10. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 248с.
11. Новоселов С.Н. Специальный курс тригонометрии. – М.: Наука, 1957. – 492с.

Анотація

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ПАРАМЕТРІВ РОБОТИ АГРЕГАТУ ПО ВНЕСЕННЮ ОРГАНІЧНИХ ДОБРИВ МЕТОДОМ РОЗКИДАННЯ

Мельник В.І., Романашенко О.А.

У статті розкриваються питання процесу деформації, яка відбувається у купі органічних добрив при формуванні з неї валку.

Abstract

METHOD OF OPTIMAL PARAMETERS OF WORK BY IN ORGANIC FERTILIZERS BY PUSHING METHOD

V. Melnik, A. Romanashenko

In article got theme about deformation process, who processed in burt of organic fertilizers.

УДК 624.04+539.3

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ РАБОЧИХ ОРГАНОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАШИН С ОБРАБАТЫВАЕМЫМИ НЕУПРУГИМИ СПЛОШНЫМИ СРЕДАМИ

Ловейкин В.С., д.т.н., проф., Човнюк Ю.В., к.т.н., доц., Тисленко А.Б., асп.

Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

Исследована пространственно-временная эволюция волновых пучков в (резонансных) анизотропных нелинейно-непружных средах, которые возникают при взаимодействии рабочих органов строительных машин с обрабатываемой средой на основе анализа топологии поверхностей волновых нормалей, которые отвечают возможным типам нормальных волн в таких средах (строительные/бетонные смеси). Получено линейное дифференциальное уравнение n -го порядка каторое описывает эволюцию медленно переменной комплексной амплитуды произвольной моды с точностью $(\lambda/a)^n$*, где* λ *- длина волны излучения, a - характерный поперечный размер пучка. При описании эффектов самовлияния в таких средах для комплексной амплитуды получено нелинейное уравнение типа уравнения Хироти, которое является комбинацией уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Корвета-де Вриза.*

Постановка проблемы. Во всех реальных материалах при воздействии на них рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми (неупругими сплошными) средами, протекают волновые процессы, причем расчет характеристик параметров этих волн составляет зачастую основу динамического расчета соответствующей конструкции строительной машины, выполненной из того или иного материала (в соответствии с эффектом Зоммерфельда существует обратное воздействие обрабатываемой среды на рабочий орган (строительной) машины). В настоящий момент методы динамического расчета конструкций строительных машин (в частности, их рабочих органов) и обрабатываемых сред, находящих в упругой стадии, хорошо разработаны и по ним имеется обширная научно-техническая и справочная литература. Значительно меньшее число исследований посвящено проблемам динамики/статики систем, работающих за пределами упругих состояний [1-11].

Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматриваются главным образом для одномерных задач [5], реже – для двух- и трехмерной постановки [6].

Хорошо известно, что учет пластических свойств обрабатываемых сред (строительных/бетонных смесей, материалов) имеет весьма существенное значение при динамических расчетах (как самих указанных сред, так и обрабатывающих их рабочих органов строительных машин), поскольку пластические деформации поглощают значительную часть энергии сообщаемого материалу/среде ударного воздействия. Это соображение определяет актуальность и значимость для практики проблемы учета действительных свойств обрабатываемых сред, материала самой конструкции рабочего органа строительной машины при наличии динамических нагрузок, в частности, проблемы определения закономерностей распределения волн деформаций в массивных рабочих органах машин, находящихся в однородном напряженно-деформированном состоянии (как, впрочем, и самих обрабатываемых (неупругих) сплошных сред, моделируемых непрерывным континуумом).

Глубоких и всесторонних исследований главным образом особенностей распространения трехмерных (двух- и одномерных) волн в сплошных средах, обрабатываемых рабочими органами машин, применяемых в строительстве (в производстве строительных материалов, в строительных (современных) технологиях), на взгляд авторов настоящей работы, проведено еще недостаточно. По-видимому, главной причиной такого положения дел является сложность проведения подобных исследований (в частности, получение адекватных физико-механических моделей взаимодействующих рабочих органов строительных машин и обрабатываемых ними сплошных (неупругих) сред). Кроме того, желателен и практически востребован, в особенности, в „инженерно-конструкторской среде”, анализ уравнений динамики неупругих сред/тел в наиболее общей постановке, когда физические соотношения, характеризирующие их, имеют форму произвольных перекрестных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций [2]. Эти зависимости носят весьма общий характер, что позволяет использовать полученные в [6] результаты для широкого класса сплошных неупругих сред, обладающих первоначальной изотропией. Эти результаты желательно также распространить на некоторые частные виды реальных сред (металлы, грунты, бетон) путем конкретизации формы перекрестных зависимостей, на задачи динамики, волнообразований (и их пространственно-временной эволюции) в затвердевающих средах, вопросы статики которых изучены в [6-11].

Анализ последних исследований и публикаций. Вопросы распространения неупругих волн деформаций рассматривались ранее главным образом для одномерных задач – в трудах Х.А. Рахматулина и его школы (например в работе [5]). Некоторые вопросы распространения, закономерности, особенности пространственно-временной эволюции волнообразований в неупругих средах (в двух- и трехмерной постановке) изучены в [1-6], а статические задачи для затвердевающих сред были предметом исследований авторов [6-11]. Однако, следует заметить, цитируемые работы (по видимому, ввиду сложности, нелинейных свойств моделируемых сред) посвящены, в основном, анализу скоростей распространения волн, поддерживаемых обрабатываемыми средами, либо анализу сил, напряжений, деформаций, возникающих в затвердевающих средах (для частных случаев, геометрии тел) при рассмотрении одномерных, плоских и пространственных задач статики, при оценке несущей способности систем (в т.ч. рабочих органов строительных машин) из хрупких материалов.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена данная статья. Анализ условий возникновения (зарождения) волнообразований, пространственно-временной эволюции нелинейных волн/волновых пучков, их устойчивости, трансформации в нелинейные периодические волны стационарного профиля (т.н. кноидальные) либо в уединенные (солитоны), характерных для неупругих сплошных сред, имеющих как правило, нелинейные физические/геометрические свойства, обладающих дисперсией (и диссипацией), процессов самовоздействия интенсивных волновых пучков не был проведен.

Цель настоящей статьи состоит в установлении основных особенностей/закономерностей возникновения, пространственно-временной эволюции нелинейных волнообразований (нелинейных волн, нелинейных волновых пучков), возникающих при взаимодействии рабочих органов строительных машин с обрабатываемыми неупругими сплошными средами, трансформации указанных волн в волны стационарного профиля (в приближении волнового пучка), в создании адекватной физико-механической модели/уравнений рассматриваемых процессов, которая бы учитывала физическую и геометрическую нелинейности среды, дисперсию (и диссипацию) методами, развитыми в работах [12, 13].

Изложение основных результатов исследования:

1. Общие уравнения динамики неупругих сред.

Будем рассматривать класс сплошных сред, физические соотношения которых имеют вид [6]:

$$T = T(\Gamma, \theta); \qquad \sigma = \sigma(\Gamma, \theta), \tag{1}$$

где: T – интенсивность касательных напряжений;
σ – среднее напряжение;
Γ – интенсивность деформаций сдвига;
θ – объемная деформация.

