	7,38	9,21	10,61
3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584	6,25	7,81	9,35	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	7,78	9,49	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,646	0,872	1,24	1,64	2,2	10,64	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	21,96
9	1,73	2,09	2,7	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,6	3,05	3,82	4,57	5,58	17,27	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,07	3,57	4,4	5,23	6,3	18,55	21,03	23,34	26,22	28,3
13	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,6	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,0	27,49	30,58	32,8
16	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,3	28,85	32,0	34,27
18	6,26	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
20	7,43	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	40,0
24	9,89	10,86	10,4	13,85	15,66	33,2	36,42	39,36	42,98	45,56
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,6	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
60	35,53	37,48	40,48	43,19	46,46	74,4	79,08	83,3	88,38	91,95
120	83,85	86,92	91,58	95,7	100,62	140,23	146,57	152,21	158,95	163,64

Варіанти вихідних даних для лабораторних робіт
Лабораторна робота № 1
(для формування варіанта вибирається будь-який стовпчик
з таблиці №1 в парі з будь-яким стовпчиком таблиці №2)

Таблиця 1.1

Значення фактора

N	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12
1	2.06	2.53	2.17	3.65	3.22	2.16	4.57	2.25	6.15	1.86	2.07	3.11
2	2.54	3.54	2.90	3.82	3.67	2.65	5.42	2.98	5.66	1.91	3.22	3.15
3	3.14	3.84	3.29	3.76	4.95	3.49	5.29	2.15	7.50	2.14	3.04	3.65
4	3.54	3.84	4.13	5.24	5.10	3.16	6.33	2.71	6.90	3.39	3.42	4.84
5	4.18	4.22	5.25	5.03	5.98	3.85	7.63	3.70	8.31	3.95	5.23	4.62
6	4.78	4.81	4.92	5.52	7.28	4.58	7.53	4.59	8.25	4.30	5.70	4.87
7	5.11	8.53	5.79	5.62	6.90	5.33	7.73	4.77	9.39	5.10	6.53	6.09
8	5.67	5.82	5.87	6.98	7.54	5.89	8.44	5.34	9.73	5.47	6.41	7.06
9	6.02	6.43	6.99	6.91	7.91	6.20	9.49	5.45	9.33	5.97	6.88	6.23
10	6.65	7.73	7.04	7.98	8.40	6.39	9.18	6.00	10.50	6.16	7.46	6.83
11	7.05	8.19	8.14	7.24	6.14	6.95	10.14	6.25	11.10	6.46	6.83	8.01
12	7.52	7.65	8.06	9.27	8.76	7.28	9.94	6.79	11.51	6.07	6.34	6.26
13	8.03	9.31	8.57	8.46	9.67	7.80	10.92	8.24	12.42	6.71	8.19	9.37
14	8.56	8.26	9.45	10.30	10.28	8.47	11.89	8.51	12.40	7.16	7.19	9.02
15	9.03	9.86	9.06	10.72	10.59	9.22	11.14	9.15	13.14	8.81	9.72	9.76

Таблиця 1.2

Значення показника

N	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7	Y8	Y9	Y10	Y11	Y12
1	7.24	10.89	11.21	12.11	15.21	16.62	10.22	12.50	19.66	14.87	22.68	10.65
2	8.02	11.82	17.75	12.30	15.42	17.63	10.58	13.88	20.53	15.76	23.69	11.87
3	9.28	12.45	16.39	13.82	16.44	19.22	12.01	15.16	21.31	16.79	24.32	12.81
4	10.12	13.27	11.87	14.84	17.93	19.36	12.84	16.06	22.59	16.03	25.97	13.40
5	11.12	14.12	19.80	15.86	18.52	20.52	13.28	16.86	23.27	16.29	26.23	15.12
6	12.18	15.23	21.21	18.41	19.60	21.95	15.13	17.65	24.44	19.93	27.60	16.03
7	13.01	16.07	21.84	17.80	20.76	22.45	15.84	18.46	25.65	20.32	28.13	16.21
8	14.12	17.40	23.00	18.61	21.30	23.56	17.08	19.54	20.74	21.18	29.84	18.07
9	15.21	18.68	24.44	19.57	22.25	24.90	17.99	20.58	27.36	22.47	30.31	18.41
10	16.29	19.46	25.36	21.26	24.14	25.53	18.32	21.77	28.37	23.47	31.52	19.53
11	17.01	20.52	25.54	21.08	24.17	26.11	19.49	22.15	29.22	24.07	32.27	20.48
12	18.03	21.32	27.14	22.99	25.66	28.02	20.59	23.80	30.50	25.57	33.77	21.72
13	13.19	22.58	27.95	23.43	26.50	28.37	21.35	24.79	31.21	27.07	34.66	23.17
14	20.21	23.73	28.99	24.63	27.46	29.46	23.20	25.57	32.56	27.62	35.93	23.57
15	21.22	25.02	30.80	25.41	29.02	30.42	24.21	27.18	33.66	28.42	36.97	24.41

