

**Міністерство освіти і науки України
Державний біотехнологічний університет**



**А. О. ПАК М. І. ПОГОЖИХ Н. В. СМЕТАНКІНА
Т. О. СИЧОВА О. В. СІНЯЄВА**

ФІЗИКА

Навчальний посібник

**Харків
2024**

УДК 53.008
ББК 22.3 (075.8)

Ф-93

Рецензенти:

провідний науковий співробітник відділу термогазодинаміки енергетичних машин Інституту проблем машинобудування ім.А.М.Підгорного НАН України д-р техн. наук, проф. Стрельникова О.О.

завідувач кафедри електропостачання та енергетичного менеджменту Державного біотехнологічного університету д-р техн. наук, проф. О.О. Мірошник;
професор кафедри інтегрованих електротехнологій та енергетичного машинобудування Державного біотехнологічного університету д-р техн. наук, проф. В. О. Потапов.

Рекомендовано вченою радою Державного біотехнологічного університету, протокол №13 від 20 червня 2024 р.

Ф-93 **Пак, А. О.** Фізика: навчальний посібник для студентів спеціальностей 123 ОПП «Комп'ютерна інженерія», 125 ОПП «Кібербезпека та захист інформації», 174 ОПП «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка»/ А. О. Пак, М. І. Погожих, Н. В. Сметанкіна, Т. О. Сичова, О. В. Сіняєва; Державний біотехнологічний університет. – Х., 2024. – 245 с.

ISBN

Навчальний посібник орієнтований на студентів, що навчаються за спеціальностями 123 ОПП «Комп'ютерна інженерія», 125 ОПП «Кібербезпека та захист інформації», 174 ОПП «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка». Посібник спрямований на поглиблення розуміння фізичних явищ, які є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність сучасного спеціаліста.

Посібник складається з 5 розділів, в яких викладені основи механіки, молекулярної фізики та термодинаміки, електростатики, електродинаміки, електромагнетизму, хвильової оптики, фізики атомного ядра та елементарних частинок. В посібнику наведені приклади розв'язання типових задач.

УДК 53.008
ББК 22.3 (075.8)

© Пак А. О., Погожих М. І.,
Сметанкіна Н. В., Сичова Т. О.,
Сіняєва О. В.
© Державний біотехнологічний
університет, 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. Кінематика матеріальної точки	8
1.1.1. Механіка. Поступальний рух. Кінематика поступального руху	8
1.1.2. Система відліку. Переміщення. Довжина шляху. Швидкість. Прискорення. Нормальне, тангенціальне, повне прискорення	9
1.2. Динаміка матеріальної точки	13
1.2.1. Перший закон Ньютона. Інерційні системи відліку	13
1.2.2. Другий закон Ньютона. Поняття сили, маси. Третій закон Ньютона	14
1.2.3. Імпульс. Основний закон руху. Закон збереження імпульсу	16
1.2.4. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл	18
1.2.5. Кінетична енергія тіла. Властивості кінетичної енергії	20
1.2.6. Тіло у силовому полі. Потенційна енергія та її властивості	20
1.2.7. Закон збереження і перетворення механічної енергії	21
1.2.8. Фундаментальні сили. Їх властивості	22
1.2.9. Сили пружності. Закон Гука. Енергія пружно-деформованого тіла	23
1.2.10. Закон всесвітнього тяжіння. Потенційна енергія тіла, що підняте над Землею. Вага тіла	26
1.2.11. Сила тертя, види тертя	28
1.3. Кінематика і динаміка обертального руху твердого тіла	29
1.3.1. Елементи кінематики обертального руху. Кутова швидкість і прискорення. Зв'язок кутових кінематичних характеристик з лінійними швидкостями і прискореннями точок, що належать тілу	29
1.3.2. Момент інерції. Кінетична енергія тіла, що обертається. Основне рівняння динаміки обертального руху	32
1.3.3. Момент імпульсу. Закон зміни та збереження моменту імпульсу	35
1.4. Елементи механіки рідини	37
1.4.1. Рідинний стан речовини. Закон Паскаля. Закон Архімеда	37
1.4.2. Плин рідини. Рівняння Бернуллі	39
1.4.3. Внутрішнє тертя. Ламінарний і вихровий режими течії. Число Рейнольдса: гідромеханічна подібність	42
1.5. Елементи спеціальної теорії відносності	43
1.5.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца	43
1.5.2. Відносність довжини та проміжків часу	44

1.5.3. Межі застосування класичної механіки	45
1.5.4. Релятивістський імпульс. Основний закон релятивістської динаміки. Границі застосування класичної механіки	45
1.5.5. Кінетична енергія. Релятивістський вираз для кінетичної енергії	47
1.5.6. Взаємозв'язок маси та енергії	49
Приклади розв'язання задач	50

2. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

2.1. Молекулярна фізика	81
2.1.1. Статистичний та термодинамічний методи досліджень	81
2.1.2. Уявлення про ідеальний газ. Рівняння Клапейрона – Менделєєва	82
2.1.3. Виведення рівняння молекулярно – кінетичної теорії ідеальних газів та його порівнювання з рівнянням Клапейрона-Менделєєва	83
2.1.4. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне тлумачення абсолютної температури	85
2.1.5. Число ступенів вільності молекул. Внутрішня енергія ідеального газу. Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності	85
2.1.6. Закон Максвела для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями	87
2.1.7. Барометрична формула. Закон Больцмана для розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі	88
2.2. Основи термодинаміки	90
2.2.1. Термодинамічна система та її параметри. Внутрішня енергія системи	90
2.2.2. Теплота й робота, як дві форми існування енергії. Перший закон термодинаміки	92
2.2.3. Теплоємність ідеальних газів	94
2.2.4. Рівноважні стани, процеси та їх зображення на термодинамічних діаграмах	96
2.2.5. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроесів та адіабатного процесу	97
2.2.6. Межі використання закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул. Уявлення про квантування енергії обертового та коливального рухів молекул	101
2.2.7. Оборотні та необоротні процеси. Кругові процеси (цикли)	101
2.2.8. Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу	103
2.2.9. Ентропія. Другий та третій закони термодинаміки. Статистичне тлумачення ентропії	105

2.2.10. Явища переносу в термодинамічно-нерівноважних системах	107
2.2.11. Середнє число зіткнень та середня довжина вільного пробігу молекул	109
2.2.12. Дослідні закони теплопровідності, дифузії та внутрішнього тертя. Молекулярно-кінетична теорія цих явищ	110
Приклади розв'язання задач	113

3. ЕЛЕКТРИКА ТА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1. Електростатика	129
3.1.1. Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду	129
3.1.2. Взаємодія зарядів. Закон Кулона	129
3.1.3. Електричне поле. Напруженість електричного поля. Принцип суперпозиції. Лінії напруженості. Поле диполя	130
3.1.4. Потік вектора напруженості електростатичного поля. Теорема Остроградського-Гауса для електростатичного поля у вакуумі	134
3.1.5. Робота сил електростатичного поля. Потенційний характер електростатичного поля	137
3.1.6. Потенціал. Еквіпотенціальні поверхні. Напруженість, як градієнт потенціалу	138
3.1.7. Вільні та зв'язані заряди. Провідники та діелектрики. Типи діелектриків	140
3.1.8. Провідники в електричному полі. Електрична ємність провідника	141
3.1.9. Конденсатори. Енергія зарядженого провідника. Енергія електростатичного поля	142
3.2. Постійний електричний струм	144
3.2.1. Електричний струм. Електрорушійна сила. Напряга	144
3.2.2. Закони постійного струму Ома, Джоуля-Ленца. Опір провідників. Потужність струму	148
3.2.3. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа	152
3.2.4. Потужність, коефіцієнт корисної дії джерела струму	154
3.3. Магнітне поле у вакуумі	156
3.3.1. Магнітне поле. Магнітна індукція	156
3.3.2. Закон Біо-Савара-Лапласа	158
3.3.3. Застосування закону Біо-Савара-Лапласа до розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом і поля кругового струму	159
3.3.4. Вихровий характер магнітного поля. Циркуляція вектора магнітної індукції для магнітного поля у вакуумі	162
3.3.5. Магнітне поле заряду, що рухається. Відносний характер магнітного поля	164

3.3.6. Сила, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі. Закон Ампера. Взаємодія паралельних струмів	164
3.3.7. Контур зі струмом у магнітному полі. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі	165
3.3.8. Дія магнітного поля на заряд, що рухається. Сила Лоренца. Рух зарядженої частинки у магнітному полі	166
3.4. Електромагнітна індукція	168
3.4.1. Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца	168
3.4.2. Явище самоіндукції. Індуктивність	169
Приклади розв'язання задач	170
4. ХВИЛЬОВА ОПТИКА	
4.1. Інтерференція світла	193
4.1.1. Інтерференція світла. Когерентність і монохроматичність світлових хвиль. Часова та просторова когерентність	193
4.1.2. Методи отримання інтерференційної картини від двох джерел. Розрахунок інтерференційної картини від двох джерел. Інтерференція в тонких плівках	197
4.2. Дифракція світла	202
4.2.1. Дифракція. Принцип Гюйгенса-Френеля	202
4.2.2. Метод зон Френеля. Прямолінійність розповсюдження світла	203
4.2.3. Дифракція Френеля на круглому отворі і диску	206
4.2.4. Дифракція Фраунгофера на одній щілині та на дифракційних решітках. Дифракційний спектр	208
4.3. Поляризація світла	212
4.3.1. Поляризація світла при відбитті та заломленні на границі двох діелектричних середовищ. Закон Брюстера	212
4.3.2. Поляріоди та поляризаційні призми. Закон Малюса	215
4.3.3. Обертання площини поляризації. Поляриметри та їх використання	217
Приклади розв'язання задач	218
5. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ	
5.1. Елементи квантової механіки	225
5.1.1. Корпускулярно-хвильова подвійність властивостей частинок речовини. Формула де Бройля. Деякі властивості хвиль де Бройля	225
5.1.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга	226
5.2. Будова та лінійчаті спектри воднеподібних систем	228
5.2.1. Моделі атома Томсона і Резерфорда	228
5.2.2. Лінійчатий спектр атома водню	229
5.2.3. Постулати Бора. Досліди Франка і Герца	230
5.2.4. Спектр атома водню по Бору	231

5.3. Елементи фізики ядра	232
5.3.1. Основні властивості та будова ядра	232
5.3.2. Ядерні сили. Енергія зв'язку ядер	234
5.3.3. Радіоактивність. Ядерні реакції. Термоядерні реакції	236
Приклади розв'язання задач	240
Список літератури	244

ВСТУП

Фізика – універсальна наука про основні явища природи, які ця наука відокремлює та описує за допомогою ідей, моделей і законів у вигляді математичних формул і рівнянь [1]. Фізика вивчає «структури Всесвіту», вивчає гармонійний зв'язок між ними, тому фізичні образи можуть бути абстрактними і не завжди очевидними. Фізичні образи кількісні, тому математичне оформлення зв'язків між ними нерозривне.

Фізична наука є основою для розвитку інших наук, як теоретичного напрямку, так і прикладного.

В основі методів пізнання лежать три основні принципи сучасної науки [1 – 3]:

1. Усе на світі є матерією, незалежною від людських почуттів і розуміння.
2. Основна властивість матерії – рух.
3. Матерія та способи її руху відомі людині.

У природі існує багато форм прояву руху матерії: механічна, електрична, електромагнітна, хімічна, психічна, біологічна та ін.

Будь-який фізичний процес відбувається в просторі і часі. Простір і час мають певну властивість, яка називається симетрією: те саме явище може повторюватися за тих самих умов з тим самим результатом. Цей, на перший погляд, зрозумілий принцип є одним із основних проявів природи, відомих людині. Саме це дало змогу провести експериментальні дослідження з подальшим їх узагальненням для всієї природи.

Найпростішим фізичним процесом є механічний рух. Розглянемо основні способи його опису та закони, яким він підпорядковується.

1. ФІЗИЧНІ ОСНОВИ МЕХАНІКИ

1.1. Кінематика матеріальної точки

1.1.1. Механіка. Поступальний рух. Кінематика поступального руху

Механічним рухом називається переміщення тіл, або частин того ж самого тіла в просторі та часі відносно один одного.

Розділ Фізики, що вивчає механічний рух називається механікою [1]. Механіка поділяється на кінематику, динаміку та статику. Кінематика вивчає рух поза залежністю від причин, що спричиняють цей рух.

Спочатку наведемо уявлення про основних "учасників" механічного руху, а саме про їх моделі:

Абсолютно тверде тіло – будь-яке за природою та сполукою тіло, геометрична форма і розміри якого в процесі механічного руху не змінюються.

Абсолютно пружне тіло – будь-яке тіло, що приймає первісні геометричну форму і розміри після зняття механічної дії.

Матеріальна точка – будь-яке тіло, розмірами якого в умовах даного механічного руху можна знехтувати. Знехтувати геометричним розміром можна,

якщо максимальний розмір даного тіла хоча б у десять разів менше за мінімальний розмір того простору, де відбувається рух.

Необхідно особливо звернути увагу на те, що перелічені уявлення – універсальні і не мають ніякого відношення до якогось конкретного тіла: теж саме тіло може бути абсолютно твердим, або пружним залежно від умов механічного руху.

Самі тіла можуть складати одне ціле, що називається механічною системою.

Механічна система – будь-який набір взаємодіючих чи не взаємодіючих тіл що рухаються, штучно відокремлених у просторі. Механічна система може рухатися або знаходитися у спокої відносно інших механічних систем або тіл. Тому сам механічний рух носить відносний характер.

Якщо під час руху усі точки, що належать тілу або механічній системі описують у просторі рівнобіжні незамкнені лінії, то такий рух називають *поступальним*.

Для того щоб змінити будь-який рух треба виконати певну дію. У разі механічного руху такою дією є механічна дія.

Механічна дія – будь-яка взаємодія двох чи декількох тіл, що приводить до зміни механічного руху.

Описати механічний рух означає у будь-який момент часу знайти місце розташування тіла або системи тіл у просторі. Тому уявлення про простір та час є дуже важливими у фізиці. Насамперед, розглянемо яким чином можна вказати де знаходиться тіло. Для цього використовують так звану систему відліку.

1.1.2. Система відліку. Переміщення. Довжина шляху. Швидкість.

Прискорення. Нормальне, тангенціальне, повне прискорення

Система відліку складається з тіла відліку, жорстко закріпленої до нього системи координат, та годинника [1].

Саме тіло, обрана система координат (декартова, сферична, полярна та інші) знаходяться у просторі та часі. Тому треба накласти деякі вимоги до простору та часу. Уявлення про простір та час є такими ж фізичними, як і для інших об'єктів. Дослід свідчить, що для повної характеристики місця знаходження точки у просторі відносно будь-якого іншого тіла треба задати три відстані до неї – три координати. З цього простір вважається трьохмірним. Далі треба встановити: чи змінюється довжина відрізка у різних частинах простору? Ми будемо вважати, що простір, де будемо розглядати рух є однорідним та ізотропним, тобто це *евклідовий простір* – рівнобіжні лінії не перетинаються. Питання про те, яка геометрія реально існуючого простору – це питання фізичне, а відповідь на нього можна отримати лише експериментальним шляхом. Таку ж саму вимогу застосуємо й для часу: у будь-якій системі відліку час є однорідним.

Розглянемо яким чином описується рух матеріальної точки у декартовій системі координат (рис.1.1). У деякий момент часу точка А має координати: x , y , z . Задавши величини кожної координати, можна однозначно характеризувати розташування точки відносно початку координат (тіла відліку). Прямокутна система координат пов'язана з полярною співвідношенням:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти одиничної довжини за координатами.

Через деякий час Δt точка, описавши у просторі лінію, зміститься у положення В (рис.1.2). Лінія, уздовж якої рухається матеріальна точка, називається *траєкторією*. Ділянка траєкторії за час Δt , що проходить точка, називається *довжиною шляху S*.

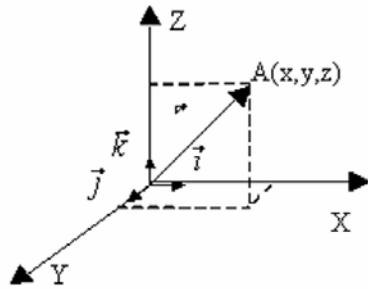


Рис.1.1

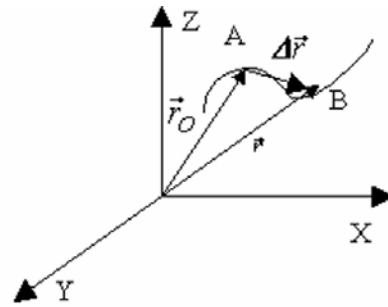


Рис.1.2

Вектор, що з'єднує початкове і кінцеве положення точки на траєкторії називається *переміщенням*:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.2)$$

Модуль переміщення $|\Delta\vec{r}|$ менше або дорівнює довжині шляху (у випадку прямолінійного руху).

Середня швидкість – це векторна величина, яка характеризує деякий середній темп руху:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1.3)$$

За умов $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta S = |\Delta\vec{r}|$ – рух прямолінійний, тому можна ввести уявлення про миттєву швидкість:

Миттєва швидкість – векторна величина. Це швидкість точки у певний момент часу за величиною і напрямком [1]:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (1.4)$$

швидкість вимірюється – $[v]_{SI} = m/c$.

Середнє прискорення скалярна величина, яка характеризує середній темп зміни швидкості:

$$\langle a \rangle = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|v_1 - v|}{\Delta t}, \quad (1.5)$$

прискорення вимірюється – $[a]_{SI} = m/c^2$.

Миттєве прискорення:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.6)$$

Повне прискорення характеризує темп зміни швидкості як за величиною, так і за напрямком (рис.1.3):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_\tau}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}_n}{\Delta t}. \quad (1.7)$$

Перша складова (тангенціальне прискорення) відповідає за зміну величини швидкості, а вектор \vec{a}_τ співпадає з напрямком швидкості.

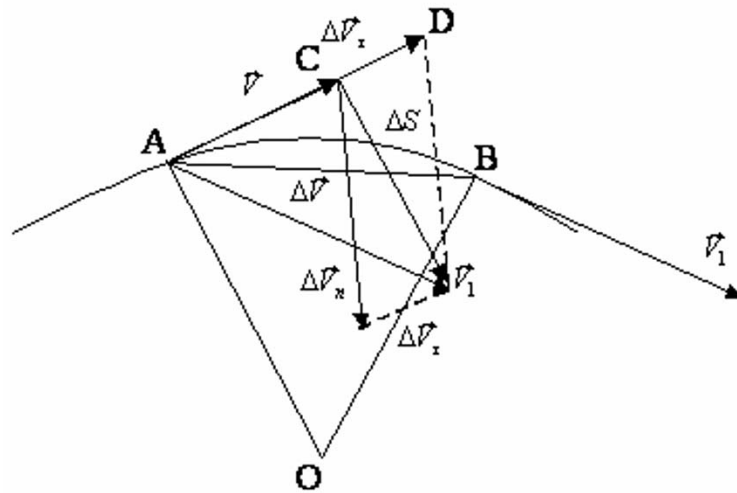


Рис.1.3

Друга складова – (\vec{a}_n), нормальне прискорення, характеризує зміну напрямку швидкості і спрямована перпендикулярно до вектора швидкості:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \quad (1.8)$$

Величина повного прискорення знаходиться за теоремою Піфагора, а напрямком залежить від величин векторів:

$$|a| = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \quad (1.9)$$

Тангенс кута між напрямком швидкості і повним прискоренням знаходиться:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (1.10)$$

Нормальне прискорення знаходиться за формулою:

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.11)$$

де $R = OA$ – радіус кривизни траєкторії у заданій точці.

У загальному випадку, прискорення може бути деякою функцією часу, тобто змінюватися за якимось законом:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = f(t). \quad (1.12)$$

Тоді швидкість буде визначатися:

$$d\vec{v} = \vec{a} \cdot dt = f(t) \cdot dt. \quad (1.13)$$

Якщо $a \neq f(t)$, тобто є сталою величиною, тоді:

$$\vec{v}(t) = \int d\vec{v} = \int \vec{a} \cdot dt = \vec{a} \int dt = \vec{a} \cdot t + \vec{C}, \quad (1.14)$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t, \quad (1.15)$$

де $\vec{v}_0 = \vec{C}$.

Отримаємо формулу для довжини шляху. На підставі (1.4):

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dS}{dt},$$

$$dS = v \cdot dt,$$

$$S = \int dS = \int v \cdot dt = \int (v_0 \pm at) \cdot dt,$$

Тоді:

$$S = v_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \quad (1.16)$$

Якщо вектора швидкості і прискорення співпадають за напрямком, то обирається знак "+", а якщо спрямовані протилежно – знак "-".

Співвідношення (1.15) та (1.16) – основні рівняння кінематики поступального руху матеріальної точки при сталому прискоренні.

Якщо точка рухається у просторі, то кожна з складових швидкості за координатами може змінюватися за своїм законом, що відбивається у *принципі незалежності руху*:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z, \quad (1.17)$$

де \vec{v} – результуюча швидкість у просторі.

Число ступенів вільності – число незалежних координат, за допомогою яких можна описати усі види руху, у яких бере участь тіло або точка. Це уявлення дуже важливе не тільки під час розгляду механічного руху, а й взагалі: наприклад, під час розгляду молекулярно-кінетичної теорії будови речовини.

1.2. Динаміка матеріальної точки

1.2.1. Перший закон Ньютона. Інерційні системи відліку

Динаміка вивчає рух у зв'язку з причинами, що спричиняють цей рух [4 – 7]. Але саме уявлення про механічний рух носить відносний характер, тобто у різних системах відліку можна спостерігати різний характер руху. Наприклад, на столі лежить якийсь предмет. Відносно столу цей предмет знаходиться у спокої, але, якщо спостерігач буде рухатися, то відносно спостерігача предмет буде теж рухатися. Постає питання: де істина? Розв'язання цього питання дуже важливе для уявлень людини про оточуюче середовище. Зі спостерегань відомо, що будь-яке тіло може знаходитися у стані спокою або прямолінійного рівномірного (без прискорення) руху нескінченно довго, якщо на це тіло не діють інші тіла або середовище. Цей досвід дозволяє вважати, що стан спокою або прямолінійного рівномірного руху є властивістю тіл. Щоб змінити цей стан треба прикласти певну дію, тобто тіла нібито мають "пам'ять" про стан спокою або прямолінійний рівномірний рух. Таку властивість тіл було названо інерцією. Саме це уявлення є основою для I-го закону Ньютона. *1-ий закон Ньютона: будь-яке тіло рухається прямолінійно і рівномірно або знаходиться в стані спокою нескінченно довго, поки до нього не прикладено механічної дії.*

Цей важливий закон дає змогу відокремити такі системи відліку, де будь-який рух буде виглядати однаково: якщо тіло знаходиться у стані спокою або рухається прямолінійно та рівномірно, та, якщо тіло рухається з прискоренням, то такий же характер руху буде у будь-якій системі відліку, якщо ці системи відліку є *інерційними*.

Інерційні системи відліку – ті, які рухаються відносно один одного рівномірно і прямолінійно або знаходяться в стані спокою. На рис.1.4 зображено дві системи відліку, одна з яких (штрихована) може рухатися. Так ось ці системи відліку будуть називатися інерційними, якщо штрихована система буде рухатися рівномірно та прямолінійно, або знаходитися у стані спокою. При цьому виконуються перетворення:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}, \vec{a}' = \vec{a}, \quad (1.18)$$

де \vec{V} - швидкість руху штрихованої системи (закон додавання швидкостей).

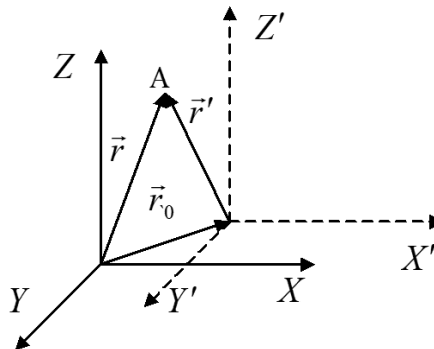


Рис.1.4

Перетворення Галілея, що відбиває принцип відносності у класичній механіці:

$$\vec{r}' = \vec{r}_0 + \vec{V} \cdot t, t' = t. \quad (1.19)$$

З перетворень Галілея витікає вимога до "миттєвої" взаємодії тіл між собою, бо якщо припустити, що взаємодія відбувається з деякою певною швидкістю, то спостерігач у рухомій системі відліку може не "встигнути" зафіксувати результат взаємодії тіл. Тому вважається, що у класичній (ньютонівській) механіці має місце *дальнодія*.

1.2.2. Другий закон Ньютона. Поняття сили, маси. Третій закон Ньютона

Для зміни характеру руху точки треба спричинити механічну дію. Для характеристики, та чисельної оцінки механічної дії запроваджено уявлення про силу. *Сила* – векторна величина, що характеризує механічну дію за величиною та напрямком. У природі існує багато видів сил, які тим чи іншим способом можуть змінювати рух тіла. Незважаючи на різноманітність, більшість сил мають однакові властивості, що є універсальними.

Типи та властивості сил [8, 9]:

Зосереджені, такі сили прикладаються до тіла у якійсь точці та вони мають лінію дії. Зосереджену силу можна переносити уздовж лінії дії, якщо вона прикладена до абсолютно твердого тіла. При цьому результат її дії не зміниться: що тягнути тіло, що штовхати – результат однаковий.

Розподілені, тобто дія їх розподілена за яким-небудь законом уздовж поверхні або в об'ємі. У цьому випадку прийнято говорити про тиск, або механічне напруження. Величина тиску (напруження) визначається як відношення сили, що діє по нормалі до поверхні, до площини поверхні. Якщо розподілена сила рівномірно прикладена до поверхні твердого або нестисливого тіла, то у певних перерізах площини цього тіла механічна напруга (тиск) є сталою

величиною. На цьому принципі працюють багато механічних пристроїв. Так дію сили можна передати за допомогою, наприклад, рідини (гідропідсилювачі). Аналогічний принцип втілено у канцелярську кнопку, де збільшення сили натиску відбувається у стільки разів, у скільки площа кнопки більша за площину її гострої частини.

Окремо наводиться уявлення про так зване силове поле. *Силове поле* – простір, у кожній точці якого діє визначена за величиною, напрямком та природою сила. Це дуже важливе уявлення коли треба розглядати дію між тілами, які безпосередньо не торкаються одне одного. Тобто силове поле виступає у якості деякого "посередника" дії. Властивості силових полів будуть розглянуті на прикладі сил гравітації, електричної, магнітної взаємодії.

Ньютон емпіричним шляхом, та узагальненням набутого людиною досвіду, запропонував принцип прямо пропорційної залежності між причиною (силою) та наслідком цієї причини (прискоренням):

$$\vec{a} = k\vec{F}. \quad (1.20)$$

Питання про коефіцієнт пропорційності не є тривіальним. Але у класичній механіці вважається, що цей коефіцієнт обернено пропорційний масі тіла (інерційній масі). З великою точністю доведено, що інерційна та гравітаційна маси збігаються, але самі уявлення про них різні. *Маса* – є властивістю тіл, що мають різку границю розділу з оточуючим середовищем. Ця властивість має два прояви – інерцію та гравітацію. Більш точного уявлення про масу (у рамках класичної механіки) запровадити неможливо. Тоді k – міра інерційних властивостей тіл:

$$k = \frac{1}{m}, \quad (1.21)$$

де $[k]_{SI} = \text{кг}^{-1}$.

Остаточо, II закон Ньютона виглядатиме:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (1.22)$$

де

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (1.23)$$

Матеріальна точка набуває прискорення уздовж результуючої усіх сил, що діють на точку, величина якого прямо пропорційна величині сили та обернено пропорційна масі точки.

Цей закон виконується для системи матеріальних точок, де \vec{F} – результуюча \vec{F}_i сил, що діють на матеріальну точку масою m_i .

З якою силою можна подіяти на інше тіло? На власному досвіді можна переконатися, що тільки з тією, з якою те тіло буде діяти на нас. Цей факт, що є також одним з проявів природи, відбито у III-ому законі Ньютона:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (1.24)$$

III-й закон Ньютона: Усякій дії існує рівна за величиною і протилежна за напрямком протидія.

1.2.3. Імпульс. Основний закон руху. Закон збереження імпульсу

Сила, що діє певний відрізок часу, призводить до зміни швидкості, тобто до зміни кількості руху [10, 11]. Розглянемо цей факт детальніше, використавши II закон Ньютона:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{a}, \quad (1.25)$$

з чого отримаємо:

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt. \quad (1.26)$$

У класичній механіці вважається, що маса не залежить від швидкості руху тіла - $m \neq f(t)$, тоді:

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} \cdot dt \quad (1.27)$$

Імпульс матеріальної точки, векторна величина:

$$\vec{P}_i = m_i \vec{v}. \quad (1.28)$$

Закон руху: кожна сила, що діє на матеріальну точку призводить до зміни імпульсу з часом.

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F} \quad (1.29)$$

Імпульс тіла – сума імпульсів усіх точок, що утворюють це тіло:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i. \quad (1.30)$$

Якщо розглядати механічну систему, що складається з матеріальних точок, то на кожен точку будуть діяти зовнішні сили (з боку оточуючого середовища) та внутрішні – взаємодія між матеріальними точками.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}} + \sum_{i=1, k=1}^{l, S} \vec{F}_{i, k}^{\text{внут}}. \quad (1.31)$$

Використовуючи III закон Ньютона, отримаємо:

$$\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}, \text{ або } \sum_{i=1, k=1}^{l, S} \vec{F}_{i, k}^{\text{внут}} = 0. \quad (1.32)$$

Тоді у загальному вигляді головний вектор зовнішніх сил є:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{зовн}} = \vec{F}. \quad (1.33)$$

Основний закон динаміки поступального руху для механічної системи або тіла.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.34)$$

Якщо $\vec{F} = 0$, механічна система називається *замкненою*, тобто, зовнішні сили або не діють, або їх результуюча дорівнює нулю, тоді:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0. \quad (1.35)$$

Закон збереження імпульсу: імпульс механічної замкненої системи з часом не змінюється.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n m\vec{v} = \text{const}. \quad (1.36)$$

Для механічної системи, де зосереджені різні тіла, частини тіл або ціле тіло, запроваджується уявлення про *центр інерції* або *центр мас*.

$$r_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i}{m_T} = \sum_{i=1}^n g_i \cdot r_i, \quad (1.37)$$

де $g_i = \frac{m_i}{m_T}$ – масова частка даної частини тіла від загальної маси тіла.

З цього уявлення доводиться закон руху центра мас тіла, що має вигляд:

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = \vec{F}. \quad (1.38)$$

Якщо $\vec{F} = 0$, тоді виконується закон:

$$\vec{P}_c = const. \quad (1.39)$$

$$\frac{d\vec{P}_c}{dt} = 0 \text{ – закон збереження імпульсу центру мас.}$$

За цим законом можна розраховувати рух частин механічної системи будь-яких розмірів у будь-який момент часу.

1.2.4. Робота сили та її вираз через криволінійний інтеграл

Розглядаючи дію сили було встановлено:

$$d\vec{P} = \vec{F} \cdot dt, \quad (1.40)$$

де $\vec{F} \cdot dt$ – імпульс сили. Тобто імпульс можна змінювати не тільки силою, але її дією з часом.

Крім того, сила може діяти під час руху тіла на деякому протязі шляху. Тоді кажуть про роботу сили. Елементарна робота dA знаходиться як:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos \alpha, \quad (1.41)$$

де α – кут між векторами \vec{F} і $d\vec{r}$, вимірюється $[dA]_{SI} = H \cdot m = Дж$.

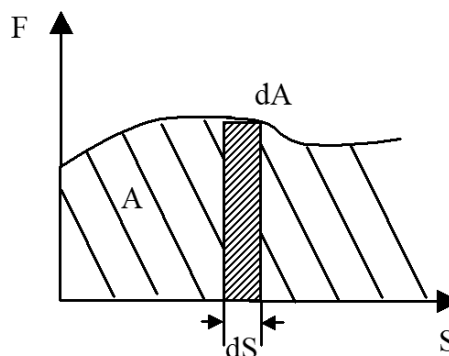


Рис.1.5

Повна робота знаходиться як криволінійний інтеграл функції діючої сили по траєкторії руху і є площею, що обмежена кривою $F(r)$ та віссю S (рис.1.5).

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) \cdot dr \cdot \cos \alpha. \quad (1.42)$$

Властивості роботи:

1. $dA = 0$, якщо $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$. Сила, що діє під таким кутом називається *нормальною (центральною)*. При дії нормальної сили робота не здійснюється.

2. Робота може бути позитивною, $dA > 0$, якщо $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тоді робота здійснюється *над тілом*, а сила називається прискорюючою.

3. Робота може бути негативною, $dA < 0$, якщо $\alpha > \frac{\pi}{2}$. Тоді робота виконується *тілом*, а сила називається гальмуючою.

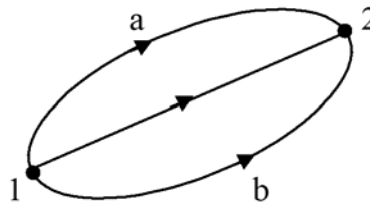


Рис.1.6

Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії руху, а визначається тільки початковим і кінцевим положенням тіла на траєкторії (рис.1.6) називаються *консервативними*. Поле консервативних сил має назву *потенціального*.

$$dA_a = dA_b = dA_{12}. \quad (1.43)$$

Поняття енергії пов'язане з уявленням про роботу. При цьому сама енергія виступає як кількісна міра руху матерії. Щоб змінити енергію потрібно виконати роботу над системою чи тілом, або створити умови для здійснення роботи системою над зовнішнім середовищем. Але це не єдиний спосіб змінити енергію, бо видів енергії, як і форм руху, існує нескінченна безліч.

Енергія ділиться:

- за видами у зв'язку з природою руху: механічна, електрична, електро-механічна, ядерна та ін.;

- за характером щодо механічного руху: *кінетична, потенційна*;

- за відношенням до системи, що розглядається: *внутрішня*, яка характеризує енергію руху і взаємодії часток самої системи; *зовнішня*, яка характеризує енергію системи в цілому, в тому числі її енергію у зовнішньому силовому полі; *повна* – сума внутрішньої і зовнішньої енергії системи.

1.2.5. Кінетична енергія тіла. Властивості кінетичної енергії

Продовжуючи розглядати механічний рух, зосередимо увагу на уявленні про енергію саме цього руху [12, 13]. Для цього виконаємо деякі перетворення з тими уявленнями та законами, що було вже запроваджено:

$$dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \cdot d\vec{r}\right), \quad d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt,$$

тоді

$$dA = \left(\frac{d\vec{P}}{dt} \cdot \vec{v} \cdot dt\right) = v \cdot dP = v \cdot d(mv), \quad (1.44)$$

тому що $\alpha = \hat{F} \cdot \vec{v}$, $\alpha = 0$, $m \neq f(v)$, тоді $dA = mv \cdot dv$, з цього

$$A = m \int v \cdot dv = \frac{mv^2}{2} + C. \quad (1.45)$$

Тобто у тіла з'явилася швидкість завдяки роботі, що витрачено на зміну енергії тіла:

$$A = \Delta E_k, \quad (1.46)$$

де

$$\Delta E_k = \frac{m}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2). \quad (1.47)$$

Кінетична енергія – міра руху тіла з деякою швидкістю.

Властивості кінетичної енергії:

1. $E_k \geq 0$ – завжди, при цьому:

$E_k = 0$ – якщо швидкість руху в даній системі відліку дорівнює нулю;

$E_k > 0$ – якщо швидкість руху в даній системі відліку відмінна від нуля.

Зміна ΔE_k може бути, як позитивною, так і негативною, і визначається знаком роботи що змінює цю енергію.

2. Кінетична енергія має відносний характер, оскільки швидкість – уявлення відносне і залежить від вибору системи відліку.

1.2.6. Тіло у силовому полі. Потенційна енергія та її властивості

Ми вже визначились, що поле сил це спосіб існування матерії, який можна виявити за допомогою "індикатора" (пробника) [1]. Сам пробник повинен збігатися за своєю природою з полем, що виявляється. Тобто, розташувавши такий пробник у силовому полі, ми знайдемо дію на даний пробник деякої сили з боку поля. Величину цієї сили можна визначити механічним шляхом

(динамометром), але природа сили визначається тільки природою самого пробника.

Потенційна енергія – це енергія, пов'язана з місцем розташування тіла (або пробника) у даному місці силового поля. Тому не тільки тіло, а й саме поле може мати потенційну енергію. Величина потенційної енергії визначається як робота, яку потрібно виконати під час переміщення тіла (пробника) з даної точки в нескінченність:

$$E_n = A_{1\infty}, \quad dA = (\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad (1.48)$$

якщо \vec{F} – сила самого поля, тоді зв'язок між силою, що діє у полі, та потенціальною енергією поля наступний:

$$dE_n = -(\vec{F} \cdot d\vec{r}), \quad \text{або} \quad \vec{F} = -\frac{dE_n}{dr}, \quad (1.49)$$

$$\vec{F} = -\text{grad}E_n, \quad (1.50)$$

де

$$\text{grad}E_n = \frac{\partial E_n}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_n}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_n}{\partial z} \cdot \vec{k}. \quad (1.51)$$

У силового поля є здатність накопичувати потенційну енергію. Силоне поле – це згусток енергії.

Потенційна енергія, на відміну від кінетичної, може бути позитивною і негативною, тому що вона пов'язана з місцем розташування тіла, тобто залежить від вибору початку відліку у системі відліку.

1.2.7. Закон збереження і перетворення механічної енергії

Повна механічна енергія системи – це енергія руху системи в цілому, включаючи потенційну енергію системи у силовому полі [1]:

$$E = E_k + E_n. \quad (1.52)$$

Повну механічну енергію системи можна змінити також тільки за рахунок роботи з боку зовнішніх тіл;

Якщо на дану систему не діють зовнішні сили, то повна енергія буде зберігатися – *закон збереження механічної енергії*:

$$E = E_k + E_n = \text{const}. \quad (1.53)$$

Сили, що діють проти руху, називаються *силами тертя*. Вони призводять до розсіювання (дисипації) повної механічної енергії. У цьому випадку відбувається перетворення енергії з "корисних" форм у "менш корисні" (марні).

Енергія, що розсіяна силами тертя, ніколи не може самовільно перетворитися знов у механічну. Найчастіше спостерігається теплове перетворення механічної енергії за рахунок сил тертя, з якими ми познайомимося пізніше. Робота сил тертя залежить від швидкості руху і завжди протилежна напрямку руху. Тобто, сили тертя є неконсервативними, а силові поля, що подібні за характером до таких сил є непотенціальними. Тому в загальному випадку кажуть про закон збереження і перетворення енергії:

Енергія не з'являється і нікуди не зникає, а лише перетворюється з одних видів в інші.

Як правило, напрямок цього перетворення завжди однаковий – з "корисних" форм у "марні" форми енергії.

Особливо необхідно відзначити, що названі закони збереження (імпульсу, енергії) є відбиттям нашого уявлення про час і простір: саме з однорідних властивостей часу й простору, майже "автоматично", виникає вимога для існування законів збереження, які є фундаментом у будь якій науці про природу.

1.2.8. Фундаментальні сили. Їх властивості

Вже відзначалося, що у класичній механіці вважається, що взаємодія між тілами відбувається миттєво: *теорія дальності* [1, 9, 13]. Але, після відкриття існування електромагнітного поля, було встановлено, що максимальна швидкість "передачі" взаємодії обмежена деякою константою c , і з цією швидкістю поширюється світло у вакуумі $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. На цій підставі розроблено *теорію близькодії*. Після появи уявлень про квантову побудову силового поля, було зазначено, що будь-якому силовому полю повинна відповідати якась квантова частинка – *корпускулярно-хвильовий дуалізм властивостей матерії (квантова теорія поля)*. Не зважаючи на різноманітність взаємодій між фізичними тілами, сьогодні вони поділяються на чотири основні види (за мірою зростання інтенсивності): гравітаційна взаємодія; слаба взаємодія; електромагнітна взаємодія; сильна взаємодія. *Гравітаційна* взаємодія має прояв у тому, що будь-які тіла, поза залежністю від природи, електричного заряду між собою притягаються. *Слаба* взаємодія – має дуже складну природу та має прояв при розгляді взаємодії та перетворень у світі елементарних частинок. *Електромагнітна* взаємодія – відбивається у взаємному перетворенні змінних електричних та магнітних полів, та впливу на ці перетворення заряджених частинок. *Сильна* взаємодія – обумовлює такі стійкі утворення у "мікросвіті" як ядра атомів та має теж дуже складну природу.

Усі сили, поза залежністю від природи та типу взаємодії поділяються на два основні види: сили притягання та відштовхування. Особливо необхідно відзначити найпоширеніші сили – сили тертя (опору). Саме ці прояви взаємодії людина може експериментально вимірювати, тобто давати чисельну оцінку самої сили. Розглянемо деякі найпоширеніші у природі сили та їх властивості.

1.2.9. Сили пружності. Закон Гука. Енергія пружно-деформованого тіла

Під дією сили, тіло, що знаходиться у стані спокою, може змінювати свої геометричні розміри. Процес руху часток того ж самого тіла відносно одна одної будемо називати *деформацією*. Внутрішні сили, що виникають під час деформації, називаються силами *пружності*. Сили пружності виступають у якості перешкоди до деформування тіла й завжди направлені проти зовнішніх сил. Сили пружності обумовлені електромагнітною взаємодією частинок (молекул та ін.), що входять до складу та визначають геометричну форму тіла [1, 9, 13].

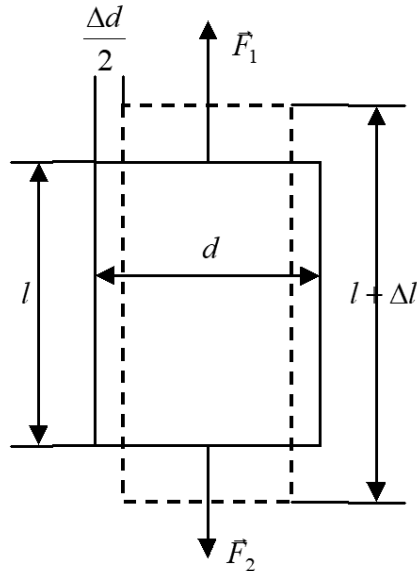


Рис.1.7

Якщо прикласти до циліндру, який виготовлено з металу, силу (рис.1.7), то під дією цієї сили буде спостерігатися деформація. При цьому, запроваджують такі уявлення:

σ – напруга, Н/м²;

$$\frac{F}{S_0} = \sigma; \quad (1.54)$$

ε – подовжня відносна деформація:

$$\varepsilon = \frac{l_0 - l}{l_0} = \frac{\Delta l}{l}; \quad (1.55)$$

ε' – поперечна відносна деформація:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta S}{S}. \quad (1.56)$$

Зв'язок між подовжньою та поперечною деформацією визначається за формулою Пуассона:

$$\varepsilon = -\mu \cdot \varepsilon', \quad (1.57)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, який відбиває фізичну властивість тіла до деформації.

У деякому діапазоні напруги виконується прямо пропорційна залежність між величиною напруги та відносною деформацією тіла. Тоді виконується закон Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (1.58)$$

де E – модуль Юнга, Н/м².

Виконаємо перетворення. З того, що $\sigma = \frac{F}{S}$, отримаємо

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l},$$

або

$$F = \frac{E \cdot S}{l} \cdot \Delta l. \quad (1.59)$$

Якщо замінити $\Delta l = x$ – абсолютна деформація, то

$$\vec{F} = kx \cdot \vec{i}, \quad (1.60)$$

де \vec{i} – орт уздовж напрямку деформації, \vec{F} – сила деформації.

Закон Гука: Сила пружності прямо пропорційна величині абсолютної деформації тіла.

Закон Гука для сили пружності:

$$\vec{F}_n = -kx \cdot \vec{i}, \quad (1.61)$$

де \vec{F}_n – сила пружності, k – коефіцієнт пружності, Н/м.

Цей закон виконується для абсолютно пружних тіл. Пружні властивості будь-яких тіл зручно аналізувати за діаграмою пружних властивостей (рис.1.8).

Немає напруги σ – немає деформації, що відповідає точці О на діаграмі. Далі, ділянка ОА, де виконується прямолінійна залежність між напругою та відносною деформацією, відповідає абсолютно пружному тілу. σ_n – межа прямо пропорційної залежності між напругою та відносною деформацією.

Точці В відповідає *межа пружності*. Після зняття напруги, з цієї точки тіло повертається за прямою лінією FB, але спостерігається залишкова деформація (OF).

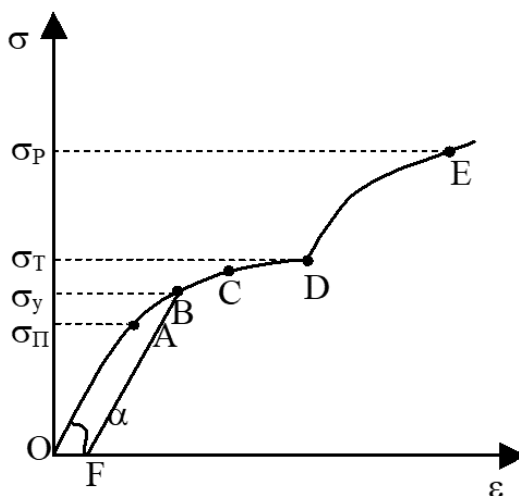


Рис.1.8

Лінія BCD – *область пластичності, плинності* тіла. На цій ділянці виконуються закони внутрішнього тертя, а саме тіло здатне змінювати геометричну форму при малих величинах напруги.

Точка E – *межа міцності*. У цій точці тіло втрачає пластичні властивості й відбувається руйнування цілісності тіла.

Умовно, усі тіла можна поділити залежно від того, є чи немає певної області даного виду деформації. Так, якщо у тіла відсутня область пластичності, таке тіло вважається *крихким*, а якщо відсутня область пружності – *пластичним*, та ін.

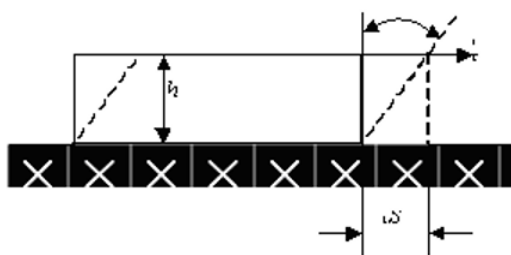


Рис.1.9

Сили пружності можна вважати консервативними, тоді існує зв'язок між потенціальною енергією та силою у вигляді:

$$\vec{F} = -\text{grad}E_n, \quad (1.62)$$

або, у разі деформації повздовж однієї координати

$$F_y = \frac{dE_n}{dx}. \quad (1.63)$$

З цього:

$$dx \cdot F_y = dE_n ; \quad E_n = \int kx \cdot dx, \quad E_n = \frac{kx^2}{2}. \quad (1.64)$$

За формулою (1.64) можна визначити потенційну енергію пружно-деформованого тіла.

Для багатьох матеріалів, у тому числі й для харчових продуктів, відокремлюють *пружність зсуву*. Якщо одна площина тіла стикається з нерухомою твердою поверхнею, а до іншої прикласти тангенціальну напругу, то тіло буде деформуватись, як на (рис.1.9). Існує взаємозв'язок між кутом зсуву та величиною тангенціальної сили:

$$F_\tau = k_\tau \cdot tg(\gamma), \quad (1.65)$$

де k_τ - коефіцієнт пружності зсуву, Н.

1.2.10. Закон всесвітнього тяжіння. Потенційна енергія тіла, що підняте над Землею. Вага тіла

Будь-які тіла, що мають інерційну масу, взаємодіють між собою (тяжінють один до одного) [1, 9, 13]. Така взаємодія називається *гравітаційною*. Ньютоном запропоновано закон всесвітнього тяжіння записати у вигляді:

$$F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (1.66)$$

де $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$ – гравітаційна стала, r – відстань між центрами мас.

Два тіла, поза залежністю від свого складу та середовища, у якому вони знаходяться, завжди взаємно тяжіють із силою, прямо пропорційною добутку мас цих тіл і обернено пропорційною квадрату відстані між центрами цих тіл.

Закон всесвітнього тяжіння обумовлює тяжіння тіл до Землі:

$$F = G \frac{M_3 \cdot m_m}{(R_3 + h)^2}, \quad (1.67)$$

де h – відстань, на якій тіло знаходиться над Землею. Якщо тіло розташоване поблизу до поверхні Землі, то $h \ll R_3$, тоді:

$$F = G \frac{M_3}{R_3^2} \cdot m = m \cdot a, \quad (1.68)$$

де $a = g$, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - прискорення вільного падіння. Величина g залежить від

широти місцевості, тому що Земля не є ідеальною кулею: відстань від полюсів до центра менша за відстань від екватора до центра Землі.

Гравітаційне поле є потенціальним, тому:

$$\vec{F} = -gradE_n. \quad (1.69)$$

Якщо розглядати тільки координату h – висота над Землею, на якій знаходиться тіло, та вважати що з висотою потенційна енергія зменшується, то будемо мати:

$$F = \frac{dE_n}{dh}, \quad (1.70)$$

з цього

$$dE_n = F \cdot dh, \quad (1.71)$$

тоді

$$E_n = \int mg \cdot dh = mgh + C. \quad (1.72)$$

Вважається, що на поверхні Землі при $h = 0$, $C = 0$, тоді потенційна енергія тіла, що знаходиться над Землею на висоті $h \ll R_3$:

$$E_n = mgh. \quad (1.73)$$

З висотою, прискорення вільного падіння зменшується.

Щоб тіло не рухалось вздовж координати h , треба встановити для нього опору. Використовуючи III закон Ньютона запроваджують уявлення про вагу: *вага* (P) – реакція опори чи підвісу на силу тяжіння. У загальному випадку вага залежить від прискорення, з яким рухається тіло з опорою відносно напрямку прискорення вільного падіння. При цьому:

$$P = m(g \pm a), \quad (1.74)$$

знак "+" обирається, коли прискорення спрямовано проти, а "-", коли прискорення спрямовано вздовж напрямку \vec{g} . Коли $a = g$, то тіло начебто вільно падає разом з опорою, тоді кажуть про *невагомість*. Якщо тіло рухається проти сили тяжіння, то кажуть про *перевантаження*. Перевантаження часто вимірюють у одиницях g . Пристрої, що імітують перевантаження за рахунок обертального руху, називають *центрифугами*, де відцентрова сила, обумовлена нормальним прискоренням, придавлює тіло до стінки центрифуги. Це явище використовується для штучної сепарації рідинних або газових сумішей, що складаються з речовин або часток з різною густиною.

1.2.11. Сила тертя, види тертя

Для того щоб тіло, яке лежить на площині (рис.1.10), почало рухатися, треба прикласти силу, щоб компенсувати *силу тертя спокою*. Але й подальший рух пов'язаний з дією сил тертя [1, 9, 13].

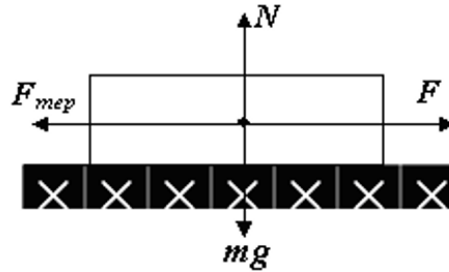


Рис.1.10

Відрізняють такі основні види тертя:

сухе (зовнішнє) тертя – сила тертя між площинами двох тіл, що стикаються між собою;

внутрішнє тертя – тертя, що виникає унаслідок відносного руху шарів цілого тіла.