Величины T и Γ являются соответственно вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. Величины σ и θ – соответственно первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций. Соотношения (1) описывают, таким образом, перекрестные зависимости между инвариантами напряженного и деформированного состояния среды.

Будем также исходить из соотношений деформационной теории [11]:

$$\begin{cases} \sigma_i = \sigma(\Gamma, \theta) + 2\dfrac{T(\Gamma, \theta)}{\Gamma} e_{ii}; \\ \tau_{ij} = 2\dfrac{T(\Gamma, \theta)}{\Gamma} e_{ij}; \qquad (i, j) = \overline{(1,3)}, \end{cases} \tag{2}$$

где: $e_{ii} = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_i} - \dfrac{\theta}{3}; \quad e_{ij} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i});$ - компоненты девиатора деформаций;
u_j – компоненты вектора перемещений, а остальные обозначения общепринятые.

Динамические уравнения равновесия имеют вид:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad i \neq j, \tag{3}$$

где: X – i-тая компонента массовой силы, ρ – плотность обрабатываемой среды.

Используя (2), из (3) получаем систему трех дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered} (\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma})\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \frac{2}{\Gamma}\sum_{j=1}^{3} e_{ij}[\frac{\partial T}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x_j} + (\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \frac{T}{\Gamma})\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j}] + \\ + \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma}\frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} + \frac{T}{\Gamma}\nabla^2 u_i + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad i = \overline{(1, 3)}. \end{gathered} \tag{4}$$

Выражения для производных от величины Γ по координатам имеют вид:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x_j} = \frac{2}{\Gamma}\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} e_{km} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_m}. \tag{5}$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i}; \quad \nabla^2 u_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}. \tag{6}$$

Подставляя выражения (5) и (6) в (4), получим:

$$\sum_{j=1}^{3} \{ (\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \frac{T}{3\Gamma}) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{2}{\Gamma} e_{ij} [\frac{\partial T}{\partial \theta} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{2}{\Gamma} (\frac{\partial T}{\partial \Gamma} - \tag{7}$$

$$- \frac{T}{\Gamma}) \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} e_{km} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_m \partial x_j}] + \frac{2}{\Gamma} \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} \sum_{m=1}^{3} e_{jm} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_m \partial x_i} + \frac{T}{\Gamma} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \} +$$

$$+ X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i = \overline{(1, 3)}.$$

Имеем систему трех квазинелинейных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций u_i. Уравнения (7) являются общими уравнениями динамики сплошных сред при перекрестных зависимостях между инвариантами тензоров напряжений и деформаций.

Скорости распространения трехмерных волн - нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являются, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций и напряжений, можно определить, исходя из кинематических и динамических условий совместимости [6]. При этом на поверхности разрыва, уравнение которой $\omega = (\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3, t) = 0$, компоненты девиатора деформаций, а также величины Γ и θ (связанные с первыми производными перемещений) – непрерывны. В дальнейшем также будем полагать, что система координат $(\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \tilde{\delta}_3)$ совпадает с направлениями главных осей деформаций (напряжений) в рассматриваемой точке среды. В этом случае $e_{ij} = 0$.

Значения квадратов скоростей N - распространения волны по нормали к фронту определяются соотношением:

$$N^2 = \frac{(\frac{\partial \omega}{\partial t})^2}{\sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial \omega}{\partial x_j})^2}; \tag{8}$$

Направляющие косинусы l_i вектора нормали к фронту в локальной системе координат, совпадают с главными осями, -

$$l_i^2 = \frac{(\frac{\partial \omega}{\partial x_i})^2}{\sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial \omega}{\partial x_j})^2}. \tag{9}$$

Значения N могут быть найдены из условия равенства нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} b_{11}; & b_{12}; & b_{13}; \\ b_{21}; & b_{22}; & b_{23}; \\ b_{31}; & b_{32}; & b_{33}; \end{vmatrix} = 0, \qquad (10)$$

где:

$$b_{11} = a_{11}l_1^2 + \frac{T}{Г}(l_2^2 + l_3^2) - \rho N^2; \quad b_{12} = a_{12}l_1l_2; \quad b_{13} = a_{13}l_1l_3;$$

$$b_{21} = a_{21}l_2l_1; \quad b_{22} = a_{22}l_2^2 + \frac{T}{Г}(l_3^2 + l_1^2) - \rho N^2; \quad b_{23} = a_{23}l_2l_3;$$

$$b_{31} = a_{31}l_3l_1; \quad b_{32} = a_{32}l_3l_2; \quad b_{33} = a_{33}l_3^2 + \frac{T}{Г}(l_1^2 + l_2^2) - \rho N^2; \qquad (11)$$

$$a_{ij} = (\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \frac{T}{3Г} + \frac{2}{Г}e_{ii}\frac{\partial T}{\partial\theta}) + \frac{2}{Г}e_{jj}[\frac{2}{Г}e_{ii}(\frac{\partial T}{\partial Г} - \frac{T}{Г}) + \frac{\partial\sigma}{\partial Г}];$$

$$a_{ii} = (\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} + \frac{4T}{3Г} + \frac{2}{Г}e_{ii}\frac{\partial T}{\partial\theta}) + \frac{2}{Г}e_{ii}[\frac{2}{Г}e_{ii}(\frac{\partial T}{\partial Г} - \frac{T}{Г}) + \frac{\partial\sigma}{\partial Г}].$$

На основании (11) можно заключить, что, вообще говоря, $a_{ij} \neq a_{ji}$. Здесь, и в дальнейшем, полагаем $l_i = \frac{k_i}{|\vec{k}|}$, где $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3)$ - волновой вектор, $i = \overline{(1, 3)}$. В общем случае (при $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, l_3 \neq 0$) кубическое относительно N^2 уравнение (10) определяет три независимые скорости распространения волн.

Исследования, проведенные в [6], относительно характера разрывов показывают, что в отличие от идеально-упругой среды, чисто продольные и чисто поперечные волны имеют место только при совпадении нормали к фронту волны с одним из главных направлений.

Так, при $l_i = 1(l_j = l_k = 0)$ имеем:

$$(a_{ii} - \rho N^2)(\frac{T}{Г} - \rho N^2)^2 = 0, \qquad (12)$$

откуда:

$$N_1 = \sqrt{\frac{a_{ii}}{\rho}}; \quad N_2 = N_3 = \sqrt{\frac{T}{\rho Г}}, \qquad (13)$$

где: N_1 – скорость распространения продольных волн;
$N_{2,3}$ – то же, поперечных волн.

