УДК 512.1

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПРИ ОБРОБЦІ ГЕОДЕЗИЧНИХ ВИМІРЮВАНЬ

Тіхонова В. здобувач першого (бакалаврського) рівня, 2 курс

Інститут «Кіберпорт», Державний біотехнологічний університет

Масленніков Д.І. канд. фіз.-мат. наук, доцент (науковий керівник)

Державний біотехнологічний університет

Наведено метод вирівнювання невязок при геодезичних вимірюваннях з використанням апарату вищої математики.

Розглянемо стандартну геодезичну задачу: припустимо, виміряні сторони трикутника або розраховані, наприклад, через координати вершин. Необхідно знайти і вирівняти кути цього трикутника (Рис. 1).

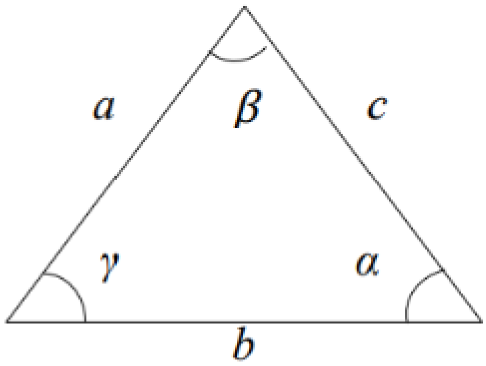

Рис.1. Трикутник

Припустимо, що у нас такі довжини сторін: a=34,22 м; b=42,58 м; c=51,33м.

Кути трикутника знаходимо за допомогою теореми косинусів.

$$cos \propto = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, cos\gamma = \frac{b^2+a^2-c^2}{2ab},$$

$\alpha=41°26'30''$, $\beta=55°26'31''$, $\gamma=83°6'56''$. Причому $\alpha+\beta+\gamma=179°59'57''$. Оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, маємо нев'язку

$$\Delta\omega=180° - \alpha - \beta - \gamma=3''. \qquad (1)$$

Для усунення цієї нев'язки використаємо апарат математичного аналізу, а саме «Диференціальне числення функції багатьох змінних». Для цього розглянемо кут α як функцію сторін трикутника $\alpha = f(a, b, c)$. Запишемо формулу повного диференціалу:

$$d\alpha=\frac{\partial\alpha}{\partial a}da + \frac{\partial\alpha}{\partial b}db + \frac{\partial\alpha}{\partial c}dc.$$

Для малих приростів функції і аргументів диференціали можна замінити на відповідні прирости:

$$\Delta\alpha \approx \frac{\partial\alpha}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\alpha}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial\alpha}{\partial c}\Delta c,$$

Аналогічно для інших сторін:

$$\Delta\beta = \frac{\partial\beta}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\beta}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial\beta}{\partial c}\Delta c,$$
$$\Delta\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial\gamma}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial\gamma}{\partial c}\Delta c.$$

З теореми косинусів маємо функцію для кута α: $\alpha = arccos\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial a} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}\cdot\left(-\frac{a}{bc}\right),$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial b} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}\cdot\frac{2b\cdot 2bc - 2c\cdot(b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial c} = -\frac{1}{\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}}\cdot\frac{2c\cdot 2bc - 2b\cdot(b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2}.$$

Тоді після підстановки вихідних значень та переходу від радіан до секунд маємо:

$$\Delta\alpha = 4883{,}86\Delta a - 585{,}38\Delta b - 2770{,}31\Delta c,$$

Аналогічно отримаємо формули для $\Delta\beta$ і $\Delta\gamma$:

$$\Delta\beta = -728{,}34\Delta a + 6076{,}52\Delta b - 4555{,}13\Delta c,$$
$$\Delta\gamma = -4154{,}10\Delta a - 5489{,}81\Delta b + 7323{,}39\Delta c.$$

А для суми приростів кутів:

$$\Delta\alpha + \Delta\beta + \Delta\gamma = 1{,}42\Delta a + 1{,}33\Delta b - 2{,}05\Delta c.$$

Таким чином, отримаємо умову для приростів сторін трикутника:

$$1{,}42\Delta a + 1{,}33\Delta b - 2{,}05\Delta c + 3 = 0. \quad (2)$$

Формула (2) дозволяє підібрати прирости сторін, при яких нев'язка буде усунута. Причому перші два приросту можна взяти довільними, а третій знайти з даної умови. Але оскільки заміна диференціалів на прирости можлива тільки при малих приростах, введемо додаткову умову: прирости сторін повинні бути найменшими. Для цього введемо нову функцію трьох змінних

$$z(\Delta a, \Delta b, \Delta c) = \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2.$$

Таким чином, отримаємо стандартну задачу на знаходження умовного екстремуму функції багатьох змінних:

Знайти мінімум функції

$$z(\Delta a, \Delta b, \Delta c) = \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2$$