Лабораторна робота № 2

Таблиця 2.1

Значення факторів X1, X2, X3 та показника Y

Варіант 1				Варіант 2				Варіант 3			
XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
2.31	10.1	6.315	7.627	2.12	9.97	6.28	7.45	2.41	10.25	6.32	7.73
4.67	11.7	7.729	10.7	4.40	11.43	7.64	10.48	4.78	11.95	7.79	10.94
6.17	13.9	8.479	11.53	6.16	16.61	8.25	11.25	6.26	13.87	8.57	11.82
8.7	14.4	8.691	13.4	8.69	14.28	8.61	13.33	8.95	14.52	8.83	13.59
10.7	15.1	10.5	17.02	10.47	14.93	10.21	16.90	10.75	15.18	10.55	17.15
13.5	17.1	10.52	18.75	13.41	17.04	10.43	18.57	13.57	17.41	10.59	18.81
16.2	18.9	11.68	21.14	15.98	18.82	11.54	20.91	16.43	19.01	11.83	21.26
18.3	20.3	13.77	23.37	18.24	20.30	13.73	23.32	18.55	20.52	13.83	23.38
21.2	21.7	13.7	27.45	20.89	21.48	13.64	27.16	21.45	22.02	13.97	27.62
22.7	22.4	14.43	27.13	22.66	22.22	14.41	27.00	22.75	22.53	14.55	27.18
25.1	22.5	14.07	29.61	24.91	22.41	13.98	29.59	25.19	22.64	14.17	29.87
26.1	24.7	16.46	32.52	26.03	24.45	16.45	32.24	26.25	24.89	16.64	32.64
27.5	24.8	15.02	31.8	27.25	24.75	14.83	31.71	27.63	25.02	15.07	32.01
29.9	25	14.27	35.18	29.74	24.89	15.06	35.10	30.16	25.19	15.38	35.25
32.1	26	15.66	37.07	31.80	25.95	15.61	36.77	32.20	26.15	15.72	37.14
33.7	27.4	17.21	38.85	33.66	27.27	17.14	38.70	33.94	27.60	17.27	38.96
35.8	28.9	17.47	?	35.57	28.80	17.39	?	36.00	29.02	17.56	?

Варіант 4				Варіант 5				Варіант 6			
XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y
2.37	10.27	6.40	7.73	2.25	9.90	6.09	7.49	2.61	10.35	6.61	7.72
4.77	11.87	7.88	10.85	4.42	11.54	7.49	10.64	4.89	11.78	7.94	10.77
6.24	13.88	8.50	11.54	6.08	13.73	8.46	11.44	6.24	14.09	8.62	11.86
8.70	14.62	8.86	13.52	8.65	14.26	8.59	13.24	9.01	14.64	8.83	13.73
10.79	15.28	10.51	17.13	10.64	14.91	10.43	16.99	10.79	15.17	10.68	17.04
13.60	17.29	10.53	18.75	13.29	17.02	10.52	18.57	13.53	17.42	10.66	18.80
16.31	19.04	11.74	21.15	15.95	18.84	11.65	21.07	16.32	19.24	11.78	21.28
18.40	20.45	13.96	23.49	18.25	20.06	13.55	23.23	18.60	20.60	13.78	23.70
21.25	21.94	13.86	27.50	21.10	21.71	13.67	27.37	21.48	22.04	13.74	27.63
22.87	22.55	14.60	27.16	22.67	22.31	14.33	27.12	23.02	22.69	14.56	27.45
25.15	22.56	14.24	29.73	24.99	22.39	13.95	29.42	25.17	22.65	14.09	29.71
26.27	24.79	16.59	32.71	26.00	24.50	16.34	32.43	26.40	24.83	16.66	32.80
27.70	24.82	15.03	31.83	27.34	24.76	14.81	31.74	27.62	24.82	15.12	31.81
30.00	25.11	15.34	35.18	29.75	24.99	15.13	35.16	30.19	25.17	15.42	35.22
32.25	26.11	15.84	37.12	31.87	25.94	15.46	37.07	32.25	26.22	15.77	37.26
33.85	27.58	17.30	38.97	33.55	27.35	16.96	38.74	33.76	27.72	17.40	39.20
35.96	29.1	17.48	?	35.7	28.83	17.25	?	35.97	29.15	17.77	?