В случае деформации значения N определяются на основании (10), (11) из выражения:

$$2\rho N^2 = (a_{11} + \frac{T}{Г})\cos^2\alpha + (a_{22} + \frac{T}{Г})\sin^2\alpha \pm$$
$$\pm\{[(a_{11} - \frac{T}{Г})\cos^2\alpha - (a_{22} - \frac{T}{Г})\sin^2\alpha]^2 + 4a_{12}a_{21}\sin^2\alpha\cos^2\alpha\}^{\frac{1}{2}}, \qquad (14)$$

где: α – угол между нормалью к фронту и направлением главного нормального напряжения σ_1, т.е.:

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{\vec{k}_i}{\left|\vec{k}\right|}\cdot\vec{i}_{\sigma_1}\right)}{1}. \tag{15}$$

(В (15) $\vec{i}_{\sigma_1}$ - орт вдоль направления главного нормального напряжения σ_1). Значения N, соответствующие значениям $\alpha = 0$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, являются, вообще говоря, экстремальными. Исследование (14), проведенное в [6], показывает, что могут существовать и промежуточные экстремумы $N(\alpha_1)$ и $N(\alpha_2)$, определяемые выражениями:

$$\begin{cases} \rho N^2(\alpha_1) = \dfrac{a_{11}a_{22} - (\sqrt{a_{12}a_{21}} + \frac{T}{\Gamma})^2}{(a_{11} + a_{22} - 2\frac{T}{\Gamma}) - 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}; \\[2ex] \rho N^2(\alpha_2) = \dfrac{a_{11}a_{22} - (\sqrt{a_{12}a_{21}} - \frac{T}{\Gamma})^2}{(a_{11} + a_{22} - 2\frac{T}{\Gamma}) + 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}, \end{cases} \tag{16}$$

причем:

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_1 = \dfrac{(a_{22} - \frac{T}{\tilde{A}}) - \sqrt{a_{12}a_{21}}}{(a_{11} + a_{22} - 2\frac{T}{\tilde{A}}) - 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}; \\[2ex] \cos^2\alpha_2 = \dfrac{(a_{22} - \frac{T}{\tilde{A}}) + \sqrt{a_{12}a_{21}}}{(a_{11} + a_{22} - 2\frac{T}{\tilde{A}}) + 2\sqrt{a_{12}a_{21}}}. \end{cases} \tag{17}$$

2. Закономерности распространения волн в неупругих обрабатываемых рабочим органом строительной машины, средах: металл, грунт, бетон.

2.1. Рассмотрим среду, уравнения состояния которой описываются теорией малых упругопластических деформаций [14], в частности пластичные металлы. Соотношение (1) при этом имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ji} = K + \frac{G}{3} + \frac{4}{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial \Gamma} e_{ii}e_{jj}; \\ a_{ii} &= K + \frac{4G}{3} + \frac{4}{\Gamma}\frac{\partial G}{\partial \Gamma} e_{ii}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

где: $G = G(\tilde{A})$ - секущий модуль диаграммы зависимости T от Γ;

K=const – модуль объемной деформации.

Таким образом:

$$\frac{\partial T}{\partial \Gamma} = G + \frac{\partial G}{\partial \Gamma}\Gamma; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K, \tag{19}$$

а выражения (11) для коэффициентов a_{ij}, a_{ii} записываются в форме:

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} = K + \dfrac{G}{3} + \dfrac{4}{\tilde{A}}\dfrac{\partial G}{\partial \tilde{A}} e_{ii} e_{jj}; \\ a_{ii} = K + \dfrac{4G}{3} + \dfrac{4}{\tilde{A}}\dfrac{\partial G}{\partial \tilde{A}} e_{ii}^2. \end{cases} \tag{20}$$

Исследование результатов (10) и (20), проведенное в [6], показывает, что скорости распространения волн деформаций в рассматриваемой среде существенным образом зависят от: 1) вида напряженного состояния; 2) взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей; 3) степени развития и пластической деформации в рассматриваемой точке среды.

Анализ соотношений (14), (20) для трех характерных видов напряженно-деформированного состояния плоской деформации неупругой обрабатываемой среды, подчиняющейся теории малых упругопластических деформаций, следует проводить в соответствии с зависимостями:

а) равномерной двухосной деформации ε1= ε2, ε3=0;

б) одноосной деформации ε1≠0, ε2= ε3=0;

в) чистого сдвига ε1=- ε2, ε3=0.

При этом зависимость между Т и Г следует принимать в форме:

$$T = G_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right)\Gamma, \tag{21}$$

а

$$G = G(\Gamma) = G_0\left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_S}\right); \quad \frac{dG}{d\Gamma} = -\frac{G_0}{2\Gamma_S}. \tag{22}$$

где: G_0 - начальный модуль сдвига;

$\tilde{A}_S$ - предельное значение интенсивности деформаций сдвига, соответствующее точке диаграммы, где $\dfrac{dG}{d\tilde{A}} = 0$.

Следует также принимать, что $K = \dfrac{5}{3}G_0$.

Анализ векторных диаграмм ($\dfrac{\rho N_1^2}{G_0}$ и $\dfrac{\rho N_2^2}{G_0}$) для случая плоской деформации среды, описываемой теорией малых упругопластических деформаций, проведенный [6] для различных значений отношения $\tilde{A}/\tilde{A}_S$ ($0 \le \tilde{A}/\tilde{A}_S \le 1$), показывает, что (за исключением случая равномерной деформации) диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей по мере приближения $\tilde{A}/\tilde{A}_S$ к единице. В случае чистого сдвига при $\tilde{A}/\tilde{A}_S = 1$ значение N_2 в направлении главных касательных напряжений равно нулю, а соответствующее значение $N_1 \Rightarrow \max$. При $\tilde{A}/\tilde{A}_S \to 0$ независимо от вида напряженно деформированного состояния векторные диаграммы N_1 и N_2 переходят в окружности.

2.2. Для сред, обладающих внутренним трением, в частности для реальных грунтов, может быть использована модель сжимаемой жесткоупругопластической среды [15], соотношения (1) имеют вид:

$$T = G_0 \Gamma - fK\theta; \quad \sigma = K\theta, \tag{23}$$

где: $G_0 = const$ - модуль сдвига при чистом сдвиге $(\sigma = 0)$;

$K = const$ - модуль объемной деформации;

$0<f<1$ – коэффициент внутреннего трения.

Эта модель позволяет описать основные закономерности деформирования грунтовых сред, в частности, влияние среднего напряжения на вид зависимости между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, некоторые особенности процесса разгрузки, а также реализует возможность непосредственного перехода от зависимостей напряжения-деформации к условию предельного равновесия.

При $\lambda = -f\dfrac{\sigma}{T} \geq 1$ (в [15] сжимающие напряжения и деформации укорочения считались положительными), как это следует из (23), деформаций сдвига в среде не возникает. В этом случае касательные напряжения полностью воспринимаются силами внутреннего трения и состояние среды „жесткое”. При $\lambda = -f\dfrac{\sigma}{T} \leq 1 - \dfrac{\tau_s}{T}$ состояние среды пластическое, τ_s - предельное касательное напряжение.

Деформационные зависимости (23) справедливы при $1 - \dfrac{\tau_s}{T} < \lambda = -f\dfrac{\sigma}{T} < 1$ когда состояние среды „упругое”. Именно для этого случая в работе рассматриваются вопросы распространения нелинейных волн деформаций в неупругой обрабатываемой среде.