Зовнішнє тертя (сухе і гідромеханічне) поділяється на: *тертя ковзання* F_c , *тертя кочення* F_k , *тертя кручення* F_v . Між величинами цих сил, за звичайних умов, виконується співвідношення:

$$F_c > F_k > F_v. \tag{1.75}$$

Тому в машинах та апаратах завжди намагаються використовувати пристрої, які забезпечили б заміну тертя ковзання на інші види сухого тертя. Щоб зменшити силу тертя ковзання вживають різні мастила, тоді кажуть про *гідродинамічне тертя*.

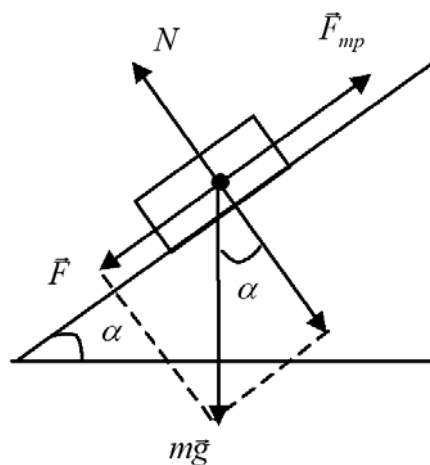


Рис.1.11

У загальному вигляді (рис. 1.11) сили тертя підпорядковуються формулі:

$$F_{mp} = f \cdot N, \quad (1.76)$$

де N – реакція опори, f – коефіцієнт тертя.

На нахиленій площині можна визначити коефіцієнт тертя, як

$$f = \operatorname{tg} \alpha, \quad (1.77)$$

де α - кут нахилу площини, при якому тіло починає ковзати по нахиленій площині.

Внутрішнє тертя буде розглянуте в інших розділах.

1.3. Кінематика і динаміка обертального руху твердого тіла

1.3.1. Елементи кінематики обертального руху. Кутова швидкість і прискорення. Зв'язок кутових кінематичних характеристик з лінійними швидкостями і прискореннями точок, що належать тілу

Обертальний рух відносно нерухомої вісі – це такий рух, при якому усі точки абсолютно твердого тіла описують кола, центри яких лежать на нерухомій прямій, що називається віссю обертання [1, 9, 13].

Для опису кінематики матеріальної точки, що здійснює обертальний рух, необхідно, як і в кінематиці поступального руху, увести такі поняття як кутове прискорення і кутова швидкість.

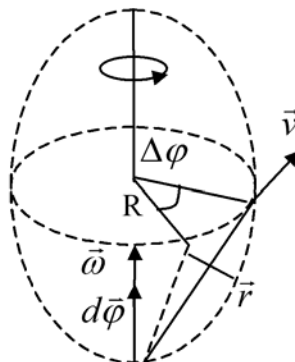


Рис.1.12

Нехай матеріальна точка, що належить твердому тілу, рухається по колу з радіусом R (рис.1.12). Її положення на колі через малий проміжок часу задамо кутом $\Delta\varphi$. Треба відзначити, що лінійна швидкість точок, які обертаються по іншому радіусі буде відрізнятися від тих, що знаходяться на відстані R . Але усі точки об'єднує параметр $\Delta\varphi$. Тоді запровадимо уявлення про кутову швидкість: *кутовою швидкістю* називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній за часом від кута повороту:

$$\bar{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}. \quad (1.78)$$

Напрямок векторів $\vec{\omega}$ та $\Delta\vec{\varphi}$ задається правилом гвинта: вектор кутової швидкості збігається за напрямком з поступальним рухом вістря гвинта, голівка якого обертається в напрямку руху точки по колу (рис.1.13). Кутова швидкість розраховується за формулою:

$$[\omega] = \frac{1}{c}, \quad (1.79)$$

і вимірюється в $\frac{\text{рад}}{c}$.

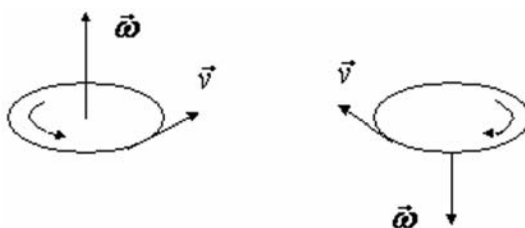


Рис.1.13

Знайдемо зв'язок між лінійною і кутовою швидкістю. Для цього використаємо уявлення про миттєву лінійну швидкість, та те, що довжину дуги, на яку опирається малий кут, можна знайти за формулою $\Delta S = R\Delta\varphi$:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = R\omega, \quad (1.80)$$

$$v = \omega R.$$

Якщо $\omega = \text{const}$, то обертання рівномірне і його можна характеризувати періодом обертання T . Період обертання це час, за який точка здійснює один повний оберт. Зв'язок між періодом та кутовою швидкістю знайдемо з таких міркувань. Оскільки за визначенням, за час $\Delta t = T$ тіло змінить своє положення на $\Delta\varphi = 2\pi$, тоді, за визначенням:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.81)$$

Число повних обертів, здійснених тілом під час рівномірного руху по колу за одиницю часу називається частотою обертання.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}; \quad \omega = 2\pi\nu, \quad (1.82)$$

де ν - частота обертання, 1/с.

Крім рівномірного, тіло може здійснювати перемінний обертальний рух. Тоді запроваджується поняття про кутове прискорення. *Кутовим прискоренням називається векторна величина, яка дорівнює першій похідній кутової швидкості за часом:*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (1.83)$$

З формули випливає, що вектор $\vec{\varepsilon}$ спрямований по осі обертання у бік вектора елементарного збільшення кутової швидкості (рис.1.14).

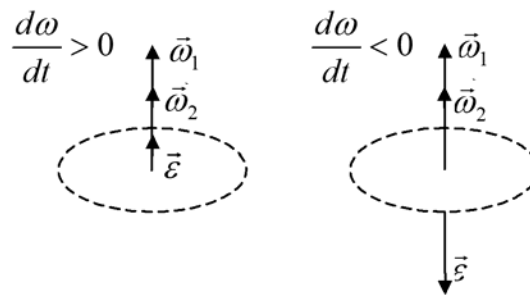


Рис.1.14

Зв'язок між величинами кутових характеристик руху та лінійних знайдемо використовуючи їх уявлення:

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon, \quad (1.84)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = R\omega^2. \quad (1.85)$$

Для рівномірного обертального руху, отримаємо основні кінетичні рівняння. Для цього виконаємо деякі перетворення:

$$S = v \cdot t = R \cdot \omega \cdot t = R \cdot \varphi, \quad (1.86)$$

$$v = R\omega, \quad (1.87)$$

$$a_n = \omega^2 R, \quad (1.88)$$

$$\varphi = \omega \cdot t. \quad (1.89)$$

Для рівнозмінного обертального руху ($\varepsilon = const$):

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_o + \vec{\varepsilon} \cdot t, \quad (1.90)$$

$$\varphi = \omega_o t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.91)$$

Використовуючи отримані кінематичні рівняння можна описати рух твердого тіла або точки навколо нерухомої осі.

1.3.2. Момент інерції. Кінетична енергія тіла, що обертається. Основне рівняння динаміки обертального руху

Під час переходу до розгляду питання динаміки обертання матеріальної точки по колу, необхідно ввести деякі додаткові поняття, що мають фізичну аналогію з масою тіла в динаміці поступального руху [1, 9, 13].

Моментом інерції матеріальної точки відносно осі обертання називається добуток маси точки на квадрат відстані до осі обертання:

$$I_i = m_i r_i^2, \quad (1.92)$$

де I_i – момент інерції, вимірюється в $\text{кг}\cdot\text{м}^2$.

Якщо розглядати тіло, що обертається, як сукупність матеріальних точок, то момент інерції тіла – це сума моментів інерцій усіх точок, що складають це тіло, відносно розглянутої осі:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2. \quad (1.93)$$

Якщо тіло однорідне, тобто є безперервний розподіл мас, ця сума зводиться до інтегралу:

$$I = \int_m r^2 dm, \quad (1.94)$$

де $m = f(r)$ - відома функція розподілу маси за координатами тіла. Інтегрування здійснюється за всім об'ємом тіла.

Для тіл правильної геометричної форми момент інерції відносно осі, що проходить через центр інерції (мас), розраховується за формулами:

1. Порожній тонкостінний циліндр (обід, колесо) радіусом R : $I = mR^2$.
2. Суцільний циліндр чи диск: $I = \frac{1}{2} mR^2$.
3. Куля радіуса R : $I = \frac{2}{5} mR^2$.
4. Стрижень довжиною l : $I = \frac{1}{12} m \cdot l^2$

Якщо момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас – відомий, то момент інерції тіла щодо будь-якої іншої рівнобіжної осі визначається теоремою Штейнера: момент інерції тіла відносно будь-якої осі обертання

дорівнює його моменту інерції відносно рівнобіжної осі, яка проходить через центр мас тіла, складеному з добутком маси тіла на квадрат відстані між осями.

$$I = I_c + ma^2. \quad (1.95)$$

Слід зазначити, що момент інерції може існувати безвідносно до обертання. Будь-яке тверде тіло поза залежністю покоїться воно чи обертається має момент інерції подібно тому, як тіло має масу не залежно від стану свого руху.

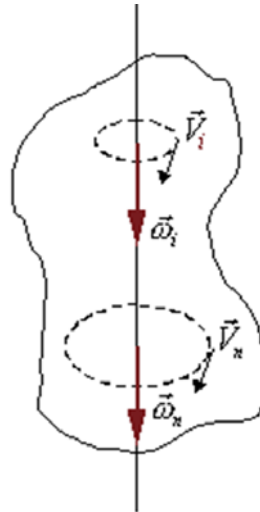


Рис.1.15

Тіло, що обертається навколо нерухомої осі, має кінетичну енергію. Знайдемо формулу для кінетичної енергії. Кожна матеріальна точка тіла має кінетичну енергію $\frac{m_i v_i^2}{2}$. Тоді для всього тіла:

$$E_k = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (1.96)$$

З рис.1.15 бачимо, що $v_i \neq v_n$; але оскільки $\omega = \frac{v_i}{r_i} = \omega_i = \omega_n$ - для всіх точок однакова, то, замінивши $v_i = \omega \cdot r_i$, отримаємо:

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2 = \frac{J \omega^2}{2}. \quad (1.97)$$

Таким чином, кінетична енергія тіла що обертається дорівнює $E_k = \frac{I \omega^2}{2}$. Якщо тіло до того ж бере участь і у поступальному русі (котиться), то

$$E_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} = E_k^{nocm} + E_k^{ob}. \quad (1.98)$$

Якщо до тіла, закріпленого на осі, прикласти зовнішню силу, то цією силою буде виконуватися робота, що витрачається на зміну кінетичної енергії тіла, що обертається.

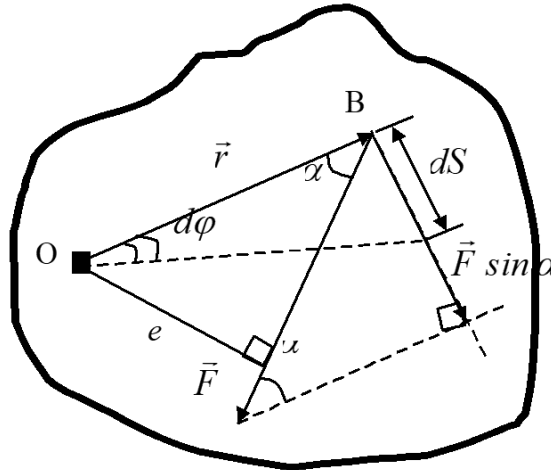


Рис.1.16

Нехай до тіла (рис.1.16), що закріплено у точці О до нерухомої осі (вісь перпендикулярна до площини рисунка), у точці В, що належить тілу, прикладена сила \vec{F} під кутом $\vec{F} \wedge \vec{r} = \alpha$. Тому що тіло тверде, робота цієї сили витрачається на поворот усього тіла на деякий кут $d\varphi$. При цьому точка В проходить шлях $dS = r \cdot d\varphi$. Відомо, що робота дорівнює проекції сили \vec{F} на напрямок переміщення, помножений на величину переміщення, тобто:

$$dA = dE_k = F \cdot \sin \alpha \cdot r \cdot d\varphi. \quad (1.99)$$

Необхідно відмітити, що $r \cdot \sin \alpha = l$ – найкоротша відстань між лінією дії сили і віссю обертання і називається *плечем сили*. Тоді добуток сили на її плече називається *моментом сили*. Модуль моменту сили є:

$$M = F \cdot l. \quad (1.100)$$

Момент сили – величина векторна, тому що $l = r \cdot \sin \alpha$, то:

$$\vec{M} = [\vec{F} \cdot \vec{r}]. \quad (1.101)$$

Вектор \vec{M} перпендикулярний площині, у якій знаходяться вектора \vec{F} і \vec{r} , колінеарний з віссю обертання (лежить на осі), а його напрямок визначається за правилом правого гвинта.

Тоді вираз для роботи моменту сил (1.99) буде мати вигляд:

$$dA = M \cdot d\varphi, \quad (1.102)$$

оскільки

$$dA = dE_k^{об} = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega \cdot d\omega, \quad (1.103)$$

то

$$M \cdot d\varphi = I\omega \cdot d\omega; \quad (1.104)$$

поділивши на dt , отримаємо:

$$M \frac{d\varphi}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt}, \text{ або } M\omega = I\omega\varepsilon. \quad (1.105)$$

Виконавши спрощення, отимаємо основне рівняння динаміки обертального руху:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\vec{M}}{I}. \quad (1.106)$$

Цей запис має фізичну аналогію з II законом Ньютона.

Момент сили, що діє на тверде тіло, надає йому кутове прискорення, величина якого прямо пропорційна величині моменту сили й обернено пропорційна моменту інерції тіла.

Вектори, що лежать на осі симетрії, називають аксіальними, або псевдовекторами. Кінематика та динаміка обертального руху описується псевдовекторами.

Розрізняють моменти сил відносно осі обертання, відносно точки (центра) обертання і момент пари сил. У другому випадку, рух відносно точки описувати складно: необхідно враховувати, що тіло буде володіти трьома ступенями вільності. Для опису такого руху використовують кути Ейлера.

Розгляд моментів пари сил зводиться до *правила важеля*:

$$F_1 l_1 = F_2 l_2. \quad (1.107)$$

Рівняння (1.107) – умова для рівноваги тіла, що може обертатися.

1.3.3. Момент імпульсу. Закон зміни та збереження моменту імпульсу

Введемо уявлення про момент імпульсу матеріальної точки, як векторного добутку імпульсу матеріальної точки на радіус вектор її положення відносно осі обертання:

$$\vec{L}_i = [\vec{p}_i \cdot \vec{r}_i]. \quad (1.108)$$

Виконаємо наступні перетворення:

$$L_i = p_i \cdot r_i \cdot \sin(\alpha) = m_i \cdot v_i \cdot r_i, \quad (1.109)$$

кут між векторами \vec{v} і \vec{r} $\alpha = \frac{\pi}{2}$, тоді

$$L_i = m_i \cdot r_i^2 \omega_i = I_i \cdot \omega_i, \quad (1.110)$$

але оскільки \vec{L} є аксіальний вектор, то:

$$\vec{L}_i = I_i \cdot \vec{\omega}_i. \quad (1.111)$$

Напрямок \vec{L} знаходиться за тим же правилом, що й напрямок $\vec{\omega}$. З часом, вектор \vec{L} може змінюватись. Якщо йдеться мова про тіло, то момент імпульсу буде мати вираз:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^n I_i = I \cdot \vec{\omega}, \quad (1.112)$$

де I - момент інерції тіла, яке обертається з кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. Зміна моменту імпульсу з часом буде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\varepsilon} = \vec{M}. \quad (1.113)$$

Рівняння (1.113) – це основний закон динаміки обертального руху твердого тіла.

Якщо механічна система, що обертається, замкнена ($\vec{M} = 0$) тоді виконується закон збереження моменту імпульсу, який має вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \vec{L} = \sum_{i=1}^n I_i \cdot \vec{\omega}_i = const. \quad (1.114)$$

Момент імпульсу замкненої системи з часом не змінюється.

1.4. Елементи механіки рідини

1.4.1. Рідинний стан речовини. Закон Паскаля. Закон Архімеда

Рідина – агрегатний стан речовини, при якому речовина має деякі властивості газоподібного і твердого агрегатних станів одночасно [1, 9, 13].

У рідині молекули знаходяться близько одна до одної, не можуть переміщатися по об'єму всієї рідини, як у газі. Рідина завжди приймає форму посудини, у якій вона знаходиться, однак не обов'язково займає весь об'єм цієї посудини, що властиво газам. Рідині властива пластична деформація, тобто плин (течія).

Плинність - вільне переміщення частин тіла відносно самих себе.

Під плинном рідини розуміють і плин газів, оскільки закони такого руху в рамках моделі і для рідкого агрегатного стану і для газоподібного однакові.

Рідина і газ – суцільні середовища, тобто не мають розривів густини.

Суцільне середовище – деякий обсяг простору, у якому основні фізичні властивості нерозривні для даного тіла чи силового поля.

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.115)$$

де ρ – густина (кг/м^3), нерозривна функція в кожній точці простору.

Якщо в одному і тому ж середовищі густина міняється залежно від координат, то говорять про стисливість рідини, якщо густина не змінюється – рідину вважають *нестисливою*.

Умова нестисливості рідини:

$$\text{grad} \rho = 0. \quad (1.116)$$

Закон Паскаля: У кожній точці нестисливої рідини тиск однаковий.

Тиск – сила, що діє по нормалі до одиниці поверхні посудини та віднесена на одиницю площини поверхні:

$$P = \frac{F}{S_n}. \quad (1.117)$$

Тиск вимірюється у Н/м^2 (Па).

У полі сили тяжіння тиск стовпа рідини висотою h буде визначатись:

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{\rho Vg}{S} = \frac{\rho Shg}{S} = \rho gh,$$

або

$$P = \rho gh. \quad (1.118)$$

Такий тиск називається *гідростатичним тиском*.

Модель рідини для опису її руху базується на наступному.

Відокремимо точки в об'ємі рідини. Якщо спостерігати за їхнім рухом, то можна виявити, що ці точки будуть описувати у просторі деякі лінії. Лінії, уздовж яких рухаються точки рідини називаються *лініями струму*. Сукупність ліній струму утворюють *трубку струму*. Швидкості кожної точки є дотичними до ліній струму.

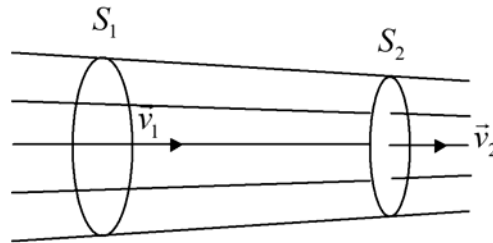


Рис.1.17

З закону збереження маси речовини витікає: скільки маси в одиницю часу проходить через переріз трубки струму S_1 , стільки ж проходить через переріз S_2 . Якщо $\rho = const.$, то виконується *рівняння нерозривності*:

$$S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2. \quad (1.119)$$

Об'ємна секундна витрата рідини V' ($\text{м}^3/\text{с}$) визначається, як:

$$S \cdot V = V', \quad (1.120)$$

а масова секундна витрата рідини M' ($\text{кг}/\text{с}$):

$$M' = S \cdot V' \cdot \rho. \quad (1.121)$$

Рівняння нерозривності насправді відбиває закон збереження маси для нестисливої рідини і є *основним кінематичним рівнянням течії нестисливої рідини*.

Якщо якесь тіло занурити у рідину або газ, які знаходяться у полі сил тяжіння, то на це тіло буде діяти сила, що виштовхує – *сила Архімеда*. Розглянемо це на прикладі циліндра з площиною S та висотою h . З уявлення про тиск, як $P = \frac{F}{S}$, та з урахуванням гідростатичного тиску отримаємо, що на нижню та верхню (за відношенням до орієнтації циліндра в полі сил тяжіння) площину діють різні за величиною сили. Різниця цих сил буде зумовлювати силу Архімеда F_a :

$$F_a = \rho g h_2 S - \rho g h_1 S = \rho g S (h_2 - h_1) = \rho g S h = \rho V g. \quad (1.122)$$

Закон Архімеда: Сила, що виштовхує тіло занурене в рідину або газ, дорівнює вазі рідини (газу) в об'ємі зануреного тіла.

1.4.2. Плин рідини. Рівняння Бернуллі

Для доведення рівняння динаміки руху рідини скористуємося рис.1.18 [1, 9, 13]. У наведеній на рис.1.18 трубці струму рухається нестислива рідина. Причина руху - різниця тисків (сил) на вільних кінцях трубки.

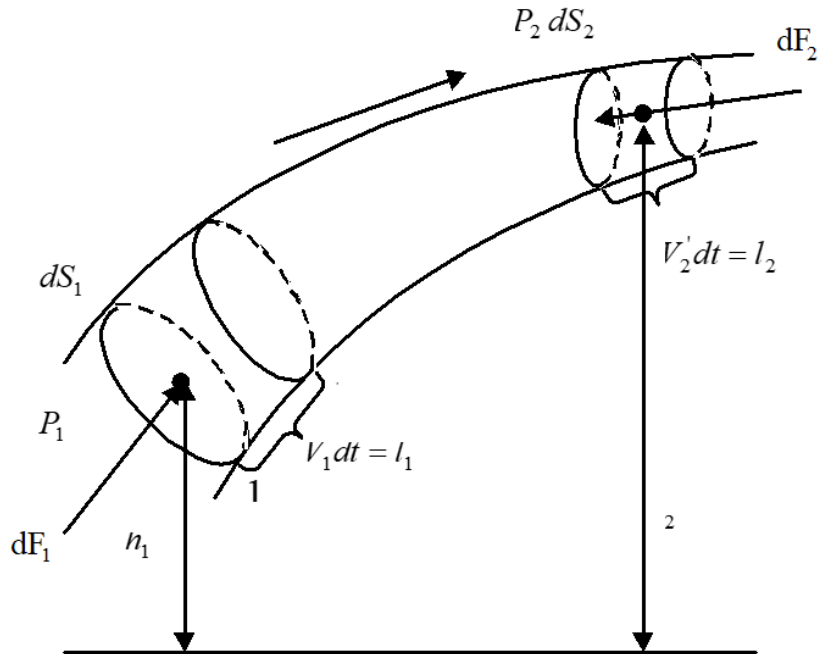


Рис.1.18

Під час переміщення рідини, об'єм 1-1' нібито "перенесено" до об'єму 2-2'. Це припущення цілком справедливе, бо ми розглядаємо течію нестисливої рідини, для якої виконується рівняння нерозривності. Для цього переміщення була здійснена робота, яка сприяла зміні повної енергії рідини. З цих уявлень виконаємо математичні перетворення:

$$dA = dE = dE_k + dE_n. \quad (1.123)$$

З того що $dA = F \cdot dl$ отримаємо:

$$A = F_1 l_1 - F_2 l_2 = P_1 S_1 V_1 dt - P_2 S_2 V_2 dt = SV dt (P_1 - P_2) = Sl (P_1 - P_2). \quad (1.124)$$

Приріст кінетичної енергії за рахунок цієї роботи складатиме:

$$\Delta E_k = \frac{dm}{2} (V_1^2 - V_2^2) = \frac{\rho Sl}{2} (V_1^2 - V_2^2). \quad (1.125)$$

Приріст потенційної енергії складатиме:

$$\Delta E_n = dm \cdot g(h_1 - h_2) = \rho g S l (h_1 - h_2). \quad (1.126)$$

Тоді

$$\Delta E = A = \rho S l \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + gh_1 - gh_2 \right) = S l (P_1 - P_2). \quad (1.127)$$

З цього отримаємо:

$$\rho \left(\frac{V_1^2 - V_2^2}{2} + h_1 - h_2 \right) = P_1 - P_2, \quad (1.128)$$

або

$$\frac{\rho V_1^2}{2} - \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_1 - \rho g h_2 = P_1 - P_2, \quad (1.129)$$

остаточно отримаємо:

$$\frac{\rho V_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho V_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2, \quad (1.130)$$

де $\frac{\rho V^2}{2}$ – динамічний тиск, зумовлений рухом рідини; $\rho g h$ – гідростатичний тиск, зумовлений зовнішнім силовим полем; P – статичний тиск, зумовлений тиском навколишнього середовища.

Сума динамічного, гідростатичного й статичного тисків називається повним тиском. Для нестисливої рідини повний тиск є сталою величиною:

$$P_n = P_\partial + P_z + P_{cm} = const. \quad (1.131)$$

Таке рівняння буде застосовуватись для любого перерізу трубки течії рідини. Це і є рівняння Бернуллі - основне рівняння гідродинаміки. Повний тиск нестисливої рідини є сталою величиною у будь-якому перерізі трубки течії рідини.

Використовуючи рівняння Бернуллі та за допомогою пристрою (трубка Піто), схему якого наведено на рис.1.19, можна вимірювати швидкість газових потоків з густиною речовини ρ_z . Орієнтуючи трубку за відношенням до потоку газу так, як показано на рис.1.20, бачимо, що отвори окремо вимірюють статичний P та повний P_n тиски, різниця яких є величиною динамічного тиску:

$$P_n - P = \frac{\rho_z \cdot v^2}{2}. \quad (1.132)$$

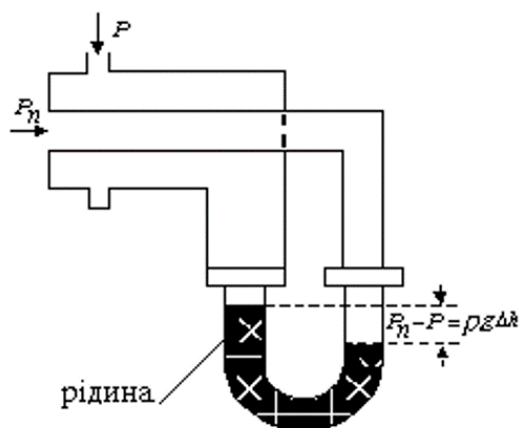


Рис.1.19

Ця різниця компенсується гідростатичним тиском $\rho g \Delta h$ в U-подібній трубці, що наповнена рідиною з густиною ρ . Тоді швидкість руху потоку газу можна обчислити за формулою:

$$v = \sqrt{\frac{2(P_n - P)}{\rho_2}} = \sqrt{\frac{2\rho g \Delta h}{\rho_2}}. \quad (1.133)$$

За умов локального зростання швидкості (наприклад, за рахунок локального зменшення площини перерізу трубки) повний тиск залишається сталим: динамічний збільшується, а статичний зменшується.

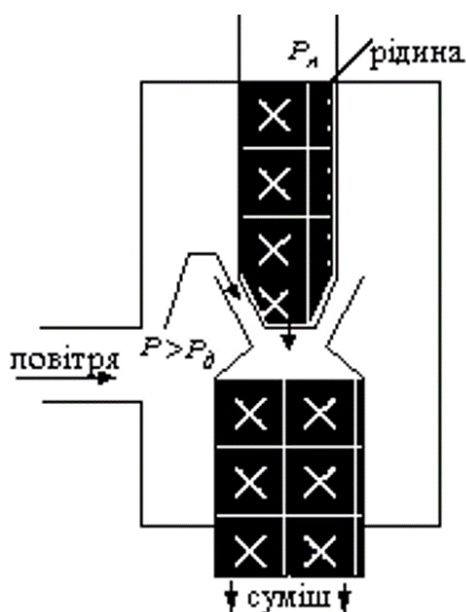


Рис.1.20

Завдяки цьому можна розпилювати рідину, змішувати рідину з газом, або використовувати такий пристрій у якості насоса. Схематично такий насос (рідиннострумний) зображено на рис.1.20. Рідиннострумні насоси

використовуються у харчовій промисловості для утворення різноманітних за своєю дисперсністю продуктів харчування та напівфабрикатів.

1.4.3. Внутрішнє тертя. Ламінарний і вихровий режими течії.

Число Рейнольдса: гідромеханічна подібність

Під час доведення основного рівняння гідродинаміки ми вважали, що лінії струму не перетинаються між собою [1, 9, 13]. Але це не завжди так. Між окремими шарами рідини, що стикаються між собою, діють сили тертя. Ці сили сприяють "переносу" імпульсу (кількості руху) від одного шару до іншого. Це явище носить назву внутрішнього тертя і належить до групи явищ, що мають назву *явища переносу* (див. 2.2). Силу внутрішнього тертя, віднесену на одиницю площини шарів рідини, що стикаються між собою, визначають за рівнянням Ньютона:

$$\frac{\vec{F}}{S} = \vec{f} = -\eta \cdot \text{grad}(\vec{v}). \quad (1.134)$$

де η – коефіцієнт динамічної в'язкості рідини, Па·с.,

Коефіцієнт динамічної в'язкості рідини є фізичною характеристикою рідинних речовин. Але не всі рідини підпорядковуються рівнянню Ньютона, а саме – не виконується прямо пропорційна залежність між силою та градієнтом швидкості шарів, що стикаються. У цьому випадку кажуть *про неньютонівську рідину*.

Внутрішнє тертя призводить до перемішування шарів рідини. З рівняння Ньютона можна зробити висновок, що залежно від швидкості відносного руху шарів настає момент, коли вони починають змішуватися. Тобто, режим течії змінюється. Саме з цим пов'язана класифікація *режимів течії*:

- ламінарний – це такий, коли шари паралельні один одному, і кожний з них характеризується власним розподілом швидкостей;
- турбулентний – це такий, коли шари рідини перетинаються між собою та утворюють вихор;
- перехідний – проміжний між першими двома.

Для багатьох рідин та газів є деяка подібність режимів течії: за певних умов, що мають відношення до геометричної форми каналу, швидкості та природи речовини, різні рідини мають подібний режим течії. Ця подібність відбивається так званим числом Рейнольда Re . Це безрозмірне число можна розрахувати за виразом:

$$Re = \frac{v \cdot d_e \cdot \rho}{\eta}, \quad (1.135)$$

де d_e - еквівалентний діаметр каналу, де відбувається течія рідини. Еквівалентний діаметр визначають за формулою:

$$d_e = \frac{4 \cdot S}{\Pi}, \quad (1.136)$$

де S та Π - площа перерізу каналу та його периметр, відповідно.

Якщо рідина не займає увесь канал, то маємо на увазі ті геометричні розміри, що має трубка течії. Число Рейнольдса характеризує режим течії: якщо $Re < 2000$ – ламінарна течія; якщо $Re > 2300$ – турбулентна течія. Режим течії досить сильно впливає на такі процеси, як тепло- і масоперенос. Турбулентний режим, у загальному випадку, інтенсифікує ці процеси. Вихрові утворення під час турбулентного режиму мають складну форму і певну нестійкість, як за часом, так і за координатами. У цьому випадку основним математичним прийомом для опису процесів переносу є теорія подібності.

1.5. Елементи спеціальної теорії відносності

1.5.1. Постулати спеціальної теорії відносності. Перетворення Лоренца

Відносність механічного руху та деякі явища, що пов'язані з поширенням світла, поставили питання: чи існує універсальна, "ідеальна" система відліку, відносно якої усе рухається або знаходиться у спокої? Таку систему відліку було названо ефіром. Тоді усі об'єкти рухаються в ефірі. Якщо це так, то повинен існувати "ефірний вітер". Саме його, або його прояв й намагалися знайти вчені. Найбільш вдалий експеримент з цього приводу було здійснено Майкельсоном [1, 9, 13].

Суть цього досліду у наступному. За допомогою явища інтерференції світла знайти "ефірний вітер", який би змінював положення інтерференційної картини. Схему пристрою наведено на рис.1.21.

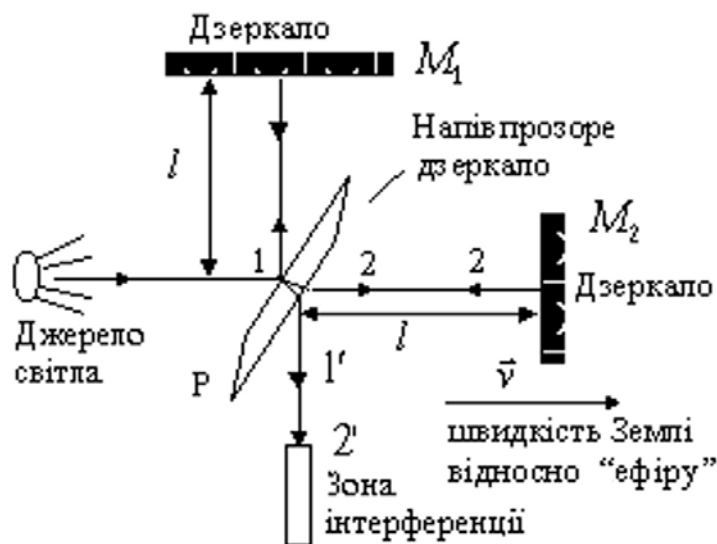


Рис.1.21

Орієнтуючи пристрій відносно напрямків полюсів Землі, очікувалось, що інтерференційна картинка буде мінятися. Але за будь-яких умов інтерференційна картинка не змінювалась. З чого зроблено висновок: *ніякого "ефірного вітру" та*

ефіру чи універсальної системи відліку не існує.

Виходячи з експериментальних результатів, та уявлень про електромагнітне поле А. Ейнштейн сформулював постулати, які становлять основу спеціальної теорії відносності:

I Постулат:

Усі закони природи інваріантні стосовно інерційних систем відліку, а усі інерційні системи відліку рівноправні.

II Постулат:

Швидкість світла є деякою фізичною сталою, величина якої не залежить від того, рухається чи знаходиться у спокої приймач (джерело) світла. Ця константа є максимальною швидкістю поширення будь-якої взаємодії чи поля, що відомі людині.

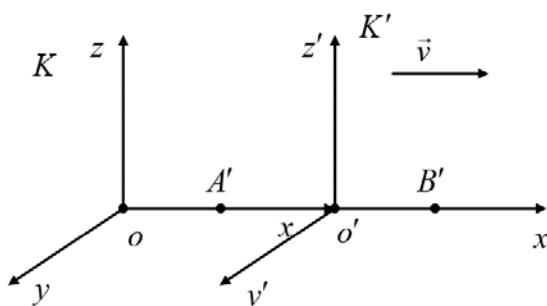


Рис.1.22

У 1904 р. голландським фізиком Лоренцем було запропоновано перетворення координат та часу рухомої (K') та нерухомої (K) системи відліку (рис.1.22).

Перетворення Лоренца:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ y' &= y, z' = z, \\ t' &= \frac{t - v \cdot x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned} \tag{1.137}$$

Ці перетворення дають змогу зберегти вигляд рівнянь класичної електродинаміки. Аналогічні рівняння були доведені у 1905 р. й А. Ейнштейном.

1.5.2. Відносність довжини та проміжків часу

Легко довести, що розміри тіла, яке рухається з швидкістю v , та проміжки часу подій, які відбуваються у рухомих системах відліку, будуть змінюватись [1, 9, 13]:

$$l' = (x_2' - x_1') = (x_2 - x_1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

або

$$l = l_o \cdot \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (1.138)$$

де $\beta = \frac{v^2}{c^2}$; l_o – власні розміри нерухомого тіла.

Для проміжку часу:

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{\Delta t_o}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.139)$$

де Δt_o – власний час, що вимірюється годинником, який рухається разом з об'єктом.

Розміри тіла, що рухається, скорочуються вздовж напрямку руху залежно від швидкості (лоренцеве або фітцджеральдове скорочення).

Годинник, що рухається відносно інерційної системи відліку, йде повільніше за нерухомий годинник. Тобто, власний час – найкоротший.

1.5.3. Межі застосування класичної механіки

З перетворень Лоренца витікає, що в будь-яких інерційних системах відліку існують відповідні координати та час для певної події. А між подіями в обраних інерційних системах відліку існує визначений зв'язок [1, 9, 13].

Слід відзначити, що за умови $v \ll c$ перетворення Лоренца трансформуються у перетворення Галілея (класична теорія відносності). Якщо припустити на випадок, що $v > c$, то з перетворень Лоренца витікає, що координати та проміжки часу будуть мати мнимі величини, чого не може бути. Тоді:

Швидкість відносного руху будь-яких інерційних систем не може перевищувати швидкість поширення світла у вакуумі, тобто $v \leq c$.

Швидкості руху тіл поблизу швидкості світла називають *релятивістськими*, а закони руху для таких тіл вивчає *релятивістська механіка*.

1.5.4. Релятивістський імпульс. Основний закон релятивістської динаміки.

Границі застосування класичної механіки

З першого постулату спеціальної теорії відносності витікає, що формальний опис законів чи явищ у всіх інерційних системах відліку повинен мати однаковий вигляд, тобто підпорядковуватися так званому принципу Лоренца. Але, як було доведено, однакові процеси у різних системах відліку тривають різний час [1, 9, 13]. Крім того, записуючи основний закон механічного руху вважалося, що маса тіла не залежить від швидкості його руху.

У спеціальній теорії відносності доводиться, що маса залежить від швидкості руху тіла й тим сильніше, чим більш швидкість руху тіла наближається до швидкості світла у вакуумі:

$$m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.140)$$

або

$$\frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (1.141)$$

З рис.1.23 бачимо, що маса залежить від швидкості руху нерівномірно: за умов збільшення β до 1,0 відношення $\frac{m}{m_0}$ прагне в нескінченність. Цей факт експериментально підтверджується: якщо електрон сильно розігнати, то його маса збільшується у сотні разів.

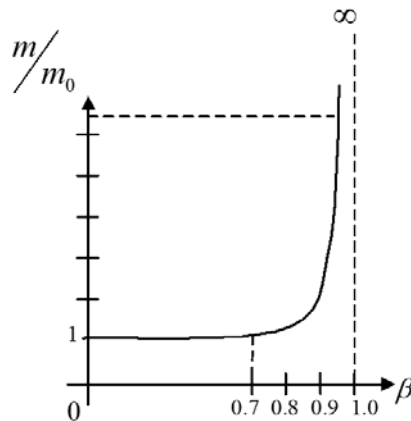


Рис.1.23

При цьому запроваджують уявлення про інерційну масу:

m_0 – маса спокою;

m – маса тіла, що рухається.

Тоді вирази для імпульсу тіла, та закону динаміки будуть мати вигляд:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v} = m(v) \cdot \vec{v} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot \vec{v}, \quad (1.142)$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}. \quad (1.143)$$

Основний закон релятивістської динаміки. Зміна імпульсу тіла з часом дорівнює зовнішній силі:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \vec{v} \right] = \vec{F}. \quad (1.144)$$

Якщо система замкнена, зовнішні сили не діють, тоді

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \vec{v} \right] = 0. \quad (1.145)$$

Якщо ж до того маємо не одне тіло, а декілька, то

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-\frac{v_i^2}{c^2}}} \right) \cdot \vec{v}_i \right] = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = 0. \quad (1.146)$$

Релятивістський закон збереження імпульсу. Імпульс у замкненій механічній системі з часом не змінюється.

З закону динаміки витікає:

$$d \left[\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \vec{v} \right] = \vec{F} \cdot dt. \quad (1.147)$$

Тобто, якщо $\beta \rightarrow 1$, то $\vec{F} \cdot dt \rightarrow \infty$. Якщо тіло може рухатися з такою швидкістю, то це значить, що в природі існує нескінченна сила або нескінченний проміжок часу. Людству невідомі такі нескінченні сили або час. Тоді щоб виконувався закон релятивістської динаміки треба внести обмеженість щодо швидкості руху тіла з будь-якою масою спокою:

$$v < c. \quad (1.148)$$

Ця нерівність і є відображенням границі застосовності законів класичної механіки та її висновків.

1.5.5. Кінетична енергія. Релятивістський вираз для кінетичної енергії

Щоб змінити кінетичну енергію потрібно виконати роботу:

$$dA = dE_k, \quad dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt. \quad (1.149)$$

З того, що

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad (1.150)$$

отримаємо:

$$dA = dE_k = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \cdot \vec{v} \cdot dt = \vec{v} \cdot d \left(\frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (1.151)$$

або

$$dE_k = \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \quad (1.152)$$

Використовуючи рівняння (1.40) $m = f(v)$, отримаємо:

$$dm = d \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) = \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{c^2 (1-\beta^2)^{3/2}}. \quad (1.153)$$

Порівнюючи (1.152) і (1.153), доводимо:

$$dE_k = c^2 \cdot dm. \quad (1.154)$$

З цього випливає, що

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= \int_1^2 dE_k = \int_1^2 c^2 dm = c^2 \int_1^2 dm = c^2 (m - m_0) = mc^2 - m_0 c^2 = \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} c^2 - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \end{aligned} \quad (1.155)$$

Зміна кінетичної енергії пов'язана зі збільшенням маси спокою тіла.
Релятивістський вираз для кінетичної енергії:

$$\Delta E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \quad (1.156)$$

Кінетичну енергію можна також визначити через релятивістський імпульс:

$$E_k = c \sqrt{P^2 + m_0^2 c^2}. \quad (1.157)$$

Зміна кінетичної енергії може бути знайдена за виразом:

$$\Delta E_k = mc^2 - m_0c^2, \quad (1.158)$$

де $m_0c^2 = const$ для даного тіла у даній системі відліку. Тобто, це початкова умова для тіла, що не рухається – енергія спокою ϵ :

$$E_c = m_0c^2. \quad (1.159)$$

Тоді mc^2 – енергія, зв'язана з рухом і з масою, тобто повна енергія:

$$E_n = mc^2. \quad (1.160)$$

Тоді зміна кінетичної енергії визначатиметься:

$$\Delta E_k = E_n - E_c \quad (1.161)$$

або

$$\Delta E_k = \Delta m \cdot c^2 = (m - m_0) \cdot c^2. \quad (1.162)$$

З цього випливає рівняння:

$$\Delta m = \frac{\Delta E_k}{c^2} \quad (1.163)$$

Це рівняння буде проаналізовано у наступному параграфі.

1.5.6. Взаємозв'язок маси та енергії

Взаємозв'язок маси та енергії має вигляд [1]:

$$E = m \cdot c^2.$$

Не існує маси без енергії, а енергії без маси. За своєю природою енергія та маса є тотожними. Ми експериментально фіксуємо масу, тільки тому, що це є енергія. Це фундаментальне визначення належить А. Ейнштейну.

Якщо "розібрати" спочиваюче тіло на складові частини, то треба здійснити роботу ΔA на його руйнування до частинок з масою m_{0i} :

$$E_0 + \Delta A = \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2, \text{ або } m_0c^2 - \sum_{i=1}^n m_{0i}c^2 = -\Delta A. \quad (1.164)$$

Енергія зв'язку між частками тіла (механічної системи, атома тощо):

$$c^2 \cdot \left(m_0 - \sum_{i=1}^n m_{0i} \right) = -\Delta E_{зв}. \quad (1.165)$$

Дефект маси показує, що доданок мас спокою складових більше за масу спокою усього тіла:

$$\Delta m = \sum_{i=1}^n m_{0i} - m_0. \quad (1.166)$$

Але, щоб одержувати реальні релятивістські ефекти потрібно мати тіла з дуже маленькою масою. Тоді, змінюючи повну енергію тіла, можна зафіксувати зміну інерційної маси.

Приклади розв'язання задач Кінематика матеріальної точки

Приклад 1. Першу половину часу свого руху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 \text{ км/год}$, а другу половину часу – з швидкістю $v_2 = 40 \text{ км/год}$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв'язання:

Середня швидкість визначається виразом: $\bar{v} = \frac{s}{t}$, де $s = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$, оскільки $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$. Тобто $s = \frac{t}{2}(v_1 + v_2)$, звідси $v = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \text{ км/год}$.

Приклад 2. Першу половину свого шляху автомобіль рухався із швидкістю $v_1 = 80 \text{ км/год}$, а другу половину шляху – зі швидкістю $v_2 = 40 \text{ км/год}$. Яка середня швидкість v руху автомобіля?

Розв'язання:

Середня швидкість визначається виразом:

$$v = \frac{s}{t}, \quad (1)$$

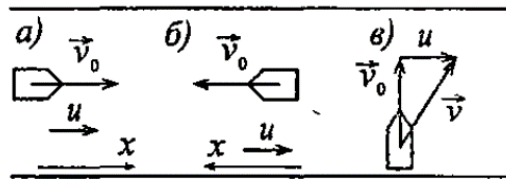
де $t = t_1 + t_2$, $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$. Тоді $t_1 = \frac{s}{2v_1}$; $t_2 = \frac{s}{2v_2}$, звідки

$$t = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2} \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо $v = \frac{s2v_1v_2}{s(v_1+v_2)} = \frac{2v_1v_2}{(v_1+v_2)}$,

$$v = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80 + 40} \approx 53,3 \text{ км / год}$$

Приклад 3. Знайти швидкість v відносно берега річки: а) човна, що йде за течією; б) човна, що йде проти течії; у) човна, що йде під кутом $\alpha = 90^\circ$ до течії. Швидкість течії річки $u = 1$ м/с, швидкість човна відносно води $v_0 = 2$ м/с.



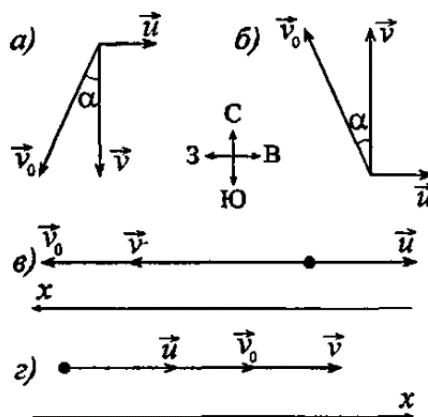
Розв'язання:

- а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь x : $v = v_0 + u = 3 \text{ м / с}$.
 б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, або в проекції на вісь x : $v = v_0 - u = 1 \text{ м / с}$.
 в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$, склавши вектори за правилом трикутників, отримаємо $v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ м / с}$.

Приклад 4. Літак летить відносно повітря з швидкістю $v_0 = 800 \text{ км / год}$. Вітер дме із заходу на схід з швидкістю $u = 15 \text{ м / с}$. З якою швидкістю v літак рухатиметься щодо землі і під яким кутом α до меридіану треба тримати курс, щоб переміщення було: а) на південь; б) на північ; у) на захід; г) на схід?

Розв'язання:

- а) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в скалярному вигляді: $v = \sqrt{v^2 - u^2}$. Підставляючи числові дані і враховуючи, що $u = 15 \text{ м / с} = 54 \text{ км / год}$, отримуємо $v = 798 \text{ км / год}$.



З малюнка видно, що $v = v_0 \cos \alpha$, $\cos \alpha = \frac{v}{v_0}$, $\cos \alpha = 0,998$, $\alpha = 4^\circ$. Курс на південний захід.

б) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в скалярному вигляді: $v = \sqrt{v^2 - u^2}$ або $v = 798 \text{ км / год}$.

Оскільки $v = v_0 \cos \alpha$, то $\cos \alpha = \frac{v}{v_0}$, $\cos \alpha = 0,998$, $\alpha = 4^\circ$. Курс на північний захід.

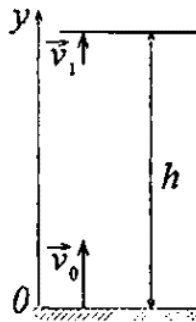
в) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в проекції на вісь x : $v = v_0 - u = 800 - 54 = 746 \text{ км / год}$. Курс на захід.

г) $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ або в проекції на вісь y : $v = v_0 + u = 800 + 54 = 854 \text{ км / год}$. Курс на схід.

Приклад 5. Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулося на землю через час $t=3 \text{ с}$. Яка була початкова швидкість v_0 тіла і на яку висоту h воно піднялось?

Розв'язання

Запишемо рівняння кінематики в проекціях на вісь y : $y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$,
 $v(t) = v_0 - gt$ В найвищій точці підйому маємо $y(t_1) = h$; $v(t_1) = 0$, тобто
 $h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$ і $0 = v_0 - gt_1$, де $t_1 = \frac{t}{2}$ – час підйому. Звідки $v_0 = gt_1$, $v_0 = \frac{gt}{2}$,
 $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$; $h = \frac{gt^2}{8}$.



Підставляючи числові дані, отримуємо $v_0 = 14,7 \text{ м / с}$; $h = 11 \text{ м}$.

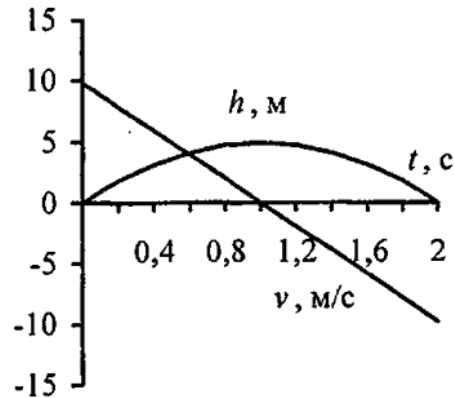
Приклад 6. Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю $v_0 = 9,8 \text{ м / с}$. Побудувати графік залежності висоти h і швидкості v від часу t для інтервалу $0 \leq t \leq 2 \text{ с}$ через $0,2 \text{ с}$.

Розв'язання

Залежність швидкості і висоти від часу виражається наступними формулами $v = v_0 - gt$, $h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$

Для заданого інтервалу складемо таблицю і побудуємо графік.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
V, м/с	9,8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-2,0	-3,9	-5,9	-7,8	-9,8
H, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

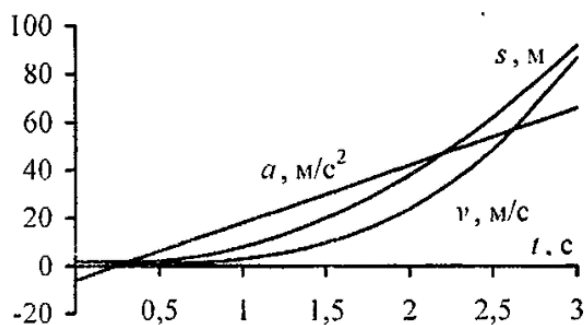


Приклад 7. Залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = At - Bt^2 + Ct^3$, де $A = 2 \text{ м/с}$, $B = 3 \text{ м/с}^2$ та $C = 4 \text{ м/с}^3$. Знайти: а) залежність швидкості v і прискорення a від часу t ; б) відстань s , пройдено тілом, швидкість v і прискорення a тіла через час $t=2\text{с}$ після початку руху. Побудувати графік залежності шляху s , швидкості v і прискорення a від часу t для інтервалу $0 \leq t \leq 3\text{с}$ через $0,5\text{с}$.

Розв'язання:

а) Швидкість тіла $v = \frac{dS}{dt}$, $s = At - 2Bt^2 + 3Ct^3$, $v = 2 - 6t + 12t^2 \text{ м/с}$.

Прискорення тіла $a = \frac{dv}{dt} = -2B + 6Ct$; $a = -6 + 24t \text{ м/с}^2$.



б) Відстань, пройдена тілом $s = 2t - 3t^2 + 4t^3$. Тоді через час $t=2\text{с}$ маємо $s=24\text{ м}$; $v=38\text{ м/с}$; $a=42\text{ м/с}^2$.