Вариант 7				Вариант 8				Вариант 9			
XI	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y
2.61	10.32	6.71	7.95	2.40	11.27	6.78	8.61	1.43	9.18	6.17	7.29
4.97	11.96	8.14	10.75	5.66	12.48	8.49	11.33	3.92	10.94	7.70	9.79
6.55	13.96	8.95	11.66	6.87	14.11	9.46	12.48	5.49	13.30	8.43	11.26
9.16	14.62	8.83	13.49	9.52	14.64	9.44	14.37	8.17	13.89	8.12	12.42
10.68	15.18	10.95	17.44	11.57	16.17	10.82	17.43	9.68	14.49	10.41	16.04
13.93	17.34	10.92	19.05	13.73	17.47	11.01	19.50	13.42	16.73	10.39	18.34
16.27	19.21	11.75	21.42	16.87	19.85	12.16	21.22	15.92	17.97	11.36	20.94
18.74	20.36	14.05	23.85	18.73	21.43	14.46	23.84	18.04	19.45	13.32	22.74
21.31	22.21	14.09	27.92	22.16	22.12	13.96	27.80	22.68	21.49	12.72	27.09
22.88	22.84	14.60	27.27	23.33	22.98	14.72	27.82	22.68	21.80	14.22	26.43
25.13	22.63	14.38	30.04	25.84	22.61	14.58	30.01	24.33	21.64	13.51	29.39
26.28	24.93	16.57	32.83	26.69	25.03	17.07	33.32	25.64	24.48	15.83	32.37
27.71	24.94	15.51	31.89	27.78	25.16	15.39	31.87	27.14	24.02	14.52	31.52
30.01	25.27	15.44	35.21	30.86	26.05	15.95	35.35	29.22	24.42	15.06	34.89
32.08	26.18	16.00	37.27	32.87	26.44	16.37	37.50	31.09	25.96	15.32	36.33
33.74	27.61	17.59	38.99	34.65	28.09	17.94	39.91	33.34	27.05	16.65	38.35
36.31	29.23	17.97		36.25	29.76	18.44		35.64	28.12	16.55	

Вариант 10				Вариант 11				Вариант 12			
X1	X2	X3	Y	XI	X2	X3	Y	X1	X2	X3	Y
3.18	10.95	6.94	8.50	1.49	10.12	5.97	7.54	0.95	8.71	4.67	5.94
5.76	12.66	8.20	11.67	3.65	10.54	6.62	10.36	2.82	10.89	6.16	10.20
7.26	14.35	9.03	12.11	6.11	13.09	7.92	11.46	6.09	13.54	7.18	10.22
8.95	15.04	9.87	14.09	8.59	14.03	8.17	12.38	7.38	12.56	6.81	12.40
11.44	16.26	10.65	18.01	9.73	15.13	10.01	15.88	10.28	13.50	9.87	15.64
14.59	18.13	10.57	19.21	12.49	16.51	10.01	18.21	11.97	16.69	8.58	18.23
16.91	19.73	12.18	21.33	15.58	17.73	11.61	20.34	15.08	18.84	10.22	19.34
18.40	21.09	14.02	23.54	18.03	19.80	13.43	23.34	16.43	19.59	12.72	23.28
21.84	22.47	13.77	27.72	20.43	20.55	13.33	27.34	19.59	20.15	12.39	25.80
23.88	22.58	15.01	27.18	21.71	22.08	13.78	26.30	22.44	20.79	13.12	25.47
25.98	22.68	14.51	30.26	23.88	22.36	13.64	29.51	24.53	20.57	12.58	27.72
26.85	25.76	17.62	33.09	26.00	23.84	15.47	32.25	24.56	23.28	16.15	31.40
28.71	25.63	15.59	32.22	26.53	24.29	14.52	31.78	27.39	24.47	13.30	31.67
30.38	25.00	16.23	35.42	29.26	24.33	14.75	34.71	29.41	23.00	14.73	33.68
32.66	26.36	16.63	37.21	31.55	25.73	14.59	35.96	31.82	24.87	14.94	36.97
33.88	28.54	17.28	39.64	32.61	27.38	17.02	38.33	33.13	26.17	16.8	37.22
36.54	29.13	18.59		35.66	28.14	16.45		35.20	28.30	16.57	