На основании (23) имеем:

$$\frac{\partial T}{\partial \Gamma} = G_0; \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = -fK; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \Gamma} = 0; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K, \tag{24}$$

и выражения (11) для коэффициентов a_{ij} и a_{ii} записываются в форме:

$$\begin{cases} a_{ij} = K + \dfrac{G}{3} - \dfrac{2}{\tilde{A}} fK(1 - \dfrac{2\theta}{\tilde{A}^2} e_{ij}) e_{jj}; \\ a_{ii} = K + \dfrac{4G}{3} - \dfrac{2}{\tilde{A}} fK(1 - \dfrac{2\theta}{\tilde{A}^2} e_{ii}) e_{ii}, \end{cases} \tag{25}$$

где: $G = \frac{T}{\tilde{A}} = G_0 - fK\frac{\theta}{\tilde{A}}$.

Очевидно, что для данной среды в отличие от (20), $a_{ij} \neq a_{ji}$. Исследование результатов (10), (11) и (25) показывает [6], что скорости распространения волн деформаций в рассматриваемой среде существенным образом зависят от: 1) вида напряженного состояния; 2) взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей в рассматриваемой точке среды. Анализ векторных диаграмм (($\frac{\rho N_1^2}{G_0}$ и $\frac{\rho N_2^2}{G_0}$)-приведенных скоростей распространения волн), построенных по соотношениям (7) и (25), следует проводить для четырех характерных видов напряженно-деформированных состояний плоской деформации жесткоупругопластической среды:

а) равномерного двухстороннего укорочения ε1= ε2<0, ε2=0;

б) одноосного укорочения ε1 <0, ε2= ε3=0;

в) чистого сдвига ε1=- ε2, ε1<0, ε3=0;

г) одноосного удлинения ε1= ε3=0, ε2>0.

Следует принять $K = \frac{2}{\sqrt{3}}G_0$ и $f = 0{,}5$.

За исключением случая равномерной деформации диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей [6]. Значение N_1 в направлении деформаций укорочения при прочих равных условиях больше, чем в направлении деформаций удлинения. При чистом сдвиге векторная диаграмма N_1 является эллипсом, диаграмма N_2 - практически не отличается от окружности.

2.3. Рассмотрим среду, уравнения состояния которой описываются деформационной теорией пластичности бетона [16].

Соотношения (1) при этом имеют вид (в [16] сжимающие напряжения и деформации укорочения считались положительными):

$$T = G_0(1 - \frac{\varGamma}{2\varGamma_S})\varGamma; \quad \sigma = K_0(1 - \frac{\varGamma}{2\varGamma_S})(\theta - g_0\varGamma^2), \tag{26}$$

где: $G_0 = const$ и $K_0 = const$ - соответственно начальные модули сдвига и объемной деформации;

g_0 - модуль дилатации;

$\varGamma_S = \varGamma_S(\lambda) = \varGamma_S(0)\cdot\tilde{k}(\lambda)$ - предельная интенсивность деформаций сдвига; $\tilde{k} = \tilde{k}(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^2}{4} + 1}; \quad \lambda = -f\frac{\sigma}{T}$;

$\tilde{A}_S(0)$ - значение $\tilde{A}_S$ при чистом сдвиге;

f – коэффициент внутреннего трения бетона, определяемый по значениям пределов прочности бетона при одностороннем сжатии R_c, одностороннем растяжении R_p и чистом сдвиге T_c формулой: $f = \dfrac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}$.

Предложенная модель позволяет описать основные закономерности деформирования бетона, в частности, влияние среднего напряжения на вид зависимостей между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций, зависимость $\tilde{A}_S$ от вида напряженного состояния, явление дилатации, а также реализует возможность непосредственного перехода от зависимостей напряжения – деформации к условию прочности бетона. На основании (26) имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial \tilde{A}} = G_0[1 - \dfrac{(1+3\tilde{k}^2)\theta - (3+\tilde{k}^2)g_0\tilde{A}^2}{2(1+\tilde{k}^2)(\theta - g_0\tilde{A}^2)}\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}_s}]; \\ \dfrac{\partial T}{\partial \theta} = -fK_0\dfrac{\tilde{k}}{2(1+\tilde{k}^2)}\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}_s}; \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial \tilde{A}} = -K_0[2g_0(1-\dfrac{\tilde{A}}{2\tilde{A}_s})\tilde{A} + \dfrac{(\theta\tilde{k}^2 - g_0\tilde{A}^2)}{(1+\tilde{k}^2)}\dfrac{1}{\tilde{A}_s}]; \\ \dfrac{\partial \sigma}{\partial \theta} = K_0[1 - \dfrac{1}{(1+\tilde{k}^2)}\dfrac{\tilde{A}}{\tilde{A}_s}]. \end{cases} \qquad (27)$$

Для данной модели среды, как и для жесткоупругопластической среды, $a_{ij} \neq a_{ji}$. Исследование результатов (10) и (11) для бетона показывает, что скорости распространения волн деформаций в последнем существенно зависят от [6]:

1) вида напряженного состояния;
2) взаимной ориентации нормали к фронту и главных осей;
3) степени развития пластических деформаций в рассматриваемой точке среды.

Анализ векторных диаграмм ($\dfrac{\rho N_1^2}{G_0}$ и $\dfrac{\rho N_2^2}{G_0}$) для случая плоской деформации бетона (для вариантов одноосного укорочения и чистого сдвига), проведенный в [6], показывает, что диаграммы величин N_1 и N_2 в значительной степени отклоняются от окружностей. При $\tilde{A}/\tilde{A}_S \to 1$ скорости распространения волн, вообще говоря, уменьшаются.

При одноосном сжатии скорости волн N_1 имеют максимум, расположенный вблизи биссектрисы угла между главными осями; скорости же волн N_2 достигают максимальных значений в направлениях главных осей, где они являются, вообще говоря, волнами сдвига.

2.4. Затвердевающие среды составляют самостоятельный класс сплошных сред и характеризуются рядом специфических свойств, являясь в определенном смысле аналогом пластических сред [6-10].

При описании физических свойств затвердевающих сред, как правило, исходят из положений деформационной теории пластичности. В связи с этим помимо инвариантов напряженного состояния среды: интенсивности касательных напряжений T –

$$T^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \tag{28}$$

и среднего значения σ –

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \tag{29}$$

где: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ - главные напряжения в среде, вводят в рассмотрение инварианты деформированного состояния: объемную деформацию θ и интенсивность деформаций сдвига Γ:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{30}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\}^{\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

где: $\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}$; $\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}$; $\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$; $\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$; $\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$; $\gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}$

- соответственно линейные деформации и деформации сдвига;

u_x, u_y, u_z - перемещения.

В дальнейшем будем рассматривать идеальные затвердевающие среды, для которых объемная деформация θ=0.

Одной из главных физических констант затвердевающей среды является предельная интенсивность деформаций сдвига Γ_0. Следует полагать, что затвердевающие среды обладают конечной прочностью, характеризующейся предельным значением интенсивности касательных напряжений T=T_0.

Пластически-затвердевающая среда в начальной стадии деформирования способна воспринимать лишь гидростатическое давление, и приобретает способность воспринимать T лишь после достижения величиной Γ значения Γ_0. По видам зависимости между интенсивностью касательных напряжений и интенсивностью деформаций сдвига идеальные затвердевающие среды в данной работе относим к идеальным пластически-затвердевающим средам (аналог идеальной жесткопластической среды).