Приклад 8. З башти заввишки $h=25\text{м}$ горизонтально кинутий камінь із швидкістю $v_x = 15\text{ м/с}$. Який час t камінь буде рухатися? На якій відстані l від підніжжя башти він впаде на землю? З якою швидкістю v він впаде на землю? Який кут ϕ складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

Розв'язання

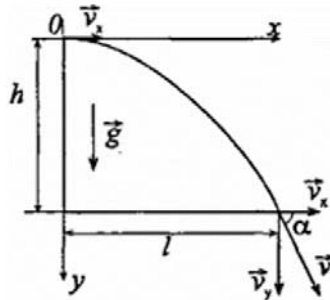
Переміщення каменя по вертикалі

$$S_y = h = \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

по горизонталі:

$$S_x = l = v_x t. \quad (2)$$

З рівняння (1): $t = \sqrt{2h/g}$, $t = 2,26$ с. З рівняння (2): $l = v_x t$, $l = 33,9$ м.
Швидкість каменя $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Вертикальна складова швидкості $v_y = gt$, отже $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$.

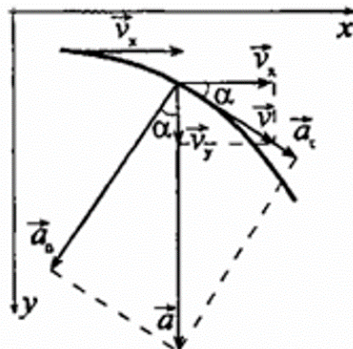


Шуканий кут φ - кут між напрямками вектора швидкості \vec{v} і вектора її горизонтальної складової v_x . З малюнка видно, що $\cos \varphi = \frac{v_x}{v}$; $\cos \varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}}$,
 $\cos \varphi = 0,56$; $\varphi = 56^\circ$

Приклад 9. Камінь кинутий горизонтально зі швидкістю $v_x = 15$ м/с. Знайти нормальне a_x і тангенціальне a_τ , прискорення каменя через час $t = 1$ с після початку руху.

Розв'язання

Повне прискорення каменя $a = g$; $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$. Повна швидкість $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.



З малюнка видно, що $\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}$, $\sin \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$. Тоді

$$a_n = \frac{g v_x}{v} = \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}, \quad a_\tau = \frac{g v_y}{v} = \frac{g v_y}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}. \quad a_n \approx 8,2 \text{ м/с}^2, \quad a_\tau \approx 5,4 \text{ м/с}^2$$

Приклад 10. Тіло кинуте із швидкістю v_0 під кутом до горизонту. Час польоту $t=2,2$ с. На яку висоту h підніметься тіло?

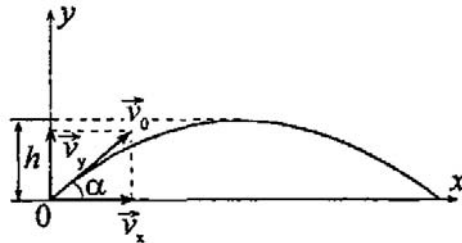
Розв'язання

Переміщення по вертикалі

$$S_y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

Позначимо t_1 – час підйому тіла на висоту h . Тоді з (1) отримаємо

$$h = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2}$$



У верхній точці $v_y = 0$, але $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1$, отже $v_0 \sin \alpha = gt_1$. Тоді

$$h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}. \quad \text{Оскільки } t_1 = \frac{t}{2}, \text{ то } h = \frac{gt_1^2}{2}. \quad h = \frac{9,8 \cdot 2,2^2}{8} = 5,9 \text{ м}$$

Приклад 11. Тіло кинуте із швидкістю $v_0 = 10 \text{ м/с}$ під кутом $\alpha = 45^\circ$ до горизонту. Знайти радіус кривизни R траєкторії тіла через час $t=1$ с після початку руху.

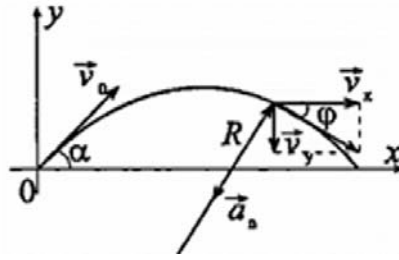
Розв'язання:

Знайдемо час, за яке тіло підніметься до верхньої точки траєкторії. Вертикальна складова його швидкості $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1$. У верхній точці

траєкторії $v_y = 0$, тому $v_0 \sin \alpha = gt_1$, звідки $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, $t_1 = 0,7$ с, тобто при

$t=1$ с тіло знаходиться вже на спуску, таким чином можна вважати, що тіло кинули горизонтально із швидкістю $v_x = v_0 \cos \alpha$. Нормальне прискорення

$$\text{тіла } a_n = \frac{v^2}{R}, \quad \text{де } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$



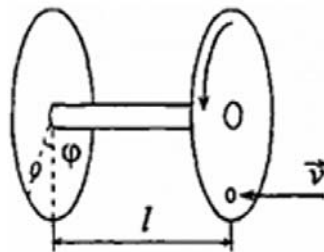
З малюнка видно, що $a_n = g \sin \varphi$, $\sin \varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$. Тоді $a_n = g \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$,

$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_x^2 + v_y^2) \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$ Обчислимо окремо v_x та v_y . $v_x = v_0 \cos \alpha = 5\sqrt{2} \text{ м/с}$,
 $v_y = g(t - t_1) = 3 \text{ м/с}$. Підставивши числові значення, отримаємо $R \approx 6,3 \text{ м}$.

Приклад 12. Вісь з двома дисками, розташованими на відстані $l=0,5 \text{ м}$ один від одного, обертається з частотою $n=1600$ об/хв. Куля, що летить уздовж осі, пробиває обидва диски; при цьому отвір від кулі в другому диску зміщений щодо отвору в першому диску на кут $\varphi = 12^\circ$. Знайти швидкість v кулі.

Розв'язання

Рівняння обертального руху $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}t + \frac{\vec{\beta}t^2}{2}$. Виберемо $\varphi_0 = 0$.



Із умови задачі видно, що рух здійснюється з постійною кутовою швидкістю $\omega = 2\pi n$, отже, кутове прискорення рівне 0, тобто зсув $\varphi = \omega t$, звідки:

$$t = \frac{\varphi}{\omega}, \quad (1)$$

$$\omega = 2\pi n. \quad (2)$$

Швидкість кулі

$$v = \frac{l}{t} \quad (3)$$

Підставивши (2) в (1), а потім (1) в (3) отримаємо: $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$. Провівши обчислення, знайдемо швидкість кулі $v = 419 \text{ м/с}$.

Приклад 13. Колесо, обертаючись рівноприскорено, через час $t=1\text{хв}$ після початку обертання набуває частоти $n=720$ об/хв. Знайти кутове прискорення ε колеса і число оборотів N колеса за цей час.

Розв'язання

Кутова швидкість колеса $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$. У скалярному вигляді при $\omega_0 = 0$ отримаємо $\omega = \varepsilon t$, крім того, $\omega = 2\pi n$. Звідси $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{n \cdot 2\pi}{t}$, $\varepsilon = 1,25 \text{ рад/с}^2$.

Приклад 14. Точка рухається по колу радіусом $R=20$ см з постійним тангенціальним прискоренням $a_\tau=5$ см/с². Через який час t після початку руху нормальне прискорення a_n точки буде: а) рівно тангенціальному; б) удвічі більше тангенціального?

Розв'язання

За умовою, обертання є рівноприскореним, тому, $a_\tau = \frac{v}{t}$, $a_n = \frac{v^2}{R}$; звідси $t = \frac{v}{a_\tau}$, $v = \sqrt{a_n R}$. Тоді $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$. а) Якщо $a_n = a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2\text{с}$; б) якщо $a_n = 2a_\tau$, то $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2,8\text{с}$.

Динаміка матеріальної точки

Приклад 1. Якої маси m_x баласт треба скинути з аеростата, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом $m=1600$ кг, підйомна сила аеростата $F=12$ кН. Вважати, що сила опору $F_{\text{опор}}$ повітря однакова при підйомі та спуску.

Розв'язання:

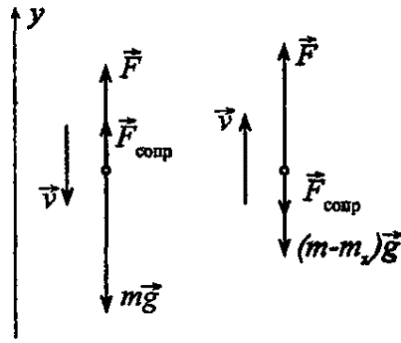
За другим законом Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{опор}} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{\text{опор}} + (m - m_x)\vec{g} = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

або в проекціях на вісь y :

$$\begin{cases} F - mg + F_{\text{опор}} = 0 \\ F - F_{\text{опор}} - (m - m_x)g = 0 \end{cases}. \quad (2)$$

Перше рівняння отриманої системи (2) описує рух аеростату, що опускається, друге – аеростату, що піднімається.



Розкривши дужки і склавши перше рівняння з другим, отримаємо:

$$m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 2\left(m - \frac{F}{g}\right); m_x = 752 \text{ кг.}$$

Приклад 2. До нитки підвішений вантаж масою $m=1$ кг. Знайти силу натягнення нитки T , якщо нитку з вантажем: а) піднімати з прискоренням $a=5$ м/с²; б) опускати з тим же прискоренням $a=5$ м/с².

Розв'язання:

В обох випадках, а і б, використаємо другий закон Ньютона.

а) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ або $T - mg = ma$, звідси $T = ma_1 + mg = m(a_1 + g)$; $T=14,8$ Н.

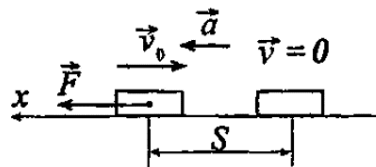
б) $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$ або $-mg + T = -ma_2$, звідси $T = mg - ma_2 = m(g - a_2)$
 $T=4,8$ Н.

Приклад 3. Автомобіль масою $m=1020$ кг, рухаючись рівноуповільнено, зупинився через час $t=5$ с, пройшовши шлях $s=25$ м. Знайти початкову швидкість v_0 автомобіля і силу гальмування F .

Розв'язання:

По другому закону Ньютона $\vec{F} = m\vec{a}$ або в проекції на вісь x :

$$F = ma. \quad (1)$$



Рівняння руху при рівноуповільненому русі автомобіля мають вид:

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \quad (2)$$

$$v_0 - at. \quad (3)$$

Оскільки кінцева швидкість автомобіля $v=0$, то з (3) початкова швидкість автомобіля $v_0 = at$. Підставляючи цей вираз у (2), знайдемо

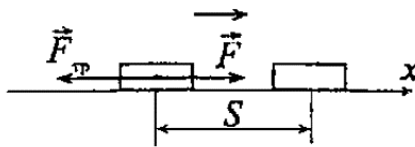
$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (4)$$

Підставивши (4) в (1), отримаємо: $F = \frac{2Sm}{t^2}$; $F = 2,04 \text{ кН}$.

Приклад 4. Яку силу F треба прикласти до вагону, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час $t=30\text{с}$ пройшов шлях $s=11\text{ м}$? Маса вагону $m=16\text{ т}$. Під час руху на вагон діє сила тертя $F_{\text{тер.}}$, рівна $0,05$ діючої на нього сили тяжіння mg .

Розв'язання

За другим законом Ньютона $\vec{F} + \vec{F}_{\text{тер.}} = m\vec{a}$ або в проекції на вісь x : $F - F_{\text{тер.}} = ma$, звідки $F = ma + F_{\text{тер.}}$. Оскільки рух рівноприскорений і $v_0=0$, то шлях $S = at^2/2$, звідки $a = \frac{2S}{t^2}$.



За умовою $F_{\text{тер.}}=0,05mg$, тоді $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0,05mg$; $F = 8,2 \text{ кН}$.

Приклад 5. Тіло масою $m=0,5\text{ кг}$ рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху s від часу t дається рівнянням $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$, де $C=5\text{ м/с}^2$ і $D=1\text{ м/с}^3$. Знайти силу F , що діє на тіло в кінці першої секунди руху.

Розв'язання

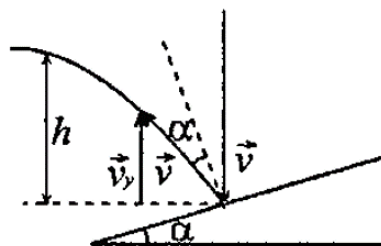
По другому закону Ньютона $F = ma$, де $a = d^2s / dt^2$. $\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$;

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a \text{ звідси } F = m(2c - 6Dt); F = 2\text{ Н.}$$

Приклад 6. Молекула масою $m=4,65 \cdot 10^{-26}\text{ кг}$, що летить із швидкістю $v=600\text{ м/с}$, ударяється об стінку судини під кутом $\alpha=60^\circ$ до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили $F\Delta t$, отриманий стінкою під час удару.

Розв'язання

По другому закону Ньютона $F\Delta t = m\Delta v$.



Вважаючи позитивним напрям нормалі, зовнішній до стінки, отримаємо:
 $\Delta v = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \alpha)$; $\Delta v = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha$.

Таким чином, отримаємо $F\Delta t = 2mv \cos \alpha$; $F\Delta t = 2,8 \cdot 10^{-23} \text{ Н} \cdot \text{с}$.

Приклад 7. Струмінь води перерізом $S=6 \text{ см}^2$ ударяється об стінку під кутом $\alpha=60^\circ$ до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти силу F , що діє на стінку, якщо відомо, що швидкість руху води в струмені $v=12 \text{ м/с}$.

Розв'язання

За час Δt об стінку ударяється маса води:

$$m = lS\rho = Sv\Delta t\rho, \quad (1)$$

де S – поперечний переріз струменя, ρ – густина води. За законом збереження імпульсу $F\Delta t = m\Delta v$, звідки:

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}. \quad (2)$$

Маємо $\Delta v = v_1 \cos \alpha - (-v_2 \cos \alpha) = \cos \alpha(v_1 + v_2)$. За умовою $v_1 = v_2 = v$, звідси:

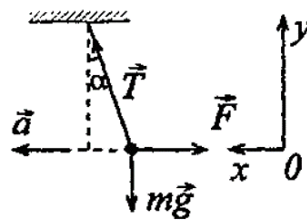
$$\Delta v = 2v \cos \alpha. \quad (3)$$

Підставляючи (1) і (3) в (2), отримаємо
 $F = \frac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v \cos \alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho \cos \alpha = 86 \text{ Н}$.

Приклад 8. Куля на нитці підвішена до стелі трамвайного вагону. Вагон гальмує, і його швидкість за час $t=3 \text{ с}$ рівномірно зменшується від $v_1=18 \text{ км/ч}$ до $v_2=6 \text{ км/ч}$. На який кут відхилиться при цьому нитка з кулею?

Розв'язання

Розглянемо положення кулі щодо системи відліку, пов'язаної із стелею вагону.



Оскільки вагон рухається з прискоренням, то система є неінерціальною. Рівняння руху у векторній формі:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0, \quad (1)$$

де $F = -ma$, тоді рівняння (1) в проекціях на вісь x :

$$T \sin \alpha = ma \quad (2)$$

і на вісь y :

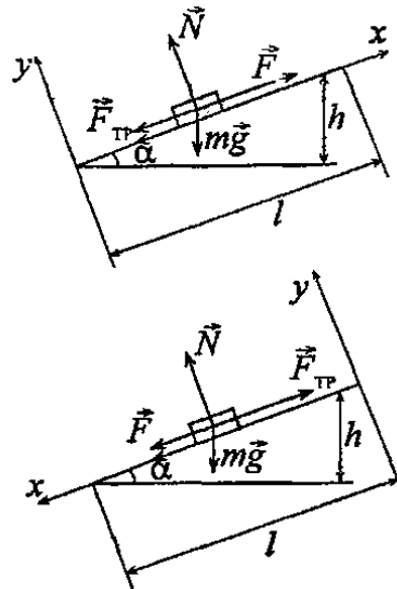
$$T \cos \alpha - mg = 0. \quad (3)$$

Розділивши (2) на (3), отримуємо $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$, звідки $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$ або враховуючи, що $a = \frac{\Delta v}{t}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(\Delta v / gt)$. Підставляючи числові данні, отримуємо $\alpha \approx 6^\circ$.

Приклад 9. На автомобіль масою $m=1$ т під час руху діє сила тертя $F_{\text{тер}}$, рівна 0,1 його ваги. Знайти силу тяги F , що розвивається мотором автомобіля, якщо автомобіль рухається з постійною швидкістю: а) в гору з ухилом 1 м на кожних 25 м шляху; б) під гору з тим же ухилом.

Розв'язання

Рівняння руху автомобіля у векторній формі $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + F_{\text{тер}} + \vec{F}$; $v = \text{const}$, отже $a=0$.



а) У проекції на вісь x : $0 = -mg \sin \alpha - F_{\text{тер}} + F$; на вісь y : $0 = N - mg \cos \alpha$, де $\sin \alpha = \frac{h}{l} = 0,04$, $\cos \alpha = 0,999$, звідки $N = mg \cos \alpha$. $F_{\text{тер}} = kN = kmg \cos \alpha$; $F = mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha$; $F = mg(\sin \alpha + k \cos \alpha)$ або $F=1,37$ кН.

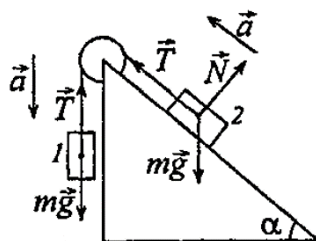
б) У проекції на вісь x : $0 = F + mg \sin \alpha - F_{\text{тер}}$, на вісь y : $N = mg \cos \alpha$. $F = F_{\text{тер}} - mg \sin \alpha$; $F = kmg \cos \alpha - mg \sin \alpha$; $F = mg(k \cos \alpha - \sin \alpha)$. $F=590$ Н.

Приклад 10. Невагомий блок укріплений у вершині похилої площини, що складає з горизонтом кут $\alpha=30^\circ$. Гирі 1 і 2 однакової маса $m_1=m_2=1$ кг зв'язані ниткою і перекинуті через блок. Знайти прискорення a , з яким рухаються гирі, і силу натягнення нитки T . Тертям гирі об похилу площину і тертям в блоці нехтувати.

Розв'язання:

Нехай $m_1 = m_2 = m$. Запишемо рівняння другого закону Ньютона для першої і другої гирі в проекціях на напрям їх руху з урахуванням $T_1 = T_2 = T$:

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg \sin \alpha = ma \end{cases} \quad (1)$$



З першого рівняння системи (1) маємо:

$$T = m(g - a). \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1), отримаємо: $g(1 - \sin \alpha) + 2a$, звідки $a = g(1 - \sin \alpha) / 2$. Підставимо числові значення, отримаємо: $a = 2,45 \text{ м/с}^2$ і $T = 7,35 \text{ Н}$.

Приклад 11. При підйомі вантажу масою $m = 2$ кг на висоту $h = 1$ м сила F здійснює роботу $A = 78,5$ Дж. З яким прискоренням a піднімається вантаж?

Розв'язання

По другому закону Ньютона в проекції на напрям руху вантажу маємо $ma = F - mg$, звідки $F = ma + mg$.

За умовою роботу A здійснює сила F , отже

$$A = Fh \cos 0 = Fh = mah + mgh, \quad (1)$$

тобто робота A йде на збільшення потенційної енергії вантажу і на надання йому прискорення. З рівняння (1) знайдемо $a = \frac{A - mgh}{hm}$; $a = 29,4 \text{ м/с}^2$.

Приклад 12. Яку роботу A необхідно виконати, щоб змусити тіло масою $m = 2$ кг: а) збільшити швидкість $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 5$ м/с; б) зупинитися при початковій швидкості $v_0 = 8$ м/с?

Розв'язання

Виконана робота піде на приріст кінетичної енергії:

$$\text{а) } A_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}; A_1 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}; A_1 = 21 \text{ Дж.}$$

б) $A_2 = W_{k2} - W_{k1}$. Оскільки $W_{k2} = 0$ то $A_2 = -W_{k1} = -mv_0^2 / 2$; $A = -6,4$. Знак «-» говорить про те, що робота здійснюється силою тертя.

Приклад 13. Знайти роботу A , яку необхідно виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла масою $m=1$ т від $v_1=2$ м/с до $v_2=6$ м/с на шляху $s=10$ м. На всьому шляху діє сила тертя $F_{\text{тер.}}=2$ Н.

Розв'язання

Частина виконаної роботи піде на приріст кінетичної енергії, а інша частина – на подолання сили тертя. $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + A_{\text{тер.}}$, де $A_{\text{тер.}} = F_{\text{тер.}} \cdot s$
 тоді $A = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + F_{\text{тер.}} \cdot s$; $A = 16,02$ кДж.

Приклад 14. Яку масу m бензину витрачає двигун автомобіля на шляху $s=100$ км, якщо при потужності двигуна $N=11$ кВт швидкість його руху $v=30$ км/ч? К.п.д. двигуна $\eta=0,22$, питома теплота згорання бензину $q=46$ МДж/кг.

Розв'язання

При переміщенні автомобіля на відстань s його двигун здійснює роботу $A = \frac{Nt}{\eta} = \frac{Ns}{\eta v}$. При цьому витрачається маса бензину $m = \frac{A}{q} = \frac{Ns}{q\eta v}$; $m = 13$ кг.

Приклад 15. Камінь падає з деякої висоти протягом часу $t=1,43$ с. Знайти кінетичну W_k і потенційну W_n енергії каменя в середній точці шляху. Маса каменя $m=2$ кг

Розв'язання

У верхній точці камінь володів потенційною енергією $W_n = mgH$ де $H = \frac{gt^2}{2}$ (t – час падіння до землі). Потенційна енергія каменя в середній точці шляху $W_n = mgh$ де $h = \frac{H}{2}$. Таким чином $W_n = mg \frac{H}{2} = \frac{mg^2t^2}{4}$; $W_n = 98$ Дж. Кінетичну енергію камінь набув за рахунок спаду потенційної енергії. У середній точці шляху $W_k = W_n = 98$ Дж, оскільки $mgH - mgh = mg \frac{H}{2} = W_k$.

Приклад 16. Тіло масою $m=10$ г рухається по колу радіусом $R=6,4$ см. Знайти тангенціальне прискорення a_t тіла, якщо відомо, що до кінця другого обороту після початку руху його кінетична енергія $W_k=0,8$ МДж.

Розв'язання

Знайдемо кутове прискорення:

$$a_t = \varepsilon R; \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \tag{2}$$

Кутова швидкість $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi N}{t}$, звідси

$$t = \frac{2\pi N}{\omega}. \quad (3)$$

З іншої сторони:

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (4)$$

Швидкість знайдемо з рівняння кінетичної енергії: $W_k = \frac{mv^2}{2}$, звідси

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}. \quad (5)$$

Підставивши рівняння (5) в (4), отримаємо

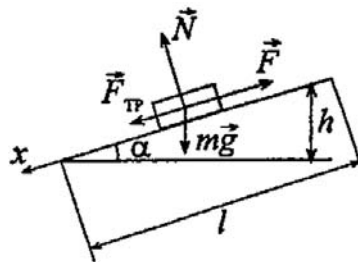
$$\omega = \sqrt{\frac{2W_k}{mR^2}}. \quad (6)$$

Підставивши рівняння (3) в (2), з урахуванням (6), знайдемо:
 $\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\pi N} = \frac{2W_k}{mR\pi N}$. Тоді з (1): $a_\tau = \frac{W_k R}{mR^2 \pi N} = \frac{W_k}{mR\pi N}$; $a_\tau \approx 0,2 \text{ м/с}^2$.

Приклад 17. Автомобіль масою $m=2$ т рухається в гору з ухилом 4 м на кожних 100 м шляху. Коефіцієнт тертя $k=0,08$. Знайти роботу A , що здійснюється двигуном автомобіля на шляху $s=3$ км., і потужність N що розвивається двигуном, якщо відомо, що шлях $s=3$ км був пройдений за час $t=4$ хв.

Розв'язання

У разі рівномірного руху автомобіля $a=0$, тоді згідно другому закону Ньютона сила тяги двигуна $F = F_{\text{тер.}} + mg \sin \alpha$ або $F = mg(k \cos \alpha + \sin \alpha)$ де $\sin \alpha = h/l$; $\sin \alpha = 0,04$; $\cos \alpha = 0,999$.

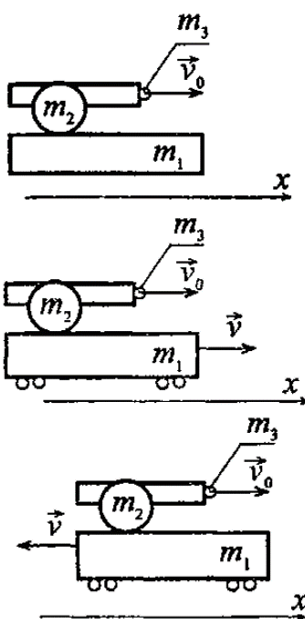


Робота сили F на шляху s : $A = Fs = mgs(k \cos \alpha + \sin \alpha)$; $A=7 \text{ МДж}$.
 Потужність двигуна $N = A/t$; $N=29,2 \text{ кВт}$.

Приклад 18. На рейках стоїть платформа масою $m_1=10$ т. На платформі закріплено гармата масою $m_2=5$ т, з якого робиться постріл уздовж рейок. Маса снаряда $m_3=100$ кг; його початкова швидкість відносно гармати $v_0=500$ м/с. Знайти швидкість u платформи в перший момент після пострілу, якщо: а) платформа стоїть нерухомо; б) платформа рухалася із швидкістю $v=18$ км/год і постріл був зроблений в напрямі, протилежному напрямку її руху.

Розв'язання:

а) При нерухомій платформі початкова швидкість снаряда відносно землі рівна його швидкості v_0 відносно гармати. Систему «платформа-гармата-снаряд» можна вважати замкненою в проекції на вісь x за умови, що силою тертя кочення платформи можна нехтувати. Тоді в проекції на вісь x імпульс системи до пострілу $p = (m_1 + m_2 + m_3)v = 0$, оскільки $v = 0$. Імпульс системи після пострілу $p' = m_3v_0 + (m_1 + m_2)u$. За законом збереження імпульсу $p = p'$ або $m_3v_0 + (m_1 + m_2)u = 0$, звідки $u = \frac{m_3v_0}{m_1 + m_2} = 5,14 \text{ км/год}$. Знак «-» вказує, що платформа почала рухатися в напрямі, протилежному напрямку руху снаряда.



б) Якщо постріл був зроблений у напрямі руху платформи, то початкова швидкість снаряда відносно землі рівна $v_0 + v$. На підставі закону збереження імпульсу маємо:

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = m_3(v_0 + v) + (m_1 + m_2)u \quad (1),$$

звідки $u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3(v_0 + v)}{m_1 + m_2}$; $u = 6 \text{ км/год}$.

в) Якщо постріл був зроблений в напрямі, протилежному напрямку руху платформи, то при $v_0 > 0$ маємо $v < 0$. Тоді рівняння (1) має вигляд: $-(m_1 + m_2 + m_3)v = m_3(v_0 - v) + (m_1 + m_2)u$, звідки

$$u = -\frac{(m_1 + m_2 + m_3)v + m_3(v_0 - v)}{m_1 + m_2} = -30 \text{ км/год}$$

Приклад 19. Ковзаняр масою $M = 70 \text{ кг}$, стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямі камінь масою $m = 3 \text{ кг}$ із швидкістю $v = 8 \text{ м/с}$. На яку

відстань s відкотиться при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід $k=0,02$?

Розв'язання

Рух ковзаняра є рівноуповільненим, пройдений ним шлях $s = \frac{v_0^2}{2a}$. За законом

збереження імпульсу $Mv_0 = mv$, звідки $v_0 = \frac{mv}{M}$.

Прискорення a можна знайти по другому закону Ньютона: $F_{\text{тер}} = ma$. Оскільки $F_{\text{тер}} = kmg$, то $ma = kmg$; $a = kg$. Підставивши отримані вирази в

перше рівняння, отримаємо $s = \frac{m^2 v^2}{2M^2 kg}$; $s = 0,3 \text{ м}$.

Приклад 20. Із гармати масою $m_1=5$ т вилітає снаряд масою $m_2=100$ кг. Кінетична енергія снаряда при вильоті $W_{k2}=7,5$ Мдж. Яку кінетичну енергію W_{k1} отримує гармата унаслідок віддачі?

Розв'язання

Згідно закону збереження імпульсу $m_1 v_1 = m_2 v_2$. Кінетична енергія гармати відразу після пострілу $W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$. Кінетична енергія снаряда $W_{k2} = \frac{m_2 v_2^2}{2}$;

$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}$, а $v_2^2 = \frac{2W_{k2}}{m_2}$ тоді $v_1^2 = \frac{m_2^2 2W_{k2}}{m_1^2 \cdot m_2}$. Таким чином, отримаємо

$W_{k1} = \frac{m_1 2m_2 W_{k2}}{2m_1^2} = \frac{m_2}{m_1} W_{k2}$; $W_{k1} = 150 \text{ кДж}$

Приклад 21. Тіло масою $m_1=5$ кг ударяється об нерухоме тіло масою $m_2=2,5$ кг. Кінетична енергія системи двох тіл безпосередньо після удару стала $W_k=5$ Дж. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кінетичну енергію W_{k1} першого тіла до удару.

Розв'язання

Рух здійснюється уздовж горизонтальної осі. Згідно закону збереження імпульсу

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u, \quad (1)$$

де v_1 – швидкість першого тіла до удару, u – швидкість системи двох тіл після удару.

Кінетична енергія першого тіла до удару:

$$W_{k1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} \quad (2)$$

$$3 (1) \quad v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}.$$

Знайдемо u із виразу для кінетичної енергії системи двох тіл після удару:

$$W_k = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}, \text{ звідки } u = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}, \text{ тоді}$$

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}}{m_1}, \text{ або } v_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}}{m_1}. \quad (3)$$

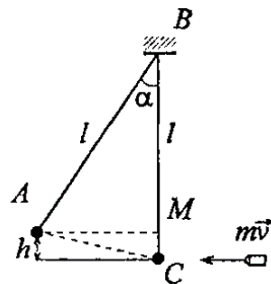
Підставивши (3) в (2) отримаємо $W_{k1} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1^2},$

$$W_{k1} = \frac{W_k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}. \quad W_{k1} = 7,5 \text{ Дж.}$$

Приклад 22. Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, підвішене на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше за масу тіла. Відстань від центру тіла до точки підвісу стрижня $l=1$ м. Знайти швидкість v кулі, якщо відомо, що стрижень з тілом відхилився від удару кулі на кут $\alpha=10^\circ$.

Розв'язання

Силу опору повітря не враховуємо, отже, систему «куля - тіло» можна вважати замкнутою.



Застосуємо закон збереження імпульсу і закон збереження енергії для даної системи:

$$mv = (m + M) \cdot u, \quad (1)$$

де u – швидкість тіла разом з кулею після удару. В результаті взаємодії тіла з кулею, він набув кінетичну енергію, яка після відхилення стрижня на кут α перейшла в потенціальну енергію:

$$\frac{(m + M) \cdot u^2}{2} = (M + m) \cdot g \cdot h \quad (2)$$

З (1) виразимо u : $u = \frac{mv}{(m + M)}$, або $u = \frac{mv}{1001 \cdot m} = \frac{v}{1001}$. З (2) отримаємо

$$\frac{u^2}{2} = g \cdot h. \quad \frac{v^2}{2 \cdot (1001)^2} = g \cdot h. \quad \text{Знайдемо } h: \quad BM = l \cdot \cos \alpha;$$

$$h = l - l \cdot \cos \alpha = l \cdot (1 - \cos \alpha). \quad \text{Тоді } v = 1001 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}.$$

$$v \approx 550 \text{ м/с}$$

Приклад 23. На яку частину зменшиться вага тіла на екваторі унаслідок обертання Землі навколо осі?

Розв'язання

На екваторі на тіло діє сила тяжіння:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}, \quad (1)$$

(M – маса Землі; m – маса тіла; R – радіус Землі; G – гравітаційна постійна) та сила реакції опори, при цьому тіло бере участь у добовому обертанні Землі і рухається по колу радіусом R . Запишемо рівняння на підставі другого закону Ньютона $F - N = m\omega^2 R$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – кутова швидкість; T – період обертання

Землі навколо своєї осі ($T=86400$ с). Тоді $F - N = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, звідки:

$$N = F - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R. \quad (2)$$

По третьому закону Ньютона вага тіла на екваторі:

$$P_E = N \quad (3)$$

Вага тіла, що покоїться, для будь-якої точки Землі чисельно рівний силі тяжіння:

$$P = mg. \quad (4)$$

Відносна зміна ваги тіла:

$$\delta = \frac{P - P_E}{P} \quad (5)$$

Вирішуючи спільно рівняння (1) - (3), отримаємо

$$P_E = G \frac{m \cdot M}{R^2} - \frac{4\pi^2 m R}{T^2}. \quad (6)$$

Підставляючи (4) і (6) в (5) отримаємо:

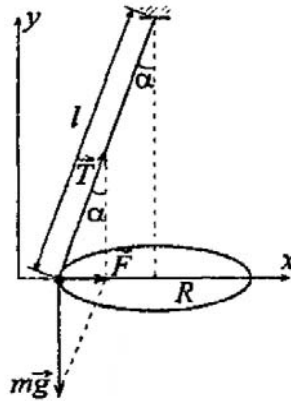
$$\delta = 1 - \frac{G \cdot M}{gR^2} - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}. \quad (7)$$

Прийmemo прискорення вільного падіння $g=9,8$ м/с. Підставляючи числові дані в (7), отримаємо $\delta=0,34\%$.

Приклад 24. Гирка масою $m=50$ г, прив'язана до нитки завдовжки $l=25$ см, описує в горизонтальній площині коло. Частота обертання гирки $n=2$ об/с. Знайти силу натягнення нитки T .

Розв'язання

У горизонтальній площині на гирку діє сила $F = T \cdot \sin \alpha$. Тоді за другим законом Ньютона $T \cdot \sin \alpha = ma_n$, де $\sin \alpha = \frac{R}{l}$.

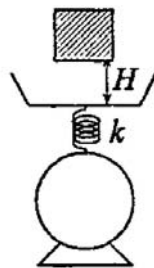


Враховуючи, що $a_n = \omega^2 R = (2\pi \cdot n)^2 R$, запишемо: $(2\pi \cdot n)^2 Rm = T \frac{R}{l}$, звідки $T = (2\pi \cdot n)^2 lm$. $T=1,96$ Н.

Приклад 25. Груз масою $m=1$ кг падає на чашку вагів з висоти $H=10$ см. Які показання вагів F у момент удару, якщо після заспокоєння гойдань чашка вагів опускається на $h=0,5$ см?

Розв'язання

За законом збереження енергії у момент удару $W_{n1} = W_{n2}$, де $W_{n1} = mgH$, а $W_{n2} = \frac{kx_1^2}{2}$. Звідси $mgH = \frac{kx_1^2}{2}$; $x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ – деформація пружини вагів у момент удару.



Після заспокоєння гойдань настає рівновага $mg = F_2$, де $F_2 = kx_2$, за законом Гука, причому $x_2 = h$. Тоді $mg = kh$; $k = \frac{mg}{h}$. Свідчення вагів у момент

удару $F = mg + F_1$, де $F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$ – за законом Гука $F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$;
 $F = mg + \sqrt{2mgHk}$; $F = mg + \sqrt{2mgH\frac{mg}{h}}$; $F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}$; $F = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{h}}\right)$.

Звідки $F = 72,5 \text{ Н}$.

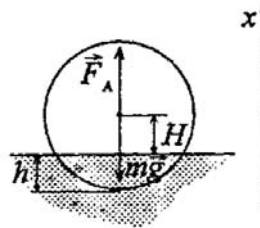
Приклад 26. М'яч радіусом $R=10$ см плаває у воді так, що його центр мас знаходиться на $H=9$ см вище за поверхню води. Яку роботу необхідно виконати, щоб занурити м'яч у воду до діаметральної площини?

Розв'язання

М'яч плаває, якщо сила тяжіння, що діє на нього, врівноважується силою Архімеда, тобто $mg = F_A$, або:

$$mg = \rho_0 V_0 g \quad (1)$$

V_0 – об'єм сегменту заввишки h , що знаходиться у воді в рівновазі, ρ_0 – щільність води, m – маса м'яча.



Очевидно, що $H + h = R$, тобто радіусу м'яча. Якщо тепер занурити м'яч у воду на глибину x , то сила Архімеда перевищить силу тяжіння, що діє на м'яч, і результуюча сила, що виштовхує м'яч з води, буде:

$$F_x = F'_A - mg. \quad (2)$$

Проти цієї сили F_x і повинна бути виконана робота. Сила Архімеда:

$$F'_A = \rho_0 V g, \quad (3)$$

де V – об'єм сегменту заввишки $h+x$. З (1) - (3) маємо $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g(V - V_0) = \rho_0 g V_x$, V_x – об'єм кульового шару висотою x . Кульовий сегмент заввишки x має об'єм кульового шару

$$V_x = V - V_0 = \frac{\pi(x+h)^2}{3}(3R - (x+h)) - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \text{ Тоді:}$$

$$F_x = \rho_0 g V_x = \frac{\pi \rho_0 g}{3} (3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R-h)). \quad (4)$$

Робота, яку необхідно виконати при зануренні м'яча до діаметральної площини, буде:

$$A = \int_0^H F_x dx. \quad (5)$$

Підставимо (4) в (5), проінтегруємо і врахуємо, що $H + h = R$, отримаємо, після підстановки даних завдання, $A = 0,74$ Дж.

Приклад 27. Знайти силу гравітаційної взаємодії F між двома протонами, що знаходяться на відстані $r = 10^{-6}$ м один від одного. Маса протона $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг.

Розв'язання

Сила гравітаційної взаємодії виражається $F = G \frac{m^2}{r^2}$. Підставляючи числові дані, отримаємо: $F = 1,86 \cdot 10^{-11}$.

Приклад 28. Порівняти прискорення вільного падіння у поверхні Місяця g_M з прискоренням вільного падіння у поверхні Землі g_3 .

Розв'язання

Відповідно до закону унесвітнього тяжіння, тіло масою m , що знаходиться у поверхні Землі, притягується нею з силою $P = G \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}$, де M_3 – маса Землі, R_3 – її радіус. З іншого боку, $P = mg$. Прирівнюючи ці величини, знайдемо, що $g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2}$. Прискорення вільного падіння у поверхні Місяця: $g_M = G \frac{M_M}{R_M^2}$, де M_M і

R_M – маса і радіус Місяця. Звідси $\frac{g_M}{g_3} = \frac{M_M \cdot R_3^2}{R_M^2 \cdot M_3}$, $g_M = 0,165 \cdot g_3$.

Приклад 29. Знайти лінійну швидкість v руху Землі по круговій орбіті.

Розв'язання

Лінійна швидкість руху по колу $v = \omega \cdot R$, де ω – частота обертання, R – відстань до Сонця. $\omega = \frac{2\pi}{T}$, де T – період обертання Землі навколо Сонця. Звідси $v = 30$ км/с.

Приклад 30. На якій висоті до від поверхні Землі прискорення вільного падіння $g = 1 \frac{M}{c^2}$?

Розв'язання

У поверхні Землі на тіло масою m діє сила $P = mg = G \frac{m \cdot M}{R^2}$, де M та R – маса та радіус Землі, а на висоті h – $P_h = mg_h = G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}$. Тоді $\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R + h)^2}$.

Виразимо h : $(R + h)^2 = \frac{g \cdot R^2}{g_h}$; $h = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{g_h}} - R$. Підставимо числові значення та отримаємо: $h = 13590$ км.

Динаміка обертального руху

Приклад 1. Знайти момент інерції J і момент імпульсу L земної кулі відносно осі обертання.

Розв'язання

Момент інерції кулі $J = \frac{2}{5}MR^2$, підставляючи значення маси і радіусу Землі,

отримаємо $J = 97,36 \cdot 10^{36}$ кг·м². Момент імпульсу $L = J \cdot \omega$, де $\omega = \frac{2\pi}{T}$, отже

$L = \frac{2J\pi}{T}$. Період обертання Землі $T = 24$ години. Підставляючи числові дані,

отримаємо $L = 7 \cdot 10^{33}$ кг·м²/с.

Приклад 2 Маховик, момент інерції якого $J = 63,6$ кг·м² обертається з кутовою швидкістю $\omega = 31,4$ рад/с. Знайти момент сил гальмування M , під дією якого маховик зупиняється через час $t = 20$ с. Маховик вважати однорідним диском.

Розв'язання

Момент сил гальмування $M = J \cdot \varepsilon$, де ε – кутове прискорення, яке дорівнює

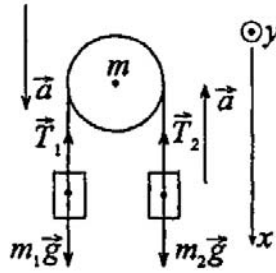
$\varepsilon = \frac{\omega}{t}$, оскільки маховик обертається рівносповільнено. Тоді $M = \frac{\omega \cdot J}{t}$;

$M \approx 100$ Н·м.

Приклад 3. Дві гирі з масами $m_1 = 2$ кг і $m_2 = 1$ кг зв'язані ниткою, перекинutoю через блок масою $m = 1$ кг. Знайти прискорення a , з яким рухаються гирі, і сили натягнення T_1 і T_2 ниток, до яких підвішені гирі. Блок вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

Розв'язання

Запишемо у векторній формі рівняння поступального руху першої і другої гирі: $m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1$; $m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$ і рівняння обертального руху диска $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, де M_1 – момент сили натягнення нитки T_1 , M_2 – момент сили натягнення нитки T_2 .



Спроектуємо перші два рівняння на вісь x , а останнє на вісь y і додамо рівняння кінематичного зв'язку. Отримаємо систему 4 рівнянь:

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \quad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \quad (2)$$

$$J\varepsilon = RT_1 - RT_2; \quad (3)$$

$$a = \varepsilon R. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3):

$$J \frac{a}{R} = R(T_1 - T_2). \quad (5)$$

Віднімемо (2) з (1), підставимо в отриманий вираз (5) і знайдемо:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = 2,8 \frac{m}{c^2}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (1) і (2), отримаємо $T_1 = m_1(g - a)$; $T_1 = 14$ Н.
 $T_2 = m_2(g - a)$; $T_2 = 12,6$ Н.

Приклад 4. Диск масою $m=2$ кг котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю $v=4$ м/с. Знайти кінетичну енергію W_k диска.

Розв'язання

У завданні розглядається так званий «плоский рух». Повна кінетична енергія диска складається з кінетичної енергії поступальної руху точки центру мас і кінетичної енергії обертання відносно осі, що проходить через центр мас:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \text{ Оскільки } J = \frac{mR^2}{2} \text{ і } \omega = \frac{v}{R}, \text{ де } m - \text{ маса диска, } R - \text{ радіус диска,}$$

$$\text{то } W_k = \frac{3mv^2}{4}. \quad W_k = 24 \text{ Дж.}$$

Приклад 5. Обруч та диск однакової маси $m_1 = m_2$ котяться без ковзання з однією і тією ж швидкістю v . Кінетична енергія обруча $W_{k1} = 40$ Н. Знайти кінетичну енергію W_{k2} диска.

Розв'язання

Припустимо $m_1 = m_2 = m$. Кінетична енергія обруча і диска складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертання:

$$W_{k1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1 \omega_1^2}{2}, \quad (1)$$

$$W_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2}. \quad (1)$$

Момент інерції обруча $J = mR_1^2$. Кутова швидкість $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$. Момент інерції диска $J = \frac{1}{2} mR_2^2$; частота $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$. Проведемо наступні перетворення:

$$J_1 \omega_1^2 = mR_1^2 \frac{v^2}{R_1^2} = mv^2; \quad J_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} mR_2^2 \frac{v^2}{R_2^2} = \frac{1}{2} mv^2. \quad \text{Тоді, з урахуванням (1) та (2),}$$

можна записати $W_{k1} = mv^2$, $W_{k2} = \frac{3mv^2}{4}$ або $W_{k2} = \frac{3W_{k1}}{4}$. $W_{k2} = 30$ Дж.

Приклад 6. Кінетична енергія валу, що обертається з частотою $n=5$ об/с, $W_k = 60$ Дж. Знайти момент імпульсу L валу.

Розв'язання

Момент імпульсу – вектор, напрям якого визначається за правилом векторного добутку $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$, де $\vec{p} = m\vec{v}$, а модуль рівний:

$$L = Rp \sin \alpha = mvR, \quad (1)$$

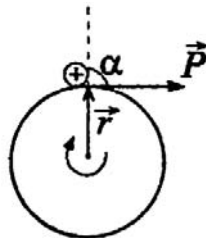
оскільки $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Кінетична енергія валу:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

де

$$J = \frac{mR^2}{2}, \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi n. \quad (4)$$



Вирішуючи спільно рівняння (2)-(4) отримуємо: $W_k = mR^2 \pi^2 n^2$, звідки:

$$m = \frac{W_k}{R^2 \pi^2 n^2}, \quad (5)$$

$$v = 2\pi nR. \quad (6).$$

Підставивши (5) і (6) в (1), знайдемо $L = \frac{2W_k}{\pi n}$; $L = 7,6 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$.

Приклад 7. Мідна куля радіусом $R=10$ см обертається з частотою $n=2$ об/с навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу A необхідно виконати, щоб збільшити кутову швидкість ω обертання кулі удвічі?

Розв'язання

Кінетична енергія обертання кулі $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$, де момент інерції кулі $J = \frac{2}{5}mR^2$. Робота зі збільшення кутової швидкості обертання кулі буде

дорівнювати приросту її кінетичної енергії. $A = W_{k2} - W_{k1}$, де $W_{k1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$;

$W_{k2} = \frac{J\omega_2^2}{2} = \frac{4J\omega_1^2}{2}$. Звідси:

$$A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2; \quad (1)$$

$$\omega_1 = 2\pi n. \quad (2)$$

Маса кулі $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, $\rho = 8,6 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, тоді

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\rho R^2 = \frac{8}{15}\pi R^5\rho. \quad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), отримаємо $A = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15}\pi R^5\rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{15}\pi^3 R^5\rho n^2$;

$A=34,1$ Дж.

Приклад 8. Колесо, обертаючись рівноуповільнено, зменшило за час $t=1$ хв. частоту обертання від $n_1=300$ об/хв. до $n_2=180$ об/хв. Момент інерції колеса $J = 2 \text{кг} \cdot \text{м}^2$. Знайти кутове прискорення ε колеса, момент сил гальмування M , роботу A сил гальмування і число обертів N , зроблених колесом за час $t=1$ хв.

Розв'язання

Перетворимо числові одиниці в систему СІ: $t=60$ с, $n_1=5$ об/с, $n_2=3$ об/с. Оскільки обертання рівноуповільнене, то число обертів можна визначити так:

$$N = \frac{n_1 + n_2}{2} t; \quad N = 240 \text{ об.} \quad \text{Кутове прискорення} \quad \varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}. \quad \text{Маємо:}$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1), \quad \text{таким чином,} \quad \varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}.$$

Підставивши числові значення, отримаємо $\varepsilon = -0,21 \text{ рад/с}^2$. Момент сил

гальмування $M = J\varepsilon$; $M=0,42$ Н·м. Робота сил гальмування дорівнює приросту кінетичної енергії $A = W_{k1} - W_{k2} = \frac{J\omega_2^2 - J\omega_1^2}{2}$;

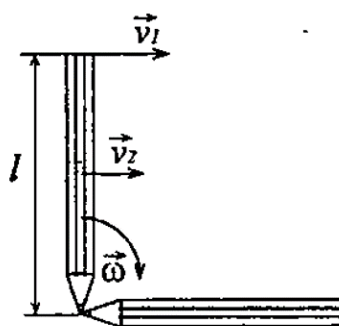
$$A = \frac{J}{2} \left((2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2 \right) = 2\pi^2 J (n_1^2 - n_2^2); A = 630 \text{ Дж.}$$

Приклад 9. Олівець завдовжки $l=15$ см, поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову швидкість ω і лінійну швидкість v матиме в кінці падіння середина і верхній кінець олівця?

Розв'язання

Розглянемо рух центру мас олівця. У вертикальному положенні він має потенціальну енергію, яка при падінні переходить в кінетичну енергію обертання:

$$\frac{J\omega_1^2}{2} = mg \frac{l}{2}. \quad (1)$$



Момент інерції олівця відносно осі, що проходить через його кінець, знайдемо за теоремою Штейнера:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (2)$$

Підставивши (2) в (1), отримаємо $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$, звідки $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$; $\omega_1 = 14 \text{ рад/с}$.

Оскільки $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, а лінійна швидкість $v = \omega R$, то швидкість кінця олівця $v_1 = \omega \cdot l = 2,1 \text{ м/с}$. Швидкість середини $v_2 = \omega \cdot \frac{l}{2} = 1,05 \text{ м/с}$.

Приклад 10. Горизонтальна платформа масою $m=100$ кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою $n_1=10$ об/хв. Людина масою $m_0=60$ кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою n_2 почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

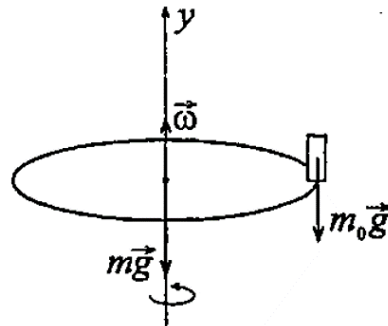
Розв'язання

Система «людина - платформа» замкнута в проекції на вісь y , оскільки моменти сил $M_{mg} = 0$ та $M_{m_0g} = 0$ в проекції на цю вісь. Отже, можна скористатися законом збереження моменту імпульсу. У проекції на вісь y : $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$, де J_1 – момент інерції платформи з людиною, що стоїть на її краю, J_2 – момент інерції платформи з людиною, що стоїть в центрі, ω_1 та ω_2 – кутові швидкості платформи в обох випадках. Причому:

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2, \quad (1)$$

$$J_2 = \frac{mR^2}{2}, \quad (2)$$

де R – радіус платформи.



Підставляючи (2) в (1) і враховуючи, що $\omega = 2\pi n$, де n – частота обертання платформи, отримуємо $\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = 2\pi n_2 \frac{mR^2}{2}$;

$$n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m}; \quad n_2 = 22 \text{ об/хв.}$$

Приклад 11. Обруч діаметром $D=56,5$ см висить на цвяху, вбитому в стінку, і здійснює малі коливання в площині, паралельній стіні. Знайти період коливань T обруча.

Розв'язання

Центр мас знаходиться в центрі обруча, тоді період малих коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mRg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{mDg}}, \quad \text{де } J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2), \quad R_1 = R_2, \quad \text{таким чином,}$$

$$J = mR^2 = m \frac{D^2}{4}. \quad \text{Звідси } T = 2\pi \sqrt{\frac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}; \quad T=1,5 \text{ с.}$$

Механіка газів та рідин

Приклад 1. Знайти швидкість v руху вуглекислого газу по трубі, якщо відомо, що за час $t=30$ хв. через поперечний переріз труби протікає маса газу $m=0,51$ кг. Густина газу $\rho=7,5$ кг/м³. Діаметр труби $D=2$ см.