Лабораторна робота № 3

Таблиця 3.1

Варіант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	D1	D2	D3	D4	D5	D6	D7	D8	D9	D10
1	8.15	8.71	7.76	10.00	8.33	7.6	9.04	9.18	8.39	8.05
2	7.24	7.64	6.83	8.12	8.96	6.70	7.24	7.79	7.37	6.66
3	6.31	6.9	6.02	6.68	8.06	5.79	6.55	7.20	6.6	6.14
4	6.24	6.28	6.06	7.70	6.34	6.08	6.88	6.52	6.44	5.21
5	5.47	6.28	5.02	5.64	7.09	5.37	6.15	5.74	5.50	4.85
6	4.53	4.55	4.18	6.33	5.64	3.71	4.55	4.61	4.75	3.91
7	3.67	3.94	3.67	3.93	4.85	2.68	3.97	3.83	3.90	3.21
8	3.08	3.30	2.85	4.46	4.06	2.36	3.58	3.38	3.26	2.17
9	2.44	3.23	2.12	2.64	2.94	2.13	3.08	3.23	2.51	1.92
10	1.81	2.15	1.77	2.26	2.9	1.48	1.93	2.33	2.03	1.35
11	1.45	1.83	1.19	1.57	1.65	1.18	2.14	1.55	1.53	0.45

Варіант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
P	D11	D12	D13	D14	D15	D16	D17	D18	D19	D20
1	8.21	8.74	7.81	10.49	8.42	8.00	9.5	9.4	8.81	8.16
2	7.41	7.85	6.88	8.41	9.12	6.76	7.42	8.02	7.56	6.76
3	6.36	6.93	6.07	6.95	8.47	5.96	6.9	7.36	6.71	6.55
4	6.74	6.57	6.34	7.77	6.39	6.13	6.94	6.58	6.64	5.66
5	5.71	6.35	5.51	5.89	7.19	5.76	6.19	5.89	5.97	5.18
6	4.82	4.59	4.36	6.68	6.04	3.93	5.01	4.95	5.20	3.93
7	3.94	4.20	3.68	3.99	5.11	3.12	4.26	3.99	4.22	3.59
8	3.52	3.35	2.91	4.52	4.13	2.79	3.72	3.4	3.35	2.61
9	2.85	3.69	2.16	2.98	3.18	2.48	3.19	3.72	2.83	2.13
10	2.21	2.57	2.08	2.54	3.31	1.91	2.23	2.80	2.08	1.62
11	1.57	2.31	1.39	1.67	1.68	1.21	2.24	2.00	1.61	0.57

Варіант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
P	D21	D22	D23	D24	D25	D26	D27	D27	D29	D30
1	8.04	8.71	7.64	9.8	7.92	7.22	9.03	8.91	8.23	7.94
2	7.18	7.53	6.38	7.82	8.59	6.49	7.08	7.33	7.37	6.17
3	5.85	6.53	6.01	6.31	7.69	5.49	6.35	7.03	6.40	5.88
4	6.01	6.11	5.85	7.68	6.26	5.69	6.64	6.5	6.36	4.72
5	5.08	6.15	4.66	5.47	7.07	5.08	5.78	5.63	5.49	4.73
6	4.22	4.25	3.77	6.29	5.23	3.26	4.05	4.46	4.58	3.7
7	3.30	3.73	3.62	3.69	4.57	2.26	3.71	3.75	3.83	2.95
8	2.85	3.01	2.79	4.35	3.61	2.17	3.22	3.02	3.1	1.91
9	2.13	3.11	1.94	2.24	2.44	1.91	2.67	2.85	2.45	1.82
10	1.55	1.79	1.73	2.11	2.73	1.33	1.78	1.86	1.74	0.92
11	1.21	1.53	0.79	1.55	1.6	0.76	2.00	1.42	1.28	0.29