Для получения искомых скоростей полагаем, что в идеальной жесткопластической среде $\sigma = \chi\tau_s$ (где χ – приведенное среднее напряжение), а соотношения (2) представим в форме:

$$\sigma_i = \chi\tau_s + 2\frac{\tau_s}{\Gamma}l_{ii}; \quad \tau_{ij} = 2\frac{\tau_s}{\Gamma}l_{ij}. \tag{32}$$

Подставляя (32) в динамические уравнения равновесия (3), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\chi + 2\frac{l_{ii}}{\Gamma}) + \sum_{j=1}^{3}\frac{d}{dx_i}(\frac{2l_{ij}}{\Gamma}) + q_i = \frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};$$
$$(i,\ j) = \overline{(1,\ 3)}; \quad i \neq j; \quad q_i = \frac{X_i}{\tau_s}; \quad k^* = \frac{\tau_s}{\rho}. \tag{33}$$

Условие несжимаемости имеет вид:

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \tag{34}$$

Таким образом, в рассматриваемом случае $e_{ii} = \varepsilon_i$ и уравнения (33) можно представить в форме:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_i} + 2\frac{\partial}{\partial x_i}[\frac{1}{\Gamma}(\frac{\partial u_i}{\partial x_i})] + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}[\frac{1}{\Gamma}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})] + q_i = \frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2};$$
$$(i,\ j) = (1,\ 3); \quad i \neq j; \tag{35}$$

Уравнения (35) являются квазилинейными уравнениями второго порядка относительно функций u_i. Указанные уравнения можно представить [6] в форме:

$$\frac{\partial \chi}{\partial x_i} + \frac{\nabla^2 u_i}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma}\sum_{j=1}^{3}(1 - \psi_i \psi_j)\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i x_j} + +q_i = \frac{1}{k^*}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}; \quad i = (1,\ 3), \tag{36}$$

где: $\psi_i = \frac{2\varepsilon_i}{\Gamma}$ - приведенные значения главных деформаций.

Величины ψ_i связаны между собой следующими очевидными соотношениями:

$$\begin{cases} \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 0; \\ (\psi_1 - \psi_2)^2 + (\psi_2 - \psi_3)^2 + (\psi_3 - \psi_1)^2 = 6. \end{cases} \tag{37}$$

В [6] определены скорости распространения трехмерных волн – поверхностей слабых разрывов деформаций и напряжений (первых производных u_i и функции χ). Очевидно, что данные волны представляют собой также поверхности сильных разрывов вторых производных u_i (т.н. волны формоизменения в жесткопластической среде).

Введем обозначения: $n^2 = \frac{\Gamma}{k^*}N^2 = \frac{\rho\Gamma}{\tau_s}N^2$.

Возможные значения n^2 можно получить, решив уравнение:

$$\begin{vmatrix} c_{11}; & c_{12}; & c_{13}; \\ c_{21}; & c_{22}; & c_{23}; \\ c_{31}; & c_{32}; & c_{33}; \end{vmatrix} = 0, \qquad (38)$$

где:

$c_{11} = \frac{\Gamma}{g^2} l_1;\quad c_{12} = [1 - \psi_1(\psi_1 - \psi_2) l_1^2 - \frac{\Gamma}{k^*} N^2] l_2;\quad c_{13} = \psi_1(\psi_2 - \psi_3) l_1 l_2 l_3;$

$c_{21} = -\frac{\Gamma}{g^2} l_2;\quad c_{22} = [1 - \psi_2(\psi_2 - \psi_1) l_2^2 - \frac{\Gamma}{k^*} N^2] l_1;\quad c_{23} = [1 - \psi_2(\psi_2 - \psi_3) l_2^2 - \frac{\Gamma}{k^*} N^2] l_3;$

$c_{31} = \frac{\Gamma}{g^2} l_3;\quad c_{32} = \psi_3(\psi_2 - \psi_1) l_1 l_2 l_3;\quad c_{33} = [1 - \psi_3(\psi_3 - \psi_2) l_3^2 - \frac{\Gamma}{k^*} N^2] l_2;$

$g = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2};$ $\omega_i, \omega_j, \omega_k$ - частные производные по соответствующим координатам уравнения поверхности разрывов

$l_i = \frac{\omega_i}{g}$ - направляющие косинусы нормали к поверхности разрывов;

N – скорость распространения волны по нормали.

Раскрывая определитель системы (38), получим для $n^2 = \frac{\Gamma}{k^*} N^2$ следующие выражения:

$$1)\ n^2 = 1; \qquad (39)$$

$$2)\ n^2 = 1 - [(\psi_1 - \psi_2) l_1^2 l_2^2 + (\psi_2 - \psi_3) l_2^2 l_3^2 + (\psi_3 - \psi_1) l_3^2 l_1^2]. \qquad (40)$$

Скорости распространения волн в обрабатываемой жесткопластической среде описываются выражениями:

$$N = n\sqrt{\frac{\tau_s}{\rho \Gamma}}. \qquad (41)$$

В 1-м случае ($n^2 = 1$) векторная диаграмма скоростей распространения волн деформаций представляет собой сферу радиусом $\sqrt{\tau_s / (\rho \Gamma)}$.

Отношение $\tau_s / \tilde{A}$ является секущим модулем сдвига диаграммы $T = \tau_s = const$ для рассматриваемой точки среды, определяемым интенсивностью деформаций сдвига в последней. Очевидно, что при заданном значении τ_s увеличение Γ ведет к уменьшению скоростей распространения волн.

Во 2-м случае форма векторной диаграммы скоростей распространения волн зависит от вида напряженного состояния в рассматриваемой точке. Максимальное значение скорости волн имеют в направлении главных осей ($l_i = 1;\ l_j = l_k = 0$).

В этих направлениях векторная диаграмма N случая 2 касается сферической диаграммы случая 1. В соответствии с (37) величины ψ_i можно представить как функции одного параметра φ известными соотношениями:

$$\psi_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi - \frac{\pi}{3}); \;\; \psi_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi + \frac{\pi}{3}); \;\; \psi_3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}\cos(\varphi). \tag{42}$$

При этом зависимость (40) запишется в виде:

$$n^2 = 1 - 4[l_1^2 l_2^2 \sin^2\varphi + l_2^2 l_3^2 \sin^2(\varphi - \frac{\pi}{3}) + l_3^2 l_1^2 \sin^2(\varphi + \frac{\pi}{3})]. \tag{43}$$

(В дальнейшем изложении будем полагать, как прежде, $l_i = \frac{k_i}{|\vec{k}|}$).

3. Дифференциальное уравнение для амплитуды огибающей волн, распространяющихся в обрабатываемой среде. Приближение волновых пучков.

Используя подходы, развитые в [12, 13], установим дифференциальное уравнение для амплитуды огибающей волнообразований (приближение волновых пучков), распространяющихся в обрабатываемой среде. (Модели последней рассмотрены в предыдущем пункте).