Розв'язання

За час t через поперечний переріз труби проходить деякий об'єм газу циліндричної форми (маса цього об'єму газу нам відома):

$$V = \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{m}{\rho}. \quad (1)$$

Швидкість течії вуглекислого газу $v = \frac{l}{t}$. З рівняння (1) знайдемо $l = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}$,

$$\text{тоді } v = \frac{4m}{\pi D^2 \rho t}; \quad v=0,12 \text{ м/с.}$$

Приклад 2. В дні циліндричного посуду діаметром $D=0,5$ м є круглий отвір діаметром $d=1$ см. Знайти залежність швидкості пониження рівня води в посуді від висоти h . Знайти значення цієї швидкості для висоти $h=0,2$ м.

Розв'язання

За теоремою Бернуллі $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}$ або

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \quad (1)$$

де v_1 – швидкість пониження рівня води в посуді, v_2 – швидкість витікання води з отвору. В силу нерозривності струменя $v_1 S_1 = v_2 S_2$, звідки

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}, \quad (2)$$

де S_1 – площа поперечного перерізу посуду, S_2 – площа поперечного перерізу отвору. Підставляючи (2) в (1), отримаємо $v_1 = \frac{S_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Оскільки $S_1 = \frac{\pi D^2}{4}$ і

$S_2 = \frac{\pi d^2}{4}$, то $v_1 = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$. Оскільки $d^4 \ll D^4$, то $v_1 \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh}$. При $h=0,2$ м швидкість $v=0,8$ мм/с.

Приклад 3. Кулька спливає з постійною швидкістю v в рідині, густина ρ_1 , якої в 4 рази більше густини матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя $F_{\text{тер}}$, що діє на спливаючу кульку, більше сили тяжіння mg , що діє на цю кульку?

Розв'язання

По другому закону Ньютона:

$$F_A - mg - F_{\text{тер}} = 0, \quad (1)$$

де $F_A = \rho_1 V g$ – сила Архімеда. Враховуючи, що

$$m = \rho_2 V, \quad (2)$$

із (2) $V = \frac{m}{\rho_2}$, тоді:

$$F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg. \quad (3)$$

Перетворюючи (1) з урахуванням (3) отримаємо $F_{\text{мер}} = 3mg$ або $\frac{F_{\text{мер}}}{mg} = 3$.

Приклад 4. Сталева кулька діаметром $d=1$ мм падає з постійною швидкістю $v=0,185$ см/с у великому сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну в'язкість η касторової олії.

Розв'язання

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона

$$mg - F_A - F = 0, \quad (1)$$

де маса кульки

$$m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}. \quad (2)$$

Сила Архімеда

$$F_A = \rho_M V g = \rho_M g \times \frac{\pi d^3}{6}. \quad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса

$$F = 3\pi\eta d v. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо: $18\eta v = d^2 g \times (\rho_c - \rho_M)$, звідси $\eta = \frac{d^2 g (\rho_c - \rho_M)}{18v}$; $\eta = 2$ Па·с.

Приклад 5. Пробкова кулька радіусом $r=5$ мм спливає в сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну і кінематичну в'язкість касторової олії, якщо кулька спливає з постійною швидкістю $v=3,5$ см/с.

Розв'язання:

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона:

$$F_A - F - mg = 0, \quad (1)$$

де маса кульки:

$$m = \rho_n V = \rho_n \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (2)$$

Сила Архімеда:

$$F_A = \rho_M V g = \rho_M \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо $18\eta v = 4r^2 g(p_n - p_M)$, звідки динамічна в'язкість:

$$\eta = \frac{2r^2 g(p_n - p_M)}{9v}; \quad \eta = 1,09 \text{ Па}\cdot\text{с.}$$

Кінематична в'язкість масла: $\nu = \eta / \rho_M$;
 $\nu = 12,1 \text{ см}^2/\text{с}.$

2. ОСНОВИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ ФІЗИКИ ТА ТЕРМОДИНАМІКИ

2.1. Молекулярна фізика

2.1.1. Статистичний та термодинамічний методи досліджень

Коли у фізиці розпочалось систематичне вивчення газів (XVII ст. Торічелі, Паскаль, Ван-Гальмонт), то стало зрозуміло, що, користуючись класичною механікою, не можливо описати змінювання властивостей такої системи, де концентрація атомів або молекул становить $10^{25} - 10^{28} \text{ м}^{-3}$. Тому виникла потреба у створенні нових методів дослідження такого стану матерії. У сучасній фізиці для цього використовують два підходи – молекулярно-кінетичний (статистичний) і термодинамічний [1, 9, 13].

Молекулярно-кінетичний метод вивчає будову та властивості речовини, виходячи з факту існування великої кількості атомів та молекул у фізичній системі, що розглядається, завдяки великій кількості частинок, згідно з теорією ймовірності, поведінка такої системи зумовлюється найбільш імовірними значеннями динамічних характеристик цих частинок: швидкістю, енергією, частотою зіткнень. Молекулярно-кінетична теорія описує течію процесів тобто швидкість змінювання властивостей системи з часом.

Фізичну систему, яка складається з величезної кількості частин або сукупності тіл, які обмінюються енергією між собою й оточенням, називають *термодинамічною (макроскопічною) системою*.

Термодинаміка вивчає загальні властивості фізичних систем за допомогою макроскопічних параметрів, що характеризують таку систему в цілому (тиск – P , температура – T , об'єм – V). Принциповим є положення про необхідність рівноважного стану у термодинамічній системі. *Термодинамічна система знаходиться у стані рівноваги, якщо параметри стану не змінюються з часом та однакові у будь-якій частині системи*.

Термодинамічним процесом називають будь-яке змінювання у термодинамічній системі, пов'язане із змінюванням хоча б одного з термодинамічних параметрів.

Обидва методи описують один і той же стан речовини, але різними уявленнями, різними фізичними моделями. Обидва мають свої переваги та недоліки, але в цілому доповнюють один одного.

Одним з основних параметрів стану термодинамічної системи є температура. У термодинаміці прийнята абсолютна шкала температур. На відміну від багатьох відносних шкал температур (Цельсія, Фаренгейта, Реомюра) вона має чіткий фізичний сенс, пов'язаний з енергією молекул. Цю шкалу запровадив Лорд Кельвін (У.Томпсон) в 1848 р. Абсолютна шкала, прив'язана до так званої потрійної точки, коли крига, вода та насичена пара знаходиться у стані рівноваги з тиском $P=609 \text{ Па}$ і відповідає абсолютній температурі $273,15\text{К}$ (0°C). Тому зв'язок між абсолютною температурою та температурою за шкалою Цельсія ($t^\circ \text{C}$) має такий вигляд:

$$T = t + 273,15. \quad (2.1)$$

2.1.2. Уявлення про ідеальний газ. Рівняння Клапейрона – Менделєєва

Уявлення про атомну структуру матерії виникло ще у стародавній Греції (Демокрит – 460...370 до н.е.). Тому цілком було природно, запроваджуючи модель такої реальної фізичної системи як газ, розглядати його як сукупність молекул, що якимось рухаються та стикаються одна з одною. Це так звана модель ідеального газу [1, 9, 13]. Основні вимоги до моделі:

1. Власний об'єм молекул газу (частинок термодинамічної системи) порівняно з розмірами посудини, де він знаходиться, значно менший.

2. Сили взаємодії між молекулами (частинками термодинамічної системи) відсутні.

3. Зіткнення молекул газу (частинок термодинамічної системи) – абсолютно пружні.

4. Відстань між окремими молекулами (частинками термодинамічної системи) набагато більша за розміри молекул (частинок).

Експеримент доводить, що модель ідеального газу може бути використана для більшості природних газів у нормальних умовах: $P_0 = 1.013 \cdot 10^5$ Па, $T_0 = 273$ К.

Експериментально встановлено наступні закони для ідеальних газів.

Закон Авогадро. Молі будь-яких газів з однаковою температурою та тиском займають однакові об'єми. За нормальних умов цей об'єм дорівнює $V = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. При цьому в молі будь-якої речовини міститься N_A – молекул (частинок). N_A – число Авогадро дорівнює:

$$N_A = 6.02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}.$$

Закон Дальтона. Тиск суміші ідеальних газів дорівнює додатку парціальних тисків цих газів:

$$P = \sum_{i=1}^N P_i . \quad (2.2)$$

Парціальний тиск – це тиск, що мав би газ, який є у суміші, якщо б він займав увесь об'єм посудини, де міститься, за температури суміші.

Основним рівнянням рівноважного стану ідеальних газів є *рівняння Клапейрона-Менделєєва*. Менделєєв, поєднавши закон Клапейрона із законом Авогадро, одержав у 1874р. наступне рівняння:

$$\frac{PV}{T} = \frac{m}{\mu} R, \quad (2.3)$$

де R – універсальна газова стала: $R = 8.31$ Дж/моль·К; відношення маси m до молекулярної маси μ має назву кількість речовини ν та показує кількість молів у масі m певної речовини:

$$\nu = \frac{m}{\mu}. \quad (2.4)$$

Якщо запровадити нову сталу $k = \frac{R}{N_A}$, яка називається сталою Больцмана і дорівнює $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К, то рівняння Клапейрона-Менделєєва можна записати в іншому вигляді:

$$P = \frac{m}{\mu V} RT = \frac{\nu}{V} k N_A T = \frac{N}{V} k T, \quad (2.5)$$

де $N = \nu N_A$ кількість молекул в об'ємі V .

Таким чином рівняння Клапейрона-Менделєєва набуде вигляду:

$$P = nkT, \quad (2.6)$$

де $n = \frac{N}{V}$ – концентрація молекул.

Закон Лошмідта. За рівних температурі та тиску, концентрація молекул для усіх газів однакова:

$$N_L = \frac{P_0}{kT_0} = 2.68 \cdot 10^{25} \text{ м}^3. \quad (2.7)$$

Число N_L має назву числа Лошмідта.

2.1.3. Виведення рівняння молекулярно – кінетичної теорії ідеальних газів та його порівнювання з рівнянням Клапейрона-Менделєєва

Розглянемо одноатомний газ. Якщо молекули рухаються хаотично, то кількість зіткнень між ними можна порахувати у порівнянні із зіткненнями зі стінками посудини. Виділимо у посудині, що містить газ, деякий об'єм (рис.2.1) [1, 9, 13].

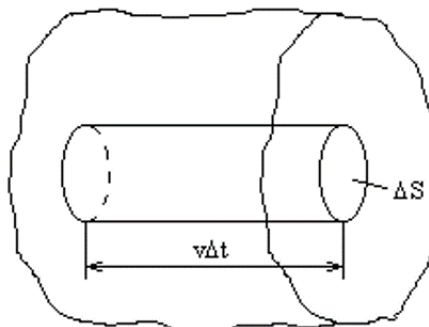


Рис.2.1

Будемо вважати удар молекул об стінки абсолютно пружним. Тоді зміна імпульсу однієї молекули складатиме:

$$\Delta p = m_0 v - (-m_0 v) = 2m_0 v, \quad (2.8)$$

де m_0 – маса однієї молекули, v - її швидкість.

За час Δt до площини ΔS досягне наступна кількість молекул:

$$N = n \cdot v \cdot \Delta t \cdot \Delta S, \quad (2.9)$$

де n – концентрація молекул.

Якщо враховувати, що напрямки за координатами x , y , z рівнозначні стосовно руху молекул, то треба взяти тільки 1/3 частину усієї кількості молекул, що рухаються в напрямку площини та враховувати те, що тільки половина молекул рухається до обраної стінки:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} N = \frac{1}{6} N \Rightarrow \Delta p = \frac{1}{6} n v \Delta t \Delta S \cdot 2m_0 v = F \Delta t, \quad (2.10)$$

де Δp – імпульс, що одержує стінка посудини.

Тоді одержуємо для тиску газу на стінки посудини:

$$P = \frac{F}{\Delta S} = \frac{\Delta p}{\Delta t \Delta S} = \frac{1}{3} n m_0 v^2. \quad (2.11)$$

З теорії ймовірності більш коректно розглядати середньоквадратичну швидкість: $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}$. З урахуванням цього, одержуємо формулу, що виражає основне рівняння ідеального газу в молекулярно-кінетичній теорії:

$$P = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (2.12)$$

Помножимо останнє рівняння на об'єм посудини:

$$PV = \frac{1}{3} N m_0 \langle v_{кв} \rangle^2 = \frac{1}{3} m \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (2.13)$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням Клапейрона-Менделєєва, одержуємо:

$$PV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (2.14)$$

$$\frac{m}{\mu} RT = \frac{1}{3} m \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (2.15)$$

Звідки знаходимо формулу для середньоквадратичної швидкості молекул ідеального газу:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}. \quad (2.16)$$

2.1.4. Середня кінетична енергія молекул. Молекулярно-кінетичне тлумачення абсолютної температури

Кінетична енергія поступального руху для однієї молекули газу дорівнює:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0 \langle v \rangle^2}{2}. \quad (2.1.17)$$

З урахуванням середньоквадратичної швидкості молекул отримаємо:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{m_0 3kT}{2m_0} \Rightarrow \langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (2.18)$$

Тобто, кінетична енергія поступального руху залежить тільки від термодинамічної температури газу. Тому при $T=0$ К кінетична енергія поступального руху молекул дорівнює нулю й тиску газ не спричиняє. Отож, з точки зору молекулярно-кінетичної теорії, *термодинамічна температура* є мірою середньої кінетичної енергії поступального руху молекул ідеального газу.

2.1.5. Число ступенів вільності молекул. Внутрішня енергія ідеального газу.

Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності

Згадуючи визначення числа ступенів вільності для матеріальної точки, не важко розрахувати число ступенів вільності для молекул [1, 9, 13].

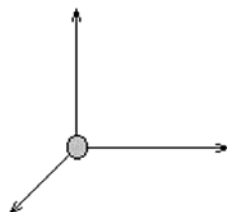


Рис.2.1

Наприклад:

1. Одноатомна молекула має три ступеня вільності поступального руху (рис.2.2):

$$i = i_{\text{пост}} = 3.$$

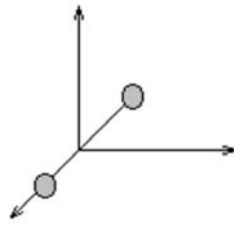


Рис.2.3

2. Двоатомна молекула має три поступальних і два обертельних ступенів вільності (рис.2.3):

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} = 3 + 2 = 5.$$

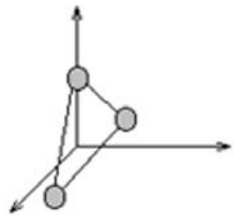


Рис.2.4

3. Трьохатомна, а також багатоатомна молекула має три поступальних і три обертельних ступеня вільності (рис.2.4):

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{оберт}} = 3 + 3 = 6.$$

Для молекул ідеального газу силове поле взаємодії не враховується. Тому молекули такого газу не мають потенційної енергії. Таким чином внутрішня енергія ідеального газу буде складатися тільки з кінетичної енергії руху молекул.

Внутрішня енергія ідеального газу U – це енергія усіх частинок, що складають цю систему, тобто енергія поступального та обертельного руху. Енергія молекули одноатомного газу:

$$\langle \varepsilon_K \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

у загальному вигляді:

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{i}{2} kT. \quad (2.19)$$

Закон рівномірного розподілу молекул за ступенями вільності (теорема Больцмана). У стані теплової рівноваги на кожен ступень вільності молекул у

середньому припадає однакова кінетична енергія, що дорівнює $\frac{1}{2}kT$.

Якщо враховувати, що існує ще коливальний рух, який має потенціальну та кінетичну енергії, то на кожен ступень свободи коливального руху припадає енергія $2 \cdot \frac{1}{2}kT = kT$. Необхідність такого врахування має місце за високих температур газу.

2.1.6. Закон Максвела для розподілу молекул ідеального газу за швидкостями

Молекули ідеального газу рухаються в будь-яких напрямках і стикаються одна з одною, внаслідок чого змінюють свою швидкість [1, 9, 13]. Яким чином вони розподіляються за швидкостями? Відповідь на це запитання дано розрахунками, які проведено Джеймсом Максвелом у 1859 р.

Виходячи з того, що газ складається з N -молекул, та швидкість молекул може бути в межах $0 < v < \infty$, він запровадив уявлення про функцію розподілу.

Відокремимо частину молекул $dN(v)$, що мають певну швидкість, тобто швидкість, що попадає в деякий інтервал dv (рис.2.5).

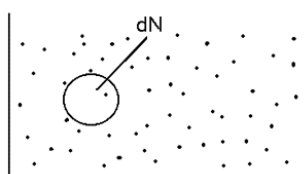


Рис.2.5

Тоді відносна кількість молекул, що мають певну швидкість дорівнює:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv \Rightarrow f(v) = \frac{dN(v)}{Ndv}. \quad (2.20)$$

З цього випливає *фізичний сенс функції розподілу* $f(v)$ – це відносна кількість молекул, що мають певну швидкість.

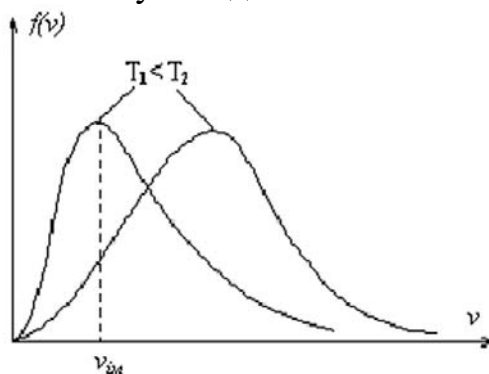


Рис.2.6

Максвел на підставі статистичної фізики одержав наступний вигляд функції розподілу (рис.2.6):

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}. \quad (2.21)$$

Наслідки, що витікають із рівняння для функції розподілу:

– Більшість молекул має найбільш імовірну швидкість молекул v_{iM} . Якщо знайти максимум $f(v)$, то тоді одержуємо величину найбільш імовірної швидкості:

$$v_{iM} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} \quad (2.22)$$

або

$$v_{iM} = \sqrt{\frac{2RT}{N_A \cdot m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}. \quad (2.23)$$

– Середню арифметичну швидкість, можна знайти інтегруванням:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad (2.24)$$

З чого

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi \cdot \mu}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi \cdot m_0}}. \quad (2.25)$$

Як бачимо найбільш імовірна, середньоквадратична та середньоарифметична швидкості взаємопов'язані між собою:

$$v_{iM} < \langle v \rangle < v_{KB}; \quad \langle v_{KB} \rangle = 1,22v_{iM}; \quad \langle v \rangle = 1,13v_{iM}. \quad (2.26)$$

Експериментальна перевірка функції розподілу була проведена Штерном (1920) та Ламмертом (1929) і повністю підтвердила висновки Максвела.

2.1.7. Барометрична формула. Закон Больцмана для розподілу частинок у зовнішньому потенціальному полі

Розглянемо газ, що знаходиться у зовнішньому гравітаційному полі [1, 9, 13]. Як розподіляються при цьому молекули за енергіями? Спочатку знайдемо розподіл тиску за висотою над поверхнею Землі (рис.2.7).

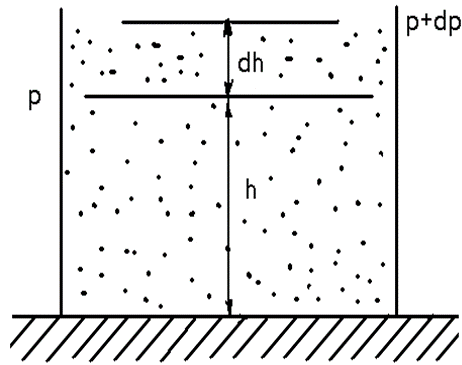


Рис.2.7

Тиск стовпа повітря дорівнює:

$$P = \rho gh, \quad (2.27)$$

тоді

$$-dP = \rho g dh. \quad (2.28)$$

Згідно рівняння Клапейрона-Менделєєва $PV = \frac{m}{\mu} RT$, оскільки густина повітря дорівнює $\rho = \frac{m}{V}$, то

$$\rho = \frac{P\mu}{RT}, \quad (2.29)$$

тоді

$$dP = -\frac{P\mu}{RT} g dh \quad (2.30)$$

або

$$\frac{dP}{P} = -\frac{\mu g}{RT} dh. \quad (2.31)$$

Інтегруючи, маємо

$$\int_{P_0}^{P_2} \frac{dP}{P} = -\int_0^h \frac{\mu g}{RT} dh, \quad (2.32)$$

$$\ln \frac{P_2}{P_0} = -\frac{\mu g}{RT} h \quad (2.33)$$

або

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{RT}}, \quad (2.34)$$

де P_0 – тиск газу (повітря) над рівнем моря.

Останній запис має назву *барометричної формули*. Отже тиск газу з висотою зменшується за законом експоненти. За допомогою цієї формули можна розраховувати висоту над рівнем землі, вимірюючи тиск.

Якщо в барометричній формулі перейти від тиску газу до концентрацій молекул

$$nkT = n_0 kT_0 e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{RT}}, \quad (2.35)$$

то за умов $T = T_0 = const$ отримаємо:

$$n = n_0 e^{-\frac{\mu \cdot g \cdot h}{RT}}. \quad (2.36)$$

Тобто концентрація молекул із висотою зменшується. Причому, концентрація важкого газу спадає скоріше ніж концентрація легкого газу.

Перетворимо рівняння розподілу концентрацій, враховуючи, що $\mu = N_A \cdot m_0$:

$$n = n_0 e^{-\frac{m_0 \cdot N_A \cdot g \cdot h}{RT}} = n_0 e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{kT}} = n_0 e^{-\frac{E_n}{kT}}, \quad (2.37)$$

де E_n – потенційна енергія.

Таким чином, одержуємо розподіл молекул у зовнішньому силовому полі (*закон Больцмана*):

$$n = n_0 e^{-\frac{E_k}{kT}}. \quad (2.38)$$

Згідно цього закону концентрація молекул газу змінюється у зв'язку з відношенням потенційної енергії молекул у зовнішньому полі до кінетичної енергії їх теплового руху. Тобто, за сталої температури концентрація газу більша там, де менша потенційна енергія молекул.

2.2. Основи термодинаміки

2.2.1. Термодинамічна система та її параметри. Внутрішня енергія системи

“Теорія виявляється тим більш вражаючою, чим простіші її припущення, чим значніша її область застосування. Це єдина загально фізична теорія, яка ніколи не буде спростована.” Ці слова Альберта Ейнштейна про термодинаміку цілком виправдані предметом її досліджень [1, 9, 13].

Термодинаміка спочатку виникла, як наука про перетворення теплоти в механічний рух (теплові машини), але далі перетворилась на загально науковий

метод дослідження макроскопічних фізичних систем. *Термодинаміка відповідає на наступні питання:* можливість процесів за даних умов, напрямок процесу, кінцевий стан системи.

Нами раніше вже запроваджено уявлення про термодинамічні системи. Усі тіла, що не входять до складу термодинамічної системи називаються *зовнішніми тілами або зовнішнім оточуючим середовищем*.

Залежно від способу обміну з оточуючим середовищем у термодинаміці відрізняють наступні види термодинамічних систем:

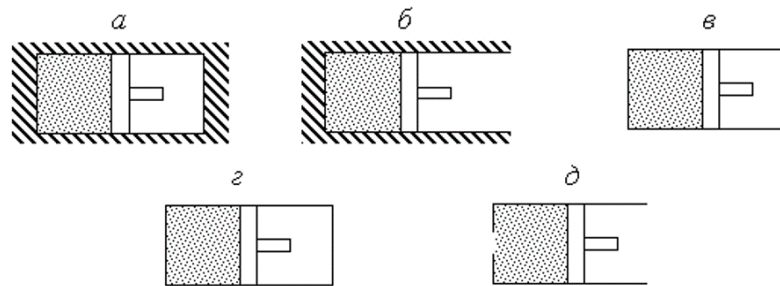


Рис.2.8

1. *Ізольована система* (рис.2.8 а), яка не обмінюється із зовнішнім середовищем ні енергією ні речовиною (газ у термічно та механічноізольованому контейнері).

2. *Адіабатна система* (рис.2.8 б), яка не обмінюється енергією із зовнішнім середовищем шляхом теплообміну (газ під поршнем у теплоізольованому контейнері).

3. *Закриті системи* (рис.2.8 в), які не можуть обмінюватись речовиною, їх хімічний склад та маса не залежать від часу. Але можливий обмін енергією. Такі системи будемо розглядати далі (газ під поршнем у не ізольованому контейнері).

4. *Замкнута або механічно ізольована система* (рис.2.8 г), яка не має обміну енергією із зовнішнім середовищем шляхом здійснення роботи (газ у посудині зі сталим об'ємом).

5. *Відкриті системи* (рис.2.8 д), які можуть обмінюватися енергією та речовиною із зовнішнім середовищем (газ у неізольованому контейнері з отвором, живі організми, вода, що випаровується з посудини).

Фізичні величини, що характеризують становище термодинамічної системи, називаються *параметрами стану*.

Параметри стану ділять на *екстенсивні* – що пропорційні кількості речовини в системі (V , v , m), та *інтенсивні* – що не залежать від кількості речовини в системі (p , T).

Крім того, виділяють *зовнішні* параметри стану – фізичні величини, що визначаються тілами або полями, котрі є зовнішніми за відношенням до даної системи (об'єм), а також *внутрішні* параметри стану – фізичні величини, що залежать, як від розташування зовнішніх до системи тіл, так і від координат та швидкостей частинок, що складають саму систему (тиск, внутрішня енергія).

Загальна енергія термодинамічної системи E складається з кінетичної енергії механічного руху системи E_k^c , потенційної енергії системи E_n^c у зовнішньому полі сил і внутрішньої енергії U , що залежить від внутрішньої взаємодії та швидкості частинок:

$$E = E_k^c + E_n^c + U. \quad (2.39)$$

Якщо термодинамічна система нерухома і не взаємодіє із зовнішніми полями, то існує тотожність між E та U :

$$E = U. \quad (2.40)$$

При цьому внутрішня енергія складається з енергії різноманітних видів руху та взаємодії усіх частинок, що утворюють систему (молекул, атомів). Для газу внутрішня енергія складається з:

- кінетичної енергії поступального, обертального та коливального рухів;
- потенційної енергії, що зумовлена силами міжмолекулярної взаємодії;
- енергії електронних оболонок атомів та іонів;
- енергії руху й взаємодії нуклонів в атомних ядрах.

Тому *внутрішня енергія є однозначною функцією стану* термодинамічної системи і не залежить від того, яким чином цей стан досягнутий.

Внутрішня енергія ідеального газу, це кінетична енергія його молекул, бо інші види енергії не враховуються (молекули не взаємодіють). Для одного моля газу:

$$U_\mu = N_A \langle \varepsilon_K \rangle = \frac{i}{2} k T N_A = \frac{i}{2} R T, \quad (2.41)$$

для ν молей:

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{\mu} \cdot R T. \quad (2.42)$$

У реальних газах внутрішня енергія містить у собі також потенційну енергію міжмолекулярної взаємодії. Тому внутрішню енергію реального газу не можна шукати тільки на підставі рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності. Такі гази, на відміну від ідеальних, можуть утворювати інші агрегатні стани, наприклад, рідину.

2.2.2. Теплота й робота, як дві форми існування енергії. Перший закон термодинаміки

Обмін енергією між закритою термодинамічною системою та зовнішнім середовищем може відбуватися двома різними способами: здійсненням механічної роботи та шляхом теплообміну [1, 9, 13].

Роботу над макроскопічно-нерухомою системою виконують зовнішні сили. При цьому потрібно, щоб здійснювалось змінювання форми, об'єму, тобто потрібно, щоб змінювались зовнішні параметри термодинамічної системи.

Теплообмін існує тоді коли система одержує чи віддає тепло. Для цього, як відомо, потрібна різниця температур між системою та зовнішнім середовищем. Прийнято виділяти наступні види теплообміну:

- *конвекція* – обмін теплотою завдяки відносного руху макроскопічних об'ємів речовини у навколишньому середовищі;
- *теплопровідність* – обмін теплотою завдяки руху атомів та молекул;
- *випромінювання* – обмін теплотою шляхом електромагнітного випромінювання.

Існує якісна нерівноцінність між роботою та теплотою, як засобами обміну енергією. Робота може призводити до зміни будь-якого виду енергії системи (внутрішньої, кінетичної, потенційної). Теплота призведе до зміни лише внутрішньої енергії системи.

На відміну від внутрішньої енергії, що є однозначною функцією стану системи, теплота та робота мають сенс тільки у зв'язку з процесом змінювання стану системи: для однієї й тієї ж зміни dU потрібна різна робота δA та кількість теплоти δQ .

Розглянемо рівноважний процес переходу системи з одного стану в інший. Змінювання внутрішньої енергії ΔU у цьому випадку дорівнює різниці теплоти ΔQ , що надана системі, та роботі зовнішніх сил ΔA , тобто:

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A. \quad (2.43)$$

Узагальнюючи це рівняння для елементарних процесів, одержуємо перший закон термодинаміки:

$$dQ = dU + dA. \quad (2.44)$$

Теплота, що надана системі витрачається на змінювання внутрішньої енергії системи та на здійснення системою роботи проти зовнішніх сил.

Математичний запис закону належить німецькому фізику Гельмгольцу (1847р), який отримано на підставі дослідних робіт Майера та Джоуля.

Перший закон термодинаміки є узагальненням закону збереження та перетворення енергії, який поєднує теплоту та механічну роботу.

Як розраховувати роботу δA та теплоту δQ ?

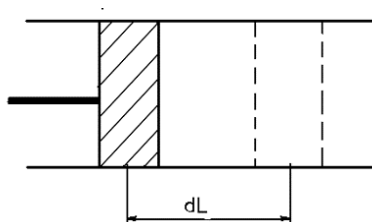


Рис.2.9

Здійснення термодинамічної системою роботи завжди відбувається із змінюванням її об'єму, тому якщо газ стискається або розширюється під рухомим поршнем, то відповідна робота дорівнює (рис.2.9):

$$dA = Fdl = PSdl = PdV. \quad (2.45)$$

В загальному випадку:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P(V)dV, \quad (2.46)$$

тобто це площа, що обмежена лінією $P(V)$ та віссю V (рис.2.10).

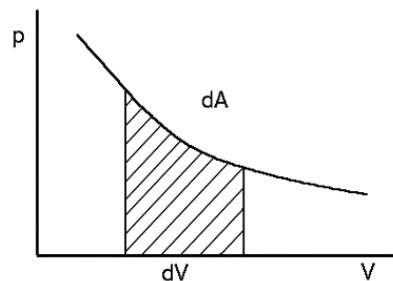


Рис.2.10

Робота може бути позитивною або негативною:

- позитивна $dA > 0$, якщо газ розширюється;
- негативна $dA < 0$, якщо газ стискається.

2.2.3. Теплоємність ідеальних газів

Теплоємністю називається фізична величина, яка чисельно дорівнює відношенню наданої тілу теплоти до змінювання температури тіла у термодинамічному процесі, що здійснюється [1, 9, 13].

Така теплоємність називається істинною:

$$c^* = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (2.47)$$

Розмірність істинної теплоємності Дж/К.

Теплоємність залежить від хімічного складу, термодинамічного стану та виду процесу, за яким змінюється температура однорідного тіла.

Питома теплоємність – теплоємність віднесена до одиниці маси речовини:

$$C = \frac{\delta Q}{mdT}. \quad (2.48)$$

Її розмірність – Дж/кг·К.

Молярна теплоємність – теплоємність віднесена до одиниці кількості речовини (одного моля):

$$C_{\mu} = \frac{\delta Q}{\nu \cdot dT} = \frac{\mu \cdot \delta Q}{m dT} = \mu \cdot C. \quad (2.49)$$

Її розмірність – Дж/моль·К.

Кількість теплоти, що передається можна розрахувати, знаючи теплоємність:

$$Q = Cm(T_2 - T_1), \quad (2.50)$$

або

$$Q = C_{\mu} \nu (T_2 - T_1). \quad (2.51)$$

Залежно від термодинамічного процесу теплоємність тіла може бути різною:

1. Ізохоричний процес: $V = const$.

На підставі першого закону термодинаміки для одного моля речовини:

$$\delta Q = dU_{\mu} + PdV_{\mu}; \quad dV_{\mu} = 0; \quad \delta Q = dU_{\mu}. \quad (2.52)$$

Тому за визначенням теплоємності:

$$C_{\mu\nu} = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU_{\mu}}{dT}, \quad (2.53)$$

оскільки $dU_{\mu} = \frac{i}{2} R dT$, то теплоємність дорівнює:

$$C_{\mu\nu} = \frac{i}{2} R. \quad (2.54)$$

2. Ізобарний процес $P = const$:

$$\delta Q = dU_{\mu} + PdV_{\mu}. \quad (2.55)$$

З урахуванням рівняння Клапейрона-Менделєєва для одного моля газу:

$$PdV_{\mu} = R dT, \quad (2.56)$$

$$C_{\mu p} = \frac{\delta Q}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV_{\mu}}{dT} = C_{\mu v} + \frac{RdT}{dT} = C_{\mu v} + R. \quad (2.57)$$

Останнє співвідношення одержало назву рівняння Майєра:

$$C_{\mu p} = C_{\mu v} + R. \quad (2.58)$$

Тобто теплоємність в ізобарному процесі вища за ізохорну. Це пов'язано з тим, що під час нагрівання газу за ізобарним процесом потрібно підводити більше теплоти, бо частина теплоти витрачається на здійснення роботи розширення газу:

$$C_{\mu p} = \frac{i}{2}R + R = \frac{i+2}{2}R. \quad (2.59)$$

Величина $\gamma = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu v}} = \frac{i+2}{i}$ називається показником адіабати або коефіцієнтом Пуасона.

3. Ізотермічний процес $T = const$:

Уявлення про теплоємність для цього процесу не має сенсу, бо згідно визначенню теплоємності:

$$C = \frac{\delta Q}{dT}; \quad dT \rightarrow 0; \quad C_T = \pm\infty. \quad (2.60)$$

Формули для розрахунку теплоємностей справедливі для ідеальних газів. Для реальних газів, для яких внутрішня енергія залежить від об'єму даної маси газу, можна застосовувати тільки формули для C_V .

2.2.4. Рівноважні стани, процеси та їх зображення на термодинамічних діаграмах

Рівноважним станом у термодинаміці називають стан, при якому усі внутрішні параметри системи не змінюються з часом у будь-якій частині системи. Дослід свідчить про те, що при сталих зовнішніх параметрах термодинамічна система завжди приходиться до рівноважного стану. Виникає питання, а чи можна використовувати закони термодинаміки для процесів в яких змінюються параметри стану термодинамічної системи? Відповідь на це питання залежить від того, як швидко відбуваються ці зміни. Якщо, термодинамічна система встигає реагувати на зміну зовнішніх умов таким чином, щоб внутрішні термодинамічні параметри системи були в кожному мить однакові за всім об'ємом, то тоді такий термодинамічний процес можна вважати *квазірівноважним* [1, 9, 13].

Наведемо приклад. Під час повільного руху поршня тиск під поршнем миттєво відтворюється і процес буде квазірівноважним. Якщо поршень

пересувати достатньо швидко (швидкість руху вища за швидкість звуку), то під поршнем буде створюватися локальний об'єм із підвищеним тиском і процес не можна вважати рівноважним (рис.2.11).

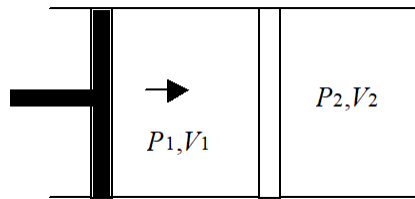


Рис.2.11

Процеси, в яких параметри стану залежать від часу та координат описуються методом *нерівноважної термодинаміки*. Термодинамічні процеси прийнято зображати у вигляді діаграм. Використовують наступні види діаграм: $P-V$; $P-T$; $V-T$. Можливо зображення тільки рівноважних процесів.

Якщо термодинамічна система в процесі повертається в початковий стан, то такий процес називається *круговим* (рис.2.12).

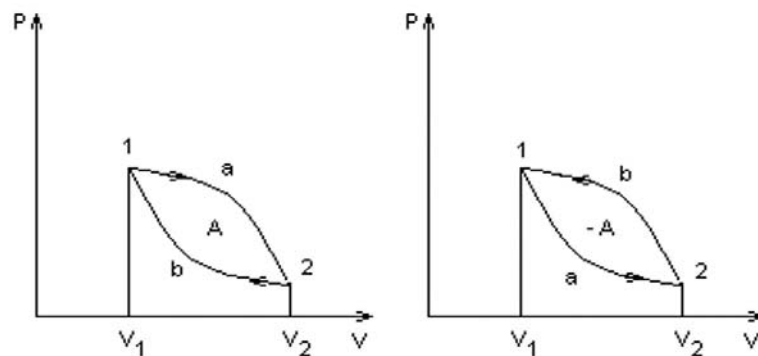


Рис.2.12

Робота, яка здійснюється термодинамічною системою, дорівнює площині під кривою на діаграмі $P-V$ і залежить від виду термодинамічного процесу, а тому робота є функцією стану теплової системи.

2.2.5. Застосування першого закону термодинаміки до ізопроесів та адіабатного процесу

Отримаємо формули для розрахунку роботи та кількості теплоти при різних видах термодинамічних процесів [1, 9, 13].

1. Ізохорний процес $V=\text{const}$ (рис.2.13).

На підставі першого закону термодинаміки:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки $\delta A = PdV = 0$, то $\delta Q = dU$.

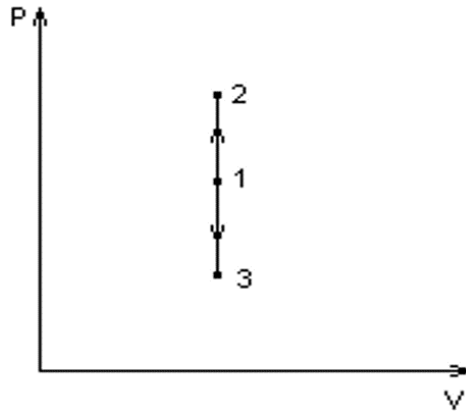


Рис.2.13

Тобто уся теплота, що надається системі, йде на змінювання її внутрішньої енергії:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu} dT. \quad (2.61)$$

2. Ізобарний процес $P=const$ (рис.2.14).

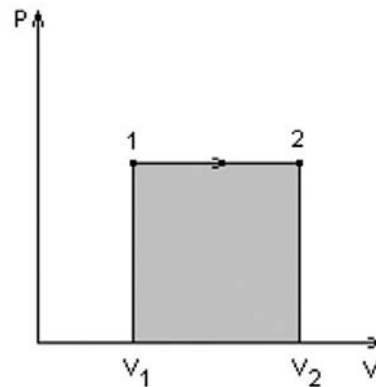


Рис.2.14

$$\delta A = PdV, \quad A = \int_1^2 PdV = P(V_2 - V_1). \quad (2.62)$$

На підставі рівняння Клапейрона-Менделєєва $PdV = \frac{m}{\mu} PdT$, тоді робота дорівнює:

$$A = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (2.63)$$

Кількість наданого тепла згідно з першим законом термодинаміки:

$$\delta Q = dU + \delta A.$$

Оскільки внутрішня енергія дорівнює

$$dU = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu} dT,$$

то одержуємо:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu} dT + \frac{m}{\mu} R dT = \frac{m}{\mu} (C_{\mu\nu} + R) dT = \frac{m}{\mu} C_{\mu p} dT.$$

Тобто теплота в ізобарному процесі витрачається більше внаслідок здійснення роботи:

$$\delta Q = \frac{m}{\mu} C_{\mu p} dT. \quad (2.64)$$

3. Ізотермічний процес $T = \text{const}$ (рис.2.15), тому $PV = \text{const}$ та $dT = 0$.

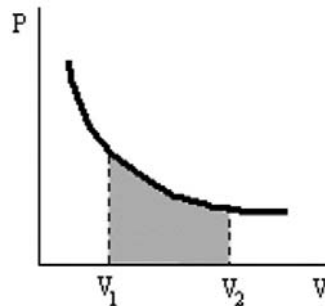


Рис.2.15

Тобто внутрішня енергія системи під час ізотермічного процесу не змінюється:

$$dU = C_{\mu\nu} dT, \quad dT = 0, \quad dU = 0.$$

Тобто вся теплота, що надана системі, витрачається на здійснювання роботи. Тому в ізотермічному процесі системі можна надати теплоту, але нагріти її неможливо.

$$\delta Q = \delta A, \quad \delta A = PdV.$$

З рівняння Клапейрона-Менделєєва $P = \frac{m}{\mu} \frac{RT}{V}$, тому:

$$A = \frac{m}{\mu} RT \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1} \quad (2.65)$$

або, оскільки $\frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1}{P_2}$, то

$$A = \frac{m}{\mu} RT \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{m}{\mu} RT \ln \frac{P_1}{P_2}. \quad (2.66)$$

4. Адіабатний процес має місце, коли термодинамічна система є теплоізолюваною $\delta Q = 0$ (рис.2.16).

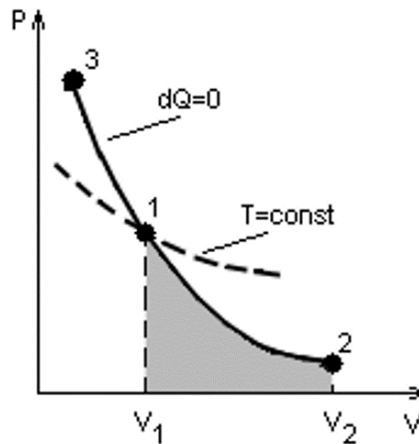


Рис.2.16

Згідно першого закону термодинаміки:

$$0 = dU + \delta A \Rightarrow -dU = \delta A.$$

Тобто робота здійснюється завдяки зменшенню внутрішньої енергії газу:

$$dU = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu} dT,$$

тому

$$A = -\int_1^2 dU = \frac{m}{\mu} C_{\mu\nu} (T_1 - T_2). \quad (2.67)$$

Рівняння адіабатного процесу:

$$\begin{aligned} PV^\gamma &= \text{const}, \\ TV^{\gamma-1} &= \text{const}, \\ T^\gamma P^{1-\gamma} &= \text{const}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

де $\gamma = \frac{C_{\mu p}}{C_{\mu v}} = \frac{i+2}{i}$ коефіцієнт Пуасона.

З урахуванням рівняння адіабатного процесу роботу можна розрахувати за наступними формулами:

$$A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right), \quad A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left\{ 1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1} \right\}, \quad A = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]. \quad (2.69)$$

2.2.6. Межі використання закону рівномірного розподілу енергії за ступенями вільності молекул. Уявлення про квантування енергії обертального та коливального рухів молекул

Раніше ми встановили, що внутрішня енергія газу складається з кінетичної енергії молекул, які у загальному випадку можуть володіти поступальним, обертальним та коливальним рухом [1, 9, 13]. Для одноатомного газу закон рівномірного розподілу енергії дійсний. Для багатоатомних молекул, залежно від температури, треба враховувати енергію обертального і коливального рухів. Так, наприклад, для двоатомного газу залежно від його температури число ступенів вільності може бути 3, 5 або 7.

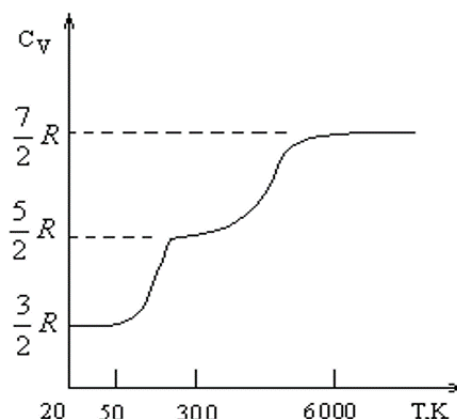


Рис.2.17

Такий дискретний розподіл ступенів вільності молекул має назву квантування енергії. За нормальних умов, як видно на рисунку 2.17 число ступенів вільності залишається сталим, тому і теплоємність не залежить від температури.

2.2.7. Оборотні та необоротні процеси. Кругові процеси (цикли)

Тепловий процес, що здійснюється системою, називається оборотним, якщо після нього можна повернути систему й усі взаємодіючі з нею тіла у початкове становище так, щоб у цих тілах та у самій системі не з'являлось яких би то залишкових змін [1, 9, 13]. Якщо процес, що здійснюється, не задовольняє цим умовам, то цей процес називається необоротним.

Для оборотного процесу система повинна минати рівноважні стани. Усякий оборотний процес є рівноважним, але рівноважний процес не обов'язково є оборотним (наприклад, тертя при рівномірному русі – необоротний процес).

Прямим процесом називається такий, що протікає сам по собі. Наприклад, внаслідок теплообміну охолодження або нагрівання відбуваються самі по собі, якщо теплота передається від більш нагрітого до менш нагрітого тіла (рис.2.18).

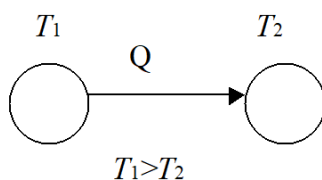


Рис.2.18

Процес, що не може протікати довільно, називається оберненим. Такі процеси можуть бути здійснені, якщо виконується робота, яка компенсує зовнішні сили або енергію. Наприклад, за таким процесом працюють холодильні машини (рис.2.19).

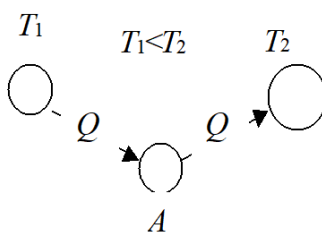


Рис.2.19

Треба зазначити, що процес теплообміну за певною різницею температур є необоротним процесом. Усі термодинамічні процеси, що супроводжуються тертям, також є необоротними.

Серед термодинамічних процесів особливий інтерес мають кругові, які широко застосовуються в техніці. *Круговим процесом або циклом називається така сукупність теплових процесів, у результаті яких система повертається до початкового стану.* Тіло, що здійснює круговий процес та що обмінюється енергією з іншими тілами, називається *робочим тілом*.

Якщо у результаті кругового процесу робоче тіло здійснює роботу, над зовнішніми тілами ($A > 0$), то такий процес є *прямим* (рис.2.20).

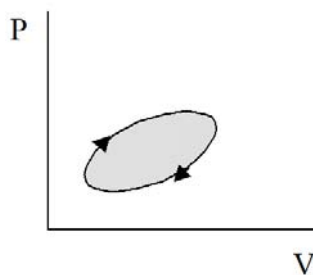


Рис.2.20

Якщо зовнішні тіла здійснюють роботу над робочим тілом ($A < 0$), то такий процес є *оберненим* (рис.2.21).

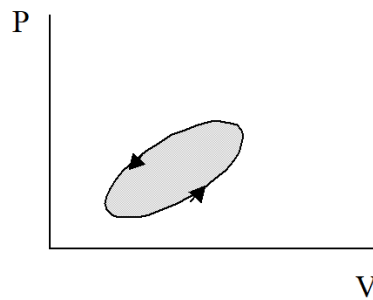


Рис.2.21

Метод аналізу циклів розроблено французьким інженером Саді Карно.

2.2.8. Цикл Карно та його коефіцієнт корисної дії для ідеального газу

У 1824 році Саді Карно у книзі “Міркування про рушійні сили вогню й машини, що здатні розвивати цю силу” розглянув оборотний круговий процес, що складається з двох ізотерм та двох адіабат [1, 9, 13]. Робоче тіло – ідеальний газ, тому цикл одержав назву - ідеальний цикл, а машини, які роблять за цим циклом – ідеальні теплові машини. Основна ідея, що запропонована Карно – тепловий процес здійснює роботу не за рахунок поглинання теплоти, а завдяки передачі її частини холодильнику.

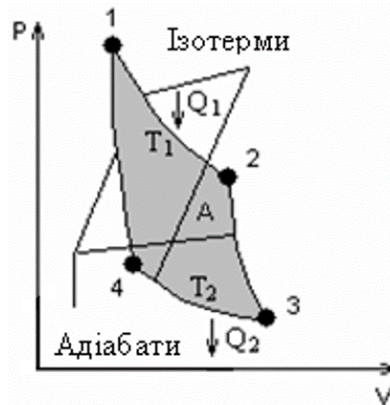


Рис.2.22

На рисунку 2.22 Q_1 – теплота, що надана нагрівачем, Q_2 – теплота, що передається холодильнику.

Робота, що здійснюється в круговому циклі дорівнює сумі робіт на кожному етапі циклу:

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}. \quad (2.70)$$

Розглянемо за етапами (див. рис.2.22):

1) $\delta Q = \delta A; \quad dT = 0$

$$A_{12} = \frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = Q_1; \quad (2.71)$$

$$2) \delta Q = 0, \quad -A_{23} = dU,$$

$$A_{23} = \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2); \quad (2.72)$$

$$3) \delta Q = \delta A, \quad dT = 0,$$

$$A_{34} = \frac{m}{\mu} RT_2 \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2; \quad (2.73)$$

$$4) \delta Q = 0, \quad -dA = dU,$$

$$A_{41} = \frac{m}{\mu} R(T_2 - T_1). \quad (2.74)$$

Тоді

$$A = Q_1 + A_{23} - Q_2 + A_{41} = Q_1 - Q_2, \quad (2.75)$$

оскільки $A_{23} = -A_{41}$.

Коефіцієнтом корисної дії (к.к.д) називається відношення корисної роботи до витраченої енергії:

$$\eta = A = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (2.76)$$

Розрахуємо тепловий к.к.д. ідеального газу Карно:

$$\eta = \frac{\frac{m}{\mu} R(T_1 \ln \frac{V_2}{V_1} - T_2 \ln \frac{V_3}{V_4})}{\frac{m}{\mu} RT_1 \ln \frac{V_3}{V_4}} = 1 - \frac{T_2 \ln \frac{V_3}{V_4}}{T_1 \ln \frac{V_2}{V_1}}. \quad (2.77)$$

Застосовуючи рівняння адіабатного процесу:

$$\begin{cases} T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1} \\ T_2 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4} \quad (2.78)$$

Підставляючи останнє рівняння у формулу для к.к.д., отримаємо:

$$\eta_T = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (2.79)$$

Це є *термічний* к.к.д. ідеального циклу Карно. Оскільки для ідеальної теплової машини тепловий та термічний к.к.д. співпадають, отримаємо:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \Rightarrow 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad (2.80)$$

Останнє рівняння дозволяє сформулювати *теорему Карно*: з усіх періодично діючих машин максимальний к.к.д. мають машини, що працюють згідно оборотного процесу, при цьому к.к.д. не залежить від конструкції машини та хімічного складу робочого тіла й визначається тільки температурою нагрівача та холодильника.

2.2.9. Ентропія. Другий та третій закони термодинаміки. Статистичне тлумачення ентропії

З теореми Карно випливає що $\eta=1$, якщо ми не будемо забирати усю теплоту ($Q_2=0$), але такий процес не можливий. У термодинаміці цей важливий наслідок має назву другого закону [1, 9, 13].

II закон термодинаміки. Вічний двигун другого роду неможливий. Тобто неможливий процес, єдиним результатом якого було б перетворення теплоти, одержаної від нагрівача, в еквівалентну до неї роботу (Томпсон, 1851р.).

Інше формулювання закону належить Клаузіусу. *Теплота ніколи не може повільно переходити від тіла з низькою температурою до тіла з більшою температурою без здійснення роботи зовнішніми силами.*

Цей закон підкреслює односторонність реальних процесів та їх спрямованість від порядку до безладу. II закон термодинаміки показує, що взаємне перетворення теплоти та роботи не рівноцінне: роботу можна цілком перетворити у теплоту, а теплоту у роботу ні.