Лабораторна робота № 4

Таблиця 4.1

1	X ₁	12	17	14	15	17	19	18	20	21	22
	X ₂	5	4	8	6	9	11	14	16	17	15
	X ₃	15	19	18	17	16	21	22	25	24	23
	Y	40	43	44	44	46	45	47	49	51	51
2	X ₁	15	17	19	18	17	14	15	17	20	21
	X ₂	9	11	14	16	16	17	15	19	20	21
	X ₃	15	19	18	17	16	21	22	23	24	21
	Y	45	47	49	51	51	50	52	54	56	56
3	X ₁	12	17	13	14	16	15	17	12	18	20
	X ₂	6	8	9	10	10	13	14	15	18	19
	X ₃	16	17	17	19	21	21	25	24	23	25
	Y	39	41	42	45	46	48	49	51	51	52
4	X ₁	17	19	18	17	14	15	17	20	23	25
	X ₂	7	8	9	11	13	13	15	16	17	19
	X ₃	18	19	21	23	22	25	26	24	28	25
	Y	45	45	46	48	49	47	51	50	56	57
5	X ₁	17	13	14	16	15	17	12	16	18	19
	X ₂	8	9	10	10	13	14	15	18	19	20
	X ₃	18	17	16	21	22	23	24	21	23	27
	Y	43	44	44	46	45	47	49	51	54	57
6	X ₁	18	17	14	15	17	20	23	25	24	28
	X ₂	9	11	14	16	16	17	15	19	20	21
	X ₃	17	14	15	17	20	21	22	22	25	26
	Y	40	45	46	48	51	50	52	53	53	57
7	X ₁	17	19	18	17	14	15	17	20	23	25
	X ₂	6	8	9	10	10	13	14	15	18	19
	X ₃	15	19	18	17	16	21	22	23	24	21
	Y	45	45	46	48	49	47	51	50	56	57
8	X ₁	12	17	14	15	17	19	18	20	21	22
	X ₂	9	11	14	16	16	17	15	19	20	21
	X ₃	17	14	15	17	20	21	22	22	25	26
	Y	45	47	49	51	51	50	52	54	56	56
9	X ₁	18	17	14	15	17	20	23	25	24	28
	X ₂	6	8	9	10	10	13	14	15	18	19
	X ₃	18	17	16	21	22	23	24	21	23	27
	Y	39	41	42	45	46	48	49	51	51	52
10	X ₁	12	17	14	15	17	19	18	20	21	22
	X ₂	5	7	8	9	11	10	13	17	19	18
	X ₃	22	23	24	21	23	27	17	16	21	22
	Y	48	51	50	52	51	50	52	53	53	57

Лабораторна робота № 5

Таблиця 5.1

1	X ₁	220	225	226	228	229	232	232	240	250	253
	X ₂	11	13	14	16	17	18	21	22	23	23
	X ₃	3	4	6	6	8	9	10	11	13	12
	Y	50	52	53	56	58	59	61	67	63	66
2	X ₁	200	210	220	230	235	237	240	245	249	259
	X ₂	15	17	16	18	19	21	22	28	26	27
	X ₃	2	4	5	6	9	10	12	14	15	19
	Y	50	52	51	55	56	54	60	58	62	63
3	X ₁	200	210	205	220	225	220	230	228	240	250
	X ₂	22	21	21,5	19	18	18,5	16	17	15	12
	X ₃	2	3	2,5	4	5	4,5	6	9	10	11
	Y	50	52	51	55	56	54	64	65	66	69
4	X ₁	226	228	229	232	232	240	240	245	249	259
	X ₂	14	16	17	18	21	22	23	23	25	29
	X ₃	3	4	6	6	8	9	10	11	13	12
	Y	50	52	53	56	58	59	61	67	63	66
5	X ₁	210	220	230	235	237	240	245	249	259	267
	X ₂	21	21,5	19	18	18,5	16	17	15	19	18
	X ₃	6	8	9	10	11	13	12	13	15	17
	Y	51	55	56	54	60	58	62	63	67	68
6	X ₁	220	230	229	232	232	240	232	240	250	253
	X ₂	16	18	17	18	21	22	21	22	23	23
	X ₃	5	6	6	6	8	9	10	11	13	12
	Y	51	55	53	56	58	59	61	67	63	66
7	X ₁	205	220	230	235	237	240	240	245	249	259
	X ₂	21,5	19	19	18	18,5	16	22	28	26	27
	X ₃	2,5	4	9	10	11	13	12	14	15	19
	Y	51	55	56	54	60	58	60	58	62	63
8	X ₁	237	240	245	249	225	226	228	229	225	220
	X ₂	18,5	16	17	15	13	14	16	17	18	18,5
	X ₃	11	13	12	13	4	6	6	8	5	4,5
	Y	60	58	62	63	52	53	56	58	56	54
9	X ₁	232	240	232	240	210	220	230	235	232	240
	X ₂	21	22	21	22	17	16	18	19	21	22
	X ₃	8	9	10	11	4	5	6	9	8	9
	Y	58	59	61	67	52	51	55	56	58	59
10	X ₁	237	240	240	245	210	205	220	225	237	240
	X ₂	18,5	16	22	28	21	21,5	19	18	18,5	16
	X ₃	11	13	12	14	3	2,5	4	5	11	13
	Y	60	58	60	58	52	51	55	56	60	58