Важнейшей характеристикой обрабатываемой линейной среды является ее закон дисперсии $F(\vec{k}, \Omega)$, где Ω - частота, $\vec{k}$ - волновой вектор волн, поддерживаемых этой средой. Указанный закон определяет число и характер нормальных волн. При разработке и обосновании различных приближенных методов решения физических (физико-механических) задач часто полезным оказывается исследование топологических свойств функции $F(\vec{k}, \Omega)$. С точки зрения задач волнообразовании и их последующего распространения в виде стационарных волновых пучков ($\Omega = const$) закон дисперсии $F(\vec{k}, \Omega)$ устанавливает связь между четырьмя величинами: тремя конспонентами волнового вектора $\vec{k}$, и собственно частотой Ω. Корни дисперсионного уравнения относительно Ω представим в явном виде:

$$\Omega^{(l)} = \Omega^{(l)}(k_x, k_y, k_z), \quad l = \overline{(1, \ \tilde{N})}, \tag{44}$$

где индекс l нумерует типы нормальных волн в среде (всего их $\tilde{N}$), а ось $\vec{M}$, вдоль которой распространяется волна, выбирается в соответствии с геометрией задачи. При рассмотрении неравновесных (неупругих) сред соотношения (44), вообще говоря, становятся комплексными. В случае неограниченной (неупругой) среды, если в плоскости M=0 заданны амплитуды всех нормальных волн, общее решение задачи может быть представлено через фурье-интеграл:

$$\vec{E} = (\vec{r}, \Omega) = \sum_{l=1}^{+\infty} \int \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \vec{E}_l(k_x, k_y, k_z) \exp\{i[k_x x + k_y y + k_z z - \Omega^{(l)}(k_x, k_y, k_z)t]\} \times \\ \times dk_x dk_y dk_z, \;\; i^2 = -1, \tag{45}$$

$$\vec{E}_l = (k_x, k_y, k_z) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \vec{E}_l(\xi, \eta, \zeta) \exp\{-i[k_x\xi + k_y\eta + k_z\zeta]\} d\xi d\eta\, d\zeta. \tag{46}$$

Топология любой из 2N поверхностей (44) в общем случае может быть очень сложной, однако для волнового пучка, поперечные размеры которого немного больше длины волны излучения (λ), существенным при интегрировании в (45) оказываются только небольшие участки этих поверхностей, которые мы будем предполагать достаточно гладкими и взаимно не пересекающимися. Кроме того, распространяющуюся в обрабатываемой среде волну считаем квазимонохроматической, ($\left|\frac{\Delta\Omega^{(l)}}{\Omega^{(l)}}\right| << 1$ где $\Delta\Omega^{(l)}$ – девиация частоты l-ой нормальной волны). Существенные спектральные амплитуды $\vec{E}_l(k_x, k_y, k_z)$ сосредоточены на l-й поверхности в окрестности точки ($\Omega_0^{(l)}$, $k_0^{(l)}$) с эффективным поперечником $\chi^{(l)}_{nx,y,z}$, удовлетворяющим неравенству:

$$\chi^{(l)}_{nx,y,z} << \min\{k^{(l)}_{xo},\ k^{(l)}_{yo},\ k^{(l)}_{zo}\}, \tag{47}$$

либо

$$\chi^{(l)}_{nx,y,z} << \left|\vec{k}_0^{(l)}\right| = \sqrt{(k^{(l)}_{xo})^2 + (k^{(l)}_{yo})^2 + (k^{(l)}_{zo})^2}. \tag{48}$$

В случае нефокусированного пучка $\chi^{(l)}_{nx,y,z} \sim \grave{a}^{-1}_{x,y,z}$, $\grave{a}_{x,y,z}$ - его характерные поперечные размеры вдоль соответствующих осей декартовой системы координат.

Предположим, что структура волнового поля при M=0 обусловливает возбуждение в неупругой среде только одной нормальной моды. Введем радиус-вектор $\vec{\chi} = \vec{k} - \vec{k}_0$ и запишем $\Delta\Omega = \Omega - \Omega_0$. Тогда общее решение (45) можно представить в виде двух множителей, один из которых в силу неравенства (47) или (48) медленно меняющийся:

$$\vec{E}(\vec{r},\, t) = \vec{s}A(\vec{r},\, t)e^{i[\vec{k}_0\cdot\vec{r} - \Omega_0 t]},\ \ |\vec{s}| = 1, \tag{49}$$

$$\begin{aligned} A(\vec{r},\, t) = \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} A(\chi_x,\ \chi_y,\ \chi_z)\exp\{i[\chi_x x + \chi_y y + \chi_z z - \Delta\Omega t]\}\times \\ d\chi_x d\,\chi_y d\chi_z, \end{aligned} \tag{50}$$

где: $A(\chi_x,\ \chi_y,\ \chi_z)$ определяется аналогично (46), индекс l здесь и в дальнейшем опускаем.

Разложим функцию $\Delta\Omega(\chi_x,\ \chi_y,\ \chi_z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\chi_x = \chi_y = \chi_z = 0$:

$$\Delta\Omega(\chi_x,\ \chi_y,\ \chi_z) = \sum_{n=1,\, m+j\le n}^{M^*} P_{nmj}\chi_x^{n-m-j}\chi_y^m\chi_z^j, \tag{51}$$

где

$$P_{nmj} = \frac{1}{(n-m-j)!m!j!}\left.\frac{\partial^n\Omega}{\partial k_x^{n-m-j}\partial k_y^m\partial k_z^j}\right|_{k_{x0},\, k_{y0},\, k_{z0}}. \tag{52}$$

Подстановка (51) в подинтегральное выражение (50) при фиксированном M^* и начальном распределении $\grave{A}(\xi, \eta, \zeta)$ решает задачу распределения $\grave{A}(\vec{r}, t)$

во всех точках $M\neq 0$ с требуемой точностью.

В задачах анализа волнообразований и последующего их распространения в неупругих средах вместо интегрального решения (50) удобно иметь приближенное дифференциальное уравнение для амплитуды $\grave{A}(\vec{r}, t)$. Соответственно взятому числу членов разложения (51) интегральное представление (50) позволяет сконструировать уравнение:

$$i\frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{n=1, m+j\le n}^{M^*} (-i)^n (-1) P_{nmj} \frac{\partial^n A}{\partial x^{n-m-j} \partial y^m \partial z^j} = 0, \tag{53}$$

фурье-образом которого в k-пространстве является соотношение (51). Поскольку в x-, y-, z-направлениях обрабатываемая среда предполагается неограниченной, а начальное распределение $\vec{E}(\xi, \eta, \zeta)$ имеет фурье-преобразование (46), граничные условия при $|\eth|, |y|, |z| \to \infty$ можно считать нулевыми для всех производных по x, y и z. Таким образом, понижение порядка исходной системы дифференциальных уравнений по переменной t до единицы в рамках неравенств (47), (48) и $\left|\frac{\Delta\Omega^{(l)}}{\Omega^{(l)}}\right| << 1$ влечет за собой появление в (53) производных сколь угодно высокого порядка по x, y и z, причем члены, содержащие s-тую производную, являются малыми членами порядка $(\chi_n^{(l)} / |\vec{k}_0^{(l)}|)^s$.