при виконанні умови

$$1{,}42\Delta a + 1{,}33\Delta b - 2{,}05\Delta c + 3 = 0.$$

Задача розв'язується за допомогою функції Лагранжа:

$$\mathrm{L} = z(\Delta a, \Delta b, \Delta c) + \lambda\varphi(\Delta a, \Delta b, \Delta c).$$

В нашому випадку маємо:

$$\mathrm{L} = \Delta a^2 + \Delta b^2 + \Delta c^2 + \lambda \cdot (1{,}42\Delta a + 1{,}33\Delta b - 2{,}05\Delta c + 3).$$

Умова існування умовного екстремуму: частинні похідні від функції Лагранжа дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \Delta a} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \Delta b} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \Delta c} = 0, \\ \varphi(\Delta a, \Delta b, \Delta c) = 0, \end{cases}$$

що дає нам таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2\Delta a + 1{,}42\lambda = 0, \\ 2\Delta b + 1{,}33\lambda = 0, \\ 2\Delta c - 2{,}05\lambda = 0, \\ 1{,}42\Delta a + 1{,}33\Delta b - 2{,}05\Delta c + 3 = 0. \end{cases}$$

Звідси маємо рішення:

$$\Delta a = \frac{1{,}42}{1{,}42^2 + 1{,}33^2 + (-2{,}05)^2} = 0{,}18,$$
$$\Delta b = \frac{1{,}33}{1{,}42^2 + 1{,}33^2 + (-2{,}05)^2} = 0{,}17,$$
$$\Delta c = -\frac{2{,}05}{1{,}42^2 + 1{,}33^2 + (-2{,}05)^2} = -0{,}26.$$

Таким чином, отримаємо остаточні, виправлені, значення довжин сторін:

$$a = 34{,}22 + 0{,}18 = 34{,}40 \text{ м},$$
$$b = 42{,}58 + 0{,}17 = 42{,}75 \text{ м},$$
$$c = 51{,}33 - 0{,}26 = 51{,}07 \text{ м}.$$

Висновок

В роботі показано, як за допомогою стандартних математичних задач розв'язується геодезична задача про врівноваження значень декількох виміряних (або розрахованих) величин. Таким чином, показана необхідність вивчення математики для майбутніх геодезистів.

Література

1. Математичний аналіз: навч. посібник/ В.Л. Сизоненко, Д.В. Чібісов, М.Й. Коваленко, Д.І. Масленніков, Н.О. Онищенко, О.Д. Чібісов /ХНАУ ім. В.В. Докучаєва. – Х:, ХНАУ, 2007. – 376 с.
2. П.М. Зозуляк, В.І. Гавриш, Е.М. Євсєєва, М.Д. Йосипчук. Основи математичного опрацювання геодезичних вимірювань: Навчальний посібник. – Львів: Видавництво «Растр-7», 2007. – 408 с.

УДК: 378.016:502.1+519.657

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В НАВЧАЛЬНОМУ ПРОЦЕСІ ЗДОБУВАЧІВ ГАЛУЗІ ЕКОЛОГІЇ

Мандражи О.А. к.пед.н., доцент

Державний біотехнологічний університет

У статті розглядається питання доцільності розширення якоїсь з уже представлених або включення до переліку обов'язкових компонент освітньо-професійної програми «Екологія» для спеціальності 101 «Екологія» дисципліни «Вища математика».

Уміння моделювати є невід'ємною рисою творчої особистості та особливо важливе для дослідника. Здобувачі галузі екології навчаються досліджувати взаємовідносини живих істот між собою та оточуючим середовищем, що передбачає вивчення стану повітря, води, землі та різноманітних впливів розвитку життя на першооснови природи Землі. Робота будь-якого спеціаліста у сфері екології пов'язана з екомоніторингом, виявленням причин негативних явищ природи, складанням прогнозів розвитку ситуації, розробкою рекомендацій щодо зменшення несприятливих впливів або навіть усунення негараздів та ін. Усе перелічене має у своїй основі вміння будувати та досліджувати математичні моделі. Зазвичай у навчальних цілях здобувачів знайомлять з уже відомими моделями, але найцікавіше – це, звісно, розробка власних. До найпростіших у цьому плані завдань можна віднести, наприклад, прикладні задачі, для яких отримані дані певної залежності між досліджуваними змінними x та y в результаті проведення спостережень або експерименту доцільно представити у вигляді таблиці. А для вивчення закономірностей, які пов'язують досліджувані змінні, важливо залежність між ними постаратись виразити аналітично, у вигляді формули, тобто записати емпіричну функцію. Для виконання даних завдань здобувачі мають знати певний математичний апарат та володіти достатньо високим рівнем математичної грамотності. Наведемо два простих приклади для ілюстрації вище написаного.

Приклад 1. На хімічному заводі сталася аварія і певна шкідлива речовина потрапила до річки. Концентрація у річці цієї речовини вимірюється у мг/л в залежності від часу в днях. За отриманими даними в ході експерименту (або спостереження, якщо таке лихо сталося десь поблизу) запишіть функцію, що описує означений процес. Навіть якщо в навчальних цілях функція буде