Лабораторна работа № 6

Таблица 6.1

1	X ₁	30	35	33	34	36	39	40	41	45	46
	X ₂	13	12,5	12	11	10	9	8,5	8,2	8	5,5
	X ₃	15	14,3	1	12,8	13	12,5	11	11,5	10	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	60	61	58	59	62	63	65	68	69	69
2	X ₁	30	35	33	34	36	39	40	41	45	45
	X ₂	13	12,5	12	11	10	9	8,5	8,2	8	5,5
	X ₃	7,5	6,5	6	6,2	5,8	5,5	5	4,5	4,7	5
	X ₄	12	10	11	12	15	15,5	14,5	14	15	15
	Y	74	75	77	78	83	80	85	86	88	86
3	X ₁	32	37	35	36	38	40	42	43	47	48
	X ₂	14	13,5	13	12	11	10	9,5	9,2	9,2	9
	X ₃	15	14,3	12	12,8	13	12,5	11	11,5	10	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	57	58	55	56	59	60	62	57	65	66
4	X ₁	34	36	39	40	41	40	41	45	45	46
	X ₂	11	10	9	8,5	8,2	8,5	8,2	8	5,5	5,5
	X ₃	12,8	13	12,5	11	11,5	5	4,5	4,7	5	9
	X ₄	9	10	11	9,5	12	14,5	14	15	15	14
	Y	59	62	63	65	68	85	86	88	86	69
5	X ₁	34	36	39	40	41	42	43	47	48	45
	X ₂	11	10	9	8,5	8,2	9,5	9,2	9,2	9	5,5
	X ₃	6,2	5,8	5,5	5	4,5	11	11,5	10	9	5
	X ₄	12	15	15,5	14,5	14	9,5	12	10	14	15
	Y	78	83	80	85	86	62	57	65	66	86
6	X ₁	30	35	33	34	36	39	40	41	45	46
	X ₂	13	12,5	12	11	10	9	8,5	8,2	8	5,5
	X ₃	12,8	13	12,5	11	11,5	5	4,5	4,7	5	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	57	58	55	56	59	60	62	57	65	66
7	X ₁	34	36	39	40	41	42	43	47	48	45
	X ₂	11	10	9	8,5	8,2	9,5	9,2	9,2	9	5,5
	X ₃	15	14,3	1	12,8	13	12,5	11	11,5	10	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	60	61	58	59	62	63	65	68	69	69
8	X ₁	30	35	33	34	36	39	40	41	45	46
	X ₂	13	12,5	12	11	10	9	8,5	8,2	8	5,5
	X ₃	12,8	13	12,5	11	11,5	5	4,5	4,7	5	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	74	75	77	78	83	80	85	86	88	86
9	X ₁	32	37	35	36	38	40	42	43	47	48
	X ₂	14	13,5	13	12	11	10	9,5	9,2	9,2	9
	X ₃	15	14,3	12	12,8	13	12,5	11	11,5	10	9
	X ₄	8	8,5	7	9	10	11	9,5	12	10	14
	Y	78	83	80	85	86	62	57	65	66	86
10	X ₁	30	35	33	34	36	39	40	41	45	46
	X ₂	13	12,5	12	11	10	9	8,5	8,2	8	5,5
	X ₃	12,8	13	12,5	11	11,5	5	4,5	4,7	5	9
	X ₄	12	10	11	12	15	15,5	14,5	14	15	15