Ограничиваясь в (51) учетом только квадратичных членов разложения, получаем квазипараболическое уравнение:

$$\begin{aligned} &i\frac{\partial A}{\partial t} + P_{200}\frac{\partial^2 A}{\partial (x')^2} + P_{210}\frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial y'} + P_{201}\frac{\partial^2 A}{\partial x'\partial z'} + P_{211}\frac{\partial^2 A}{\partial y'\partial z'} + \\ &+ P_{202}\frac{\partial^2 A}{\partial (z')^2} + P_{220}\frac{\partial^2 A}{\partial (y')^2} = 0, \end{aligned} \tag{54}$$

где: $\eth' = \tilde{o} + Đ_{100} t,\ y' = y + Đ_{010} t,\ z' = z + Đ_{001} t.$

Величины $Đ_{100}, Đ_{010}, Đ_{001}$ определяют наклон лучевого вектора к оси $\vec{M}$, а различие коэффициентов $P_{2ij}, (i, j) = (0, 1, 2),\ i + j \le 2$, в (54) обусловлено различной кривизной поверхности $\Omega(k_x,\ k_y,\ k_z)$ в ортогональных направлениях. В простейшем случае изотропной неупругой среды ось $\vec{M}$ можно выбрать в качестве направления распространения луча ($k_{x0} = k_{y0} = k_{z0} = 0$). Вычисление коэффициентов (52) показывает, что в уравнении (54) содержатся только члены с четными n и $m = \overline{(0,\ n)};\ j = \overline{(0, n)}.$ Причем: $P_{200} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_x^2}$; $P_{210} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial k_x \partial k_y}$;

$P_{201} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial k_x \partial k_z}$; $P_{211} = \frac{\partial^2\Omega}{\partial k_y \partial k_z}$; $P_{202} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_z^2}$; $P_{220} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Omega}{\partial k_y^2}$; $P_{400} = \frac{\partial^4\Omega}{24\partial k_x^4}$; $P_{422} = \frac{\partial^4\Omega}{4\partial k_y^2 \partial k_z^2}$

и т.д.

Для того, чтобы использовать полученные выше значения скоростей N для различных моделей неупругих сред необходимо их связать с групповой скоростью распространения волн (волнообразований, волновых пучков), как с реальной скоростью, поддерживаемой обрабатываемой средой. (Следует напомнить, что именно с групповой (а не с фазовой!) скоростью в среде переносится энергия).

Так, $P_{100} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial k_x}$; $P_{010} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial k_y}$; $P_{001} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial k_z}$. Поэтому вектор групповой скорости волны, распространяющейся в обрабатываемой среде, обозначим $\vec{V}_g$. Последний имеет следующие компоненты:

$$\vec{V}_g = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x};\ \frac{\partial\Omega}{\partial k_y};\ \frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right). \tag{55}$$

Тогда:

$$\left|\vec{V}_g\right| = \left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{56}$$

Используя (55), (56), можем записать:

$$N^2 = \left|\vec{V}_g\right|^2 = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial k_z}\right)^2. \tag{57}$$

4. Особенности эффектов самовоздействия волнообразований в нелинейных неупругих анизотропных средах, обрабатываемыми робочими органами строительных машин

Рассмотрение интенсивного волнового пучка с узким угловым спектром в неупругой анизотропной среде, обрабатываемой рабочими органами строительных машин (ударное/виброударное воздействие или обработка указанной среды), исследуем, включив в дисперсионное уравнение (44) зависимость от $|A|^2$, где А – амплитуда нелинейной волны [12].

Предполагая пучок одномерным, ограничимся в разложении Ω только линейными по $|A|^2$ членами:

$$\Delta\Omega(k_x, |A|^2) = P_{100}\Delta k_x + P_{200}\Delta k_x^2 + P_{300}\Delta k_x^3 + q_1|A|^2 + q_1\Delta k_x|A|^2 + \ldots, \tag{58}$$

где: $q_1 = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial|A|^2}$, $q_2 = -\dfrac{\partial P_{100}}{\partial|A|^2}$, $\Delta k_x = k_x - k_{x0}$, коэффициенты P_{j00} определены выше.

Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид известного уравнения Хироты [13]:

$$i\left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{q_2}{3}\left(2|A|^2\frac{\partial A}{\partial x'} + A^2\frac{\partial A^*}{\partial x'}\right) - P_{300}\frac{\partial^3 A}{\partial x'^3}\right] + P_{300}\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} - q_1|A|^2 A = 0. \tag{59}$$

Восстановление уравнения (59) по разложению (58) однозначно, за исключением последнего слагаемого, которое дает более сложную конструкцию в силу того, что $(\grave{A}^2\grave{A}^*)_{\tilde{o}} = 2|\grave{A}|^2\grave{A}_{\tilde{o}} + \grave{A}^2\grave{A}^*_{\tilde{o}}$. (Здесь символ ()* означает комплексно-сопряженную величину).

Обычно эффекты самовоздействия исследуются в рамках нелинейного уравнения Шредингера ($P_{300} = q_2 = 0$). Его устойчивость по отношению к продольным возмущениям определяется условием $q_1 P_{200} < 0$ [12].

При этом вдали от резонансов P_{200} имеет вполне определенный знак и свойство нелинейной неупругой среды фокусировать или дефокусировать луч определяется исключительно знаком q_1. В окрестности резонансов ситуация существенно изменяется. Оказывается, что при переходе через резонанс знак q_1 остается постоянным, а из-за изменения знака дисперсии образование солитонов имеет место только с одной стороны от резонанса, например, слева. Проявление самих нелинейных свойств в резонансных нелинейных неупругих средах также специфично. Дело в том, что нормальной волной является суперпозиция мод невзаимодействующих подсистем. Каждая из них характеризуется своими нелинейными свойствами, вклад которой определяется весом данной моды в связанной волне. <u>Будем называть эти нелинейности расстроечными</u>, подчеркивая тем самым зависимость невозмущенных частот от амплитуды. Кроме того, имеет место еще и <u>нелинейность взаимодействия</u>, которая характеризуется зависимостью параметра связи от амплитуды. Простейшим параметром проявления этой нелинейности является феномен нелинейного „коллективного” поведения осцилляторов (синергетические эффекты) квазикристаллической решетки, возникающий при прохождении волны через обрабатываемую нелинейную неупругую середу, моделируемую на финальной (завершающей) стадии уплотнения вибрационным полем совокупностью невзаимодействующих осцилляторов. При этом свободное поле описывается линейным волновым уравнением, а осцилляторы моделируются как квазилинейны.

Число различных нелинейностей неупругой среды, таким образом, вообще должно определятся количеством независимых параметров дисперсионного уравнения (44), и поэтому их результирующее действие, по крайней мере качественно, можно исследовать, вводя зависимость этих параметров от амплитуды.

Ввиду громоздкости для характерных нелинейной неупругой среде взаимодействий эти коэффициенты здесь не приведены.

В зависимости от выбранных направления распространения и частоты коэффициенты $q_{1,2}$ могут менять знак. Кроме того, $q_{1,2}$ имеют полюсы на краях области нераспространения. Выбором направления распространения и частоты в пределах полосы существования волн в среде можно добиться одновременного обращения в нуль коэффициентов P_{20} и q_1.

