

ДО РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В СЕРЕДОВИЩІ «MATHCAD»

Завгородній О.І. д.т.н., проф.; Земляна У.С. студ.

Державний біотехнологічний університет

Робота присвячена підвищенню ефективності розв'язування звичайних диференціальних рівнянь у середовищі «Mathcad». Показана можливість одержання аналітичного розв'язку лінійного диференціального рівняння другого порядку з експоненціальною правою частиною.

Для розв'язку звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) у середовищі «Mathcad» використовуються три функції: `rkfixed`, `Rkadapt`, `Bulstoer`. Всі вони знаходять розв'язок задачі Коші, тобто вимагають введення деяких початкових умов. Перших дві реалізують метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Функція `rkfixed` шукає розв'язок зі сталим кроком, а `Rkadapt` контролює швидкість зміни наближеного розв'язку і у відповідності до цього адаптує крок. Це дозволяє підвищити точність та скоротити час розв'язку задачі, але метод Рунге-Кутта не є найшвидшим. Якщо відомо, що розв'язок є гладкою функцією, то рекомендується застосовувати метод Булірша-Штера, який реалізується третьою функцією – `Bulstoer`. При цьому точність пошуку розв'язку дещо підвищується. Результатом розрахунків за вказаними методами є таблиця значень шуканої функції та її похідних, але досліджувати таку функцію-таблицю за допомогою диференціювання та інтегрування незручно.

Більш зручним методом розв'язку задачі Коші є застосування блоку «Given – Odesolve». Тілом блоку є ЗДР разом з початковими умовами. У вказаному блоці крім функцій, вказаних вище, використовуються допоміжні функції для розв'язування систем ЗДР (вибір функцій за користувачем). Таким чином, на проміжному етапі роботи блоку при задіянні однієї з указаних функцій також з'являється масив значень у вигляді таблиці. Але далі підключається процес інтерполяції, в результаті чого масив перетворюється на функцію, яку потім можна досліджувати з застосуванням і диференціального, і інтегрального числення. До того ж записане в межах блоку ЗДР автоматично перетворюється до вигляду, який адекватно сприймається наявними в блоці функціями.

Отже блок «Given – Odesolve» об'єднує в собі все краще, що існує в «Mathcad» для чисельного розв'язку ЗДР. Проте, влаштованими в блок засобами не можна одержати аналітичний розв'язок для тих класів ЗДР, для яких такий розв'язок існує. В цій ситуації слід скористатися аналітичними можливостями «Mathcad» та програмуванням.

Покажемо один з варіантів побудови програми для знаходження аналітичного розв'язку задачі Коші для лінійного неоднорідного ДР другого порядку з експоненціальною правою частиною:

$$ay'' + by' + cy = \mu e^{vx}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (1)$$

Як відомо, загальний розв'язок рівняння (1) складається з загального розв'язку y_0 відповідного однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ та частинного розв'язку y_n неоднорідного. Загальний розв'язок однорідного вибирається в залежності від коренів k_{12} характеристичного рівняння (ХР) $ak^2 + bk + c = 0$, а саме:

$$y_0 = \begin{cases} C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} & \text{при } k_1 \neq k_2, \quad k_{12} \in R, \\ e^{kx}(C_1 + C_2 x) & \text{при } k_1 = k_2 = k, \quad k \in R, \\ e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) & \text{при } k_{12} = \alpha + \beta i. \end{cases} \quad (2)$$

Для частинного розв'язку рівняння (1) за довільних значень величин μ і ν методом невизначених коефіцієнтів одержано:

$$y_n = \begin{cases} [\lambda/(av^2 + bv + c)]e^{\nu x} & \text{при } av^2 + bv + c \neq 0, \\ [\lambda/(2va + b)]xe^{\nu x} & \text{при } (av^2 + bv + c = 0) \cap (2va + b \neq 0), \\ [\lambda/(2a)]x^2 e^{\nu x} & \text{при } (av^2 + bv + c = 0) \cap (2va + b = 0). \end{cases} \quad (3)$$

Нижче (лист.1) показано розрахунковий лист «Mathcad» з підпрограмою-функцією $K(a, b, c, x_0, y_0, y'_0, \lambda, \nu)$ обчислення загального та частинного розв'язку ЗДР (1), яка включає 15 рядків.

В перших п'яти рядках обчислюється дискримінант D , корені k_1, k_2 характеристичного рівняння, дійсна та уявна частина коренів, якщо вони будуть комплексними.

В рядках 6-8 вибирається загальний розв'язок однорідного рівняння в залежності від виду коренів k_1, k_2 ХР у відповідності зі співвідношенням (2), яке включає всі можливі випадки: корені дійсні і різні ($D > 0$); корені дійсні, але однакові ($D = 0$); корені – комплексні числа ($D < 0$).

В рядках 9-11 формується частинний розв'язок ЗДР (1) в залежності від діапазону значень параметра ν . В рядку 9 виділено випадок, коли параметр ν не є коренем ХР. В рядку 10 – випадок, коли параметр ν є однократним коренем ХР. В рядку 11 – випадок, коли параметр ν є двократним коренем ХР.

В рядку 12 визначається загальний розв'язок ЗДР (1), як сума загального розв'язку відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку неоднорідного.