	Y	74	75	77	78	83	80	85	86	88	86
--	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

Лабораторна работа № 7

Таблица 7.1

1	X1	21.1	23.6	24.4	24.8	27.0	28.6	31.0	33.1	33.7	34.9	35.2	36.4	37.2	39.3
	X2	52.1	57.0	60.7	65.7	69.9	74.6	77.8	78.0	83.0	86.9	89.2	94.6	97.0	100.4
	Y	69.5	75.9	79.9	84.6	89.0	95.6	99.8	103.1	107.5	111.9	114.5	120.9	122.8	?
2	X1	30.1	32.6	33.7	35.1	36.4	39.4	41.8	43.3	44.2	46.0	47.8	49.5	49.7	49.9
	X2	52.1	53.5	53.1	56.5	54.1	58.2	55.1	57.2	56.1	56.1	57.1	58.7	58.1	58.1
	Y	78.2	82.5	83.8	86.7	87.0	92.8	91.5	95.3	94.7	96.7	99.5	102.9	102.6	?
3	X1	26.9	28.7	29.8	31.5	34.4	35.5	35.9	37.3	40.1	42.7	44.6	44.8	46.5	47.2
	X2	52.1	56.7	60.9	62.9	67.2	67.5	72.7	76.9	81.0	84.4	85.8	89.8	93.7	95.9
	Y	75.2	81.4	84.9	90.0	96.3	97.2	102.2	107.1	114.0	118.5	123.1	126.2	131.7	?
4	X1	23.8	23.8	24.2	24.8	24.9	25.9	26.7	27.8	30.3	31.5	33.4	35.6	37.7	39.8
	X2	42.7	46.6	49.3	51.8	53.3	55.5	58.6	59.0	64.4	65.7	68.8	69.2	74.4	74.7
	Y	63.4	67.2	70.9	72.2	74.2	76.2	81.2	81.4	88.8	92.7	96.5	99.1	106.5	?
5	X1	43.1	45.2	45.5	47.8	49.5	50.3	53.3	53.7	53.7	55.5	57.4	59.2	61.2	61.8
	X2	32.4	34.8	38.0	40.3	45.7	48.2	53.3	55.4	55.5	56.7	62.2	65.9	68.4	73.0
	Y	68.7	73.3	77.6	80.1	88.1	91.0	100.4	102.2	101.1	103.9	112.1	118.3	121.9	?
6	X1	55.0	55.4	55.6	56.8	58.3	59.7	60.8	63.6	65.6	68.0	70.7	71.4	74.2	74.2
	X2	32.5	36.7	40.6	45.0	49.4	52.2	52.4	55.3	59.7	60.4	62.3	65.6	66.3	69.5
	Y	74.9	81.7	86.0	93.1	99.4	102.3	103.2	109.2	115.9	117.4	120.6	124.7	128.0	?
7	X1	46.0	46.6	48.7	49.2	49.3	51.7	54.3	54.7	55.7	58.6	61.5	64.1	67.1	67.3
	X2	32.8	34.3	38.9	42.8	43.8	48.4	48.7	52.5	56.9	59.7	62.1	66.3	66.9	69.2
	Y	69.9	72.4	80.3	85.4	85.1	92.3	94.9	99.4	104.1	110.2	115.8	121.6	127.7	?
8	X1	45.9	46.2	47.4	49.8	51.6	53.8	55.3	56.5	59.5	60.7	61.4	63.3	64.7	65.4
	X2	52.1	55.5	55.9	56.6	57.9	63.2	63.7	64.3	65.4	69.5	73.1	74.8	80.3	84.1
	Y	92.3	97.2	98.6	100.9	102.7	111.2	111.8	114.1	117.6	121.9	126.5	129.6	135.6	?
9	X1	32.1	34.3	36.3	38.4	40.8	42.1	43.5	45.8	48.7	51.6	53.7	54.4	55.7	58.5
	X2	44.1	45.4	46.4	50.9	55.5	57.9	63.4	63.8	66.5	66.9	68.3	71.5	76.5	80.5
	Y	74.2	76.2	78.5	85.9	91.0	95.6	102.4	104.4	108.3	111.3	114.6	119.4	124.6	?
10	X1	33.1	34.2	36.3	38.4	41.0	43.7	44.3	46.0	47.0	49.3	50.1	51.6	53.9	56.8
	X2	25.1	25.4	30.2	32.7	35.7	41.1	43.5	47.9	53.3	56.8	62.2	64.2	69.7	69.9
	Y	54.1	54.9	62.0	66.3	70.5	79.3	81.3	88.0	94.8	99.7	106.2	110.4	117.7	?
11	X1	43.2	44.9	46.2	46.8	49.4	51.7	52.5	54.8	57.3	57.9	60.2	60.6	60.9	63.0
	X2	25.2	36.4	41.7	47.3	50.8	52.2	52.6	57.6	62.8	67.9	71.5	75.7	78.8	79.1
	Y	71.1	75.1	82.4	88.9	94.7	96.8	97.6	104.5	112.7	117.7	124.0	127.9	131.3	?
12	X1	54.2	56.8	59.7	61.4	63.5	64.7	64.8	67.4	69.0	70.7	71.3	73.7	75.9	77.5
	X2	33.6	39.1	40.4	42.9	44.0	46.8	51.9	56.3	56.6	58.7	59.6	62.4	63.9	67.2
	Y	75.4	85.4	88.5	92.7	95.2	99.5	106.2	113.2	114.5	118.1	118.7	123.0	127.4	?
13	X1	34.8	35.8	38.7	40.7	41.9	42.3	44.3	46.6	48.4	48.8	51.7	53.3	54.4	56.0
	X2	32.4	36.4	39.9	43.4	47.9	51.6	56.0	60.7	61.9	66.9	70.6	72.3	75.2	79.6
	Y	62.4	67.5	74.0	79.5	85.9	88.9	95.3	101.9	104.7	110.1	116.6	118.1	122.2	?
14	X1	43.6	44.0	44.8	46.3	47.6	47.9	50.1	50.5	51.1	52.9	53.1	54.0	56.8	57.6