В этом случае самовоздействие пучка волны в нелинейной неупругой среде будет описывается комплексным модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза. В гидродинамике это уравнение для действительной функции также используется в тех случаях, когда коэффициент при нелинейном члене в уравнении Кортевега-де Вриза по каким-либо причинам обращается в нуль. „Однонаправленность” этого типа уравнений определяет в данном случае кроме асимметрии явление самофокусировки также эффект самоискривления траектории луча или лучей, если начальное условие задачи допускает образование солитонов. В общем же случае (59) есть комбинация нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза, в котором роль каждого члена определяется заданным направлением распространения волн с рабочей частотой, на которой анализируют пространственно-временную эволюцию волнообразований в нелинейной неупругой среде, вызванных эффектами взаимодействия обрабатываемого материала/смеси с рабочим органом строительной машины.

Выводы

1. Исследованы основные закономерности распространения волновых пучков в (резонансных) нелинейных неупругих средах, обрабатываемых вибрационным полем, и возникающих вследствие взаимодействия их с рабочими органами строительных машин, на основе анализа топологии поверхностей волновых нормалей, соответствующих возможным типам нормальных волн в таких средах (строительные/бетонные смеси на заключительной стадии (вибро-, виброударного) формования и уплотнения в рамках модели квазитвердой среды).
2. Получено линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, описывающее пространственно-временную эволюцию медленно меняющейся комплексной амплитуды произвольной моды с точностью порядка $(\lambda/a)^n$, где λ – длина волны излучения, a – характерный поперечный размер волнового пучка, в рамках принятой гипотезы и модели узкого волнового пучка, с узким угловым спектром.
3. При описании эффектов самовоздействия в таких средах для комплексной амплитуды получено нелинейное уравнение типа уравнения Хироты, являющееся комбинацией нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза.
4. Полученные результаты и созданные физико-механические модели обрабатываемых рабочими органами строительных машин нелинейных упругих сред (типа строительных/бетонных смесей) в процессах (вибро-), виброударного формирования могут служить основой для коррекции и уточнения существующих методик инженерного расчета динамических характеристик волн (волнообразований), возникающих при подобном взаимодействии, а также параметров прочности важных узлов самих строительных машин.

Список использованных источников

1. Аксентян Г.К. О построении фронта двумерных волн в предварительно-напряженной жесткоупруго пластической среде // Г.К.Аксентян,

Г.А.Гениев. - Научные труды ЦНИИСК им. Кучеренко. Теории и расчет сооружений. – М., 1970. – Вып. 13.
2. Гениев Г.А. О некоторых закономерностях распространения трехмерных волн деформаций в неупругих средах и средах с внутренним трением // А.Г.Гениев. - Известия АН СССР. Серия: Механика твердого тела. – 1975. - №1.
3. Гениев Г.А. Некоторые вопросы распространения волн сжатия в грунтах /Г.А. Гениев. – В кн.: Исследования по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций. – М., 1958.
4. Юргенс Д.И. Задача о распространении цилиндрических волн в бетоне // Д.И.Юргенс. - Научные труды ЦНИИСК им. Кучеренко.– М., 1971. – Вып. 19.
5. Рахматуллин Х.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках / Х.А.Рахматулин, Ю.А.Демьянов. – М.: Наука, 1961. – 350 с.
6. Гениев Г.А. Вопросы механики неупругих тел. / Г.А.Гениев, В.С.Лейтес. – М.: Строиздат, 1981. – 161 с.
7. Гениев Г.А. Некоторые вопросы статики сплошной среды // Г.А.Гениев. - Строительная механика и расчет сооружений. – 1969. - №1.
8. Ивлев Д.Д. К теории идеально-затвердевающих сред // Д.Д.Ивлев. - ДАН СССР. – 1960. – Т.130. - №4.
9. Прагер В. Об идеально затвердевающих материалах // В.Прагер. - Механика. – 1958. - №3 (49).
10. Чирас А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела // А.А. Чирас. – Вильнюс, 1971. – 130 с.
11. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики / П.А.Лукаш. – М., 1978. – 250 с.
12. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах / В.И. Карпман. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
13. Лукомский В.П. К теории дифракции волновых пучков в анизотропных средах / В.П. Лукомский // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1983. – Т. 84. – Вып. 2. – С. 513-525.
14. Ильюшин А.А. Пластичность / А.А. Ильюшин. – М.: ОГИЗ, 1948. – 480 с.
15. Гениев Г.А. К вопросу о постановке смешанной задачи теории упругости и статики сыпучей среды // Г.А. Гениев. - Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. - №5.
16. Гениев Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона / Г.А. Гениев, В.Н.Киссюк, Г.А.Тюпин. – М.: Строиздат, 1974. – 250 с.

Анотація

ОСОБЛИВОСТІ НЕЛІНІЙНО-НЕПРУЖНИХ ХВИЛЬ ПРИ ВЗАЄМОДІЇ З РОБОЧИМИ ОРГАНАМИ БУДІВЕЛЬНИХ МАШИН У НЕЛІНІЙНО-НЕПРУЖНИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Тисленко А.Б.

Досліджена просторово-часова еволюція хвильових пучків у (резонансних)

анізотропних нелінійно-непружних середовищах, які виникають при взаємодії робочих органів будівельних машин з оброблюваним середовищем, на основі аналізу топології поверхонь хвильових нормалей, які відповідають можливим типам нормальних хвиль у таких середовищах (будівельні/бетонні суміші). Отримане лінійне диференціальне рівняння n-го порядку, яке описує еволюцію повільно змінної комплексної амплітуди довільної моди з точністю $(\lambda/a)^n$, де λ – довжина хвилі випромінювання, a – характерний поперечний розмір пучка. При опису ефектів самовпливу у таких середовищах для комплексної амплітуди отримане нелінійне рівняння типу рівняння Хіроти, яке є комбінацією рівняння Шредінгера та комплексного модифікованого рівняння Корвета-де Вріза.

Abstract

THE SPACE-TIME EVOLUTION OF WAVE BEAMS IN (RESONANT) ANISOTROPIC NONLINEAR, NONELASTIC MEDIA GENERATED BY INTERACTION OF WORK ORGANS OF BUILDING MACHINES WITH A WORKED MEDIA IS INVESTIGATE

V. Loveikin, Y. Chovnyk, A. Tislenko

The space-time evolution of wave beams in (resonant) anisotropic nonlinear, nonelastic media generated by interaction of work organs of building machines with a worked media is investigated by analyzing the topology of the surfaces of the wave normals corresponding to possible types of normal waves in the medium (building/concrete mixtures). A linear differential equation of the n-th order is derived which describes the evolution of a slowly varying complex amplitude of an arbitrary mode with an accuracy of the order of $(\lambda/a)^n$, where λ is the wavelength of the radiation and a is a characteristic transverse dimension of the beam. An analysis of self-action effects in such media leads to a nonlinear equation for the complex amplitude of the Hirota equation type which is a combination of the nonlinear Schroedinger equation and complex modified Korteweg-de Vries equation.