З теореми Карно (2.80) та другого закону термодинаміки випливає:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (2.81)$$

Тобто відношення $\frac{Q}{T}$ не залежить від процесів, за яких досягнуто стану рівноваги. Це відношення одержало назву зведеної кількості теплоти або *ентропії*:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (2.82)$$

Якщо система здійснює круговий оборотний процес, то усі зміни у системі повинні дорівнювати нулю, згідно за визначенням оборотного процесу:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (2.83)$$

Якщо процес необоротний, то системі треба надати більше теплоти, компенсуючи витрати теплоти в оточуюче середовище, а тому:

$$\oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} > 0. \quad (2.84)$$

Тобто у будь-якому циклі ентропія закритої термодинамічної системи ніколи не зменшується. Ця нерівність носить назву "нерівність Клаузіуса" і є математичним формулюванням II закону термодинаміки. *Ентропія в замкненій системі за будь-яких процесів завжди зростає:*

$$\int dS \geq 0. \quad (2.85)$$

Цей закон підкреслює однобічність процесів у природі, так, наприклад, цукор сам по собі розчиняється у воді, але зворотний процес доволіно неможливий.

У стані рівноваги ентропія досягає максимуму. В адіабатному процесі $dS=0$, $S=const$, тому адіабатний процес називають *ізоентропійним* процесом.

У 1906 році німецький фізик Нерст доказав, що коли температура термодинамічної системи прагне до нуля, то ентропія теж дорівнює нулю:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \frac{dQ}{T} = 0. \quad (2.86)$$

Цей закон одержав назву *III закон термодинаміки*, або *теорема Нерста*. Він дозволяє розрахувати абсолютні величини ентропії та теплоємності, тому що за $T \rightarrow 0$, як впливає $C_p \rightarrow 0$, $C_v \rightarrow 0$.

Ентропія – міра безладу в термодинамічній системі. Повний порядок відповідає мінімуму ентропії. Тому фізичний сенс зростання ентропії такий: в ізольованій системі колектив частинок намагається перейти до стану, в якому за деяких умов можливий більший безлад. Максимальна ентропія відповідає повному хаосу в системі. Це добре можна пояснити на прикладі зміни агрегатного стану води. У кристалі більш порядку, ніж у рідині, а в рідині більше ніж у газі (рис.2.23).

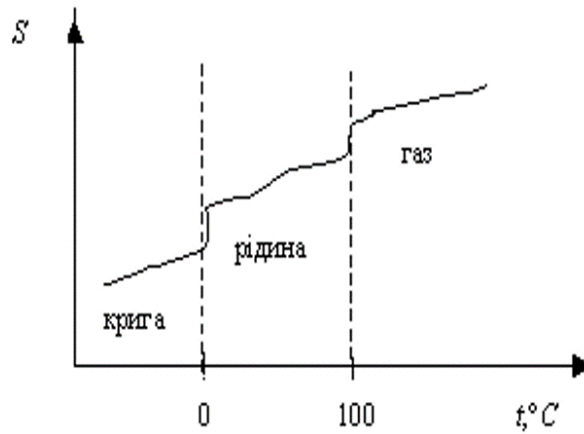


Рис.2.23

Цей прояв природи дозволив Больцману, на підставі статистичної фізики, одержати формулу для визначення ентропії:

$$S = k \ln W, \quad (2.87)$$

де k – стала Больцмана, W – термодинамічна ймовірність. $W \geq 1$ завжди, тому що існує хоча б один спосіб, за яким реалізується набутий стан термодинамічної системи. Якщо система у рівновазі, то існує багато способів досягнення цього стану, тому ентропія такого стану має максимальну величину. Згідно з Больцманом різні комбінації швидкостей та координат молекул унаслідок зіткнень не змінюють стан системи у механічному сенсі, але у термодинамічному сенсі така система буде переходити до більш імовірних станів, які можна реалізувати найбільшою кількістю способів.

2.2.10. Явища переносу в термодинамічно-нерівноважних системах

Раніше ми дали визначення нерівноважним процесам. Розділ фізики, який вивчає нерівноважні термодинамічні системи, називається *нерівноважною термодинамікою* або *термодинамікою необоротних процесів* [1, 9, 13].

Завжди, коли у термодинамічній системі існує нерівномірне розподілення маси, заряду, енергії та ін., внаслідок другого закону термодинаміки ентропія буде зростати, намагаючись досягти максимальної величини, тобто рівномірного розподілення речовини та енергії. Тому *явищами переносу* називають групу явищ, за яких відбувається необоротне перенесення маси, енергії, кількості руху тощо.

Нерівноважні процеси можуть бути *стаціонарними*, тобто такими, що не змінюються з часом і *нестационарними*, які змінюються з часом. Нерівноважні стаціонарні процеси – найпростіші. Саме їх ми розглянемо в цьому розділі.

В основі нерівноважної термодинаміки лежать два закони: закон збереження маси, енергії та принцип зростання ентропії (II закон термодинаміки).

Те, що якась фізична субстанція переноситься, означає, що є потік даної субстанції. За аналогією з відомим визначенням потужності у механіці $N = v \cdot F$, у нерівноважній термодинаміці постулюється наступний закон. *Зміна ентропії з*

часом (дисипація ентропії або продукція ентропії) дорівнює сумі додатків усіх діючих в системі термодинамічних сил на породжувані ними потоки:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n J_i X_i, \quad (2.88)$$

де X_i – рушійна сила потоку, найчастіше градієнт якоїсь фізичної величини f :

$$X = \text{grad}(f), \quad (2.89)$$

J – потік субстанції, який чисельно дорівнює кількості перенесеної фізичної величини f за одиницю часу dt через одиницю площини F :

$$J = \frac{1}{F} \frac{df}{dt}. \quad (2.90)$$

Другий закон нерівноважної термодинаміки встановлює зв'язок між потоком та рушійною силою:

$$J = LX, \quad (2.91)$$

де L – кінетичний коефіцієнт, або коефіцієнт переносу.

Якщо в термодинамічній системі діють багато рушійних сил, то маємо систему рівнянь. Ця система рівнянь носить назву системи рівнянь Онзагера і є головною математичною моделлю нерівноважних процесів:

$$J_k = \sum_{i=1}^n L_{ki} X_i, \quad (2.92)$$

де $k=1\dots n$; $i=1\dots n$, L_{ki} – коефіцієнт зв'язку k -го потоку з i -ою рушійною силою.

Між кінетичними коефіцієнтами існує принцип взаємності:

$$L_{ik} = L_{ki}. \quad (2.93)$$

Принцип взаємності показує, що поряд із прямими процесами переносу можуть бути інші. Так теплопровідність (перенос енергії) може викликатись не тільки тепловим рухом молекул, але і переносом маси (так званий ефект Дюфо). Так саме перенос маси (дифузія), може бути за рахунок теплового руху молекул (термодифузія, або ефект Сорє).

2.2.11. Середнє число зіткнень та середня довжина вільного пробігу молекул

Для того, щоб зрозуміти фізику нерівноважних процесів треба залучити молекулярно-кінетичну теорію, бо термодинаміка не може дати відповідь на питання від чого залежать кінетичні коефіцієнти [1, 9, 13]. Відповідний розділ молекулярно кінетичної теорії має назву *фізична кінетика*.

З точки зору молекулярно-кінетичної теорії, усяка речовина складається з молекул, які можуть пересуватись у просторі з часом. Це призводить до переносу маси, теплоти, заряду тощо. Ми повинні знати, як довго молекули можуть рухатись без зіткнень, бо тоді будемо знати, як із часом та координатами буде встановлюватись рівновага у термодинамічній системі. Запровадимо деякі нові уявлення.

Довжина вільного пробігу – це шлях, який проходить молекула між двома послідовними зіткненнями. У кожної молекули своя власна довжина вільного пробігу, але є деяка середня довжина вільного пробігу, завдяки законам розподілу молекул за швидкостями та енергіями у зовнішньому потенційному полі.

В ідеальному газі всі зіткнення абсолютно пружні – як зіткнення двох кульок. У реальних газах під час зіткнення слід враховувати сили відштовхування, тому молекули наближаються на деяку відстань, яку називають ефективним діаметром молекули. *Мінімальна відстань, на яку наближаються при зіткненні центри двох молекул, називається ефективним діаметром молекули d_e* (рис.2.24). Очевидно, що $d_e > d$. Ефективний діаметр молекул залежить від кінетичної енергії молекул, що стикаються, тому залежить від температури та об'єму газу: $d_e \sim f(V) \sim f(T)$.

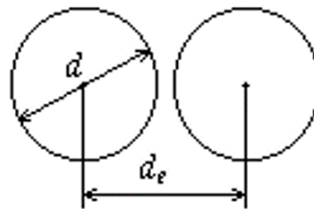


Рис.2.24

Знайдемо довжину вільного пробігу молекул. Очевидно, що за одиницю часу молекула проходить відстань, що дорівнює середній арифметичній швидкості:

$$\langle v \rangle = \sqrt{8 \frac{RT}{\pi \mu}}. \quad (2.94)$$

Тому довжина вільного пробігу пропорційна $\langle v \rangle$ та обернено пропорційна кількості зіткнень за одиницю часу $\langle z \rangle$:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}. \quad (2.95)$$

Знайдемо величину $\langle z \rangle$. Запровадимо таку модель зіткнень для газу:

- усі молекули знаходяться у стані спокою, а рухається тільки та, що розглядається;

- молекула, що розглядається, рухається прямолінійно із середньоарифметичною швидкістю;

- концентрація молекул відома і може бути визначена згідно основного рівняння молекулярно-кінетичної теорії.

Молекула може стикатись з однією чи з другою молекулами, тому діаметр циліндру зіткнень $2d_e$ (рис.2.25). Число зіткнень дорівнює кількості молекул в об'ємі циліндра поділеному на час проходження молекули крізь циліндр $\langle \tau \rangle$:

$$\langle z \rangle = \frac{Vn}{\langle \tau \rangle} = \frac{\pi d_e^2 \langle v \rangle \langle \tau \rangle n}{\langle \tau \rangle} = \pi d_e^2 \langle v \rangle n. \quad (2.96)$$

де n - концентрація молекул.

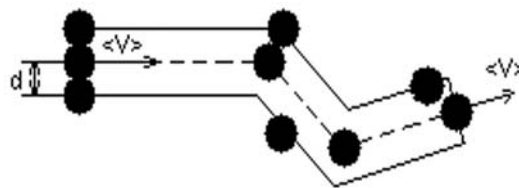


Рис.2.25

Підставляючи останнє рівняння у формулу для довжини вільного пробігу, одержуємо:

$$\langle l \rangle = \frac{\langle V \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{l}{\sqrt{2} \pi d_e^2 n}. \quad (2.97)$$

Коефіцієнт $\sqrt{2}$ враховує відносну швидкість молекул, яка, як показує розрахунок, у $\sqrt{2}$ більше, за швидкість молекул відносно стінок.

2.2.12. Дослідні закони теплопровідності, дифузії та внутрішнього тертя.

Молекулярно-кінетична теорія цих явищ

Розглянемо основні явища переносу до яких належать теплопровідність, дифузія та внутрішнє тертя [1, 9, 13].

Теплопровідність – це молекулярний перенос теплоти. Завдяки стиканню більш "нагрітих" молекул із менш "нагрітими", теплота переноситься з гарячого місця до холодного. Наприклад таким чином розповсюджується теплота у нагрітому з одного кінця металі.

Дослідним шляхом встановлено наступний закон для потоку теплоти j_Q , який одержав назву закону Фур'є:

$$j_Q = -\lambda \text{grad}T, \quad (2.98)$$

де величина j_Q , це кількість тепла, що проходить через 1 м^2 за 1 с .

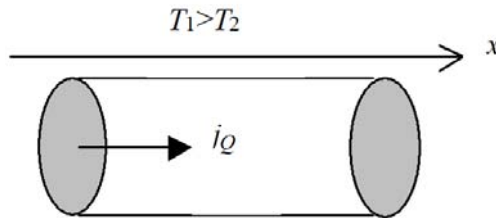


Рис.2.26

Якщо теплота розповсюджується тільки вздовж однієї координати x (рис.2.26), то:

$$j_Q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (2.99)$$

Кінетичний коефіцієнт λ носить назву коефіцієнт теплопровідності. Його розмірність – $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ та він залежить від природи речовини й температури. Для ідеальних газів коефіцієнт теплопровідності може бути розрахований за формулою:

$$\lambda = \frac{1}{3} C_v \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (2.100)$$

Для інших речовин коефіцієнт теплопровідності за порядком такий:

Коефіцієнт теплопровідності	Газ	Рідина	Метали
$\lambda, \text{Вт}/\text{м}^2 \cdot \text{К}$	0,01	0,5-0,6	300-400

Дифузія – це молекулярний перенос маси. Завжди, коли є нерівномірний розподіл речовини у деякому об'ємі, виникають потоки, що призводять до вирівнювання концентрації за всім об'ємом. Так, наприклад, поширюються запахи, розчиняється цукор у рідині. Дослідний закон, що пов'язує потік речовини j_m із його рушійною силою (градієнтом густини речовини ρ), має назву закону Фіка:

$$j_m = -D \text{grad} \rho, \quad (2.101)$$

де кінетичний коефіцієнт D називається коефіцієнтом дифузії. Він показує швидкість пересування фронту молекул. Його розмірність - $\text{м}^2/\text{с}$. Для ідеальних газів коефіцієнт дифузії може бути розрахований за формулою:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (2.102)$$

Для інших речовин він залежить від їх походження та температури:

Коефіцієнт дифузії	Газ	Рідина	Тверді тіла
$D, \text{м}^2/\text{с}$	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}

Внутрішнє тертя – це молекулярний перенос кількості руху (перенос імпульсу), який спостерігається під час відносного руху об'ємів (шарів) рідини чи газу або твердого тіла у рідині чи у газі, що призведе до виникнення сили тертя.

Ньютон експериментально встановив наступний закон. Потік імпульсу j_p (сила тертя F) прямо пропорційний градієнту відносної швидкості v дотичних шарів рідини (див. рівняння 1.135).

Для сили внутрішнього тертя:

$$F = -\eta S \text{grad} v, \quad (2.103)$$

де кінетичний коефіцієнт η має назву коефіцієнта динамічної в'язкості і залежить від виду рідини чи газу та їх температури. Крім цього коефіцієнту, використовують коефіцієнт кінематичної в'язкості:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (2.104)$$

Його розмірність – $\text{м}^2/\text{с}$.

Для ідеальних газів коефіцієнт динамічної в'язкості може бути розрахований за формулою:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle. \quad (2.105)$$

Для інших речовин коефіцієнт динамічної в'язкості за порядком такий:

Коефіцієнт динамічної в'язкості	Газ	Вода	Масла
$\eta, \text{Па}\cdot\text{с}$	10^{-3}	10^{-3}	1

Оскільки усі кінетичні коефіцієнти залежать від середньоарифметичної швидкості молекул та їх довжини вільного пробігу, то між ними існує зв'язок:

$$\eta = \rho D; \quad \lambda = C_V \eta. \quad (2.106)$$

Якщо врахувати залежність середньоарифметичної швидкості молекул та їх довжини вільного пробігу від температури, то можна одержати наступну температурну залежність для коефіцієнтів переносу:

$$D \sim \frac{T^{\frac{3}{2}}}{p}; \quad \eta = \lambda = \sqrt{T}. \quad (2.107)$$

Приклади розв'язання задач

Молекулярно-кінетична теорія та термодинаміка

Приклад 1. Яку температуру T має маса $m=2\text{г}$ азоту, що займає об'єм $V=820\text{см}^3$ при тиску $p=0,2\text{ МПа}$.

Розв'язання:

Температуру азоту можна визначити з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

звідки температура азоту:

$$T = \frac{pV\mu}{mR}. \quad (2)$$

Молярна маса азоту $\mu=0,028\text{ кг/моль}$. Підставляючи числові дані, отримаємо: $T = \frac{0,2 \cdot 10^6 \cdot 820 \cdot 10^{-6} \cdot 0,028}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} = 280\text{К}$ або $T = 7^\circ\text{C}$.

Приклад 2. У скільки разів густина повітря ρ_1 , що заповнює приміщення взимку ($t_1=7^\circ\text{C}$), більше його густини ρ_2 влітку ($t_2=37^\circ\text{C}$). Тиск газу вважати постійним.

Розв'язання:

Згідно рівнянню Менделєєва - Клапейрона для першого стану:

$$\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{\mu} R, \quad (1)$$

для другого стану:

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{m}{\mu} R. \quad (2)$$

Розділивши (1) на (2), при $p = \text{const}$ маємо: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m/V_2}{m/V_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, звідки

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ де } T_1 = 280\text{К}, T_2 = 310\text{К}. \text{ Тоді } \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,1.$$

Приклад 3. Масу $m=5$ г азоту, що знаходиться, в закритому сосуді об'ємом $V=4$ л при температурі $t=20^\circ\text{C}$, нагрівають до температури $t=40^\circ\text{C}$. Знайти тиск p_1 і p_2 газу до і після нагрівання.

Розв'язання

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$. За умовою $m = \text{const}$,

тоді для першого стану $p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$, для другого стану $p_2 V_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, звідки

$$p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}, \quad p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}. \text{ Підставляючи числові дані, отримаємо } p_1 = 108 \text{ кПа};$$

$$p_2 = 116 \text{ кПа}.$$

Приклад 4. Загальновідоме жартівливе питання: «Що важче: тонна свинцю або тонна пробки?» На скільки дійсна вага пробки, яка в повітрі важить 9,8 кН, більше дійсної ваги свинцю, який в повітрі важить також 9,8 кН? Температура повітря $t=17^\circ\text{C}$, тиск $p=100$ кПа.

Розв'язання

На тіла, що знаходяться в повітрі, діє виштовхуюча сила Архімеда $F_A = \rho g V$, де ρ – густина повітря, V – об'єм тіла. Тобто тіло втрачає у вазі стільки, скільки важить повітря в об'ємі даного тіла. Об'єм свинцю $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$.

Повітря в даному об'ємі важить $m_1 g$. Відповідно до рівняння Менделєєва-Клапейрона $p_1 V_1 = \frac{m_1}{\mu} RT$, звідки $m_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}$. Тоді $m_1 g = \frac{\mu p m g}{RT} = \frac{\mu p m g}{\rho_1 RT}$. Об'єм

пробки $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$. Вага повітря в даному об'ємі $m_2 g = \frac{\mu p m g}{\rho_2 RT}$. Дійсна вага свинцю

$$P_1 = g(m + m_1), \quad \text{дійсна вага пробки} \quad P_2 = g(m + m_2). \quad \text{Тоді}$$

$$\Delta P = g(m_2 - m_1) = \frac{\mu p m g}{RT} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right); \quad \Delta P = 58,6 \text{ Н}.$$

Приклад 5. Якою повинна бути вага p оболонки дитячої повітряної кульки, наповненої воднем, щоб результуюча підйомна сила кульки $F=0$, тобто щоб кулька знаходилася в зваженому стані? Повітря і водень знаходяться за

нормальних умов. Тиск усередині кульки рівний зовнішньому тиску. Радіус кульки $r=12,5$ см.

Розв'язання

Результуюча підйомна сила $F = m_1g - (m_2g + P)$, де m_1 – маса повітря в об'ємі кульки, m_2 – маса водню в об'ємі кульки. Оскільки $F=0$, то $P = g(m_1 - m_2)$.

З рівняння Менделєєва-Клапейрона знайдемо $m = \frac{\mu \rho V}{RT}$. Тоді

$$P = g \frac{\rho V}{RT} (\mu_1 - \mu_2) = \frac{4\pi r^2 \rho g}{3RT} (\mu_1 - \mu_2); P=96 \text{ мН.}$$

Приклад 6. У закритій посуді об'ємом $V=1$ м³ знаходиться маса $m_1=1,6$ кг кисню і маса $m_2=0,9$ кг води. Знайти тиск p в посуді при температурі $t=500^\circ\text{C}$, знаючи, що при цій температурі вся вода перетворюється на пару.

Розв'язання

За законом Дальтона $p = p'_1 + p'_2$, де, згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона, $p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}$ – парціальний тиск кисню, $\mu_1=0,032$ кг/моль; $p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$

– парціальний тиск водяної пари, $\mu_2=0,018$ кг/моль. Звідки $p = \frac{RT}{V} \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right)$,

$p=640$ кПа.

Приклад 7. У посуді об'ємом $V=0,5$ л знаходиться маса $m=1$ г пароподібного йоду (I_2). При температурі $t=1000^\circ\text{C}$ тиск в посуді $p=93,3$ кПа. Знайти ступінь дисоціації α молекул йоду на атоми. Молярна маса молекул йоду $\mu=0,254$ кг/моль.

Розв'язання

Ступенем дисоціації α називають відношення числа молекул, що розпалися на атоми, до загального числа молекул газу, тобто ступінь дисоціації показує, яка частина молекул розпалася на атоми. В результаті дисоціації маємо

$\nu_1 = \frac{2\alpha m}{\mu}$ атомарного йоду і $\nu_2 = \frac{(1-\alpha)m}{\mu}$ молекулярного йоду. Їх парціальний тиск:

$$p_1 = \frac{2\alpha m RT}{\mu V}, \tag{1}$$

$$p_2 = \frac{(1-\alpha)m RT}{\mu V}. \tag{2}$$

Згідно із законом Дальтона $p_c = p_1 + p_2$. Підставляючи (1) і (2), отримаємо $p_c = \frac{mRT}{\mu V}(1 + \alpha)$, звідки $\alpha = \frac{\mu p_c V}{mRT} - 1$; $\alpha = 0,12$.

Приклад 8. У сосуді об'ємом $V=4$ л знаходиться маса $m=1$ г водню. Яке число молекул n містить одиниця об'єму сосууду?

Розв'язання

Число молекул водню N , що міститься у сосуді, можна знайти із співвідношення: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Тоді число молекул в одиниці об'єму $n = \frac{N}{V}$ або

$$n = \frac{mN_A}{\mu V}; n = 7,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Приклад 9. Яке число молекул N знаходиться в кімнаті об'ємом $V=80$ м³ при температурі $t=17^\circ\text{C}$ і тиску $p=100$ кПа?

Розв'язання

Число молекул N , що знаходяться в кімнаті, можна знайти із співвідношення: $N = \frac{m}{\mu} N_A$. Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$,

звідки $\frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}$. Тоді $N = \frac{pVN_A}{RT}$; $N = 2 \cdot 10^{27}$.

Приклад 10. Знайти середню квадратичну швидкість $\langle v_{кв} \rangle$ молекул повітря при температурі $t=17^\circ\text{C}$. Молярна маса повітря $\mu=0,029$ кг/моль.

Розв'язання

Середня квадратична швидкість молекул $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. Для молекул повітря $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 290}{0,029}} = 500 \text{ м/с}$.

Приклад 11. Середня квадратична швидкість молекул деякого газу $\langle v_{кв} \rangle = 450$ м/с. Тиск газу $p=50$ кПа. Знайти густину ρ газу за цих умов.

Розв'язання

Тиск газу визначається основним рівнянням МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \quad (1)$$

де n – число молекул в одиниці об'єму, m_0 – маса молекули. Крім того, n і m_0 зв'язані співвідношенням: $n = \frac{\rho}{m_0}$. Тоді рівняння (1) можна записати таким

чином: $p = \frac{\rho \langle v_{кв} \rangle}{3}$, звідки $\rho = \frac{3p}{\langle v_{кв} \rangle}$; $\rho = 0,74 \text{ кг/м}^3$.

Приклад 12. Знайти енергію $W_{об}$ обертального руху молекул, що містяться в масі $m=1$ кг азоту при температурі $t=7^\circ\text{C}$.

Розв'язання

Внутрішня енергія газу $W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$. Оскільки молекула азоту складається

з двох атомів, то для неї кількість ступенів свободи обертального руху $i=2$. Тоді

$$W_{об} = \frac{m}{\mu} RT; W_{об} = 83 \text{ кДж.}$$

Приклад 13. Знайти внутрішню енергію W двоатомного газу, що знаходиться в сосуді об'ємом $V=2$ л під тиском $p=150$ кПа.

Розв'язання

Згідно рівнянню стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (1)$$

Внутрішня енергія газу $W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$, або з урахуванням (1): $W = \frac{i}{2} pV$. Для

двоатомного газу кількість ступенів свободи $i=5$, тоді $W = \frac{5}{2} pV$; $W=750$ Дж.

Приклад 14. Енергія поступального руху молекул азоту, що знаходиться в балоні об'єм $V=20$ л – $W=5$ кДж, а середня квадратична швидкість його молекул $\langle v_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3 \text{ м/с}$. Знайти масу m азоту в балоні і тиск p , під яким він знаходиться.

Розв'язання

Енергія поступального руху молекул азоту $W = \frac{m \langle v_{кв} \rangle^2}{2}$, звідки $m = \frac{2W}{\langle v_{кв} \rangle^2}$;

$m=2,5$ г. Згідно основному рівнянню МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \quad (1)$$

де n – число молекул в одиниці об'єму, m_0 – маса молекули. Очевидно, що добуток $n \cdot m_0 = \rho$ – густина азоту. Тоді $n \cdot m_0 \cdot V = \rho \cdot V = m$ – масі всього азоту, що знаходиться в балоні. Помноживши праву і ліву частини рівняння (1) на V ,

отримаємо $pV = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} m \frac{\langle v_{ка} \rangle^2}{2}$. Але $\frac{m \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = W$, таким чином $pV = \frac{2}{3} W$, звідки $p = \frac{2W}{3V}$; $p = 167$ кПа.

Приклад 15. Маса $m=1$ кг двоатомного газу знаходиться під тиском $p=80$ кПа і має густина $\rho=4$ кг/м³. Знайти енергію теплового руху W молекул газу за цих умов.

Розв'язання

Енергія теплового руху двоатомного газу $W = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT$. Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, тоді $W = \frac{5}{2} pV$. Оскільки $V = \frac{m}{\rho}$, то остаточно маємо $W = \frac{5}{2} \frac{pm}{\rho}$; $W = 50$ кДж.

Приклад 16. Знайти питому теплоємність c кисню для: а) $V=\text{const}$; б) $p=\text{const}$.

Розв'язання

Молярна теплоємність C і питома теплоємність c зв'язані співвідношенням $C = \mu c$. Звідси $c = \frac{C}{\mu}$.

а) При $V=\text{const}$: $c_V = \frac{C_V}{\mu}$, де $C_V = \frac{i}{2} R$. Для кисню $i=5$, отже, $C_V = \frac{5}{2} R$.

Тоді питома теплоємність кисню при постійному об'ємі $c_V = \frac{5R}{2\mu}$;

$c_V = 650 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}$.

б) При $p=\text{const}$: $C_p = C_V + R = \frac{7}{2} R$. Звідси $c_p = \frac{7R}{2\mu}$; $c_p = 910 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}$.

Приклад 17. Маса $m=10$ г кисню знаходиться при тиску $p=0,3$ МПа і температурі $t=10^\circ\text{C}$. Після нагрівання при $p=\text{const}$ газ зайняв об'єм $V_2=10$ л. Знайти кількість теплоти отриману газом і енергію теплового руху молекул газу W до і після нагрівання.

Розв'язання

Енергія теплового руху молекул кисню до нагрівання:

$$W_1 = \frac{5mRT_1}{2\mu}, \quad (1)$$

після нагрівання:

$$W_2 = \frac{5mRT_2}{2\mu}. \quad (2)$$

При розширенні газу була здійснена робота:

$$\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \quad (3)$$

Кількість теплоти, отримана газом відповідно до першого закону термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta A. \quad (4)$$

Зміна внутрішньої енергії газу:

$$\Delta W = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2). \quad (5)$$

Невідомі V_1 і T_2 можна знайти з рівнянь початкового і кінцевого станів газу:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad (6)$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (7)$$

Із (6) $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$. Із (7) $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$. З рівняння (1) $W_1 = 1,8$ кДж.

Підставивши (7) в (2), отримаємо $W_2 = \frac{5}{2} pV_2$; $W_2 = 7,6$ кДж. З (4), з урахуванням

$$(3) \text{ і } (6) \quad \Delta Q = (W_2 - W_1) + p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right); \quad \Delta Q = 7,9 \text{ кДж.}$$

Приклад 18. У сосуді об'ємом $V=0,1$ м³ знаходиться азот при тиску $p=0,1$ МПа. Яку кількість теплоти Q необхідно передати азоту, щоб: а) при $p=\text{const}$ об'єм збільшився удвічі; б) при $V=\text{const}$ тиск збільшився удвічі?

Розв'язання

а) При $p=\text{const}$ кількість теплоти:

$$Q = \Delta W + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T. \quad (1)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$ і $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$, звідки

$$p\Delta V = \frac{m}{\mu} R \Delta T \text{ або } \frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{p\Delta V}{R}. \text{ Тоді з (1) отримаємо } Q = \frac{C_p p \Delta V}{R} = 700 \text{ Дж.}$$

б) При $V=\text{const}$ маємо:

$$Q = \Delta W = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T. \quad (2)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона $p_1V = \frac{m}{\mu}RT_1$ і $p_2V = \frac{m}{\mu}RT_2$, звідки $V\Delta p = \frac{m}{\mu}R\Delta T$ або $\frac{m}{\mu}\Delta T = \frac{V\Delta p}{R}$. Тоді з (2) отримаємо $Q = \frac{C_V V\Delta p}{R} = 500$ Дж.

Приклад 19. При якій температурі T середня квадратична швидкість молекул азоту більше їх найбільш вірогідної швидкості на $\Delta v = 50$ м/с?

Розв'язання

За визначенням найбільш вірогідної швидкості $v_g = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$, а середня квадратична $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. За умовами завдання $\langle v_{кв} \rangle = v_g + \Delta v$, тоді $\Delta v = \langle v_{кв} \rangle - v_g = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. Звідси $\sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$;
 $T = \frac{\mu(\Delta v)^2}{R(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}$; $T = 83,37$ К.

Приклад 20. На якій висоті h тиск повітря складає 75% від тиску на рівні моря? Температуру повітря вважати постійною і рівною $t = 0^\circ\text{C}$.

Розв'язання

Закон убуття тиску газу з висотою в полі сили тяжіння дає барометрична формула: $p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$, звідки $\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$.
 Логарифмуючи обидві частини рівняння, отримаємо $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\mu gh}{RT}$, звідки

$$h = -\frac{RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\mu g} = 2296 \text{ м.}$$

Приклад 21. Знайти густину ρ повітря: а) у поверхні Землі; б) на висоті $h = 4$ км від поверхні Землі. Температуру повітря вважати постійною і рівною $t = 0^\circ\text{C}$. Тиск повітря у поверхні Землі $p_0 = 100$ кПа.

Розв'язання

а) З рівняння Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu}RT$ густина буде дорівнювати $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. У поверхні Землі $p = p_0$, тоді $\rho_1 = \frac{p_0\mu}{RT_1} = 1,278$ кг/м³.

б) На висоті $h_2=4\text{км}$ густина повітря $\rho_2 = \frac{p_2 \mu}{RT_2}$. Для знаходження p_2 скористуємося барометричною формулою $p_2 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_2}\right)$. Тоді

$$\rho_2 = \frac{p_0 \mu}{RT_2} \exp\left(-\frac{\mu gh_2}{RT_2}\right) = 0,744 \text{ кг/м}^3.$$

Приклад 22. Знайти середню довжину вільного пробігу λ молекул вуглекислого газу при температурі $t=100^\circ\text{C}$ і тиску $p=13,3 \text{ Па}$. Діаметр молекул вуглекислого газу $\sigma=0,32 \text{ нм}$.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул газу $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$, де $\bar{z} = \sqrt{2}\sigma^2 n \pi$ – середнє число зіткнень кожної молекули з іншими в одиницю часу. Концентрація молекул $n = \frac{p}{kT}$, тоді $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n \pi} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p \pi}$;

$$\bar{\lambda} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 0,32^2 \cdot 10^{-18} \cdot 13,3 \cdot 3,14} = 850 \text{ мкм}.$$

Приклад 23. Знайти середнє число зіткнень \bar{z} в одиницю часу молекул вуглекислого газу при температурі $t=100^\circ\text{C}$, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda}=870 \text{ мкм}$.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$, де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}}{\bar{\lambda}} = 4,87 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$.

Приклад 24. У сферичній колбі об'ємом $V=1\text{л}$ знаходиться азот. При якій густині ρ азоту середня довжина вільного пробігу молекул азоту більше розмірів сосуду?

Розв'язання

Оскільки колба сферична, то її об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$. Звідси діаметр колби $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$. Середня довжина вільного пробігу молекул

$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho \cdot N_A}$. За умовою $\bar{\lambda} > D$, таким чином $\sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho \cdot N_A}$. Звідки

густина повинна бути $\rho < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2\rho \cdot N_A \cdot \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}}$; $\rho < 9,38 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3$.

Приклад 25. Знайти середнє число зіткнень \bar{z} в одиницю часу молекул деякого газу, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda} = 5 \text{ мкм}$, а середня квадратична швидкість його молекул $\langle v_{кв} \rangle = 500 \text{ м/с}$.

Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$. Тоді середнє число зіткнень в одиницю часу $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$. Оскільки середня квадратична швидкість

молекул $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{kT}{m}}$, то $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\langle v_{кв} \rangle}{\sqrt{3}}$. Середня арифметична

швидкість молекул $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{кв} \rangle$. Тоді $\bar{z} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{кв} \rangle}{\bar{\lambda}} = 9,21 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$.

Приклад 26. Знайти коефіцієнт дифузії D водню за нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу $\bar{\lambda} = 0,16 \text{ мкм}$.

Розв'язання

За визначенням коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$, де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул. Тоді коефіцієнт дифузії водню при нормальних умовах $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda} = 9,06 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$.

Приклад 27. Знайти масу m азоту, що пройшов унаслідок дифузії через площадку $S = 0,01 \text{ м}^2$ за час $t = 10 \text{ с}$, якщо градієнт густини в напрямі, перпендикулярному до площадки майданчика, $\frac{\Delta\rho}{\Delta x} = 1,26 \text{ кг/м}^4$. Температура азоту $t = 27^\circ\text{C}$. Середня довжина вільного пробігу молекул азоту $\bar{\lambda} = 10 \text{ мкм}$.

Розв'язання

Згідно із законом Фіка $m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t$. Коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda}$.

$$\text{Маса азоту } m = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda} \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t = 19,9 \text{ г.}$$

Приклад 28. Знайти діаметр σ молекули кисню, якщо при температурі $t=0^\circ\text{C}$ в'язкість кисню $\eta=18,8$ мкПа/с.

Розв'язання

Динамічна в'язкість кисню визначається співвідношенням

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho, \quad (1)$$

де $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$ – середня арифметична швидкість молекул, $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p \pi}$ – середня

довжина вільного пробігу, $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ – густина газу. Підставляючи дані вирази

в (1), отримаємо $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2} \sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$, звідки $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta}} \cdot \sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}} = 0,3 \text{ нм.}$

Приклад 29. Знайти коефіцієнт дифузії D й і в'язкість η повітря при тиску $p=101,3$ кПа і температурі $t=10^\circ\text{C}$. Діаметр молекул повітря $\sigma=0,3$ нм.

Розв'язання

Коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{T}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}$; $D = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$. Крім того,

коефіцієнт дифузії $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$, а коефіцієнт в'язкості $\eta = \frac{1}{3\rho} \bar{v} \bar{\lambda}$. Таким чином,

$\eta = \rho D$, де густину ρ можна виразити з рівняння Менделєєва-Клапейрона

$pV = \frac{m}{\mu} RT$, звідки $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$. Тоді $\eta = \frac{p\mu}{RT} D = 18,27 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$.

Приклад 30. У сосуді об'ємом $V=2$ л знаходиться $N=4 \cdot 10^{22}$ молекул двоатомного газу. Теплопровідність газу $K=14$ мВт/(м·К). Знайти коефіцієнт дифузії D газу.

Розв'язання

Коефіцієнт теплопровідності $K = c_V \rho \bar{v} \lambda / 3$, а коефіцієнт дифузії $D = \bar{v} \lambda / 3$, отже, коефіцієнти теплопровідності і дифузії зв'язані співвідношенням $K = c_V \rho D$. Теплоємність при постійному об'ємі $c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu}$, де

$i=5$, оскільки газ двоатомний. Число частинок в одиниці об'єму $n = \frac{\rho}{\mu} N_A$, а в

об'ємі V – $N = nV = \frac{\rho V N_A}{\mu}$. Тоді $K = \frac{5}{2} \frac{R}{\mu} \frac{\rho V N_A}{V N_A} D = \frac{5kND}{2V}$; звідки

$$D = \frac{2VK}{5kN} = 2,02 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Приклад 31. Маса $m=6,5$ г водню, що знаходиться при температурі $t=27^\circ\text{C}$, розширюється удвічі при $p=\text{const}$ за рахунок притоку тепла ззовні. Знайти роботу A розширення газу, зміну ΔW внутрішньої енергії газу і кількість теплоти Q , передану газу.

Розв'язання

Робота розширення газу $A = p \int_V^{2V} dV = p(2V - V) = pV$. Відповідно рівнянню

Менделєєва-Клапейрона $pV = \frac{m}{\mu} RT$, робота $A = \frac{m}{\mu} RT = 8,1$ Дж. Зміна

внутрішньої енергії $\Delta W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$, де $i=5$. Оскільки $p=\text{const}$, то $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, отже,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2. \quad \text{Звідси} \quad T_2 = 2T_1 \quad \text{і} \quad \Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1. \quad \text{Тоді}$$

$$\Delta W = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT_1 = 20,25 \text{ кДж.} \quad \text{Згідно першому закону термодинаміки}$$

$$Q = \Delta W + A = 28,35 \text{ кДж}.$$

Приклад 32. При ізобарному розширенні двоатомного газу була здійснена робота $A=156,8$ Дж. Яка кількість теплоти Q була передана газу?

Розв'язання

Кількість теплоти, передана газу, $dQ = C_p dT$, звідки:

$$Q = C_p \int_{T_1}^{T_2} dT = C_p (T_2 - T_1). \quad (1)$$

Елементарна робота, що здійснюється при розширенні газу $dA = p dV$,

тоді $A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$. З рівняння Менделєєва-Клапейрона $p\Delta V = \nu R \Delta T$,

тоді:

$$A = \nu R (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Вирішуючи спільно (1) і (2), отримуємо $Q = C_p \frac{A}{\nu R}$, де $C_p = \nu \frac{7}{2} R$, звідки $Q = \frac{7}{2} A = 550$ Дж.

Приклад 33. Об'єм $V_1=7,5$ л кисню адіабатично стискається до об'єму $V_2=1$ л, причому в кінці стиснення встановився тиск $p_2=1,6$ МПа. Під яким тиском p_2 знаходився газ до стиснення?

Розв'язання

Згідно рівнянню Пуассона $pV^\gamma = \text{const}$, де показник адіабати $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ для кисню $\gamma = 1,4$. Оскільки $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$, то $p_1 = p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = 95$ кПа.

Приклад 34. Ідеальна теплова машина, що працює по циклу Карно, за цикл отримує від нагрівача кількість теплоти $Q_1=2,512$ кДж. Температура нагрівача $T_1=400$ К, температура холодильника $T_2=300$ К. Знайти роботу A , здійснювану машиною за один цикл, і кількість теплоти, що віддається холодильнику за один цикл.

Розв'язання

Робота, що здійснюється тепловою машиною, визначається за формулою $A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1$, де Q_1 кількість теплоти, отримана машиною від нагрівача; Q_2 кількість теплоти, що віддається холодильнику, η – коефіцієнт корисної дії машини, який дорівнює $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,25$. Звідки $A=630$ Дж; $Q_2 = Q_1 - A = 1,88$ кДж.

Приклад 35. Ідеальна холодильна машина, що працює по зворотному циклу Карно, здійснює за один цикл роботу $A=37$ кДж. При цьому вона бере тепло від тіла з температурою $t_2=-10^\circ\text{C}$ і передає тепло тілу з температурою $t_1=17^\circ\text{C}$. Знайти к. к. д. η циклу, кількість теплоти Q_2 , що відняте у холодного тіла за один цикл, і кількість теплоти Q_1 , передане гарячішому тілу за один цикл.

Розв'язання

Оскільки холодильна машина працює по зворотному циклу, то для переходу тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого необхідно, щоб зовнішні сили виконали позитивну роботу. Кількість теплоти Q_2 відняте у холодного тіла, разом з роботою зовнішніх сил A дорівнює кількості теплоти Q_1 переданій більш нагрітому тілу, $Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} - A = \frac{1-\eta}{\eta} A$. Оскільки $\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0,093$, то $Q_2 = 360$ кДж; $Q_1 = Q_2 + A = 379$ кДж.

Таким чином холодильна машина за кожен цикл передає гарячішому тілу кількість теплоти 397кДж, з яких 37кДж за рахунок механічної роботи, а 360кДж від холодного тіла.

Приклад 36. У циліндрах карбюраторного двигуна внутрішнього згорання газ стискається політропічного до $V_2=V_1/6$. Початковий тиск $p_1=90$ кПа, початкова температура $t_1=127^\circ\text{C}$. Знайти тиск p_2 і температуру t_2 газу в циліндрах після стискання. Показник політропи $n=1,3$.

Розв'язання

Рівняння політропічного процесу:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad (1)$$

За умовою $V_2 = \frac{V_1}{6}$, таким чином, $p_1 V_1^n = p_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^n$, звідки

$p_2 = p_1 \cdot 6^n = 934$ кПа. З рівняння політропічного процесу:

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1} \text{ або } T_1 V_1^{n-1} = T_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^{n-1} \quad (2)$$

Звідки: $T_2 = T_1 \cdot 6^{n-1} = 684,7$ К.

Приклад 37. Знайти зміну ΔS ентропії при перетворенні маси $m=1$ г води ($t=0^\circ\text{C}$) в пару ($t_{\text{п}}=100^\circ\text{C}$).

Розв'язання

Загальна зміна ентропії ΔS складається із зміни ентропії ΔS_1 при нагріванні маси m води від температури T до температури T_n і зміни ентропії ΔS_2 при випаровуванні маси m води. $\Delta S_1 = mc \ln \frac{T_n}{T}$, де $c=4,19$ кДж/(кг·К) – питома

теплоємність води. $\Delta S_2 = \frac{mr}{T_n}$, де $r=2,26$ МДж/кг – питома теплота

пароутворення. Тоді $\Delta S = m \left(c \ln \frac{T_n}{T} + \frac{r}{T_n} \right) = 7,4$ Дж/К.

Приклад 38. Знайти зміну ΔS ентропії при плавленні маси $m=1$ кг льоду ($t=0^\circ\text{C}$).

Розв'язання

При плавленні маси m льоду при температурі T маємо $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$, де $\lambda=0,33$ МДж/кг – питома теплота плавлення. $\Delta S=1209$ Дж/К.

Приклад 39. Масу $m = 640$ г розплавленого свинцю при температурі плавлення $t_{пл}$ вилили на лід ($t = 0^\circ\text{C}$). Знайти зміну ΔS ентропії при цьому процесі.

Розв'язання

Припустимо, що система «свинець-лід» замкнута, тобто втрат тепла в зовнішнє середовище не відбувається і вся пара, що утворилася, сконденсувалася і залишилася усередині системи у вигляді води. Тоді зміна ентропії системи ΔS складатиметься із зміни ентропії свинцю ΔS_1 при твердінні, зміни ентропії свинцю ΔS_2 при охолодженні до $t = 0^\circ\text{C}$ і зміни ентропії льоду при розтаванні ΔS_3 . Тобто $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$. Завдання розглядаємо за умови, що кількість льоду достатня для підтримки температури $t = 0^\circ\text{C}$. Температура плавлення свинцю $T_1 = 600$ К, температура льоду – $T_2 = 273$ К. Маємо $dS_1 = \frac{dQ_1}{T}$ або

$$\Delta S_1 = -\int_1^2 \frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{m\lambda}{T_1}, \quad \text{де } \lambda = 22,6 \text{ кДж/кг} - \text{питома теплота плавлення}$$

$$\text{(кристалізації) свинцю. } dS_2 = \frac{dQ_2}{T_2}, \text{ звідки } \Delta S_2 = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_c dT}{T} = mc_c \ln \frac{T_2}{T_1}, \text{ де } c_c = 126$$

$$\text{Дж/(кг}\cdot\text{К)} - \text{питома теплоємність свинцю. } dS_3 = \frac{dQ_3}{T} \text{ або } \Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_2}. \text{ Відповідно}$$

$$\text{до закону збереження енергії } Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2), \text{ звідки}$$

$$\Delta S_3 = \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}. \quad \text{Отже, повна зміна ентропії системи}$$

$$\Delta S = -\frac{m\lambda}{T_1} + mc_c \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}. \text{ Підставляючи в отриману формулу}$$

числові дані, остаточно отримуємо $\Delta S = 62,2$ Дж/К.

Приклад 40. Маса $m = 10$ г кисню нагрівається від температури $t_1 = 50^\circ\text{C}$ до температури $t_2 = 150^\circ\text{C}$. Знайти зміну ΔS ентропії, якщо нагрівання відбувається ізохорично.

Розв'язання

При ізохоричному нагріванні $dQ = c_V m dT$, тоді зміна ентропії

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_V m \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1}. \text{ Оскільки кисень - двоатомний газ, то число}$$

$$\text{мір свободи } i = 5 \text{ і зміна ентропії } \Delta S = \frac{7}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1} = 1,75 \text{ Дж/К.}$$

Приклад 41. Яку температуру T має маса $m=2$ г азоту, що займає об'єм $V=820$ см³ при тиску $p=0,2$ МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

Розв'язання

а) Ідеальні гази підпорядковуються рівнянню Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ звідки } T = \frac{\mu p V}{m R} = 280 \text{ К.}$$

б) Реальні гази підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса

$$\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad \text{таким чином температура}$$

$$T = \frac{\mu}{m R} \left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = 280 \text{ К. Таким чином при даному тиску газ поводить як ідеальний.}$$

Приклад 42. Яку температуру T має маса $m=3,5$ г кисню що займає об'єм $V=90$ см³ при тиску $p=2,8$ МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

Розв'язання

Якщо розглядати кисень в даних умовах як ідеальний газ, то його стан описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона: $pV = \frac{m}{\mu} RT$, звідки $T = \frac{\mu p V}{m R} = 277$

К.

Якщо розглядати газ як реальний, то його стан описується рівнянням Ван-дер-Ваальса $\left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT$, таким чином температура

$$T = \frac{\mu}{m R} \left(p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{m}{\mu} b \right) = 285,7 \text{ К.}$$

3. ЕЛЕКТРИКА ТА ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

3.1. Електростатика

3.1.1. Електричний заряд. Закон збереження електричного заряду

Властивість янтарю, що натертий шовком, притягувати легкі предмети була відома ще в древній Греції [1, 9, 13]. У 1600 р. з'явилась книга Уільяма Гілберта, де він зробив спробу узагальнити знання про природу електрики, але справжнє вивчення електрики почалось у XVIII сторіччі. Найбільший внесок у розвиток науки про електрику зробили англійський учений Генрі Кавендіш та французькій інженер Шарль Кулон. Розділ фізики, що вивчає взаємодію нерухомих зарядів називається *електростатикою*.

З досліду відомо, що під час електризації тіл тертям заряджаються обидва тіла, причому протилежними по знаку зарядами: один називають позитивним, інший – негативним. Однойменні заряди відштовхуються один від одного, а різнойменні притягуються (Дюфе, 1733 р.).

На сьогоднішній день встановлено експериментально, що тіла заряджаються дискретно (Міллікен, Іоффе). Найменшим (елементарним) електричним зарядом володіє електрон. Його заряд становить – $1,6 \cdot 10^{-15}$ Кл. Таким самим за величиною зарядом, але позитивним, володіє протон.

В електростатиці запроваджують модель точкового заряду. *Точковим електричним зарядом називається заряджене тіло, геометричною формою та розміром якого в умовах даної задачі можна знехтувати.*

Систему тіл або частинок називають *електрично ізольованою системою*, якщо між нею та зовнішніми тілами немає обміну електричним зарядом.

Той факт, що під час електризації заряди виникають попарно та всі тіла заряджаються дискретно, дозволяє сформулювати *закон збереження заряду: алгебраїчна сума електричних зарядів або заряджень тіл, що утворюють електричну ізольовану систему не змінюється за будь-яких процесів, що відбуваються у середині цієї системи.*

3.1.2. Взаємодія зарядів. Закон Кулона

Шарль Кулон у 1785 р. за допомогою спеціально сконструйованих крутильних ваг довів наступний закон взаємодії нерухомих точкових зарядів (*закон Кулона*) [1, 9, 13]: *сила електричної взаємодії двох точкових електричних зарядів, що знаходяться у вакуумі, прямо пропорційна добутку цих зарядів, обернено пропорційна квадрату відстані між зарядами і спрямована вздовж прямої, що їх з'єднує (рис.3.1):*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad (3.1)$$

де r – відстань між зарядами, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м - електрична стала.

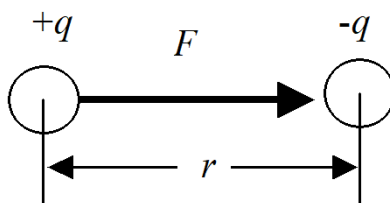


Рис.3.1

Якщо взаємодія зарядів відбувається у деякому середовищі, то сила взаємодії між ними зменшується в порівнянні з вакуумом у ε разів:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q_1q_2}{r^2}, \quad (3.2)$$

де коефіцієнт ε має назву *відносної проникності середовища*.

$$\varepsilon = \frac{F_0}{F}. \quad (3.3)$$

Він показує у скільки разів сила взаємодії двох зарядів у вакуумі F_0 більше сили взаємодії F у певному середовищі.

3.1.3. Електричне поле. Напруженість електричного поля.

Принцип суперпозиції. Лінії напруженості. Поле диполя

Те, що два заряди можуть взаємодіяти, не торкаючись один одного, свідчить про наявність навколо зарядів деякого силового поля, яке будемо називати *електростатичним* [1, 9, 13]. Для дослідження електричного поля зручно користуватися одиничним позитивним зарядом. Сила, що діє на одиничний позитивний заряд є силовою характеристикою досліджуваного поля і має назву *напруженості електричного поля*.

Напруженість електричного поля у даній точці – фізична величина, що визначається силою, яка діє на одиничний позитивний заряд, який розміщено у цій точці поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (3.4)$$

Розмірність напруженості електричного поля - В/м.

Точковий заряд створює таку напруженість електричного поля:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q \cdot q_0}{q_0 \cdot r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \frac{q}{r^2}. \quad (3.5)$$

Фарадей для зручності запровадив уявлення про лінії напруженості електричного поля. Лінії напруженості будують так, щоб дотичні до них у кожній точці співпадали з напрямком вектора напруженості у даній точці.

Властивості силових ліній:

а) у кожній точці поля вектор \vec{E} має певний напрямок та величину, тому силові лінії не перетинаються;

б) силові лінії розпочинаються на позитивному заряді та закінчуються на негативному (рис.3.2).

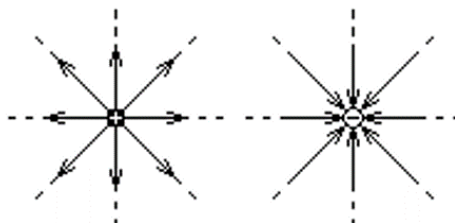


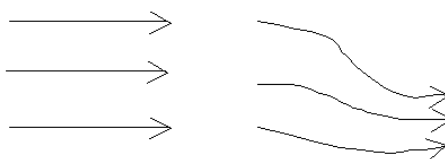
Рис.3.2

Так, наприклад, розташування силових ліній напруженості для системи двох різнойменних зарядів зображено на рисунку 3.3.