	X2	34.7	37.7	40.4	42.8	44.7	49.5	51.8	53.8	57.6	60.4	63.3	63.6	66.0	66.7
	Y	71.9	75.1	78.1	83.1	86.7	92.3	94.9	97.5	102.0	106.4	110.0	110.0	114.6	?
15	X1	43.4	45.5	46.3	46.8	49.8	51.3	53.8	55.1	56.2	56.9	59.6	60.3	60.4	62.6
	X2	32.3	37.2	42.5	47.7	50.2	54.6	57.2	60.4	62.7	64.0	68.4	71.6	74.3	76.9
	Y	69.3	75.4	82.4	88.1	93.8	99.3	104.9	108.8	111.6	114.4	120.5	123.3	126.1	?
16	X1	45.3	45.6	45.9	48.4	51.0	51.6	52.1	52.6	55.5	56.7	57.3	57.8	58.7	60.9
	X2	36.6	38.5	42.5	47.7	53.2	57.7	60.7	64.8	64.9	69.4	74.6	77.9	80.3	84.3
	Y	75.4	77.7	81.3	89.2	97.7	103.1	105.4	111.7	114.2	118.3	124.8	127.4	131.6	?
17	X1	33.3	33.6	33.8	34.5	36.8	39.4	40.3	42.7	44.7	44.9	45.7	48.0	50.4	51.1
	X2	47.5	52.2	55.1	58.7	62.3	67.9	73.1	75.4	78.5	81.4	81.5	81.7	82.6	87.5
	Y	77.6	82.8	85.0	89.2	95.0	102.3	107.7	112.2	115.7	120.2	119.3	123.3	126.5	?
18	X1	44.4	47.3	48.2	49.8	52.2	54.3	54.4	56.9	58.7	61.5	63.8	64.2	65.0	65.4
	X2	33.3	38.5	40.4	45.8	46.2	50.0	52.1	56.7	57.9	60.5	63.0	65.1	66.6	67.2
	Y	70.1	78.6	81.7	38.7	90.8	96.4	99.7	106.1	109.2	112.8	117.1	119.1	123.2	?

Навчальне видання

ЕКОНОМЕТРИКА

**Методичні вказівки та завдання
до виконання лабораторних робіт
для здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності 051 Економіка
292 Міжнародні економічні відносини
071 Облік і оподаткування
072 Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок**

ТІМЧЕНКО Ольга Дмитрівна

Формат 60x84/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.

Ум. друк. арк. _.

Наклад __ пр.

ДБТУ

61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44