Рядки 13-14 введені для знаходження сталих інтегрування C_1, C_2 , які повинні задовольняти початковим умовам. В рядку 13 добувається перша похідна загального розв'язку ЗДР, а в 14 рядку оператором “solve” розв'язується система рівнянь відносно невідомих C_1, C_2 . Система складена на основі початкових умов і включає похідну, знайдену в рядку 13.

$$\begin{aligned}
 K(a, b, c, x_0, y_0, y'_0, \lambda, \nu) := & \left| \begin{array}{l}
 D \leftarrow b^2 - 4a \cdot c \\
 k1 \leftarrow \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\
 k2 \leftarrow \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \\
 \alpha \leftarrow \text{Re}(k1) \\
 \beta \leftarrow |\text{Im}(k1)| \\
 y_0(x, C_1, C_2) \leftarrow C_1 \cdot e^{k1 \cdot x} + C_2 \cdot e^{k2 \cdot x} \text{ if } D > 0 \\
 y_0(x, C_1, C_2) \leftarrow e^{k1 \cdot x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x) \text{ if } D = 0 \\
 y_0(x, C_1, C_2) \leftarrow e^{\alpha \cdot x} \cdot (C_1 \cdot \cos(\beta \cdot x) + C_2 \cdot \sin(\beta \cdot x)) \text{ otherwise} \\
 Y(x) \leftarrow \frac{\lambda}{a \cdot \nu^2 + b \cdot \nu + c} \cdot e^{\nu \cdot x} \text{ if } a \cdot \nu^2 + b \cdot \nu + c \neq 0 \\
 Y(x) \leftarrow \frac{\lambda}{2 \cdot \nu \cdot a + b} \cdot x \cdot e^{\nu \cdot x} \text{ if } a \cdot \nu^2 + b \cdot \nu + c = 0 \wedge 2 \cdot \nu \cdot a + b \neq 0 \\
 Y(x) \leftarrow \frac{\lambda}{2 \cdot a} \cdot x^2 \cdot e^{\nu \cdot x} \text{ if } a \cdot \nu^2 + b \cdot \nu + c = 0 \wedge 2 \cdot \nu \cdot a + b = 0 \\
 y(x, C_1, C_2) \leftarrow y_0(x, C_1, C_2) + Y(x) \\
 y'(x, C_1, C_2) \leftarrow \frac{d}{dx} y(x, C_1, C_2) \\
 (A \ B) \leftarrow \left(\begin{array}{l} y(x_0, C_1, C_2) = y_0 \\ y'(x_0, C_1, C_2) = y'_0 \end{array} \right) \text{ solve } C_1, C_2 \rightarrow \\
 \left(\begin{array}{c} y(x, C_1, C_2) \\ A \\ B \\ y(x, A, B) \end{array} \right)
 \end{array} \right|
 \end{aligned}$$

Лист 1

Останнім рядком підпрограми є вектор вивідних даних, послідовними компонентами якого є: загальний розв'язок ЗДР (1); значення сталої C_1 ; значення сталої C_2 ; частинний розв'язок ЗДР (1), який задовольняє початковим умовам (розв'язок задачі Коші).

Слід звернути увагу на те, що функція $y(x, C_1, C_2)$ вказаного вектора має аргумент червоного кольору. Зазвичай системою «Mathcad» цей колір використовується для попередження про неможливість проведення обчислення чи інші відхилення від норми. При наведенні курсора на проблемну (червону) частину спливає контекстний коментар, який є тут не завжди достатньо інформативним. В нашому випадку, наприклад, система повідомляє: "Ця змінна не визначена". Дійсно, у посібниках користувача можна знайти директиву, що робота програми повинна закінчуватися тільки числовими результатами. Але практична перевірка показала, що виведення аналітичного результату можливе, якщо це здійснюється матрицею, в якій будуть знаходитися і аналітичні, і числові дані, що і відбувається в описаній вище програмі. Таким чином, програма знаходить завжди вірний, хоча і несанкціонований результат.

Задача Коші для лінійного неоднорідного ДР другого порядку:
 $ay'' + by' + cy = \lambda e^{\nu x}; y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0$

▢

$K(a, b, c, x_0, y_0, y'_0, \lambda, \nu)$

$W := K(1, -4, 3, 0, 1, 0, 9, 4)$ <= внесіть числові значення параметрів

Загальний розв'язок:

$y(x, C_1, C_2) := W_0 \rightarrow 3 \cdot e^{4 \cdot x} + C_2 \cdot e^{3 \cdot x} + C_1 \cdot e^x$

Розв'язок задачі Коші:

$y(x) := W_3 \rightarrow 3 \cdot e^{4 \cdot x} - 5 \cdot e^{3 \cdot x} + 3 \cdot e^x$

Лист 2

Вище (лист 2) показана повна програма розв'язку ЗДР та її застосування на прикладі задачі Коші:

$$y'' - 4y' + 3y = 9e^{4x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (4)$$

Горизонтальна лінія це місце згортки регіону розміщення підпрограми, зображеної на листі 1.

Як бачимо, для розв'язку задачі необхідно лише ввести числові значення параметрів заданого рівняння, як аргументи функції $K(a, b, c, x_0, y_0, y'_0, \lambda, \nu)$, завдяки чому вони стають доступними для підпрограми. А, оскільки, в ній використовуються співвідношення (3), які виключають процес інтегрування, шуканий результат (загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші) з'являється практично миттєво.

Список використаних джерел

1. Завгородній О. І., Соловиченко О.В., Левкін Д.А., Сичова Т.О. Звичайні диференціальні рівняння. Основи теорії та методика розв'язування задач. – Харків: ДБТУ, 2024.– 117 с.
2. Копась І.М. Диференціальні рівняння.– К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018.– 126с.
3. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика: повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб.– К.: Книги України ЛТД, 2010.– 470с.
4. Обчислювання та програмування в Mathcad. / Паранчук Я.С., Мороз В.І.. – Львів: ЛПІ, 2013. – 364 с.