Рис.3.3

Електричне поле буває однорідним та неоднорідним. Якщо вектори напруженості у кожній точці мають однакову величину та напрямок, то силові лінії паралельні між собою. Таке поле називається *однорідним*. Якщо силові лінії у кожній точці простору не є паралельними, то таке поле називають *неоднорідним* (рис.3.4).



Однорідне поле. Неоднорідне поле

Рис.3.4

Число ліній напруженості, що пронизують одиницю поверхні перпендикулярної ліній напруженості, дорівнює величині модуля вектора \vec{E} в даному місці простору. Як видно з рисунка 3.5, у точці 2 число ліній напруженості через поверхню dS у два рази більше ніж у точці 1, тому $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$.

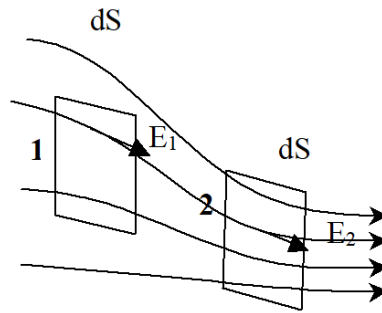


Рис.3.5

При взаємодії декількох зарядів використовується *принцип суперпозиції*. Згідно властивостям сил додаватись:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

витікає, що для напруженості електричного поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{F}_i}{q} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i.$$

Принцип суперпозиції: напруженість поля, що створене системою зарядів, дорівнює векторному додатку напруженості полів, що утворені кожним з окремих зарядів у даній точці:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (3.6)$$

Скористуємося принципом суперпозиції для визначення поля диполя – системи двох різнойменних зарядів, що жорстко закріплені на деякій відстані l (рис.3.6).

Така електрична модель, часто використовується для аналізу електричних властивостей атомів та молекул. Знайдемо спочатку поле на осі диполю.

Згідно принципу суперпозиції:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

де E_+ ; E_- – поля створені відповідно позитивним та негативним зарядами. Нехай відстань від середини диполю до деякої точки A на його осі дорівнює r . Тоді:

$$|\vec{E}_A| = |\vec{E}_+| + |\vec{E}_-| = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left[\frac{q}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{q}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{2lr}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2}. \quad (3.7)$$

Враховуючи, те що, як правило, розглядається поле віддалене від центру диполя, тобто $r \gg \frac{l}{2}$, одержуємо:

$$E_A = \frac{2lq}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}. \quad (3.8)$$

Запроваджуючи уявлення про дипольний момент як:

$$\vec{p} = |q| \cdot \vec{l}, \quad (3.9)$$

де l – плече диполю, формулу для поля диполя на його осі можна записати так:

$$\vec{E}_A = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^3}. \quad (3.10)$$

Вектор дипольного моменту співпадає з напрямком поля на осі диполя.

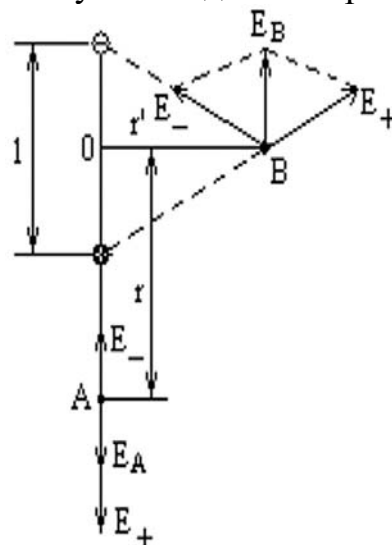


Рис.3.6

Знайдемо тепер поле у деякій точці B , що лежить на симетричному перпендикулярі до осі диполя на деякій відстані r' . Будемо вважати, як і раніше, що точка B достатньо віддалена від центру диполя, тобто:

$$r' \gg \frac{l}{2} \quad \text{та} \quad |\vec{E}_-| = |\vec{E}_+|.$$

Тоді маємо:

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r'^2 + \frac{l^2}{4}} \approx \frac{q}{4\pi \cdot \epsilon_0 r'^2}. \quad (3.11)$$

Враховуючи геометричну подібність, можна записати:

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r'^2 - \frac{l^2}{4}}} \approx \frac{l}{r'}, \quad (3.12)$$

звідки $E_B = E_+ \frac{l}{r'}$, а тому:

$$E_B = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (3.13)$$

Як бачимо, вектор E_B протилежний вектору E_A , а тому протилежний дипольному моменту p за напрямком (рис.3.6).

3.1.4 Потік вектора напруженості електростатичного поля.

Теорема Остроградського-Гауса для електростатичного поля у вакуумі

Розрахунок напруженості поля системи електричних зарядів можна значно спростити, користуючись теоремою Остроградського-Гауса [1, 9, 13].

Як відомо, густина ліній напруженості електричного поля характеризує величину поля у даній точці. Тому зручно запровадити фізичну характеристику, що називається потоком напруженості. Кількість ліній напруги, що пронизують елементарну площадку, нормаль до якої утворює кут α із вектором напруженості, називають *поток вектора напруженості*. Елементарний потік дорівнює:

$$d\Phi_E = EdS \cos \alpha = E_n ds = (\vec{E} d\vec{S}), \quad (3.14)$$

де E_n проекція вектора напруженості на нормаль до елемента поверхні dS (рис.3.7). Щоб знайти потік через деяку замкнену поверхню S , треба знайти інтеграл від елементарного потоку:

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \oint_S E_n dS. \quad (3.15)$$

Потік Φ_E величина алгебраїчна: залежить від форми силових ліній та вибору напрямку нормалі. Для замкнених поверхонь за позитивний напрямок Φ_E беруть зовнішню нормаль, що направлена від об'єму під замкненою поверхнею. Саме для замкненої поверхні сформульована теорема Остроградського-Гауса.

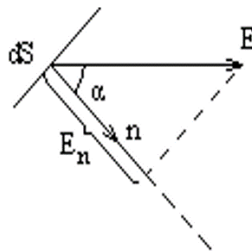


Рис.3.7

Теорема Остроградського-Гауса: потік вектора напруженості електростатичного поля у вакуумі крізь довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчному додатку зарядів, що розміщено всередині цієї поверхні, поділеному на ϵ_0 (рис.3.8):

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i. \quad (3.16)$$

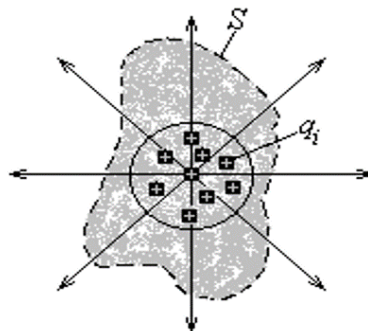


Рис.3.8

Якщо заряди рівномірно розподілені у деякому об'ємі V з густиною ρ_q , тоді

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_q dV, \quad (3.17)$$

де ρ_q – об'ємна густина заряду:

$$\rho_q = \frac{dq}{dV}. \quad (3.18)$$

Наведемо приклад використання теореми Остроградського-Гауса для розрахунку напруженості поля, яке утворене рівномірно зарядженою безмежною площиною (рис.3.9).

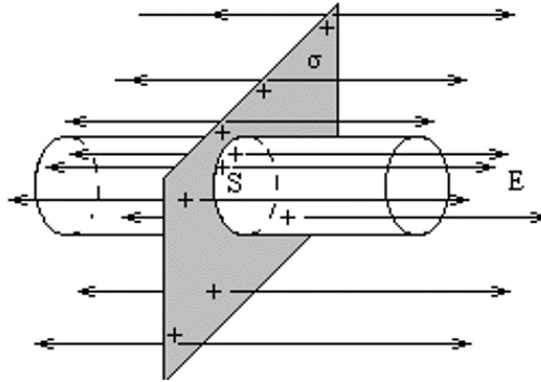


Рис.3.9

Нехай поверхнева густина заряду дорівнює:

$$\sigma = \frac{dq}{dS} \quad (3.19)$$

та має позитивний знак. Виділимо замкнену поверхню, що є циліндром з основами S паралельними безмежній площині. Оскільки крізь бокову поверхню потік дорівнює нулю, то результуючий потік дорівнює:

$$\Phi_E = ES + ES = 2ES. \quad (3.20)$$

Згідно з теоремою Остроградського-Гауса:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} q = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma S. \quad (3.21)$$

Тому, порівнюючи два останніх рівняння, одержуємо формулу для розрахунку поля зарядженої безмежної площини:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}. \quad (3.22)$$

Подібним чином можна довести наступні формули для розрахунку поля створеного іншими тілами:

– сферична поверхня навколо зарядженої кулі:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (3.23)$$

де r – відстань від центра кулі ($r \geq R$);

– сферична поверхня всередині зарядженої кулі де ($r \leq R$):

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r, \quad (3.24)$$

– тонкий циліндр (або нитка):

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}, \quad (3.25)$$

де τ – лінійна густина заряду.

3.1.5. Робота сил електростатичного поля.

Потенційний характер електростатичного поля

Одержимо формулу для розрахунку роботи сил електростатичного поля [1, 9, 13]. З уявлення про напруженість поля:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E}, \\ dA &= (\vec{F}d\vec{r}) = q(\vec{E}d\vec{r}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

тому

$$A = q \int (\vec{E}d\vec{r}). \quad (3.27)$$

Електричне поле, що утворене нерухомим точковим зарядом – центральне, тому повинно бути потенційним. Якщо заряд рухається вздовж замкненої траєкторії в такому полі, то, як відомо, робота сили в цьому випадку дорівнює нулю:

$$A = q \oint_L (\vec{E}d\vec{r}) = 0, \quad (3.28)$$

тобто

$$\oint (\vec{E}d\vec{r}) = 0. \quad (3.29)$$

Цей інтеграл називається *циркуляцією вектора напруженості електростатичного поля* для нерухомих зарядів. Одночасно, ця умова є достатньою щоб враховувати електричне поле потенційним, а кулонівську силу – консервативною. Внаслідок цього силові лінії \vec{E} розімкнуті.

Знайдемо формулу для потенційної енергії тіла в електростатичному полі. У потенційному полі робота, що здійснюється силами поля, призведе до змінювання потенційної енергії тіла E_n :

$$dA = q(\vec{E}d\vec{r}) = -dE_n. \quad (3.30)$$

Для системи зарядів згідно принципу суперпозиції:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum \vec{E}_i. \\ dW_n &= -q(\vec{E}_i d\vec{r}_i). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Напруженість поля, що утворене системою точкових зарядів:

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r^2},$$

тому:

$$dE_n = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} dr_i. \quad (3.32)$$

Інтегруючи останнє співвідношення, отримуємо:

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} + C. \quad (3.33)$$

Константа C залежить від початку відліку, тому зручно щоб енергія заряду q на нескінченності дорівнювала нулю. Тому остаточно формула для потенційної енергії електростатичного поля створеного системою зарядів набуває виразу:

$$E_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}. \quad (3.34)$$

3.1.6. Потенціал. Еквіпотенціальні поверхні. Напруженість, як градієнт потенціалу

Потенційна енергія електростатичного поля залежить від величини заряду, який взаємодіє з системою зарядів, що утворюють це поле [1, 9, 13]. Тому зручно запровадити деяку енергетичну характеристику електростатичного поля, яка б не

залежала від заряду, розташованого у даній точці поля. Така характеристика отримала назву потенціал.

Потенціалом електростатичного поля називається фізична величина, що дорівнює відношенню потенційної енергії пробного заряду, який розташовано у даній точці поля, до величини цього заряду:

$$\varphi = \frac{E_n}{q}. \quad (3.35)$$

Оскільки енергія, величина адитивна, то потенціал також має цю властивість:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i. \quad (3.36)$$

Розмірність потенціалу – Вольт (В). 1В – це потенціал такої точки поля, у якій заряд 1Кл володіє потенціальною енергією 1Дж.

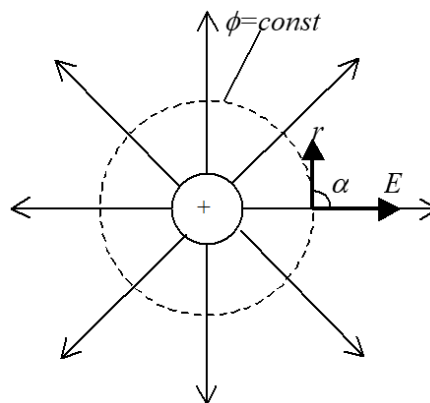


Рис.3.10

Для поля створеного точковим зарядом q потенціал дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (3.37)$$

Користуючись уявленням про потенціал, легко отримати формулу для роботи сил електростатичного поля під час переміщення заряду:

$$A_{12} = E_{n1} - E_{n2} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3.38)$$

У загальному випадку елементарна робота сил електростатичного поля:

$$dA = qd\varphi. \quad (3.39)$$

Як ми установили раніше, в потенціальному полі існує зв'язок між силою та градієнтом потенціальної енергії: $\vec{F} = -gradE_n$, але $\vec{F} = q\vec{E}$, тому

$$\vec{E} = -grad \frac{E_n}{q} = -grad\phi. \quad (3.40)$$

Знак “-“ означає, що вектор \vec{E} спрямовано у бік зменшення потенціалу.

Геометричне місце точок силового поля зі сталим потенціалом називається *еквіпотенціальною поверхнею*. Робота під час переміщення потенціалу вздовж еквіпотенціальної поверхні дорівнює нулю, оскільки напрямок кулонівської сили перпендикулярний до еквіпотенціальної поверхні:

$$A = qd\phi = qEdr \cos \alpha. \quad (3.41)$$

Оскільки $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $A=0$ (рис.3.10).

3.1.7. Вільні та зв'язані заряди. Провідники та діелектрики.

Типи діелектриків

Електричне поле існує не тільки у вакуумі, але й у певному середовищі, яке містить у собі заряди [1, 9, 13]. Заряди у речовині можуть бути зв'язані та вільні. *Зв'язані заряди* - це такі, які складають елементарні частинки речовини і не можуть вільно рухатися в об'ємі речовини, стикатись та обмінюватись зарядом один з одним. Якщо у такій речовині утворити електричне поле, то упорядкованого потоку руху зарядів не буде.

Вільні заряди можуть рухатись в об'ємі речовини вільно, стикатись й обмінюватись зарядами один з одним. Під дією зовнішнього електричного поля вільні заряди починають рухатися упорядковано, утворюючи потік, що називається *електричним струмом*.

Таким чином, типи речовин відносно реакції зовнішнього електричного поля можна поділити на: *діелектрики, що складаються зі зв'язаних зарядів; провідники, що мають вільний заряд і утворюють електричний струм*.

Розглянемо атом діелектрика, який, як відомо, складається з позитивного ядра та негативної електронної оболонки і в цілому є нейтральним.

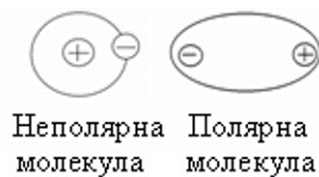


Рис.3.11

Молекула називається *неполярною*, якщо центр інерції позитивного й негативного зарядів співпадають. Якщо центри інерції цих зарядів не співпадають, то така молекула називається *полярною* (рис.3.11).

Основні типи діелектриків:

- неполярні діелектрики (гази: N_2 , O_2);
- полярні діелектрики (гази: CO , NH_3 , H_2O , рідини);
- іонні, які мають кристалічну решітку (солі);
- сегнетоелектрики (сегнетова сіль) – речовини, що мають доменну побудову, тобто існують цілі макроскопічні об'єми у середині речовини з певним зарядом.

3.1.8. Провідники в електричному полі. Електрична ємність провідника

Розглянемо дію електричного поля на провідник [1, 9, 13]. Вільні заряди, які є в провіднику, під дією зовнішнього поля можуть вільно пересуватися по об'єму провідника до його поверхні, доки не займуть рівноважного положення, за якого поле в середині провідника буде відсутнє (рис.3.12).

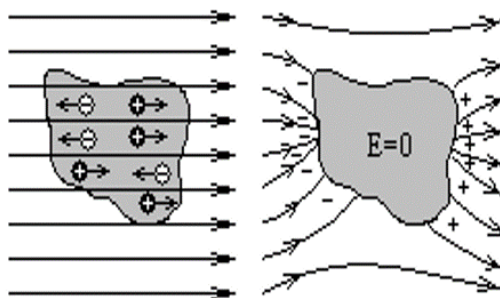


Рис.3.12

Явище перерозподілу поверхневих зарядів провідника у зовнішньому електростатичному полі називається *електростатичною індукцією*. Явище відсутності поля в середині провідника використовується для так званого електростатичного екранування в радіотехніці.

Оскільки поверхня провідника є екіпотенціальною поверхнею, то згідно з теоремою Остроградського-Гауса:

$$DdS = q = \sigma dS, \quad (3.42)$$

тобто вектор електричної індукції за модулем дорівнює поверхневій густині зміщених зарядів провідника. Саме тому вектор електричної індукції називають ще вектором електричного зміщення:

$$\sigma = D = \epsilon_0 \epsilon E. \quad (3.43)$$

З останнього рівняння знаходимо напруженість поля поблизу поверхні провідника:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (3.44)$$

Оскільки поверхня провідника є екіпотенціальною, то вектор напруженості електричного поля перпендикулярний до поверхні провідника.

Унаслідок особливості розподілу зарядів у провіднику існує пряма пропорційність між його потенціалом та зарядом. Для відокремленого провідника запроваджується поняття електричної ємності:

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (3.45)$$

Електроємність провідника – це величина, що дорівнює відношенню його заряду до його потенціалу. Електроємність показує, який заряд треба додати провіднику, щоб його потенціал збільшився на 1В. Розмірність електроємності – Фарада: 1Ф=1Кл/1В. Фарада дуже велика величина (заряджена куля діаметром $9 \cdot 10^9$ км має ємність 1Ф), тому на практиці використовують менші одиниці електроємності: 1мкФ= 10^{-6} Ф; 1пкФ= 10^{-9} Ф; 1нФ= 10^{-12} Ф.

Одержимо формулу для електроємності точкового заряду. Як відомо, потенціал точкового заряду дорівнює:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}.$$

Враховуючи, що $q = C\varphi$, одержуємо:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon r. \quad (3.46)$$

3.1.9. Конденсатори. Енергія зарядженого провідника.

Енергія електростатичного поля

Конденсатором називають систему із двох або більше провідників з розвинутими поверхнями, як правило подібними одна до одній [1, 9, 13]. Електроємність провідника зростає, якщо до нього наблизити інший. Оскільки електричне поле майже цілком зосереджене між зарядженими провідниками, то конденсатор можна застосовувати для накопичення заряду.

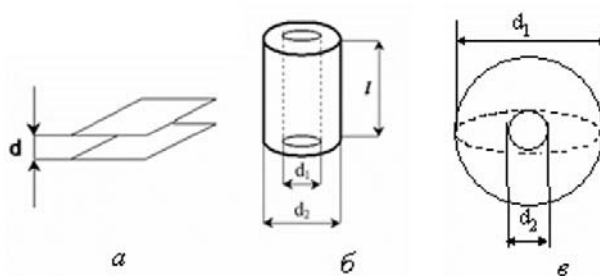


Рис.3.13

Конденсатори бувають різної конструкції. Наведемо формули для розрахунку електроємності основних типів конденсаторів (рис.3.13).

Плоский конденсатор (рис.3.13 а):	Циліндричний конденсатор (рис.3.13 б):	Сферичний конденсатор (рис.3.13 в):
$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d},$ де S - площа обкладин	$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{d_2}{d_1}}.$	$C = 2\pi\epsilon_0\epsilon \frac{d_1 d_2}{d_1 - d_2}.$

З конденсаторів, шляхом їх поєднання, виготовляють конденсаторні батареї. Електроємність такої батареї залежить від способу з'єднання конденсаторів.

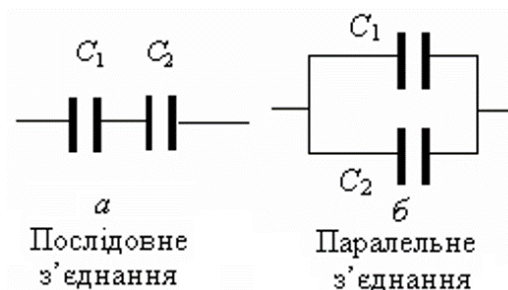


Рис.3.14

За умов послідовного з'єднання (рис.3.14 а):

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad (3.47)$$

за умов паралельного з'єднання (рис.3.14 б):

$$C = C_1 + C_2. \quad (3.48)$$

Користуючись уявленням електроємності, можна одержати формулу для енергії електричного поля будь-якого відокремленого провідника.

З визначення роботи сил електростатичного поля маємо:

$$dA = qd\varphi = C\varphi d\varphi, \quad (3.49)$$

тому

$$A = \int_0^\varphi C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}. \quad (3.50)$$

Оскільки робота дорівнює змінюванню потенційної енергії E_n , то

$$E_n = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2}. \quad (3.51)$$

Якщо підставити формулу ємності плоского конденсатора, то одержимо:

$$E_n = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d} \varphi^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} E^2 d^2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2 V}{2}, \quad (3.52)$$

де $V = Sd$ – об'єм плоского конденсатора.

Об'ємна густина енергії електричного поля згідно визначенню дорівнює:

$$\omega = \frac{W}{V}, \quad (3.53)$$

тому

$$\omega = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}. \quad (3.54)$$

Якщо згадати зв'язок напруженості з електричною індукцією, то остаточно отримаємо:

$$\omega = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2}. \quad (3.55)$$

Тобто, *об'ємна густина енергії електростатичного поля* дорівнює половині добутку вектора напруженості на вектор індукції.

3.2. Постійний електричний струм

3.2.1. Електричний струм. Електрорушійна сила. Напруга

Якщо в провіднику створити електричне поле, то носії заряду придуть в упорядкований рух: позитивні в напрямку поля, негативні в протилежну сторону [1, 9, 13]. Упорядкований рух зарядів називається *електричним струмом*. Його прийнято характеризувати силою струму – скалярною величиною, рівною заряду, який переноситься носіями через розглянуту поверхню (наприклад, через поперечний переріз провідника) в одиницю часу. Якщо за час dt переноситься заряд dq , то сила струму i по визначенню дорівнює

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (3.56)$$

Електричний струм може бути обумовлений рухом як позитивних, так і негативних носіїв. Перенос негативного заряду в одному напрямку еквівалентний переносу такого ж по величині позитивного заряду в протилежному напрямку. Якщо в провіднику рухаються носії обох знаків, причому за час dt через дану поверхню позитивні носії переносять заряд dq^+ в одному напрямку, а негативні dq^- у протилежному, то:

$$i = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt} \quad (3.57)$$

де dq^- – абсолютна величина негативного заряду.

За напрямок струму приймається напрямок, у якому переміщуються позитивні носії.

Носії заряду беруть участь у молекулярному тепловому русі i , отже, рухаються з деякою швидкістю v і під час відсутності поля. Але в цьому випадку через довільну площадку проходить в обидва боки в середньому однакова кількість носіїв будь-якого знака, так що сила струму (3.56) дорівнює нулю. При включенні поля на хаотичний рух носіїв зі швидкістю v накладається упорядкований рух зі швидкістю u . Таким чином, швидкість носіїв буде $v + u$. Оскільки середнє значення $\langle v \rangle$ дорівнює нулю, то середня швидкість носіїв дорівнює $\langle u \rangle$:

$$\langle v + u \rangle = \langle v \rangle + \langle u \rangle = \langle u \rangle. \quad (3.58)$$

Електричний струм може бути розподілений по поверхні, через яку він тече, нерівномірно. Більш детально електричний струм можна охарактеризувати за допомогою вектора густини струму j . Цей вектор чисельно дорівнює силі струму di через розташовану в даній точці перпендикулярну до напрямку руху носіїв площадку dS_{\perp} , віднесеної до величини цієї площадки:

$$j = \frac{di}{dS_{\perp}} \quad (3.59)$$

За напрямок j приймається напрямок вектора швидкості u^+ упорядкованого руху позитивних носіїв.

Поле вектора густини струму можна зобразити за допомогою ліній струму, що будуються так само, як і лінії струму в рідині, що плине.

Знаючи вектор густини струму в кожній точці провідника, можна знайти силу струму через будь-яку поверхню S :

$$i = \int_S j dS. \quad (3.60)$$

Нехай в одиниці об'єму міститься n^+ позитивних носіїв і n^- негативних. Абсолютна величина зарядів носіїв дорівнює відповідно e^+ і e^- . Якщо під дією поля носії набувають швидкості u^+ і u^- , то за одиницю часу через одиничну площадку пройде n^+u^+ позитивних носіїв, що перенесуть заряд $e^+n^+t^+$. Аналогічно негативні носії перенесуть заряд $e^-n^-t^-$. Таким чином, для густини струму отримаємо наступне вираження:

$$j = e^+n^+u^+ + e^-n^-u^- = \rho^+u^+ + \rho^-u^- \quad (3.61)$$

де ρ^+ і ρ^- – відповідно густина позитивних і негативних зарядів.

Струм, що не змінюється з часом, називається постійним. Ми будемо позначати його силу буквою I , зберігши для змінного струму позначення i . Очевидно, що

$$I = \frac{q}{t}, \quad (3.62)$$

де q — заряд, перенесений через розглянуту поверхню за кінцевий час t .

У СІ одиниця сили струму ампер (А) є основною. Її визначення буде дано пізніше. Одиниця заряду кулон визначається як заряд, що переноситься за 1 с через поперечний переріз провідника при силі струму в 1 А.

Якщо в провіднику створити електричне поле і не прийняти мір для його підтримки, то переміщення носіїв заряду приведе до того, що поле усередині провідника зникне і, отже, струм припиниться. Для того щоб підтримувати струм досить тривалий час, потрібно від кінця провідника з меншим потенціалом (носії заряду вважаються позитивними) безупинно відводити принесені сюди струмом заряди, а до кінця з більшим потенціалом φ_1 безупинно їх підводити (рис. 3.15). Іншими словами, необхідно здійснити круговорот зарядів, при якому вони рухалися б по замкнутому шляху. Оскільки циркуляція вектора напруженості електростатичного поля дорівнює нулю, то в замкнутому колі поряд з ділянками, на яких позитивні заряди рухаються у бік убавання, повинні матися ділянки, на яких перенос позитивних зарядів відбувається в напрямку зростання, тобто проти сил електростатичного поля (пунктирна частина кола на рис. 3.15).

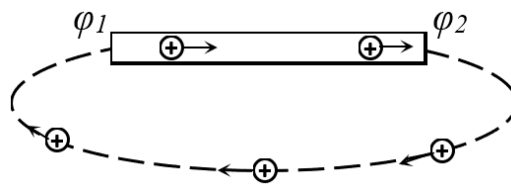


рис.3.15

Переміщення носіїв на цих ділянках можливе лише за допомогою сил неелектростатичного походження, які називаються *сторонніми силами*. Таким чином, для підтримки струму необхідні сторонні сили, що діють або на всьому протязі кола, або на окремих її ділянках. Вони можуть бути обумовлені хімічними процесами, дифузією носіїв заряду в неоднорідному середовищі або через границю двох різнорідних речовин, електричними (але не електростатичними) полями, що породжуються магнітними полями, які змінюються з часом.

Сторонні сили можна охарактеризувати роботою, яку вони чинять над зарядами, що переміщуються по колу. Величина, що дорівнює роботі сторонніх сил, діючих у колі чи на його ділянці, віднесеній до одиниці позитивного заряду, називається *електрорушійною силою* (е.р.с.) ε . Отже, якщо робота сторонніх сил над зарядом q дорівнює A , то за визначенням:

$$\varepsilon = \frac{A}{q} \quad (3.63)$$

Розмірність е.р.с. збігається з розмірністю потенціалу. Тому ε вимірюється в тих же одиницях, що і ϕ .

Сторонню силу F_{cm} , що діє на заряд q , можна представити у виді:

$$F_{cm} = E^* q \quad (3.64)$$

Векторну величину E^* називають напруженістю поля сторонніх сил. Роботу сторонніх сил над зарядом q на всьому протязі замкнутого кола можна виразити наступним чином:

$$A = \oint F_{CT} dl = q \oint E^* dl \quad (3.65)$$

Розділивши цю роботу на q , отримаємо е.р.с., що діє в колі:

$$\varepsilon = \oint E^* dl \quad (3.66)$$

Таким чином, е.р.с., що діє в замкнутому колі, може бути визначена як циркуляція вектора напруженості поля сторонніх сил.

Електрорушійна сила, що діє на ділянці 1-2 дорівнює:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 E^* dl \quad (3.67)$$

Крім сторонніх сил на заряд діють сили електростатичного поля:

$$F_e = Eq. \quad (3.68)$$

Отже, результуюча сила, що діє в кожній точці кола на заряд q , дорівнює:

$$F = F_e + F_{cm} = q(E + E^*) \quad (3.69)$$

Робота, що виконується цією силою над зарядом q на ділянці кола 1-2, визначається виразом:

$$A_{12} = q \int_1^2 E dl + q \int_1^2 E^* dl = q(\varphi_1 - \varphi_2) + q\varepsilon_{12} \quad (3.70)$$

Величина, яка чисельно дорівнює роботі, що виконується електростатичними і сторонніми силами при переміщенні одиничного позитивного заряду, називається спадом напруги чи просто напругою U на даній ділянці кола. Відповідно до формули (3.84)

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \quad (3.71)$$

За відсутності сторонніх сил напруга U збігається з різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$.

3.2.2. Закони постійного струму Ома, Джоуля-Ленца. Опір провідників. Потужність струму

Ом експериментально встановив закон, відповідно до якого сила струму, що тече по однорідному металевому провіднику, пропорційна спаду напруги U на провіднику [1, 9, 13]:

$$I = \frac{U}{R} \quad (3.72)$$

Однорідним називається провідник, у якому не діють сторонні сили. У цьому випадку, як ми бачили, напруга U збігається з різницею потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$, підтримуваної на кінцях провідника. Величина R називається *електричним опором* провідника. Одиницею опору є 1 Ом, який дорівнює опору такого провідника, у якому при напрузі в 1В тече струм силою в 1А.

Величина опору залежить від форми і розмірів провідника, а також від властивостей матеріалу, з якого він зроблений. Для однорідного циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (3.73)$$

де l – довжина провідника, S – площа його поперечного переріза, ρ – коефіцієнт, який залежить від властивостей матеріалу та називається *питомим електричним опором речовини*. Якщо $l=1$ і $S=1$, то R чисельно дорівнює ρ . У СИ ρ вимірюється в ом-метрах ($\text{Ом} \cdot \text{м}$).

Закон Ома можна записати в диференціальній формі. Виділимо уявно навколо деякої точки елементарний циліндричний об'єм (рис.3.16).

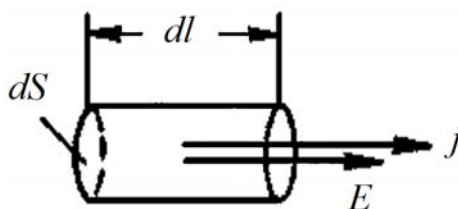


Рис.3.16

Через поперечний переріз циліндра тече струм силою $j dS$. Напруга, прикладена до циліндра, дорівнює $E dl$, де E – напруженість поля в даному місці. Опір циліндра, відповідно до формули (3.73), возьемо у вигляді $\rho \frac{l}{S}$. Підставимо ці значення у формулу (3.72), тоді:

$$j dS = \frac{dS}{\rho dl} E dl \quad \text{або} \quad j = \frac{1}{\rho} E \quad (3.74)$$

Носії заряду в кожній точці рухаються в напрямку вектора \vec{E} , тому напрямки векторів \vec{j} та \vec{E} збігаються. Таким чином, можна написати:

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (3.75)$$

де σ – *коефіцієнт електропровідності* або просто *провідність* матеріалу.

Формула (3.75) виражає закон Ома в диференціальній формі.

Здатність речовини проводити струм характеризується його питомим опором ρ або провідністю σ . Їх величина визначається хімічною природою речовини й умовами, зокрема температурою, якої вона знаходиться. Для більшості металів питомий опір росте з температурою приблизно по лінійному закону:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (3.76)$$

де ρ_0 – питомий опір за температури 0°C , t – температура за шкалою Цельсія, α – відносний температурний коефіцієнт опору.

При проходженні по провіднику струму провідник нагрівається. Джоуль і незалежно від нього Ленц знайшли експериментально, що кількість теплоти, яка виділяється в провіднику, пропорційна його опору, квадрату сили струму і часу:

$$Q = RI^2 t \quad (3.77)$$

Якщо сила струму змінюється с часом, то

$$Q = \int_0^t RI^2 dt \quad (3.78)$$

Співвідношення (3.77) і (3.78) виражають закон Джоуля – Ленця.

Закон (3.78) має наступне пояснення. Розглянемо однорідний провідник, до якого прикладена напруга U . За час dt через кожен перетин провідника проходить заряд $dq = Idt$. Це рівносильне тому, що заряд dq переноситься за час dt з одного кінця провідника в іншій. При цьому сили поля виконують роботу $dA = Udq = UI dt$. Заміняючи U відповідно до закону Ома через RI і інтегруючи дане рівняння, отримаємо для роботи електричних сил вираз, що збігається з виразом (3.78) для Q . Таким чином, нагрівання провідника відбувається за рахунок роботи, що виконується силами поля над носіями заряду.

Від формули (3.77), що визначає теплоту, яка виділяється у всьому провіднику, можна перейти до виразу, що характеризує виділення теплоти в різних місцях провідника. Виділимо в провіднику елементарний об'єм у вигляді циліндра. Відповідно до закону Джоуля – Ленца за час dt у цьому об'ємі виділиться теплота:

$$dQ = RI^2 dt = \rho \frac{dl}{dS} (jdS)^2 dt = \rho j^2 dV dt \quad (3.79)$$

де $dV = dS dl$ – величина елементарного об'єму.

Кількість теплоти dQ , віднесена до одиниці часу й одиниці об'єму, називається *питомою потужністю струму* w . З (3.79) одержуємо:

$$w = \rho j^2 \quad (3.80)$$

Скориставшись співвідношенням (3.75) між \vec{j} , \vec{E} , ρ і σ , формулі (3.80) можна надати наступний вид:

$$w = \sigma E^2 \quad (3.81)$$

Формули (3.80) і (3.81) виражають закон Джоуля – Ленця в диференціальній формі. Щоб, виходячи з них, отримати кількість теплоти, яка виділяється у всьому провіднику за час t , необхідно проінтегрувати w по об'єму провідника в деякий момент часу t , а потім отриманий вираз проінтегрувати за часом t :

$$Q = \int_0^t dt \int_V \rho j^2 dV \quad (3.82)$$

Закон Ома у виді (3.82) справедливий для однорідної ділянки кола, тобто такої ділянки, на якій не діє електрорушійна сила. Щоб отримати вираження закону Ома для неоднорідної ділянки кола, будемо виходити з закону збереження енергій. Нехай на кінцях ділянки підтримується різниця потенціалів $\varphi_1 - \varphi_2$ (рис.3.17).

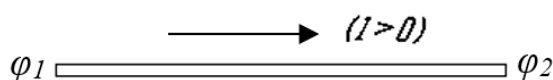


Рис.3.17

Е.р.с., що діє на ділянці, позначимо ε_{12} . Задавши визначеним напрямком (наприклад, позначеним на рис.3.17 стрілкою), струм I і е.р.с. ε_{12} можна розглядати їх як алгебраїчні величини. Так будемо вважати позитивним, якщо він тече в напрямку, зазначеному стрілкою, і негативним при протилежному напрямку. Аналогічно е.р.с. будемо вважати позитивною, якщо вона діє в напрямку стрілки (це значить, що над позитивним зарядом, що переміщається в цьому напрямку, сторонні сили виконують позитивну роботу), і негативною, якщо вона діє в протилежну сторону. Якщо провідники, що утворюють ділянку кола – нерухомі, єдиним результатом проходження струму буде нагрівання провідників. Тому робота всіх сил (електростатичних і сторонніх), виконана над носіями заряду, повинна дорівнювати теплоті, яка виділяється $dA = dQ$. За час dt по провіднику переноситься заряд $dq = Idt$. Згідно (3.84) робота, виконана над цим зарядом, дорівнює:

$$dA = \varepsilon_{12}dq + (\varphi_1 - \varphi_2)dq. \quad (3.83)$$

За час dt виділяється теплота:

$$dQ = I^2 R dt = IR(Ids) = IRdq. \quad (3.84)$$

Прирівнюючи ці два вираження і скорочуючи на dq , отримаємо:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12} \quad (3.85)$$

звідки

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R} \quad (3.86)$$

Формули (3.85) і (3.86) виражають закон Ома для неоднорідної ділянки кола. При $\varepsilon_{12} = 0$ формула (3.86) переходить у вираження (3.72) закону Ома для однорідної ділянки кола. Припустивши в (3.86) $\varphi_1 = \varphi_2$, отримаємо вираження закону Ома для замкнутого кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R} \quad (3.87)$$

де ε – е.р.с, що діє в колі; R – сумарний опір усього кола.

У диференціальній формі закон Ома за наявності сторонніх сил запишеться наступним чином:

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^*) \quad (3.88)$$

3.2.3. Розгалужені електричні кола. Правила Кірхгофа

Розрахунок розгалужених ланцюгів значно спрощується, якщо скористатися правилами, сформульованими Кірхгофом [1, 9, 13]. Цих правил два.

Перше з них відноситься до вузлів кола. *Вузлом* називається точка, у якій сходиться більш ніж два провідники (рис. 3.18).

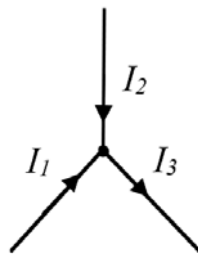


Рис.3.18

Струм, що тече до вузла, має один знак (плюс чи мінус), що тече від вузла – протилежний знак (мінус чи плюс).

Перше правило Кірхгофа: *алгебраїчна сума струмів, що сходяться у вузлі, дорівнює нулю:*

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad (3.89)$$

Справедливість цього твердження впливає з наступних висновків. Якби алгебраїчна сума струмів була відмінна від нуля, у вузлі відбувалося б нагромадження або нестача заряду, що у свою чергу приводило б до зміни

потенціалу вузла і зміні поточних у колі струмів. Тому, щоб струми в колі були постійними, повинна виконуватися умова (3.89).

Рівняння (3.89) можна написати для кожного з N вузлів кола. Однак незалежними є тільки $N - 1$ рівняння, N -те буде наслідком з них.

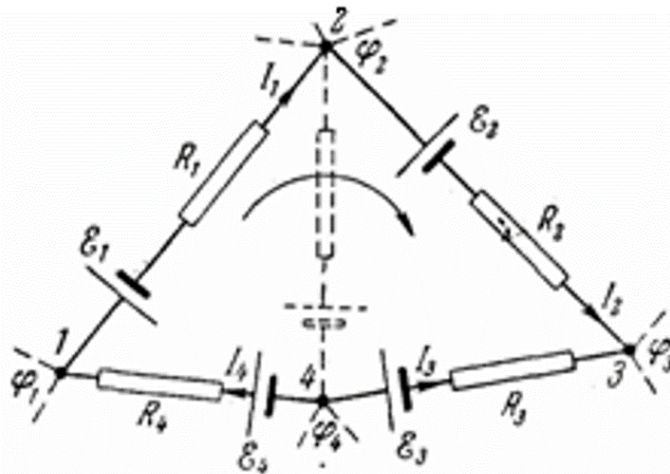


Рис.3.19

Виділимо подумки в розгалуженому колі довільний замкнутий контур (див. контур 1–2–3–4–1 на рис.3.19). Задамо напрямок обходу (наприклад, за годинниковою стрілкою, як зазначено на рисунку) і застосуємо до кожного з нерозгалужених ділянок контуру закон Ома:

$$\begin{aligned} I_1 R_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1; \\ I_2 R_2 &= \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2; \\ I_3 R_3 &= \varphi_3 - \varphi_4 + \varepsilon_3; \\ I_4 R_4 &= \varphi_4 - \varphi_1 + \varepsilon_4. \end{aligned}$$

При додаванні цих виражень потенціали скорочуються і виходить рівняння:

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j, \quad (3.90)$$

яке виражає друге правило Кірхгофа.

Друге правило Кірхгофа: алгебраїчна сума добутків сил струму на відповідні значення опорів дорівнює алгебраїчній сумі е.р.с. в контурі.

Рівняння (3.90) може бути складене для всіх замкнутих контурів, які можна виділити в даному розгалуженому колі, але незалежними будуть тільки рівняння для тих контурів, які не можна одержати накладенням інших контурів один на одного.

Так, наприклад, для кола, зображеного на рис.3.20, можна скласти три рівняння:

1. для контуру 1–2–3–6–1,
2. для контуру 3–4–5–6–3,
3. для контуру 1–2–3–4–5–6–1.

Останній контур виходить накладенням перших двох, отже, зазначені рівняння не будуть незалежними. У якості незалежних можна взяти будь-які два рівняння з трьох.

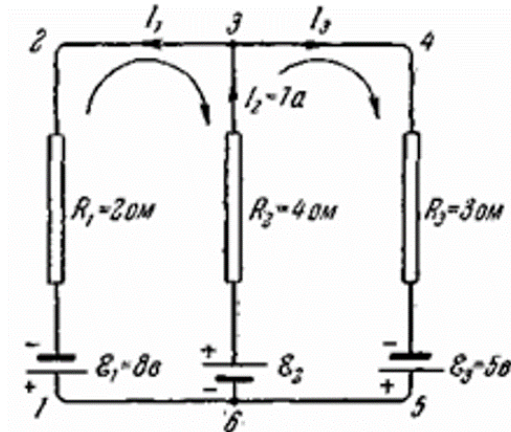


Рис.3.20

При складанні рівнянь другого правила Кірхгофа струмам і е.р.с. потрібно приписувати знаки відповідно до обраного напрямку обходу. Наприклад, струм I_1 на рис.3.20 потрібно вважати негативним, тому що він тече назустріч обраному напрямку обходу. Е.р.с. ε_1 також потрібно приписати знак «-», тому що вона діє в напрямку, протилежному напрямку обходу, і т.д.

Напрямки обходу в кожному з контурів можна обирати зовсім довільно і незалежно від вибору напрямків в інших контурах. При цьому може статися, що той самий струм або та сама е.р.с. увійде в різні рівняння з різними знаками (так виходить зі струмом I_2 на рис.3.20 при зазначених напрямках обходу в контурах). Це, однак, не має ніякого значення, тому що зміна напрямку обходу викликає лише зміну всіх знаків у рівнянні (3.90) на зворотні.

Число незалежних рівнянь, складених відповідно до першого і другого правил Кірхгофа, виявляється рівним числу різних струмів, що течуть у розгалуженому колі. Тому, якщо е.р.с. і опори для всіх нерозгалужених ділянок задані, то можуть бути обчислені всі струми. Можна вирішити і задачі іншого роду, наприклад, знайти е.р.с., які потрібно включити в кожному з ділянок кола, щоб одержати при заданих опорах потрібні струми.

3.2.4. Потужність, коефіцієнт корисної дії джерела струму

Електричний ланцюг складається, як правило, із джерела струму, проводів і споживача струму чи навантаження. Кожний з цих елементів кола має опір [1, 9, 13]. Опір проводів, що підводять, зазвичай малий, тому значеннями опору проводів нехтують. Відповідно до формули (3.87) струм у колі:

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R} \quad (3.91)$$

де r – опір джерела струму; R – опір навантаження.

Напруга на навантаженні (що збігається з напругою на затисках е.р.с.)

$$U = IR = \frac{\varepsilon R}{r + R} \quad (3.92)$$

менше ε . При $R \rightarrow \infty$ (тобто коли коло розімкнуте) U робиться рівним ε . Таким чином, напруга на затисках розімкнутого джерела струму дорівнює його е.р.с. Застосувавши формулу (3.70) до замкнутого кола, отримаємо, що робота, яка виконується над зарядом dq , який переноситься уздовж кола, дорівнює

$$dA = \varepsilon dq \quad (3.93)$$

Розділивши роботу dA на час dt , за який вона виконується, отримаємо потужність, що розвивається джерелом е.р.с.:

$$P = \frac{dA}{dt} = \varepsilon \frac{dq}{dt} = \varepsilon I \quad (3.94)$$

Таким чином, потужність, що розвивається джерелом струму, дорівнює

$$P = \varepsilon I \quad (3.95)$$

Підставивши в цю формулу значення струму (3.91), отримаємо повну потужність P , яка виділяється у всьому колі,

$$P = \frac{\varepsilon^2}{r + R} \quad (3.96)$$

У навантаженні виділяється тільки частина цієї потужності:

$$P_n = I^2 R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)^2} R = \frac{\varepsilon^2}{(r + R)} \cdot \frac{R}{(r + R)}, \quad (3.97)$$

яку назвають корисною потужністю. Інша потужність витрачається в джерелі струму (і проводах) і виявляється марною.

Відношення корисної потужності до всієї потужності, що розвивається е.р.с. у колі, визначає коефіцієнт корисної дії (к.к.д.) джерела струму:

$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{R}{r + R}. \quad (3.98)$$

З цієї формули випливає, що к.к.д. буде тим більше, чим більше опір навантаження R у порівнянні з опором джерела r , тому опір джерела прагнуть робити як можна меншим.

3.3. Магнітне поле у вакуумі

3.3.1. Магнітне поле. Магнітна індукція

Розглядаючи електропровідність твердих, рідких і газоподібних тіл, ми розглядали процеси, що протікають усередині самих тіл [1, 9, 13]. Однак цим не обмежуються явища, зв'язані з проходженням електричного струму. Експерименти показують, що навколо провідників зі струмом і деяких тіл (в основному твердих) існує силове поле – яке називається *магнітним*.

Це поле легко виявляється по силовій взаємодії провідників зі струмом, зарядів що рухаються і постійних магнітів.

Відомо, що намагнічені тіла будь-якої форми мають різнойменні полюси – південний і північний. Одноієнні полюси відштовхуються, різнойменні – притягуються. «Географічна» термінологія в назві полюсів заснована на тому, що намагнічена стрілочка орієнтується в магнітному полі Землі – північ, південь. Магнітне поле Землі, обумовлене процесами, що протікають у рідкому металевому ядрі Землі.

З дослідів також відомо, що на нерухомі заряди з боку магнітного поля немає силового впливу. Узагальнення проведених експериментів доводять наступне:

Навколо будь-якого заряду, що рухається, існує магнітне поле. Магнітне поле діє на заряди, які рухаються, при цьому не важливо яким є цей рух: струм провідності, конвекційний струм або рух одиночних зарядів.

Початок дослідженням властивостей магнітного поля було покладено датським вченим Х. Ерстедом (1820р.).

Для вивчення властивостей магнітного поля у вакуумі, як і будь-якого іншого силового поля, необхідно вибирати деяке тіло чи систему тіл, які взаємодіють з даним силовим полем.

Вважається, що елементарного речовинного носія магнітного поля (аналогічного до електричного заряду) не існує. Зазвичай у якості пробника використовують замкнутий контур (рамка малих розмірів) з визначеним струмом (рис.3.21).

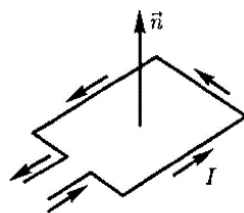


Рис.3.21

Орієнтація контуру в просторі характеризується напрямком нормалі до площини контуру, зв'язаної з напрямком струму в ньому правилом правого гвинта. Таку нормаль будемо вважати позитивною.

При внесенні контуру в магнітне поле виявляється, що останнє чинить силову дію, що орієнтує контур, установлюючи його в поле позитивною нормаллю у певному напрямку. Вважається, що напрямок позитивної нормалі контуру зі струмом збігається з напрямком силових ліній поля.

Якщо контур повернути так, що напрямок нормалі не збігається з напрямком поля, то виникне обертальний момент, який прагне повернути контур у рівноважне положення. Величина моменту залежить від кута між нормаллю і напрямком поля, досягаючи найбільшого значення при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Обертальний момент рамки залежить від сили струму I і від площі S і не залежить від форми рамки. Використовуючи аналогію з поведінням диполя в електричному полі, уведемо поняття магнітного моменту контуру, як

$$p_m = I \cdot S \quad (3.99)$$

Крім площі і сили струму контур характеризується також орієнтацією нормалі у просторі, тому магнітний момент варто розглядати, як вектор, що збігається з напрямком позитивної нормалі.

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n} \quad (3.100)$$

Якщо вносити пробні контури з різним p_m , у ту ж саму точку поля, то легко знайти, що силова характеристика поля, що визначається як частка максимального обертаючого моменту M_{\max} до магнітного моменту контуру, буде сталою. Дане співвідношення є силовою характеристикою магнітного поля та називається *магнітною індукцією*:

$$B = \frac{M_{\max}}{p_m} \quad (3.101)$$

Вектор \vec{B} збігається з напрямком позитивної нормалі до контуру при його рівноважній орієнтації.

Графічно правила побудови силових ліній магнітної індукції \vec{B} збігаються з правилами побудови силових ліній для електричного поля, а вектора \vec{B} і \vec{E} є аналогічними за своїм фізичним змістом для даних силових полів.

3.3.2. Закон Біо-Савара-Лапласа

Вивчаючи поля, що утворені струмами різної форми, французькі вчені Ж.Біо (1774-1862р.) і Ф.Савар (1791-1841) визначили, що магнітна індукція у всіх випадках пропорційна силі струму і залежить від відстані до точки, у якій визначалося поле [1, 9, 13]. Інший французький вчений і математик Лаплас узагальнив ці експерименти і, застосувавши принцип суперпозиції для векторів магнітної індукції, довів, що вектор \vec{B} може бути обчислений, як векторна сума полів, створюваних окремими елементарними ділянками струму в даній точці простору (рис.3.22). Тобто:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i = \int d\vec{B} \quad (3.102)$$

де $d\vec{B}$ – магнітна індукція для елемента струму довжиною dl .

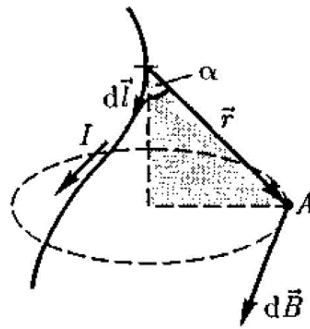


Рис.3.22

Лапласом отримана формула (для вакууму):

$$d\vec{B} = k \frac{i [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{r^3}, \quad (3.103)$$

де k – коефіцієнт пропорційності, що залежить від вибору системи одиниць вимірювання; $d\vec{l}$ – вектор, який дорівнює по модулю елементарній ділянці струму і співпадає за напрямком з напрямком струму I ; \vec{r} – радіус вектор, проведений від ділянки $d\vec{l}$ в точку, де визначається \vec{B} .

У системі одиниць СІ:

$$k = \frac{\mu_0}{4\pi}, \quad (3.104)$$

де $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ – магнітна постійна (Гн/м).

Тоді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi r^3} [d\vec{l} \cdot \vec{r}]. \quad (3.105)$$

Розмірність: $[B]_{SI} = Tл = \frac{H}{A \cdot м} = \frac{H \cdot м}{A \cdot м^2}$.

Вектор $d\vec{B}$ перпендикулярний площині, у якій знаходяться $d\vec{l}$ і \vec{r} , а напрямком $d\vec{B}$ знаходиться за правилом правого гвинта: поступальний рух правого гвинта збігається з напрямком струму, а напрямком обертання голівки гвинта - з напрямком $d\vec{B}$. Модуль $d\vec{B}$ визначається за формулою:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot dl \cdot \sin \alpha, \quad (3.106)$$

де α – кут між $d\vec{l}$ та \vec{r} .

3.3.3. Застосування закону Біо-Савара-Лапласа до розрахунку магнітного поля прямолінійного провідника зі струмом і поля кругового струму

Розглянемо прямолінійний нескінченний провідник, який розміщено у вакуумі та по якому тече струм I (рис.3.23) [1, 9, 13].

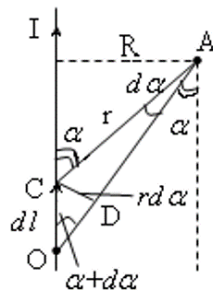


Рис.3.23

Визначимо \vec{B} в точці А, що знаходиться на відстані R від провідника. Усі $d\vec{B}$, створені будь-якою ділянкою будуть спрямовані в один бік, тому векторне додавання можна замінити скалярним. Виберемо елементарну ділянку $d\vec{l}$. Початок вектора $d\vec{l}$ з \vec{r} утворює кут α , а кінець $\alpha + d\alpha$, при цьому з рисунку видно, що:

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; dl = \frac{CD}{\sin \alpha} \Rightarrow CD = r \cdot d\alpha.$$

Звідки

$$\frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha} = dl \text{ або } dl = \frac{R}{\sin^2 \alpha} \cdot d\alpha.$$

Тоді

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \cdot \sin \alpha = \frac{I\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{R \cdot d\alpha}{\sin^2 \alpha \cdot R^2} \cdot \sin \alpha \cdot \sin^2 \alpha = \frac{I\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{d\alpha \cdot \sin \alpha}{R}; \quad (3.107)$$

Результуюча величина:

$$B = \int dB = \frac{I\mu_0}{4\pi R} \int_0^\pi \sin d\alpha = -\frac{I\mu_0}{4\pi R} \cdot \cos \alpha \Big|_0^\pi = -\frac{I\mu_0}{4\pi R} (-1 - 1) = \frac{2I\mu_0}{4\pi R} = \frac{I\mu_0}{2\pi R},$$

ТАКИМ ЧИНОМ

$$B = \frac{I\mu_0}{2\pi R}, \quad (3.108)$$

Розглянемо коловий струм:

1. Магнітне поле у центрі колового струму радіусу R (рис.3.24).

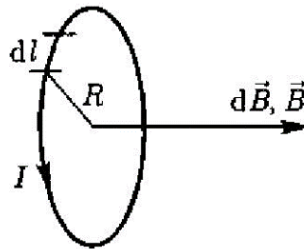


Рис.3.24

Усі $d\vec{B}$ збігаються з позитивною нормаллю, тому векторне додавання замінюємо на скалярне. Усі dl знаходяться на відстані $r = R$.

Тому:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{R^2}, \quad \alpha = \widehat{\vec{r}d\vec{l}} = \frac{\pi}{2}; \quad \sin \alpha = 1.$$

Тоді із закону Біо-Савара-Лапласа отримаємо:

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot dl = \frac{2\pi R \mu_0 I}{4\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2R},$$

таким чином, магнітне поле у центрі колового струму дорівнює:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \quad (3.109)$$

2. Магнітне поле на вісі колового струму у точці, розташованій на відстані x (рис.3.25 а).

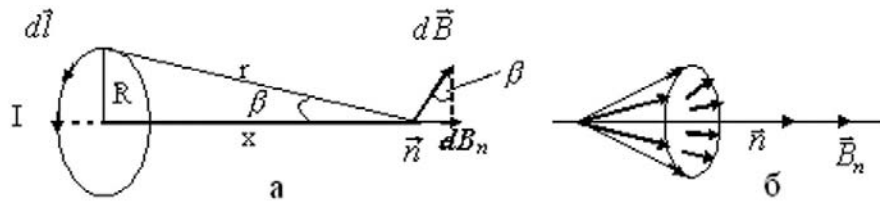


Рис.3.25

Вектори $d\vec{B}$ перпендикулярні до площин, у яких лежать $d\vec{l}$ і \vec{r} , таким чином вони утворюють віяло (рис.3.25 б). Результатом їх суми буде проекція на нормаль, тому векторну суму можна замінити скалярною.

$$dB_n = dB \cdot \sin \beta = dB \frac{r}{R}; \quad r = \sqrt{R^2 + x^2}; \quad \sin \beta = \frac{R}{r}$$

Тому

$$dB_n = dB \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}},$$

оскільки

$$\alpha = \widehat{\vec{r}d\vec{l}} = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \alpha = 1,$$

тоді із закону Біо-Савара-Лапласа отримаємо:

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \cdot dl.$$

Тоді:

$$dB_n = \frac{\mu_0 IR \cdot dl}{4\pi(R^2 + x^2) \cdot \sqrt{R^2 + x^2}};$$

інтегруючи, отримаємо:

$$B_n = \int dB_n = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{2\pi R^2 \mu_0 I}{4\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (3.110)$$

Для $x = 0$, тобто для магнітного поля в центрі колового струму, формула (3.110) переходить у формулу (3.109)

Якщо врахувати те, що $2\pi R^2 I = 2IS = 2p_m$, і з огляду на те, що $x \gg R$, то (3.110) буде мати вигляд:

$$B = \frac{2\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{x^3}. \quad (3.111)$$

Оскільки вектори \vec{B} і \vec{p}_m мають однаковий напрямок, то:

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2\vec{p}_m}{x^3}, \quad (3.112)$$

Тобто, величина магнітної індукції убуває як x^3 .

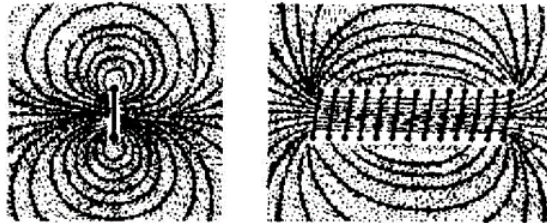


Рис.3.26

Лінії магнітної індукції колового струму можна виявити за допомогою металевих ошурків, які намагнічуються в магнітному полі та ведуть себе як магнітні стрілки (Рис.3.26).

3.3.4. Вихровий характер магнітного поля. Циркуляція вектора магнітної індукції для магнітного поля у вакуумі

Циркуляцією вектора \vec{B} у заданому замкнутому контурі називається інтеграл [1, 9, 13]:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl \quad (3.113)$$

де $d\vec{l}$ – вектор елементарної довжини контура, спрямований вздовж обхода контура; $B_l = B \cos \alpha$ складова вектора \vec{B} в напрямку доічної до контура; α – кут між \vec{B} та $d\vec{l}$.

Закон повного струму для магнітного поля в вакуумі (теорема про циркуляцію вектора \vec{B}): *Циркуляція вектора \vec{B} по довільному замкнутому контуру дорівнює добутку магнітної постійної μ_0 на алгебраїчну суму струмів, які охоплюються струмом:*

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl = \mu_0 \sum_{i=1}^k I_i \quad (3.114)$$

де k – кількість провідників зі струмом, які охоплюються контуром L довільної форми.

Кожний струм враховується стільки разів, скільки разів він охоплюється контуром. Позитивним вважається струм, який пов'язаний з контуром

правогвинтовою системою, струм протилежного напрямку вважається негативним. Наприклад, для системи токів зображеної на рис.3.27:

$$\sum_{i=1}^n I_i = I_1 + 2 \cdot I_2 - 0 \cdot I_3 - I_4.$$

Порівнюючи вирази (3.29) та (3.114) для циркуляції векторів \vec{E} та \vec{B} , видно, що між ними є принципова різниця. Циркуляція вектора \vec{E} електростатичного поля завжди дорівнює нулю, тобто електростатичне поле є потенціальним. Циркуляція вектора \vec{B} відрізняється від нуля, таке поле називається вихровим.

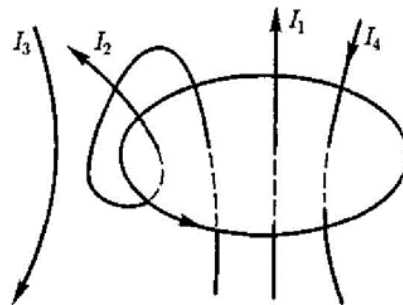


Рис.3.27

Для вихрових полів характерно, що їх силові лінії замкнуті. Введемо поняття магнітний потік через довільну замкнену поверхню:

$$d\Phi_B = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B_n dS = B \cdot S \cdot \cos\left(\hat{\vec{B}} \hat{\vec{n}}\right), \quad (3.115)$$

де dS вибирається достатньо малою, щоб \vec{B} вважати однорідним, тоді \vec{n} – або зовнішні, або внутрішні нормалі до поверхні (лінії \vec{B} то входять, то виходять з dS) й у результаті:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B_n \cdot dS = 0 \quad (3.116)$$

Це є аналітичний запис теореми Остроградського-Гауса для магнітного поля: *Магнітний потік крізь довільну замкнену поверхню дорівнює нулю.*

Ця теорема доводить, що не існує магнітних «зарядів» (мас), на яких би закінчувалися і починалися лінії магнітного поля.

3.3.5. Магнітне поле заряду, що рухається.

Відносний характер магнітного поля

Відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа магнітне поле у вакуумі [1, 9, 13]:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I [d\vec{l} \cdot \vec{r}]}{4\pi r^3}$$

Якщо рухається одиночний заряд, то еквівалентний струм I можна представити у виді:

$$I = \frac{dq}{dt},$$

нехай величина заряду Q , тоді

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 Q \left[\frac{d\vec{l}}{dt}, \vec{r} \right]}{4\pi r^3}, \quad (3.117)$$

оскільки заряд одиночний, то $d\vec{B} = \vec{B}$ і

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q [\vec{v}, \vec{r}]}{4\pi r^3} \quad (3.118)$$

Тобто поле, створюване зарядом у точці r , визначається швидкістю \vec{v} його руху і напрямками радіуса вектора \vec{r} . З того, що швидкість має відносний характер, то і магнітне поле відносне.

3.3.6. Сила, що діє на провідник зі струмом у магнітному полі. Закон Ампера.

Взаємодія паралельних струмів

Електричні струми взаємодіють між собою через існування магнітного поля [1, 9, 13]. Паралельні прямі струми однакових напрямків притягуються один до одного, а протилежно спрямовані – відштовхуються.

Відповідно до закону Ампера, на елемент струму, що знаходиться в магнітному полі діє сила:

$$d\vec{F} = I [d\vec{l}, \vec{B}], \quad (3.119)$$

або у скалярній формі:

$$dF = IBdl \sin \alpha, \quad (3.120)$$

де α – кут між \vec{B} та.

Сила \vec{F} перпендикулярна до площини, у якій лежать \vec{B} і $d\vec{l}$. Зручно визначати її напрямок за допомогою правила «лівої руки». Якщо ліву руку розташувати так, щоб вектор \vec{B} пронизував долоню, а чотири складені разом пальці були спрямовані уздовж струму, то напрямок великого пальця, відведеного на 90° , буде збігатися з напрямком сили.

Розглянемо паралельні провідники зі струмом. Кожний з них знаходиться у полі, що утворено другим провідником. Наприклад, другий провідник у полі першого:

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a},$$

де a – відстань між провідниками.

Тоді на другий провідник діє сила:

$$dF = \frac{I_2 \mu_0 I_1}{2\pi a} \cdot dl \cdot \sin \alpha; \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

На одиницю довжини провідника діє сила:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi a} \cdot I_1 I_2 = \frac{2\mu_0 I_1 I_2}{4\pi a}. \quad (3.121)$$

Дана формула є підставою для вимірювання одиниці сили струму:

Один ампер – сила постійного струму, при проходженні якого по двом провідниках нескінченної довжини, розташованих у вакуумі на відстані 1 м один від одного, викликає силу взаємодії між провідниками рівну $2 \cdot 10^{-7}$ Н на кожен метр довжини.

Звідси величина μ_0 :

$$2 \cdot 10^{-7} = \frac{2\mu_0 \cdot 1 \cdot 1}{4\pi \cdot 1}; \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}. \quad (3.122)$$

3.3.7. Контур зі струмом у магнітному полі. Робота з переміщення провідника зі струмом у магнітному полі

Припустимо, що у полі \vec{B} переміщається провідник зі струмом (рис.3.28) [1, 9, 13]. $\alpha = \vec{B} \hat{n}$, поле однорідне

$$F = IBl.$$

При цьому сила на шляху dS виконує роботу:

$$dA = F \cdot dx = IBl \cdot dx = IB \cdot dS ,$$

де dS – елементарна площа, що утвориться при русі провідника, тобто

$$dA = IB \cdot dS = I \cdot d\Phi \quad (3.123)$$

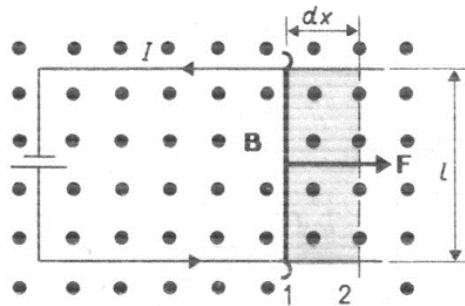


Рис.3.28

Робота з переміщення провідника зі струмом в магнітному полі дорівнює добутку сили струму на магнітний потік, що перетинається провідником, який рухається.

3.3.8. Дія магнітного поля на заряд, що рухається. Сила Лоренца.

Рух зарядженої частинки у магнітному полі

Очевидною причиною дії магнітного поля на провідник зі струмом, є те, що у провіднику відбувається упорядкований рух електронів [1, 9, 13]. Тобто на заряд, що рухається, у магнітному полі діє сила.

Користуючись законом Ампера запишемо:

$$d\vec{F} = [I \cdot d\vec{l} \cdot \vec{B}] .$$

Виходячи з того, що $I \cdot d\vec{l} = N \cdot e \cdot \vec{v}$ можна довести:

$$d\vec{F} = N \cdot e \cdot [\vec{v}, \vec{B}] ,$$

а для одного заряду

$$\vec{F} = e[\vec{v}, \vec{B}] = q[\vec{v}, \vec{B}] . \quad (3.124)$$

У скалярній формі

$$F_L = qvB \cdot \sin \alpha ; \quad \alpha = \widehat{\vec{v}, \vec{B}} \quad (3.125)$$

Ця сила названа на честь видатного фізика Лоренца.

Сила Лоренца спрямована перпендикулярно до площини, де знаходяться вектори \vec{B} і \vec{v} (рис.3.29). Якщо \vec{B} і \vec{v} за напрямком збігаються, то сила F_L не діє.

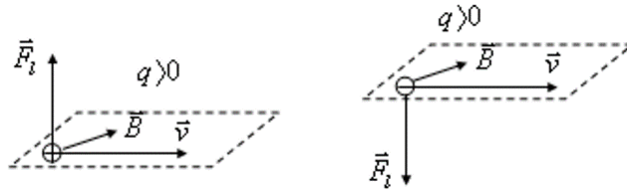


Рис.3.29

Оскільки сила Лоренца завжди перпендикулярна швидкості руху заряду, то вона роботи не виконує, тобто змінити енергію поступального руху заряду не можна. Однак сила Лоренца є причиною нормальної складової прискорення, тобто викривляє траєкторію руху частинки, без зміни кінетичної енергії її поступального руху.

Якщо заряд рухається зі швидкістю $\vec{v} \perp \vec{B}$, то сила Лоренца виконує роль доцентрової сили, тобто:

$$F_L = qvB = m \cdot a_n = \frac{mv^2}{R}$$

Тоді радіус траєкторії:

$$R = \frac{mv}{qB}, \quad (3.126)$$

а період обертання заряду:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi mv}{vqB} = 2\pi \frac{m}{qB} \quad (3.127)$$

Тобто і R , і T визначаються $\frac{m}{q}$ – питомим зарядом зарядженої частинки.

Якщо частинка влітає в поле під кутом $\alpha = \vec{v} \hat{=} \vec{B}$ (рис.3.30), то її траєкторія буде представляти собою гвинтову траєкторію, при цьому:

$$v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha,$$

$$v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha.$$

Тоді

$$R = \frac{mv}{qB} \cdot \sin \alpha,$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

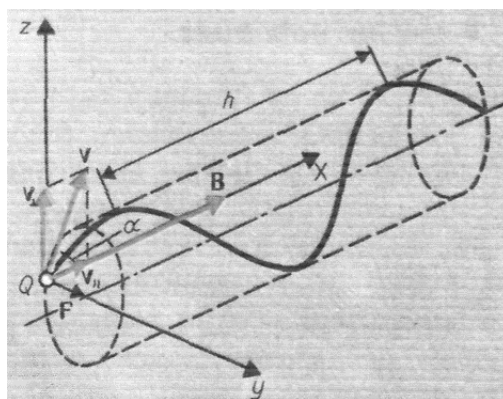


Рис.3.30

За час T частинка переміститься уздовж напрямку її руху на відстань h :

$$h = v_{\parallel} \cdot T = v \cdot \cos \alpha \cdot T = \frac{2\pi m \cdot v \cdot \cos \alpha}{qB} = 2\pi \frac{mv}{qB}. \quad (3.128)$$

Ці співвідношення використовують у практиці (наприклад у телевізорах) та у науці, де вивчають поведінку та фізичні характеристики елементарних заряджених частинок.

3.4. Електромагнітна індукція

3.4.1. Явище електромагнітної індукції. Закони Фарадея і Ленца

У попередніх розділах вивчалися властивості статичних, незмінних за часом електричних і магнітних полів. Переходячи в область динамічних електромагнітних явищ, ми зустрічаємося з цілим рядом якісно нових властивостей полів і їх закономірностей. В основі електродинаміки змінних полів лежить фундаментальний закон електромагнітної індукції, дослідно відкритий Фарадеєм у 1831р. [1, 9, 13]. Суть цього закону полягає у виникненні струму в довільному замкненому провідному контурі при зміні магнітного потоку, що пронизує цей контур.

Відкриття зв'язку між електрикою та магнетизмом стало визначною подією в історії розвитку електромагнетизму, оскільки ці явища раніше вважались абсолютно взаємозалежними.

Згадаємо, що спочатку Ерстед у 1820 р. відкрив що навколо провідників зі струмом виникає магнітне поле. Результати цих досліджень стали основою припущення, що й електричне поле можна одержати за рахунок магнітного.

Фарадей прийшов до висновку що причиною виникнення індукційного струму є змінювання потоку магнітного поля, що пронизує провідник.

Оскільки індукційний струм провідності може виникати в замкненому полі тільки під дією сторонніх сил, то відповідна їм електрорушійна сила (е.р.с.) називається *е.р.с. електромагнітної індукції* \mathcal{E}_i .

Закон Фарадея: *Е.р.с. електромагнітної індукції у контурі пропорційна швидкості змінювання магнітного потоку Φ_m крізь поверхню, що охоплює цей контур.*

$$\varepsilon_i = k \frac{d\Phi_m}{dt} \quad (3.129)$$

Російський вчений Ленц досліджував зв'язок між напрямком індукційного струму та характером магнітного потоку, що викликає його змінювання.

Правило Ленца: При всякому змінюванні магнітного потоку крізь поверхню, що охоплює замкнений провідний контур, в останньому виникає індукційний струм такого напрямку, що його магнітне поле протидіє змінюванню цього магнітного потоку.

Враховуючи правило Ленца основний закон електромагнітної індукції в системі СІ визначається формулою:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}, \quad k = -1 \quad (3.130)$$

Електрорушійна сила електромагнітної індукції в замкненому провідному контурі чисельно дорівнює і протилежна за знаком швидкості змінювання магнітного потоку крізь поверхню, що охоплює контур.

Для замкненого контуру, що складається з N витків:

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\psi}{dt}, \quad (3.131)$$

де $\psi = N\Phi$ – потокозчеплення.

3.4.2. Явище самоіндукції. Індуктивність

Самоіндукція – поодинокий випадок електромагнітної індукції [1, 9, 13]. Це виникнення е.р.с. електромагнітної індукції в електричному колі, внаслідок зміни в ньому електричного струму. Така е.р.с. називається *е.р.с. самоіндукції*.

$$\varepsilon_c = -\frac{d\varphi_c}{dt}, \quad (3.132)$$

де φ_c – потокозчеплення обумовлене власним магнітним полем струму в цьому електричному колі.

Індуктивністю замкнутого провідного контуру називається скалярна величина L , яка дорівнює відношенню потокозчеплення самоіндукції контуру до сили струму в цьому контурі:

$$L = \frac{\varphi_c}{I} \quad (3.133)$$

Для соленоїда

$$\varphi_c = NBS; \quad B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l};$$

тоді

$$\varphi_c = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l} I = \mu\mu_0 \frac{N^2 Sl}{l^2} I.$$

Враховуючи, що $n = \frac{N}{l}$, $V = Sl$, маємо:

$$L = \mu\mu_0 n^2 V \quad (3.134)$$

Визначимо е.р.с. самоіндукції через індуктивність контуру, враховуючи що

$$\varepsilon_c = -\frac{d\varphi_c}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt};$$

якщо $L = const$ та $V = const$, то

$$\varepsilon_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (3.135)$$

Якщо осердя феромагнітне то $L = f(\mu)$:

$$\varepsilon_c = -L_{дин} \frac{dI}{dt}, \quad (3.136)$$

де $L_{дин} = \frac{d\varphi_c}{dI}$ - динамічна індуктивність контуру. Тобто індуктивність є мірою інертності контуру до змінювання сили струму.

Приклади розв'язання задач Електростатика

Приклад 1. Знайти силу F притягання між ядром атома водню та електроном. Радіус атома водню $r = 0,5 \cdot 10^{-5}$ м; заряд ядра дорівнює по модулю і протилежний за знаком заряду електрона.

Розв'язання:

За законом Кулона сила електростатичної взаємодії між двома зарядженими тілами, розміри яких малі порівняно з відстанню між ними,

визначається формулою $F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$, де q_1 та q_2 – електричні заряди тіл; ϵ – відносна діелектрична проникність середовища; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – електрична постійна. В умовах даної задачі $q_1 = q_2 = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Підставивши числові значення, одержимо $F = 92,3 \cdot 10^{-9}$ Н.

Приклад 2. Два точкових заряди, перебуваючи в повітрі ($\epsilon=1$) на відстані $r_1=20$ см один від одного, взаємодіють з деякою силою. На якій відстані r_2 потрібно помістити ці заряди в олії, щоб отримати ту ж силу взаємодії?

Розв'язання:

Відповідно до закону Кулона два точкових заряди в повітрі взаємодіють з силою $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_1\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$ (1), а в олії з силою $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_2\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$ (2). Прирівнявши

праві частини рівнянь (1) і (2), знайдемо $r_2 = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} \cdot r_1$. Діелектрична проникність

повітря $\epsilon_1 = 1$, діелектрична проникність олії $\epsilon_2 = 5$. Підставивши числові значення, одержимо $r_2 = 8,94$ см.

Приклад 3. У скільки разів сила гравітаційного тяжіння між двома протонами менше сили їх електростатичного відштовхування? Заряд протона дорівнює по модулю і протилежний за знаком заряду електрона.

Розв'язання:

Сила гравітаційного тяжіння $F_g = G \frac{m_1m_2}{r^2}$, де $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна постійна; m_1 і m_2 – маси частинок (для протонів $m = 1,6 \cdot 10^{-27}$ кг).

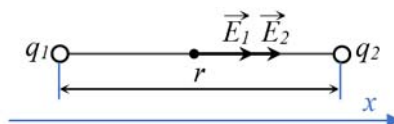
Сила електростатичного відштовхування у вакуумі $F_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1q_2}{r^2}$. Тоді

$$\frac{F_k}{F_g} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 G m^2} = 1,24 \cdot 10^{36}.$$

Приклад 4. Знайти напруженість E електричного поля в точці, що лежить посередині між точковими зарядами $q_1=8$ нКл і $q_2=-6$ нКл. Відстань між зарядами $r = 10$ см; $\epsilon = 1$.

Розв'язання:

Згідно з принципом суперпозиції $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ або в проекції на вісь x : $E = E_1 + E_2$.



Напруженість електричного поля точкового заряду $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$, де r –

відстань від заряду до точки, в якій визначається напруженість.

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_1}{\pi\epsilon_0 r^2}; \quad E_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0\left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{q_2}{\pi\epsilon_0 r^2}. \quad \text{Сумарна напруженість}$$

$$E = \frac{q_1 + |q_2|}{\pi\epsilon_0 r^2} = 50,4 \text{ кВ/м.}$$

Приклад 5. У вершинах правильного шестикутника розташовані три позитивних і три негативних заряди. Знайти напруженість E електричного поля в центрі шестикутника при різних комбінаціях в розташуванні цих зарядів. Кожен заряд $q=1,5$ нКл; сторона шестикутника $a=3$ см.

Розв'язання:

Напруженість поля електричного заряду $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$. Знайдемо

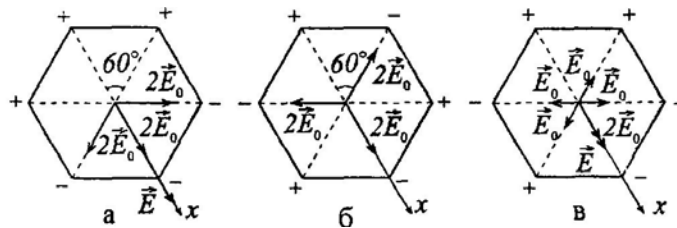
напруженість поля E_0 одного заряду: $E_0 = \frac{|q|}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ (очевидно, що відстань від

зарядів до центру шестикутника дорівнює стороні трикутника a , $E_0 = 15$ кВ/м.

Згідно з принципом суперпозиції результуюча напруженість E знаходиться за

правилом векторного додавання $\vec{E} = \sum_{n=1}^6 \vec{E}_n$, причому $E_1 = E_2 = \dots = E_6 = E_0$.

Розглянемо три варіанти розташування зарядів:



а) У проекції на вісь x : $E = 2E_0 \cos 60^\circ + 2E_0 + 2E_0 \cos 60^\circ = 4E_0 = 60$ кВ/м.

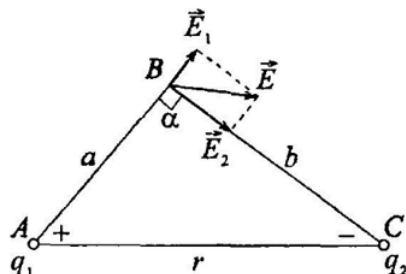
б) У проекції на вісь x : $E = -2E_0 \cos 60^\circ + 2E_0 - 2E_0 \cos 60^\circ = 0$

в) У проекції на вісь x : $E = 2E_0 = 30$ кВ/м.

Приклад 6. Два точкових заряди $q_1=7,5$ нКл і $q_2=-14,7$ нКл розташовані на відстані $r=5$ см. Знайти напруженість E електричного поля в точці, що знаходиться на відстанях $a=3$ см від позитивного заряду і $b=4$ см від негативного заряду.

Розв'язання:

Сторони трикутника BCA (трикутник єгипетський) a , b і r задовольняють умові $r^2 = a^2 + b^2$, трикутник прямокутний, кут $\alpha = 90^\circ$. Згідно з принципом суперпозиції результуюча напруженість у точці C : $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, де E_1 – напруженість, створювана позитивним зарядом q_1 , E_2 – напруженість, створювана негативним зарядом q_2 .



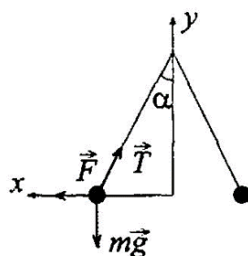
За правилом додавання двох взаємоперпендикулярних векторів у скалярному вигляді $E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$. Оскільки, $E_1 = \frac{|q_1|}{4\pi\epsilon_0 a^2}$, $E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\epsilon_0 b^2}$, то

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{q_1^2}{a^4} + \frac{q_2^2}{b^4}} = 112 \text{ кВ/м.}$$

Приклад 7. Дві кульки однакового радіусу і маси підвішені на нитках однакової довжини, так, що їх поверхні стикаються. Який заряд q потрібно повідомити кулькам, щоб сила натягу ниток стала рівною $T = 98$ мН? Відстань від центру кульки до точки підвісу $l = 10$ см; маса кожної кульки $m = 5$ г.

Розв'язання:

Після надання кулькам заряду q , кожна з них відхилиться від вертикалі на кут α і зупиниться в положенні рівноваги.



Оскільки умови рівноваги для обох кульок однакові, розглянемо одну з них. За законом збереження заряду заряд q розподілиться на дві кульки рівномірно.

Тоді кожна кулька отримає заряд $q_0 = \frac{q}{2}$. На кульку діють три сили: сила Кулона F , сила натягу нитки T і сила тяжіння mg . Умова рівноваги кульки $\vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} = 0$

чи в проекціях на вісь x : $F - T \sin \alpha = 0$ (1), на вісь y : $T \cos \alpha - mg = 0$ (2).

Відстань між кульками дорівнює $2l \sin \alpha$. Кулонівська сила визначається

формулою $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_0^2}{4l^2 \sin^2 \alpha}$ (3). Виражаємо величину $\sin \alpha$. З (2) $\cos \alpha = \frac{mg}{T}$

або $1 - \sin^2 \alpha = \left(\frac{mg}{T}\right)^2$, звідки $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{mg}{T}\right)^2}$ (4). З (1) знайдемо $F = T \sin \alpha$

(5). Прирівнявши праві частини рівнянь (5) і (3) і розділивши отриманий вираз на $\sin \alpha$, отримаємо $T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{q_0^2}{4l^2 \sin^3 \alpha}$. Підставивши в цей вираз рівняння (4),

виразимо $q_0 = 4l \sqrt{\pi T \epsilon \epsilon_0 \left(1 - \left(\frac{mg}{T}\right)\right)^3} = 5,32 \cdot 10^{-7}$ Кл. Тоді заряд, наданий обом кулькам, $q = 2q_0 = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Приклад 8. З якою силою F_s на одиницю площі відштовхуються дві однойменно заряджені нескінченно протяжні площини? Поверхнева густина заряду на площинах $\sigma = 0,3$ мКл/м².

Розв'язання:

Напруженість поля нескінченної зарядженої площини $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0\epsilon}$. З іншого

боку, $E = \frac{F}{q}$, де $q = \sigma S$. Прирівняємо $\frac{\sigma}{2\epsilon\epsilon_0} = \frac{F}{\sigma S}$, звідси сила, що діє на одиницю

площі площини $F_S = \frac{F}{S} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon\epsilon_0} = 5,1$ Н/м.

Приклад 9. У плоскому горизонтально розташованому конденсаторі заряджена крапелька ртуті знаходиться в рівновазі при напруженості електричного поля $E = 60$ кВ/м. Заряд краплі $q = 3,84 \cdot 10^{-9}$ Кл. Знайти радіус R краплі.

Розв'язання:

На крапельку ртуті в конденсаторі діє електростатична сила F (вгору) і сила тяжіння mg (вниз), які врівноважують одна одну, тобто $\vec{F} + m\vec{g} = 0$ або

$F = mg$. Маса краплі $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Сила $F = Eq$. Тоді $Eq = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho g$, звідки

$r = \sqrt[3]{\frac{3Eq}{4\pi\rho g}} = 0,44$ мкм.

Приклад 10. Дві кульки з зарядами $q_1=6,66$ нКл і $q_2=13,33$ нКл. Знаходяться на відстані $r_1=40$ см. Яку роботу A треба виконати, щоб зблизити їх до відстані $r_2=25$ см?

Розв'язання:

Енергія електростатичної взаємодії кульок $W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r}$. Для зближення

кульок потрібно виконати роботу $A = \Delta W = W_2 - W_1$. Оскільки, $W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_1}$, а

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r_2}, \text{ то робота } A = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = 1,2 \text{ мкДж.}$$

Приклад 11. Яка робота A виконується при перенесенні точкового заряду $q=20$ нКл з нескінченності в точку, що знаходиться на відстані $r=1$ см від поверхні кулі радіусом $R=1$ см з поверхневою густиною заряду $\sigma=10$ мкКл/м²?

Розв'язання:

Робота з переміщення точкового заряду q з нескінченності в деяку точку M є потенціалом точки M , отже, $A = \phi_M = \frac{q q_0}{4\pi\epsilon\epsilon_0 (R + r)}$. Оскільки $q_0 = \sigma 4\pi R^2$, то

$$A = \frac{q \sigma R^2}{\epsilon\epsilon_0 (R + r)} = 113 \text{ мкДж.}$$

Приклад 12. Знайти швидкість v електрона, що пройшов різницю потенціалів U , рівну 5 В.

Розв'язання:

Робота по переміщенню електрона з точки 1 в точку 2 дорівнює $A = q(\phi_1 - \phi_2) = qU$. З іншого боку, робота A дорівнює приросту його кінетичної енергії $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$. Якщо $v_1 = 0$, то $A = \frac{mv_2^2}{2}$. Тоді $qU = \frac{mv_2^2}{2}$, звідки

$$v_2 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}, \text{ де } q - \text{ заряд, а } m \text{ маса електрона. } v_2 = 1,33 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$$

Приклад 13. Різниця потенціалів між пластинами плоского конденсатора $U=90$ В. Площа кожної пластини $S=60$ см², її заряд $q=1$ нКл. На якій відстані d одна від одної знаходяться пластини?

Розв'язання:

Напруженість поля плоского конденсатора $E = \frac{\sigma}{\epsilon\epsilon_0}$ (1). З іншого боку,

$E = \frac{U}{d}$ (2). Прирівнявши (1) і (2), з урахуванням $\sigma = \frac{q}{S}$, отримаємо $\frac{q}{\epsilon\epsilon_0 S} = \frac{U}{d}$,

звідки $d = \frac{U\epsilon\epsilon_0 S}{q} = 4,78 \text{ мм.}$

Приклад 14. Кулька радіусом $R=2$ см заряджається негативно до потенціалу $\phi=2$ кВ. Знайти масу m всіх електронів, що складають заряд, наданий кульці.

Розв'язання:

Ємність кульки $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$. Після зарядки $q = C\phi = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R\phi$. Кількість електронів, що складають цей заряд $N = \frac{q}{e} = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R\phi}{e}$, де e заряд електрона.

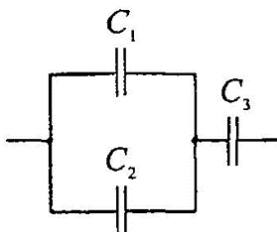
Маса всіх електронів $m = Nm_e = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R\phi}{e} m_e$, де m_e маса електрона.

$m = 2,5 \cdot 10^{-20} \text{ кг.}$

Приклад 15. Знайти ємність C системи конденсаторів, зображеної на малюнку. Ємність кожного конденсатора $C=0,5$ мкФ.

Розв'язання:

Ємність паралельної ділянки $C_{12} = C_1 + C_2$.



Ємність всієї системи конденсаторів знайдемо із співвідношення $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_{12}} + \frac{1}{C_3}$ або $\frac{1}{C} = \frac{C_1 + C_2 + C_3}{(C_1 + C_2)C_3}$. Звідси $C = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{C_1 + C_2 + C_3} = 0,33 \text{ мкФ.}$

Приклад 16. Куля радіусом $R=1$ м заряджена до потенціалу $U=30$ кВ. Знайти енергію W зарядженої кулі.

Розв'язання:

Енергія зарядженої кулі $W = \frac{CU^2}{2}$, де ємність кулі $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R$. Тоді

$W = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 RU^2}{2} = 2\pi\epsilon\epsilon_0 RU^2 = 0,05 \text{ Дж.}$

Електродинаміка

Приклад 1. Струм I в провіднику змінюється з часом t за рівнянням $I=4+2t$, де I – в амперах і t – у секундах. Яка кількість електрики q проходить через поперечний переріз провідника за час від $t_1=2$ с до $t_2=6$ с? При якому постійному струмі I_0 через поперечний переріз провідника за той же час проходить та ж кількість електрики?

Розв'язання:

За визначенням сила струму $I = \frac{dq}{dt}$, звідси $dq = Idt$.

$$q = \int_{t_1}^{t_2} Idt = \int_{t_1}^{t_2} (4 + 2t)dt = 4t \Big|_{t_1}^{t_2} + t^2 \Big|_{t_1}^{t_2} = 4(t_2 - t_1) + (t_2^2 - t_1^2) = 48 \text{ Кл. При постійному}$$

струмі $I_0 = \frac{q}{t}$, де $t = t_2 - t_1 = 6 - 2 = 4$ с. Підставляючи числові значення, одержимо $I_0 = 12$ А.

Приклад 2. Скільки витків ніхромового дроту діаметром $d=1$ мм необхідно навити на фарфоровий циліндр радіусом $r=2,5$ см, щоб отримати піч опором $R=40$ Ом?

Розв'язання:

Опір провідника можна розрахувати за формулою $R = \rho \frac{l}{S}$ (1), де ρ – питомий опір (для ніхрому $\rho=100$ мкОм·м), l – довжина провідника, S – площа його поперечного перерізу. Довжина одного витка дорівнює $2\pi r$, тоді довжина всього дроту $l = 2\pi r N$ (2), де N – кількість витків. Площа поперечного перерізу

$$S = \pi \frac{d^2}{4} \quad (3). \text{ Підставивши (3) і (2) в (1), отримаємо } R = \frac{\rho 8rN}{d^2}, \text{ звідки}$$

$$N = \frac{Rd^2}{8\rho r} = 200 \text{ витків.}$$

Приклад 3. Знайти опір R залізного стрижня діаметром $d=1$ см, якщо маса стрижня $m=1$ кг.

Розв'язання:

Опір стрижня можна визначити за формулою $R = \rho \frac{l}{S}$ (1), де ρ – питомий опір заліза; l – довжина стрижня; S – площа його поперечного перерізу.

Маса стрижня $m = \rho_{Fe}V$, де ρ_{Fe} – густина заліза; V – об'єм стрижня рівний $V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot l$. Таким чином, $m = \frac{\rho_{Fe}\pi d^2 l}{4}$, звідки довжина стрижня дорівнює $l = \frac{4m}{\rho_{Fe}\pi d^2}$ (2).

Площа поперечного перерізу $S = \pi \frac{d^2}{4}$ (3). Підставляючи (2) та (3) в (1) отримаємо $R = \frac{\rho l 6m}{\rho_{Fe}\pi^2 d^4} = 1,8 \text{ мОм}$.

Приклад 4. Вольфрамова нитка електричної лампочки при $t_1 = 20^\circ\text{C}$ має опір $R_1 = 35,8 \text{ Ом}$. Яка буде температура нитки лампочки, якщо при включенні в мережу напругою $U = 120\text{В}$ по нитці йде струм $I = 0,33 \text{ А}$? Температурний коефіцієнт опору вольфраму $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$.

Розв'язання:

Залежність опору нитки від температури виражається співвідношенням $R_2 = R_0(1 + \alpha T_2)$, де R_0 – опір нитки при температурі 0°C . Звідси $T_2 = \frac{R_2 - R_0}{\alpha R_0}$

(1). За законом Ома $I = \frac{U}{R_2}$, звідки $R_2 = \frac{U}{I}$ (2).

R_0 знайдемо із співвідношення $R_1 = R_0(1 + \alpha T_1)$, звідки $R_0 = \frac{R_1}{(1 + \alpha T_1)}$ (3).

Підставляючи (2) та (3) в (1), отримаємо: $T_2 = \frac{U(1 + \alpha T_1) - R_1 I}{I \alpha R_1} = 1927 \text{ К}$.

Приклад 5. Знайти падіння потенціалу U на мідному дроті довжиною $l = 500\text{м}$ і діаметром $d = 7 \text{ мм}$, якщо струм в ньому $I = 2\text{А}$.

Розв'язання:

Струм, який проходить по ділянці однорідного провідника, підкоряється закону Ома $I = \frac{U}{R}$, де U – падіння потенціалу на цій ділянці, R – опір ділянки.

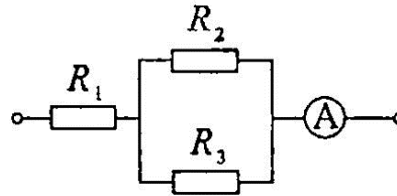
Опір дроту $R = \rho \frac{l}{S}$, де ρ – питомий опір міді, l – довжина дроту, S – площа його поперечного перерізу. Оскільки $S = \pi \frac{d^2}{4}$, то $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$. Згідно

закону Ома $U = IR = I\rho \frac{4l}{\pi d^2}$. Підставивши числові значення, знайдемо $U = 5,4\text{В}$.

Приклад 6. Знайти падіння потенціалу U в опорах $R_1=4$ Ом, $R_2=2$ Ом і $R_3=4$ Ом, якщо амперметр показує струм $I=3$ А. Знайти струми I_1 і I_2 в опорах R_1 і R_2 .

Розв'язання:

За законом Ома $I_1 = \frac{U_1}{R_1}$, звідки $U_1 = I_1 R_1 = 12$ В. Повний опір ланцюга, $R = R_1 + R_{23}$ де, $\frac{1}{R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ звідки $R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = \frac{8}{6}$ Ом.



Падіння потенціалу на всій ділянці ланцюга $U = U_1 + U_{23}$. При паралельному з'єднанні опорів всі опори знаходяться під однією різницею потенціалу, отже, $U_{23} = U_2 = U_3$. Відповідно до закону Ома $U = I_1 R = I_1 (R_1 + R_{23})$, тоді $U_2 = U_3 = U - U_1$. $U_2 = U_3 = I_1 (R_1 + R_{23}) - U_1 = 4$ В. Опір R_1 і еквівалентний опір R_{23} з'єднані послідовно, отже, струми, що протікають через них, рівні $I_1 = I_{23}$, де $I_{23} = I_2 + I_3$, тобто $I_1 = I_2 + I_3$. За законом Ома $I_2 = \frac{U_2}{R_2} = 2$ А, тоді $I_3 = I_1 - I_2 = 1$ А.

Приклад 7. Е.р.с. елемента $\varepsilon=6$ В. При зовнішньому опорі $R=1,1$ Ом струм в ланцюзі $I=3$ А. Знайти падіння потенціалу всередині елемента U_r і його опір r .

Розв'язання:

Згідно з другим законом Кірхгофа $U_r + IR = \varepsilon$, звідки $U_r = \varepsilon - IR = 2,7$ В. За законом Ома для ділянки кола $I = \frac{U_r}{r}$, звідки $r = \frac{U_r}{I} = 0,9$ Ом

Приклад 8. Елемент, амперметр і деякий опір з'єднані послідовно. Якщо взяти опір з мідного дроту довжиною $l=100$ м і поперечним перерізом $S=2$ мм², то амперметр показує струм $I_1=1,43$ А. Якщо ж взяти опір з алюмінієвого дроту довжиною $l=57,3$ м і поперечним перерізом $S=1$ мм², то амперметр показує струм $I_2=1$ А. Опір амперметра $R_A=0,05$ Ом. Знайти е.р.с. елемента і його внутрішній опір r .

Розв'язання:

За законом Ома для повного кола $I = \frac{\varepsilon}{r + R_A + R}$, де опір $R = \rho \frac{l}{S}$, ρ – питомий опір, l – довжина дроту, S – площа його поперечного перерізу. Тоді для мідного й алюмінієвого дроту відповідно маємо $I_1 = \frac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_1 \frac{l_1}{S_1}}$ (1) і

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{r + R_A + \rho_2 \frac{l_2}{S_2}} \quad (2).$$

Вирішуючи спільно рівняння (1) і (2), отримаємо вираз для внутрішнього

опору джерела струму $r = \frac{I_2 \left(R_A + \rho_2 \frac{l_2}{S_2} \right) - I_1 \left(R_A + \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \right)}{I_1 - I_2} = 0,5 \text{ Ом.}$ З (1) е.р.с.

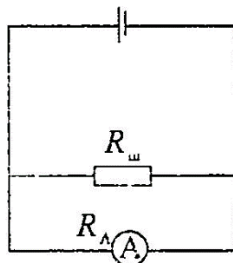
$$\text{джерела струму } \varepsilon = I_1 \left(r + R_A + \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \right) = 2\text{В.}$$

Приклад 9. Амперметр з опором $R_A = 0,18 \text{ Ом}$ призначений для вимірювання струмів до $I = 10 \text{ А}$, шкала його розділена на 100 поділок. Який опір R необхідно взяти і як його включити, щоб цим амперметром можна було вимірювати струм до $I_0 = 100 \text{ А}$? Як зміниться при цьому ціна поділки амперметра?

Розв'язання:

Якщо необхідно виміряти силу струму в n разів більшу, ніж можна виміряти даними амперметром, тобто $\frac{I_0}{I} = n = 10$, то слід паралельно

підключити шунт з опором $R_{ш} = \frac{R_A}{n - 1}$. Таким чином, $R_{ш} = 0,02 \text{ Ом}$.



Ціна поділки без шунта дорівнює $0,1 \text{ А}$, з шунтом 1 А .

Приклад 10. У ланцюг включені послідовно мідний та сталевий дроти однакових довжини та діаметру. Знайти: а) відношення кількостей теплоти, що виділяються в цих дротах, б) відношення падінь напруги на цих дротах.

Розв'язання:

При послідовному включенні по мідному та сталевому дротам тече однаковий струм. Відповідно до закону Джоуля-Ленца на мідному дроті виділиться кількість теплоти $Q_1 = I^2 R_1 t = I^2 \rho_1 \frac{l}{S} t$, а на сталевому дроті $-Q_2 = I^2 R_2 t = I^2 \rho_2 \frac{l}{S} t$. Співвідношення $\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,17$.

Падіння напруги на мідному дроті $U_1 = IR_1 = I\rho_1 \frac{l}{S}$. Падіння напруги на сталевому дроті $U_2 = IR_2 = I\rho_2 \frac{l}{S}$. Співвідношення $\frac{U_1}{U_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = 0,17$.

Приклад 11. Батарея з е.р.с. $\varepsilon=240$ В і внутрішнім опором $r=1$ Ом замкнута на зовнішній опір $R=23$ Ом. Знайти повну потужність P_0 , корисну потужність P і к.к.д. η батареї.

Розв'язання:

К.к.д. батареї $\eta = \frac{R}{R+r} = 96\%$. Повна потужність батареї $P = \varepsilon I$, де відповідно до закону Ома, тобто $P_0 = \frac{\varepsilon^2}{R+r} = 2,4$ кВт. Корисна потужність $P = \eta P_0 = 2,3$ кВт.

Приклад 12. Елемент замикають спочатку на зовнішній опір $R_1=2$ Ом, а потім на зовнішній опір $R_2=0,5$ Ом. Знайти е.р.с. ε елемента і його внутрішній опір r , якщо відомо, що в кожному з цих випадків потужність, що виділяється в зовнішньому ланцюзі, однакова і дорівнює $P=2,54$ Вт

Розв'язання:

Потужність, що виділяється в зовнішньому ланцюзі, дорівнює $P = I^2 R$, де відповідно до закону Ома для повного кола $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$. Звідси $P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R+r)^2}$. За

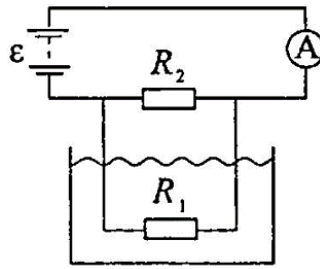
умовою
$$P = \frac{\varepsilon^2 R_1}{(R_1+r)^2} = \frac{\varepsilon^2 R_2}{(R_2+r)^2} \quad (1), \quad \text{звідси} \quad \frac{(R_1+r)}{\sqrt{R_1}} = \frac{(R_2+r)}{\sqrt{R_2}};$$

$$\sqrt{R_2}(R_1+r) = \sqrt{R_1}(R_2+r); \quad r(\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}) = \sqrt{R_2}R_1 - \sqrt{R_1}R_2;$$
$$r = \frac{\sqrt{R_2}R_1 - \sqrt{R_1}R_2}{\sqrt{R_1} - \sqrt{R_2}} = \sqrt{R_1R_2} = 1 \text{ Ом. З (1) знайдемо } \varepsilon = \frac{(R_1 + \sqrt{R_1R_2})\sqrt{P}}{R_1} = 3,4 \text{ Ом.}$$

Приклад 13. Калориметр має спіраль опором $R_1=60$ Ом, яка включена в ланцюг, як показано на малюнку. Опір $R_2=30$ Ом. Амперметр показує струм $I=6$ А. На скільки нагрівається маса $m=480$ г води, наливої в калориметр, за час $\tau=5$ хв пропускання струму?

Розв'язання:

За час τ на спіралі виділиться кількість теплоти $Q = I_1^2 R_1 \tau$ (1), де I_1 – струм, що проходить через спіраль. Оскільки спіраль і опір R_2 , з'єднані паралельно, то $U_1 = U_2 = U$, а $I = I_1 + I_2$.



Тоді $I_1 = \frac{U}{R_1}$, де $U = IR_{12} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Звідси знайдемо $I_1 = \frac{IR_2}{(R_1 + R_2)} = 2$ А.

Виділена кількість тепла пішла на нагрівання води, причому $Q = c m \Delta T$ (2), де $c = 4,19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К) – питома теплоємність води; ΔT – шукана зміна температури. Прирівнюючи праві частини (1) і (2), отримаємо $I_1^2 R_1 \tau = c m \Delta T$,

$$\text{звідки } \Delta T = \frac{I_1^2 R_1 \tau}{c m} = 36 \text{ К.}$$

Приклад 14. Нагрівач електричної каструлі має дві однакові секції з опором $R=20$ Ом кожна. Через який час τ закипить об'єм $V=2,2$ л води, якщо: а) включена одна секція; б) обидві секції включені послідовно; в) обидві секції включені паралельно? Початкова температура води $t_0=16^\circ\text{C}$, напруга в мережі $U=110$ В, к.к.д. нагрівача $\eta=85\%$.

Розв'язання:

а) Потужність нагрівача $P = UI = \frac{U^2}{R}$ (1). За час τ виділиться кількість теплоти $Q = \eta P \tau$ (2), яке піде на нагрівання води до температури кипіння T_k , тобто $Q = c V \rho (T_k - T_0)$ (3). Вирішуючи спільно рівняння (1)-(4), отримаємо $\tau = \frac{c V \rho (T_k - T_0) R}{\eta U^2} = 1506 \text{ с} = 25 \text{ хв.}$

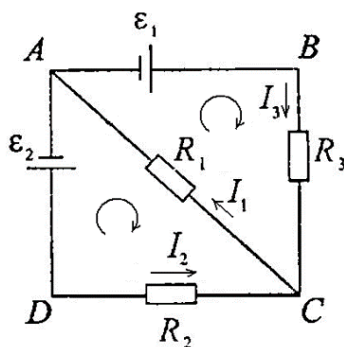
б) При послідовному включенні секцій їхній загальний опір дорівнює $2R$. Звідси $\tau = 50$ хв.

в) При паралельному з'єднанні секцій їхній загальний опір дорівнює $R/2$. Звідси $\tau=12,5$ хв.

Приклад 15. Е.р.с. елементів $\varepsilon_1=2,1$ В і $\varepsilon_2=1,9$ В, опори $R_1=45$ Ом, $R_2=10$ Ом і $R_3=10$ Ом. Знайти струми I , у всіх ділянках кола.

Розв'язання:

На малюнку стрілками вказано обраний напрям струмів та обходи контурів.



Для вузла A згідно з першим правилом Кірхгофа маємо $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.

Для контурів ABC і ACD згідно другого правила Кірхгофа маємо:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1; \quad -I_1 R_1 - I_2 R_2 = -\varepsilon_2.$$

Таким чином, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ I_1 R_1 + I_3 R_3 = \varepsilon_1 \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Підставляючи числові дані:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ 45I_1 + 10I_3 = 2,1 \\ 45I_1 + 10I_2 = 1,9 \end{cases}$$

Вирішуючи цю систему, одержимо $I_1=0,04$ А, $I_2=0,01$ А, $I_3=0,03$ А.

Приклад 16. За який час τ при електролізі мідного купоросу маса мідної пластинки (катода) збільшиться на $\Delta m=99$ г? (площа пластинки $S=25$ см², густина струму $j=200$ А/м²). Знайти товщину d шару міді, що утворився на пластинці.

Розв'язання:

Відповідно до першого закону Фарадея $\Delta m = KI\tau$. Молярна маса міді $A=64 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, валентність міді в CuSO_4 дорівнює $Z=2$. Звідси електрохімічний еквівалент $K = \frac{1}{F} \cdot \frac{A}{Z} = 332,8 \cdot 10^{-9}$ кг/Кл, де F – постійна Фарадея

дорівнює $94,6 \cdot 10^3$ Кл/моль.

Сила струму $I = jS$.

Тоді, $\Delta m = KjS\tau$ звідки $\tau = \frac{\Delta m}{KjS} = 595c \approx 10xв.$

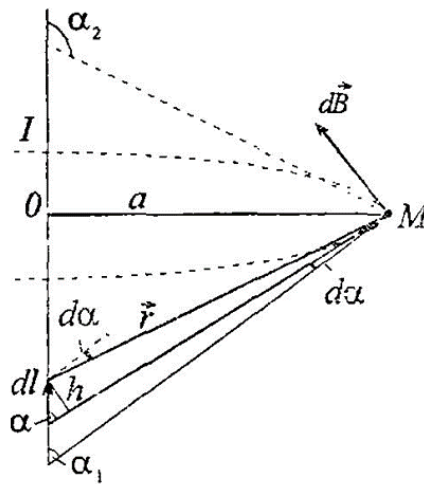
Об'єм шару міді, що виділився $V = Sd = \frac{\Delta m}{\rho}$, звідси $d = \frac{\Delta m}{\rho S} = 4,6 \text{ мкм.}$

Електромагнетизм

Приклад 1. Знайти напруженість H магнітного поля в точці, яка відступає на відстані $a=2$ м від нескінченно довгого провідника, по якому тече струм $I=5$ А.

Розв'язання:

Виберемо на провіднику зі струмом елемент струму довжиною dl (див. рисунок). Індукція магнітного поля, що створюється цим елементом в точці M , відповідно до закону Біо-Савара-Лапласа, $d\vec{B} = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{I[d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$.



Вектор $d\vec{B}$ в точці M спрямований від нас у площину креслення. Модуль цього вектора $dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{Idl \sin \alpha}{r^2}$.

Висловимо dl і r через α : $r = \frac{a}{\sin \alpha}$, а оскільки $\frac{h}{dl} = \frac{rd\alpha}{dl} = \sin \alpha$, то $dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha} = \frac{ad\alpha}{\sin^2 \alpha}$.

Тоді $dB = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \cdot \frac{Iad\alpha \sin \alpha \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \alpha} = \frac{\mu_0\mu I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha$.

Результуючу індукцію магнітного поля в точці M знайдемо інтегруванням:

$$B = \int dB = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0\mu I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha .$$

Тут α – кут між напрямом струму в провіднику (напрямом вектора $d\vec{l}$) і вектором \vec{r} , проведеним від елемента dl у крапку M , в якій визначається індукція

магнітного поля. Якщо провідник нескінченно довгий, то $\alpha_1 = 0$, а $\alpha_2 = \pi$. Тоді

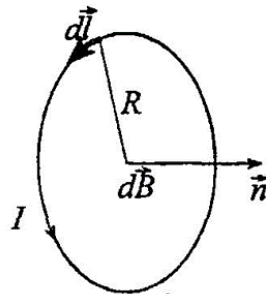
$$\text{результуюча індукція магнітного поля: } B = \int_0^\pi \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi a}$$

$$\text{Оскільки } B = \mu_0 \mu H, \text{ то } H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2\pi a} = 398 \text{ мА/м.}$$

Приклад 2. Знайти напруженість H магнітного поля в центрі кругового дрютяного витка радіусом $R=1$ см, по якому тече струм $I=1$ А.

Розв'язання:

Кожен елемент струму створює в центрі індукцію, спрямовану вздовж позитивної нормалі до контуру.



Тому векторна сума $d\vec{B}$ зводиться до складання їх модулів. За законом Біо-Савара-Лапласа $dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I dl \sin \alpha}{r^2}$. Оскільки $\alpha = \pi/2$, тоді $\sin(\pi/2) = 1$. Для кругового витка $r = R$.

$$\text{Таким чином, } dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I dl}{R^2}.$$

Проінтегруємо цей вираз по всьому контуру:

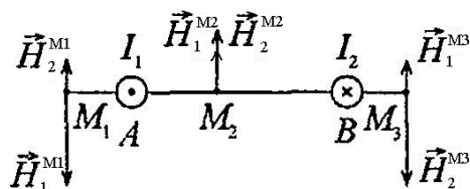
$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}.$$

$$\text{Оскільки } B = \mu_0 \mu H, \text{ то } H = \frac{B}{\mu_0 \mu} = \frac{I}{2R} = 50 \text{ А/м.}$$

Приклад 3. На рисунку зображені перерізи двох прямолінійних нескінченнодовгих провідників зі струмами. Відстань між провідниками $AB=10$ см, струми $I_1=20$ А і $I_2=30$ А. Знайти напруженості H магнітного поля, викликаного струмами I_1 і I_2 в точках M_1 , M_2 і M_3 . Відстані $M_1A=2$ см, $AM_2=4$ см і $BM_3=3$ см.

Розв'язання:

Згідно з принципом суперпозиції напруженості \vec{H}_1 і \vec{H}_2 магнітного поля в точках M_1 , M_2 і M_3 складаються з напруженостей створюваних струмами I_1 і I_2 .



Таким чином, в точці M_1 : $\vec{H}_{M1} = \vec{H}_1^{M1} + \vec{H}_2^{M1}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M1} = -H_1^{M1} + H_2^{M1}$ (1);

в точці M_2 : $\vec{H}_{M2} = \vec{H}_1^{M2} + \vec{H}_2^{M2}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M2} = H_1^{M2} + H_2^{M2}$ (2);

в точці M_3 : $\vec{H}_{M3} = \vec{H}_1^{M3} + \vec{H}_2^{M3}$, модуль вектора сумарної напруженості (при осі координат спрямованій вгору) – $H_{M3} = H_1^{M3} - H_2^{M3}$ (3).

Напруженість $H = \frac{I}{2\pi a}$, де a – відстань від провідника з струмом до точки, в якій визначається напруженість.

$$\text{Тоді } H_1^{M1} = \frac{I_1}{2\pi(M_1A)} = 159,2 \text{ А/м}, H_2^{M1} = \frac{I_2}{2\pi(AB + M_1A)} = 39,8 \text{ А/м};$$

$$H_1^{M2} = \frac{I_1}{2\pi(AM_2)} = 79,6 \text{ А/м}, H_2^{M2} = \frac{I_2}{2\pi(AB - AM_2)} = 79,6 \text{ А/м};$$

$$H_1^{M3} = \frac{I_1}{2\pi(AB + BM_3)} = 24,5 \text{ А/м}, H_2^{M3} = \frac{I_2}{2\pi(AB + BM_3)} = 159,2 \text{ А/м}.$$

Звідси, з урахуванням (1), (2) та (3) $H_{M1} = -119,4 \text{ А/м}; H_{M2} = 159,2 \text{ А/м}; H_{M3} = 134,7 \text{ А/м}$

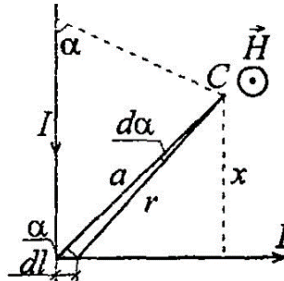
Приклад 4. Струм $I=20 \text{ А}$ йде по довгому провіднику, зігнутому під прямим кутом. Знайти напруженість магнітного поля в точці, що лежить на бісектрисі цього кута на відстані від вершини кута $a=10 \text{ см}$.

Розв'язання:

Розіб'ємо провідник на вертикальну та горизонтальну ділянки, кожна з яких створює в точці C магнітне поле. Нехай \vec{H}_1 – напруженість магнітного поля, створюваного вертикальною ділянкою, \vec{H}_2 – горизонтальною. Тоді результуюча напруженість $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$. Оскільки вектори \vec{H}_1 і \vec{H}_2 спрямовані на нас, то можна записати: $H = H_1 + H_2$ (1). За законом Біо-Савара-Лапласа

$$H_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl \quad (2), \quad H_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl \quad (3). \text{ Виразимо величини } r \text{ і } dl \text{ через кут } \alpha:$$

$$dl = \frac{rd\alpha}{\sin \alpha}; \quad r = \frac{x}{\sin \alpha}, \quad \text{де } x = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \text{тобто } r = \frac{a}{\sqrt{2} \sin \alpha}, \quad dl = \frac{ad\alpha}{\sqrt{2} \sin^2 \alpha}.$$



Підставимо отримані співвідношення в інтеграл $\int \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl$ і обчислимо

$$\text{його: } \int \frac{I \sin \alpha}{4\pi r^2} dl = \frac{I}{4\pi} \int \frac{2a \sin^3 \alpha}{\sqrt{2} a^2 \sin^2 \alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \int \sin \alpha d\alpha.$$

$$H_1 = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot (-\cos \alpha) \Big|_0^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot (-\cos \frac{3\pi}{4} + \cos 0) = 37,9 \text{ А/м.}$$

Аналогічно

$$H_2 = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot (-\cos \alpha) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = \frac{\sqrt{2} I}{4\pi a} \cdot (-\cos \pi + \cos \frac{\pi}{4}) = 39,3 \text{ А/м.}$$

Підставивши отримані значення в (1), знайдемо $H = 77,2 \text{ А/м}$.

Приклад 5. Знайти напруженість H магнітного поля на осі кругового контуру на відстані $a = 3 \text{ см}$ від його площини. Радіус контуру $R = 4 \text{ см}$, струм в контурі $I = 2 \text{ А}$.

Розв'язання:

Виберемо елемент струму $d\vec{l}$. У точці A він створює поле $d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l}, \vec{r}]}{r^3}$.

В силу симетрії сумарний вектор \vec{B} спрямований вздовж осі x , а це значить, що для знаходження модуля вектора треба скласти проєкції всіх векторів $d\vec{B}$ на вісь Ox .

$$dB_x = dB \cos \varphi = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I dl \sin \alpha}{r^2} \cos \varphi \quad (\text{кут між } d\vec{l} \text{ і } \vec{r}$$

дорівнює $\alpha = \pi/2$, звідси $\sin \alpha = 1$).

Інтегруючи цей вираз по всім $d\vec{l}$, що дає $2\pi R$, і враховуючи, що $\cos \varphi = \frac{R}{r}$,
 $r = \sqrt{a^2 + R^2}$, отримуємо $B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{2I\pi R^2}{(a^2 + R^2)^{3/2}}$.

Оскільки $B = \mu_0 \mu H$, то $H = \frac{IR^2}{2(a^2 + R^2)^{3/2}} = 12,7 \text{ А/м}$.

Приклад 6. Два прямолінійних довгих паралельних провідника знаходяться на відстані $d_1=10$ см один від одного. По провідникам в одному напрямку течуть струми $I_1=20$ А і $I_2=30$ А. Яку роботу A , необхідно виконати (на одиницю довжини провідників), щоб розсунути ці провідники до відстані $d_2=20$ см?

Розв'язання:

Відповідно до закону Ампера для паралельних струмів сила, що діє на одиницю довжини кожного з провідників: $F = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_1 I_2}{r}$.

Робота, що витрачається на одиницю довжини провідника, при переміщенні одного провідника зі струмом у магнітному полі, створеному іншим провідником зі струмом: $A = \int_{d_1}^{d_2} F dr = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$.

Підставляючи числові дані, отримуємо $A=83 \cdot 10^{-6}$ Дж/м.

Приклад 7. Із дроту довжиною $l=20$ см зроблені квадратний і круговий контури. Знайти обертаючі моменти сил M_1 і M_2 , що діють на кожний контур, поміщений в однорідне магнітне поле з індукцією $B=0,1$ Тл. По контурах тече струм $I=2$ А. Площина кожного контуру складає кут $\alpha=45^\circ$ з напрямом поля.

Розв'язання:

На замкнутий контур зі струмом у магнітному полі діє обертальний момент $M = BIS \sin \alpha$.

Площа квадратного контуру $S_1 = \left(\frac{l}{4}\right)^2$. Площа кругового контуру,

$S_2 = \pi R^2$ де, $R = \frac{l}{2\pi}$ отже, $S_2 = \frac{\pi l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$. Тоді на квадратний контур діє

обертальний момент $M_1 = BI \left(\frac{l}{4}\right)^2 \sin \alpha = 3,5 \cdot 10^{-4}$ Н·м. На круговій контур діє

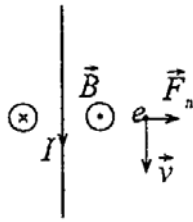
обертальний момент $M_1 = BI \frac{l^2}{4\pi} \sin \alpha = 4,5 \cdot 10^{-4}$ Н·м.

Приклад 8. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U=300$ В, рухається паралельно прямолінійному довгому дроту на відстані $a=4$ мм від нього. Яка сила F діє на електрон, якщо по провіднику пустити струм $I=5$ А?

Розв'язання:

З боку магнітного поля, створюваного провідником зі струмом, на електрон діє сила Лоренца $\vec{F} = -q[\vec{v}, \vec{B}]$. Напрямок сили Лоренца визначається за правилом векторного добутку векторів. У скалярному вигляді $F = qvB \sin \alpha$ (1).

Індукція магнітного поля провідника зі струмом дорівнює $B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a}$ (2).



Кінетична енергія електрона, що пройшов різницю потенціалів U , дорівнює $\frac{mv^2}{2} = qU$, звідки $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ (3).

Підставляючи (2) та (3) в (1), отримуємо $F = q \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi a} \sin \alpha$.

Враховуючи, що кут між \vec{B} і \vec{v} дорівнює 90° і підставляючи числові дані, отримуємо $F = 4,12 \cdot 10^{-16}$ Н.

Приклад 9. Протон і електрон, рухаючись з однаковою швидкістю, влітають в однорідне магнітне поле. У скільки разів радіус кривизни R_1 траєкторії протона більше радіуса кривизни R_2 траєкторії електрона?

Розв'язання:

З боку магнітного поля на електрон діє сила Лоренца $\vec{F}_1 = -q[\vec{v}, \vec{B}]$, а на протон діє сила Лоренца $\vec{F}_2 = q[\vec{v}, \vec{B}]$.

Ці сили рівні за модулем і протилежні за напрямком. У скалярному вигляді $F_1 = F_2 = qvB$. Робота сили Лоренца дорівнює нулю, тому $v = \text{const}$ і тангенціальне прискорення $a_\tau = 0$. Частинки рухаються з постійним по модулю нормальним прискоренням $a = \frac{F}{m} = \frac{qvB}{m}$ (1), яке перпендикулярно швидкості.

Радіус кривизни траєкторії часток можна знайти із співвідношення $a_n = \frac{v^2}{R}$ (2).

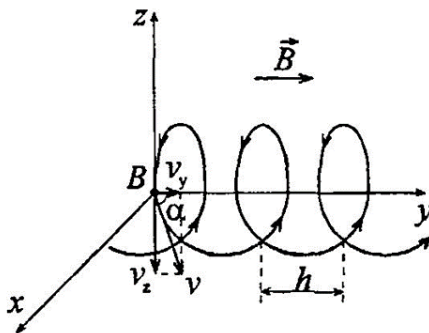
Прирівнявши (1) і (2), отримаємо $\frac{qvB}{m} = \frac{v^2}{R}$, звідки $R = \frac{vm}{qB}$. Для протона $R_2 = \frac{vm_p}{qB}$. Для електрона $R_1 = \frac{vm_e}{qB}$. Звідси $\frac{R_2}{R_1} = \frac{m_p}{m_e} = 1840$.

Приклад 10. Електрон, прискорений різницею потенціалів $U=6$ кВ, влітає в однорідне магнітне поле під кутом $\alpha=30^\circ$ до напрямку поля і рухається по гвинтовій траєкторії. Індукція магнітного поля $B=13$ мТл. Знайти радіус R і крок h гвинтової траєкторії.

Розв'язання:

Розкладемо швидкість електрона, влітаючого в магнітне поле, на два напрямки: уздовж ліній поля – v_y і паралельно їм – v_z . Складемо два рівняння.

Сила Лоренца створює доцентрове прискорення, тобто $qv_zB = \frac{mv_z^2}{R}$, звідки $qB = \frac{mv_z}{R}$ (1). Оскільки $\frac{mv^2}{2} = qU$, а з малюнка $v = \frac{v_z}{\sin \alpha}$, то $qU = \frac{mv_z^2}{2 \sin^2 \alpha}$ (2).



Розділимо обидві частини рівняння (2) на квадрати обох частин рівняння

(1). Отримаємо $\frac{qU}{q^2 B^2} = \frac{mv_z^2 R^2}{2m^2 v_z^2 \sin^2 \alpha}$; $\frac{U}{qB^2} = \frac{R^2}{2m \sin^2 \alpha}$ звідки

$$R = \frac{\sin \alpha}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}} = 1 \text{ см.}$$

Крок спіралі знайдемо з співвідношень $2\pi R = v_z t$ і $h = v_y t$, звідки

$h = 2\pi R \frac{v_y}{v_z}$. Оскільки $\frac{v_y}{v_z} = \text{ctg} \alpha = 1,73$, то $h = 11$ см.

Приклад 11. Котушка діаметром $D=10$ см, що складається з $N=500$ витків дроту, знаходиться у магнітному полі. Знайти середню е.р.с. самоіндукції $\varepsilon_{\text{сер}}$, що виникає в цій котушці, якщо індукція магнітного поля збільшується протягом часу $t=0,1$ с від 0 до 2 Тл.

Розв'язання:

Згідно закону Фарадея $\varepsilon_{сер} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де зміна потоку магнітної індукції через котушку $\Delta\Phi = NS\Delta B$.

Таким чином, $\varepsilon_{сер} = -NS\frac{\Delta B}{\Delta t}$, де $\Delta B = B_2 - B_1$. За умовою $B_1 = 0$, $B_2 = 2$ Тл.

Підставляючи числові дані, отримуємо $\varepsilon_{сер} = 78,5$ В.

Приклад 12. У магнітному полі, індукція якого $B=0,05$ Тл, обертається стрижень довжиною $l=1$ м з кутовою швидкістю $\omega=20$ рад/с. Вісь обертання проходить через кінець стрижня і паралельна магнітному полю. Знайти е.р.с. індукції ε , що виникає на кінцях стрижня.

Розв'язання:

Відповідно до закону Фарадея $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$, де зміна магнітного потоку $\Delta\Phi = B\Delta S \sin\alpha$ або, оскільки $\alpha=90^\circ$, $\Delta\Phi = B\Delta S$.

За один оборот стрижень перетинає площу $\Delta S = \pi l^2$ за час $\Delta t = t$. Тоді магнітний потік, що перетинається стрижнем за один оборот, $\Delta\Phi = B\pi l^2$, а е.р.с. що виникає на кінцях стрижня $\varepsilon = -\frac{B\pi l^2}{t} = -B\pi l^2 \omega$.

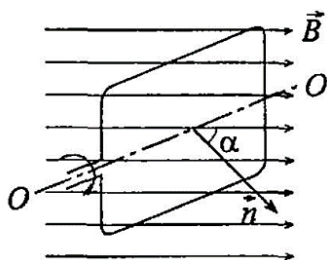
Підставляючи числові дані, отримуємо $\varepsilon = -0,5$ В.

Приклад 13. В однорідному магнітному полі, індукція якого $B=0,1$ Тл, рівномірно обертається котушка, що складається з $N=100$ витків дроту. Частота обертання котушки $n=5\text{с}^{-1}$; площа поперечного перерізу котушки $S=0,01$ м². Вісь обертання перпендикулярна до осі котушки і напрямку магнітного поля. Знайти максимальну е.р.с. індукції ε_{max} у котушці що обертається.

Розв'язання:

Розглянемо один виток рамки. При рівномірному обертанні навколо осі OO' з кутовою швидкістю ω магнітний потік через його площу буде змінюватися за законом $\Phi = BS \cos\alpha$ (1), де S – площа рамки; α – кут між нормаллю до площини та вектором B .

Вважаючи, що при $t=0$ $\alpha=0$, маємо $\alpha = \omega t$.



Індукована у витку е.р.с. індукції $\varepsilon_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$ (2). Оскільки $\Phi(t) = BS \cos \omega t$, то, диференціюючи цю функцію і враховуючи, що $\frac{d(\cos \omega t)}{dt} = -\omega \sin \omega t$, отримуємо $\varepsilon_i = BS\omega \sin \omega t$ (3).

Індукована в N витках е.р.с. буде в N разів більше: $\varepsilon = N\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t = \varepsilon_{max} \sin \omega t$, де ε_{max} – максимальне значення (амплітуда) е.р.с. індукції: $\varepsilon_{max} = NBS\omega$ (4). Таким чином, при рівномірному обертанні рамки в однорідному магнітному полі в ній виникає е.р.с. самоіндукції, що змінюється за синусоїдальним законом. Підставляючи в (4) значення кутової швидкості $\omega = 2\pi n$, де n – частота обертання рамки, отримуємо $\varepsilon_{max} = 2\pi n NBS = 3,14$ В.

Приклад 14. Котушка довжиною $l=20$ см має $N=400$ витків. Площа поперечного перерізу котушки $S=9\text{см}^2$. Знайти індуктивність котушки L_1 . Яка буде індуктивність котушки L_2 , якщо всередину котушки введений залізний сердечник? Магнітна проникність матеріалу сердечника $\mu=400$.

Розв'язання:

Індуктивність котушки визначається виразом $L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$. Враховуючи, що магнітна проникність повітря $\mu=1$, одержимо $L_1=0,9 \cdot 10^{-3}$ Гн; $L_2=0,36$ Гн.

Приклад 15. Соленоїд довжиною $l=50$ см і площею поперечного перерізу $S=2\text{см}^2$ має індуктивність $L=0,2$ мкГн. При якому струмі I об'ємна густина енергії магнітного поля всередині соленоїда $W_0=1$ мДж/м³?

Розв'язання:

Густина енергії магнітного поля всередині соленоїда визначається за формулою $W_0 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$ (1).

Індукція магнітного поля всередині соленоїда дорівнює $B = \frac{\mu\mu_0 NI}{l}$ (2).

Число витків N можна знайти з виразу для індуктивності соленоїда:

$L = \mu\mu_0 \frac{N^2 S}{l}$, звідки $N = \sqrt{\frac{lL}{\mu\mu_0 S}}$ (3). Підставляючи (3) в (2), отримуємо

$$B = I \sqrt{\frac{\mu\mu_0 L}{Sl}}$$

$$\text{Тоді з (1) } W_0 = \frac{I^2 L}{2lS}, \text{ звідки } I = \sqrt{\frac{2W_0 lS}{L}} = 1 \text{ А.}$$

4. ХВИЛЬОВА ОПТИКА

4.1. Інтерференція світла

4.1.1. Інтерференція світла. Когерентність і монохроматичність світлових хвиль. Часова та просторова когерентність

Оптика вивчає світло, його властивості і взаємодію з речовиною [1, 9, 13]. Під світлом розуміють видиму ділянку електромагнітних хвиль і прилеглі до неї інфрачервону і ультрафіолетову. Світло має подвійну корпускулярно-хвильову природу, одночасно має і хвильові і корпускулярні властивості.

Хвильова оптика є частиною загального вчення про розповсюдження хвиль з урахуванням того, що світло – це електромагнітні хвилі, хвильові властивості електромагнітного випромінювання перевірені на великому експериментальному матеріалі для всієї доступної науці області – від довгохвильового, багатометрового радіовипромінювання, до короткохвильового рентгенівського та γ -випромінювання з довжиною хвилі менш ніж 10 нм.

На межі двох середовищ світло частково відбивається від другого середовища, а частково переходить з першого середовища у друге.

За законом відбиття світовий промінь, що падає на межу двох середовищ, і промінь, відбитий від другого середовища, лежать в одній площині з перпендикуляром, проведеним у точку падіння променя. Кут відбиття за величиною дорівнює куту падіння $|\alpha| = |\alpha'|$ (рис.4.1).

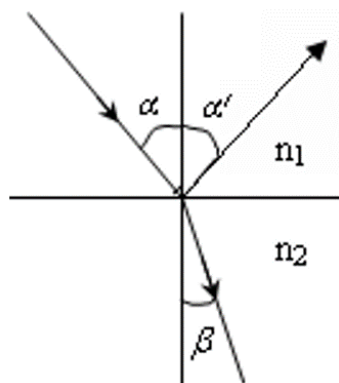


Рис.4.1

За законом заломлення світла промінь, що падає на межу двох середовищ, і промінь заломлений лежать у одній площині з перпендикуляром, проведеним у точку падіння променя; відношення синуса кута падіння α до синуса кута заломлення β є величина стала для даних середовищ (рис.4.1):

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{21} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.1)$$

де n_{21} – відносний показник заломлення другого середовища відносно першого; n_1 та n_2 – абсолютні показники заломлення першого та другого середовищ.

Як було показано при вивченні електромагнітних хвиль фазова швидкість світла v у середовищі

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

де c – швидкість світла у вакуумі; ϵ – діелектрична проникність середовища; μ – магнітна проникність середовища.

Згідно з електромагнітною теорією Максвелла абсолютний показник заломлення $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, і швидкість світла v :

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \quad (4.2)$$

Інтерференція хвиль – це явище накладання двох або кількох когерентних хвиль, при якому відбувається стійке посилення їх в деяких точках простору (максимум інтерференційної картини) і послаблення в інших точках (мінімум інтерференційної картини) в залежності від співвідношення фаз цих хвиль.

У електромагнітній хвилі відбувається коливання векторів напруженості електричної складової E та індукції магнітної складової B :

$$E = E_0 \cos(\omega t - kr + \alpha); \quad B = B_0 \cos(\omega t - kr + \alpha).$$

Дія світла на речовину визначається переважно впливом його електричного поля.

Розглянемо накладання двох світлових хвиль, які збуджені в однорідному і ізотропному середовищі різними джерелами і розповсюджуються в одному напрямку, поздовж осі x :

$$E_1 = A_1 \cos(\omega_1 t - k_1 r_1 + \alpha_1) = A_1 \cos \phi_1, \quad (4.3)$$

$$E_2 = A_2 \cos(\omega_2 t - k_2 r_2 + \alpha_2) = A_2 \cos \phi_2, \quad (4.4)$$

де A_1, A_2 – амплітуда хвиль; ϕ_1, ϕ_2 – фаза хвиль; ω_1, ω_2 – циклічна частота хвиль; k_1, k_2 – хвильове число; α_1, α_2 – початкові фази хвиль; r_1, r_2 – шлях який пройшли хвилі.

Результуюче коливання у точці накладання

$$E = E_1 + E_2 = A \cos \phi = A \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (4.5)$$

де A – амплітуда результуючого коливання, α – початкова фаза.

Згідно з додаванням двох гармонічних коливань:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 \sin \phi_1 + A_2 \sin \phi_2}{A_1 \cos \phi_1 + A_2 \cos \phi_2}$$

Різниця фаз:

$$\phi_2 - \phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2r_2 - k_1r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Можливі два випадки: 1) різниця фаз $\phi_2 - \phi_1$ в точці накладання змінюється протягом часу; 2) різниця фаз $\phi_2 - \phi_1$ не змінюється з часом. У першому випадку хвилі і збуджуючі їх джерела мають назву некогерентних, а в другому – когерентних.

Різниця фаз когерентних хвиль $\phi_2 - \phi_1 = (\omega_2 - \omega_1)t - (k_2r_2 - k_1r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)$ не змінюється з часом, частота і довжина когерентних хвиль однакові, однакове і хвильове число $k_1 = k_2 = k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Цій умові відповідають монохроматичні світлові хвилі однакової частоти.

Для когерентних хвиль

$$\phi_2 - \phi_1 = -(k_2r_2 - k_1r_1) + (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (4.6)$$

Формулу для амплітуди результуючого коливання у точці накладання хвиль можна переписати у вигляді:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos[k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)].$$

Якщо різниця фаз дорівнює парному числу π :

$$k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm 2\pi m, \text{ де } m=0, 1, 2, 3 \dots$$

то

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1 \text{ і } A = |A_1 + A_2|,$$

в цьому випадку спостерігається посилення хвильового процесу.

За умови однакових початкових фаз α різниця ходу хвиль $r_2 - r_1$ буде дорівнювати $\delta = r_2 - r_1 = \pm m\lambda$, де $m=0, 1, 2, 3 \dots$

Співвідношення:

$$\phi_2 - \phi_1 = \pm 2\pi m \text{ та } r_2 - r_1 = \pm m\lambda \quad (4.7)$$

є умовами максимумів інтерференційної картини.

Якщо різниця фаз дорівнює непарному числу π :

$$k(r_2 - r_1) - (\alpha_2 - \alpha_1) = \pm(2m + 1)\pi, \text{ де } m=0, 1, 2, 3, \dots, \quad (4.8)$$

то

$$\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1 \text{ і } A = |A_1 - A_2|,$$

у цьому випадку спостерігається ослаблення хвильового процесу.

При $\alpha_2 = \alpha_1$ різниця ходу хвиль $r_2 - r_1$ буде дорівнювати:

$$\delta = r_2 - r_1 = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Співвідношення:

$$\phi_2 - \phi_1 = (2m + 1)\pi \text{ і } r_2 - r_1 = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}, \quad (4.9)$$

є умовами мінімумів інтерференційної картини, в цьому випадку хвильовий процес ослаблюється.

Інтерференція хвиль приводить до перерозподілу енергії коливань між сусідніми областями середовища. Інтенсивність результуючої хвилі ($I \sim A^2$)

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_2 - \phi_1). \quad (4.10)$$

У точках простору, де $\cos(\phi_2 - \phi_1) = 1$ спостерігаються максимуми, а де $\cos(\phi_2 - \phi_1) = -1$ спостерігаються мінімуми. Таким чином, при накладанні двох когерентних світлових хвиль спостерігається просторовий перерозподіл енергії.

Якщо хвилі E_1 та E_2 до точки спостереження проходять шлях у середовищі з показниками заломлення n_1 та n_2 , то в умовах максимумів і мінімумів інтерференційної картини необхідно замість геометричного шляху r_1 та r_2 враховувати оптичні довжини шляхів L_1 та L_2 . Оптична довжина шляху L чисельно дорівнює добутку відстані r_1 , пройдені світлом в ізотропному середовищі, на показник заломлення n середовища

$$L = nr. \quad (4.11)$$

І різниця ходу $\delta = \Delta L = r_2 n_1 - r_1 n_1$. Умови максимумів і мінімумів інтерференційної картини з урахуванням оптичної довжини шляху:

$$\delta = L_2 - L_1 = \pm m \lambda \text{ (умова максимумів)}, \quad (4.12)$$

$$\delta = L_2 - L_1 = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \text{ (умова мінімумів)}. \quad (4.13)$$

Описаний раніше процес інтерференції є ідеалізованим, він розглядався як процес накладання когерентних хвиль, що є монохроматичними і які описуються виразом $E = E_0 \cos(\omega t - kr + \alpha)$. Це необмежені у просторі хвилі однієї визначеної і постійної частоти ω . Будь-яка реальна світлова хвиля утворюється накладанням коливань різних частот, які знаходяться у більш або менш вузькому інтервалі частот $\Delta\omega$. Це пов'язано з природною шириною спектральних ліній. Атом випромінює світло у вигляді окремих коротко часових імпульсів-хвиль, тому протяжність хвиль є також скінченою. Крім того, амплітуда і фаза неперервно і хаотично змінюються з часом.

Час, за який випадкові зміни фази хвилі досягають значення порядку π , має назву часу когерентності. Якщо хвиля розповсюджується в однорідному середовищі, то фази коливань у визначеній точці простору зберігаються тільки за час когерентності $\tau_{\text{ког}}$. За цей час світло розповсюджується у вакуумі на відстань $l_{\text{ког}} = c\tau_{\text{ког}}$, яка називається довжиною когерентності (c – швидкість світла у вакуумі), або довжиною гармонічного цугу. Довжина когерентності $l_{\text{ког}}$ це відстань, при проходженні якої дві або більше хвиль втрачають когерентність. Інтерференцію світла можна спостерігати якщо оптична різниця ходу світлових хвиль менше довжини когерентності. Чим ближче хвиля до монохроматичної, тим менша ширина $\Delta\omega$ спектру її частот і більший час когерентності і, відповідно, довжина когерентності. Когерентність коливань, які звершуються в одній і тій же точці простору, визначено ступенем монохроматичності, і має назву часової когерентності.

Поряд з часовою когерентністю є просторова когерентність. Просторова когерентність пов'язана з розмірами джерел випромінювання.

У реальній світловій хвилі амплітуда і фаза коливань змінюються не тільки вздовж напрямку розповсюдження хвиль, але і в площині, перпендикулярній до цього напрямку. Випадкові зміни різниці фаз в двох точках цієї площини збільшуються з відстанню між ними. Відстань, на якій різниця фаз досягає порядку π , називається радіусом когерентності $\rho_{\text{ког}}$, або довжиною просторової когерентності.

Радіус когерентності $\rho_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{\varphi}$, де λ – довжина світлових хвиль, φ – кутовий розмір джерела. Коливання, що відбуваються в двох точках, відстань між якими менша $\rho_{\text{ког}}$, будуть когерентними.

4.1.2. Методи отримання інтерференційної картини від двох джерел.

Розрахунок інтерференційної картини від двох джерел.

Інтерференція в тонких плівках

Є кілька методів отримання інтерференційної картини. В цих методах для отримання когерентних світлових хвиль застосовують метод розділення хвиль, що випромінюються джерелом, на дві частини, які після проходження різних оптичних шляхів накладаються одна на одну і інтерферують [1, 9, 13].

1. Метод щілин Юнга

Світло від джерела S попадає на непрозорий екран 1 з малою щілиною A (рис.4.2).

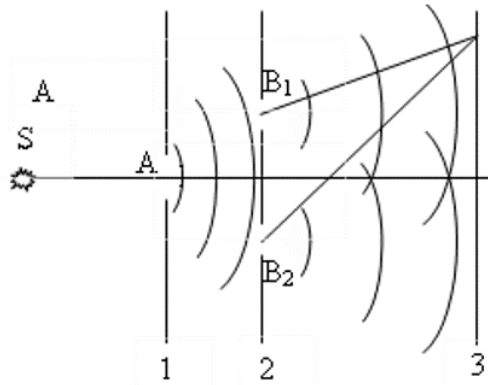


Рис.4.2

Відповідно до принципу Гюйгенса кожна точка хвильової поверхні є новим джерелом напівсферичних хвиль. Напівсферичні хвилі від щілини A підходять до малих щілин B_1 та B_2 , які розташовані симетрично відносно щілини A . Хвилі від щілин B_1 та B_2 , викликані однією хвильовою поверхнею, звершуються в однаковій фазі з однаковими амплітудами і є когерентними. При накладанні цих хвиль на екрані 3 буде спостерігатись чергування максимумів та мінімумів (чергування світлих та темних смуг), в залежності від різниці ходу хвиль.

2. Дзеркала Френеля

Світло від джерела S попадає розбіжним пучком на два плоских дзеркала A_1O та A_2O , які розташовані відносно один одного під малим кутом φ (рис. 4.3).

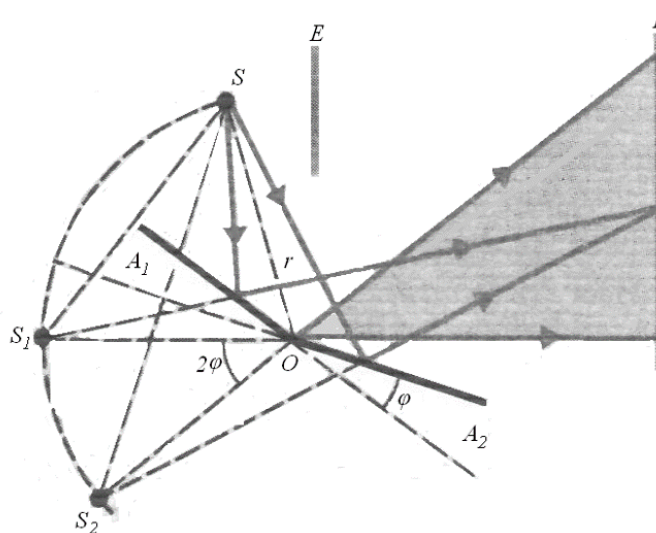


Рис.4.3

Джерело та його зображення S_1 та S_2 знаходяться на одному колі радіуса r з центром у точці O . Світлові пучки, які відбилися від дзеркал та розглядаються як ті, що виходять з уявних джерел S_1 і S_2 , є когерентними. В області перекриття ці хвилі інтерферують. На екрані E спостерігається інтерференційна картина у

вигляді чергування максимумів і мінімумів. Екран E захищений від прямого попадання світла непрозорим екраном E .

3. Біпризма Френеля

Біпризма Френеля складена в двох призм з малими кутами заломлення (рис.4.4).

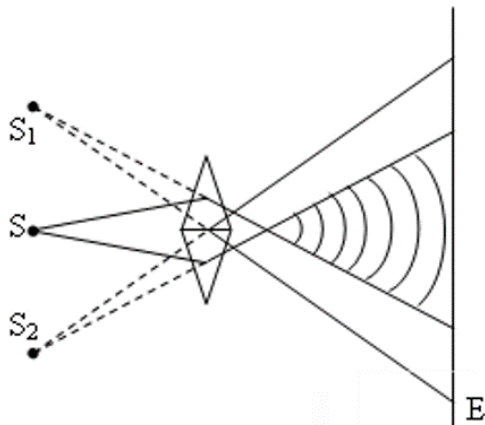


Рис.4.4

Світло з джерела S заломлюється в обох призмах, за біпризмою розповсюджуються світлові промені, які ніби виходять з уявних когерентних джерел S_1 та S_2 . Таким чином на поверхні екрана E відбувається накладання когерентних хвиль і спостерігається інтерференційна картина.

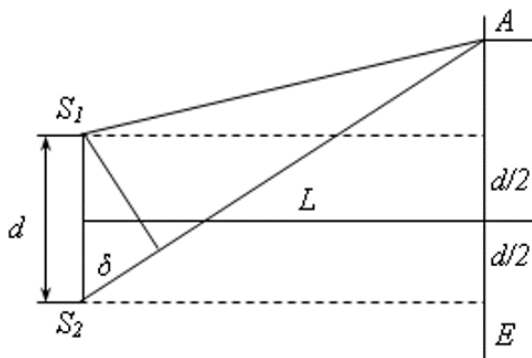


Рис.4.5

Проведемо розрахунок інтерференційної картини на прикладі метода Юнга. Світло від двох джерел (щілин), що знаходяться на відстані d один від іншого, попадає на екран E у довільну точку A (рис.4.5). L – відстань між щілинами та екраном, δ – різниця ходу променів, що ідуть від щілин:

$$\delta = S_2A - S_1A.$$

Як бачимо з рис.4.5:

$$(S_1A)^2 = L^2 + \left(l - \frac{d}{2} \right)^2;$$

$$(S_2A)^2 = L^2 + \left(l + \frac{d}{2}\right)^2.$$

Тому

$$(S_2A)^2 - (S_1A)^2 = 2ld,$$

або

$$\delta = (S_2A) - (S_1A) = \frac{2ld}{(S_1A) + (S_2A)}.$$

Враховуючи, що $L \gg d$, можна вважати $(S_1A) + (S_2A) \approx 2L$, тоді:

$$\delta = \frac{ld}{L}. \quad (4.14)$$

Якщо врахувати умови максимумів та мінімумів інтерференційної картини, то можна визначити місце максимумів та мінімумів на екрані:

$$\frac{l_{max}d}{L} = \pm m\lambda; \quad \frac{l_{min}d}{L} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}.$$

Відстань від центру до максимумів:

$$l_{max} = \pm m \frac{L\lambda}{d}, \text{ де } m=1, 2, 3\dots \quad (4.15)$$

Відстань від центру до мінімумів:

$$l_{min} = \pm \left(m + \frac{\lambda}{2}\right) \frac{L\lambda}{d}, \text{ де } m=1, 2, 3\dots \quad (4.16)$$

Ширина інтерференційного мінімуму (відстань між двома сусідніми максимумами або мінімумами):

$$\Delta l = \frac{L}{d} \lambda. \quad (4.17)$$

Достатньо розповсюдженим випадком інтерференції є інтерференція променів, відбитих від двох поверхонь прозорої пластинки, в тому числі від двох поверхонь тонкої плівки (олійні плівки на поверхні води та інші). Оптична різниця ходу між двома променями 1 та 2 (рис.4.6):

$$\delta = n(OC + CB) - n_0 \left(OA + \frac{\lambda}{2}\right), \quad (4.18)$$

де n – показник заломлення плівки; n_0 – показник заломлення оточуючого середовища. Якщо цим середовищем є повітря, то $n_0=1$; доданок $\frac{\lambda}{2}$ – зумовлений втратою напівдовжини хвилі при відбитті від поверхні плівки. На рис.4.6: d – товщина плівки, i – кут падіння, r – кут заломлення.

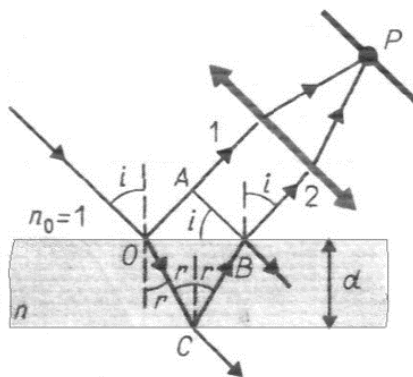


Рис.4.6

Відповідно до рисунка:

$$OC = CB = \frac{d}{\cos r}, \quad OA = OB \sin i = 2d \operatorname{tg} r \sin i.$$

За законом заломлення світла $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n}{n_0} = n$, або $\sin \alpha = n \sin \beta$, тоді:

$$\delta = 2dn \cos r - \frac{\lambda}{2} = 2dn \sqrt{n^2 - \sin^2 r} - \frac{\lambda}{2} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2} \quad (4.19)$$

При накладанні відбитих променів будуть спостерігатись максимуми, коли $\delta = m\lambda$, і мінімуми, коли $\delta = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}$. Колір максимумів визначається довжиною хвилі λ , для якої виконується умова максимумів.

Явище інтерференції застосовується для підтвердження хвильової природи світла, для вимірювання довжини хвиль, а також для поліпшення якості оптичних приладів – просвітлення оптики, для одержання високо відбиваючих покриттів.

Інтерференція світла використовується у ряді точних вимірювальних приладів – інтерферометрів. Інтерферометр застосовується для точних вимірювань показників заломлення газів і їх залежності від температури, тиску і вологості. За допомогою інтерферометра Майкельсона можна вимірювати довжину з похибкою до 10^{-7} м. Цей інтерферометр, як і інтерферометр Жамена, можна використовувати для точних вимірювань показників заломлення.

Інтерференційні методи широко використовуються для перевірки точності виготовлення технічних еталонів довжини, для точних вимірювань коефіцієнтів лінійного розширення і перевірки якості лінз, для дослідження ударних хвиль в газах і т.ін.

4.2. Дифракція світла

4.2.1. Дифракція. Принцип Гюйгенса-Френеля

Сукупність явищ, які зумовлені хвильовою природою світла і спостерігаються при його розповсюдженні у середовищі з різко вираженою оптичною неоднорідністю має назву дифракції [1, 9, 13]. Дифракція – це будь-яке відхилення розповсюдження хвиль поблизу перешкод від законів геометричної оптики, хвиля огинає перешкоди, що зустрічаються на її шляху.

Явище дифракції можна пояснити за допомогою принципу Гюйгенса. За цим принципом кожна точка, до якої дійшла хвиля, є центром вторинних хвиль, а огинаюча цих хвиль дає положення хвильового фронту в наступний момент часу. Френель доповнив принцип Гюйгенса положенням, що вторинні хвилі інтерферують і тому на екрані спостерігається дифракційна картина – чергування максимумів і мінімумів (чергування світлих і темних смуг).

У відповідності з принципом Гюйгенса-Френеля кожний елемент ds хвильової поверхні, утвореної світловою хвилею, яка іде від джерела S_0 (рис.4.7), розглядається як джерело вторинних хвиль.

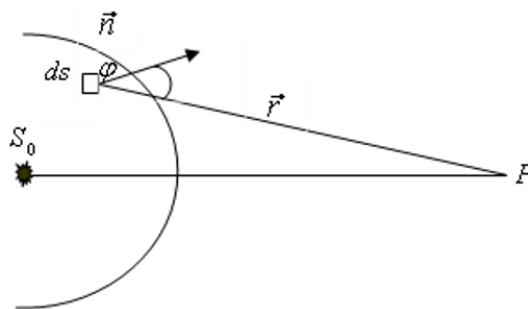


Рис.4.7

Вторинні хвилі, які приходять у точку P , є когерентними, тому що вони утворені від однієї хвильової поверхні. При їх накладанні виникає інтерференційна картина.

Вторинна хвиля, яка приходиться у точку P від елемента ds хвильової поверхні

$$d\zeta = K(\varphi) \frac{A_0 ds}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha), \quad (4.20)$$

де $K(\varphi)$ – коефіцієнт, який залежить від кута φ між зовнішньою нормаллю n до хвильової поверхні і напрямом від елемента ds до точки P ; $K(\varphi)$ монотонно зменшується від 1 при $\varphi=0$ до 0 при $\alpha \rightarrow \pi/2$; A_0 – амплітуда хвилі у точках

елемента ds ; r – відстань від елемента ds до точки P , ζ – відхилення від положення рівноваги.

Амплітуда вторинної хвилі:

$$A = K(\varphi) \frac{A_0 ds}{r}. \quad (4.21)$$

Вторинні хвилі, які приходять у точку P , накладаються одна на одну і результуюче коливання у точці P :

$$\zeta = \int_s K(\varphi) \frac{A_0 ds}{r} \cos(\omega t - kr + \alpha). \quad (4.22)$$

Це і є математичний вираз принципу Гюйгенса – Френеля.

4.2.2. Метод зон Френеля. Прямолинійність розповсюдження світла

Розрахунки за формулою (5.22) достатньо важкі. Френель для простих випадків запропонував метод, з допомогою якого можна визначити амплітуду результуючого коливання у точці P (рис.4.7) [1, 9, 13].

Розглянемо метод зон Френеля на прикладі сферичної хвилі. Розіб'ємо площину хвилі на кільцеві ділянки (зони) таким чином, щоб відстань від кожної наступної зони до точки P збільшувались на половину довжини хвилі – $\frac{\lambda}{2}$ (рис.4.8).

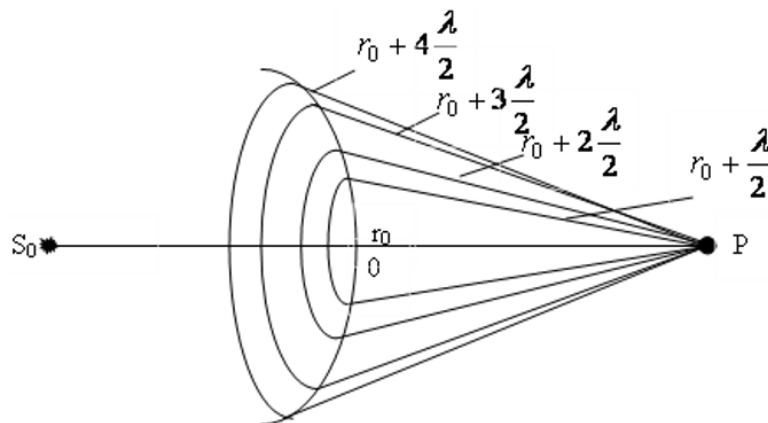


Рис.4.8

Подібне розбиття фронту хвилі можна зробити якщо провести з центром у точці P сфери з радіусами:

$$r_0, r_0 + \frac{\lambda}{2}, r_0 + 2\frac{\lambda}{2}, \dots, r_0 + i\frac{\lambda}{2}.$$

В точці P коливання від двох сусідніх зон досягають у протилежних фазах і при накладанні ослаблюють одне одного, тому амплітуда результуючого коливання у точці P :

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - A_6 + \dots$$

Для обчислення результуючої амплітуди необхідно знати залежність амплітуди від номера зони. Амплітуда вторинної хвилі від i -тої зони Френеля (5.21):

$$A_i = K_i(\varphi) \frac{A_0 dS_i}{r_i}.$$

При збільшенні номера зони $K_i(\varphi)$ зменшується, відстань r_i збільшується. З'ясуємо як змінюється площа зони від її номера.

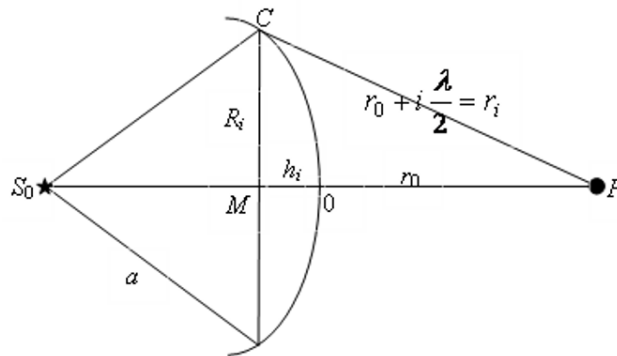


Рис.4.9

Радіус i -тої зони Френеля позначимо через R_i (рис.4.9). Площа i -тої зони дорівнює різниці площ сферичних сегментів, в яких відповідно розташовуються (i) та $(i-1)$ зони Френеля. Площа сферичного сегмента:

$$S_i = 2\pi a h_i,$$

де a – радіус сфери, h_i – висота сферичного сегмента, в якому розташована i -та зона Френеля. З трикутників SCM та PCM :

$$R_i^2 = (CM)^2 = a^2 - (a - h_i)^2 = \left(r_0 + i \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + h_i)^2.$$

Тому

$$h_i = \frac{\left(r_0 + i \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2}{2(a + r_0)} = \frac{i r_0 \lambda + \frac{i^2 \lambda^2}{4}}{2(a + r_0)}.$$

Враховуючи, що $\lambda \ll r_0$ та $\lambda \ll a$ отримаємо:

$$h_i = \frac{ir_0\lambda}{2(a+r_0)}. \quad (4.23)$$

Площа i -тої зони дорівнює різниці площ сегментів з радіусами R_i та $R_{(i-1)}$

$$dS_i = S_i - S_{i-1} = 2\pi a(h_i - h_{i-1}) = \frac{2\pi a(ir_0\lambda - (i-1)r_0\lambda)}{2(a+r_0)} = \frac{\pi ar_0\lambda}{a+r_0} \quad (4.24)$$

Радіус зовнішньої границі i -тої зони

$$R_i = \sqrt{a^2 - (a-b)^2} = \sqrt{2ah_i - h_i^2}.$$

Висота сегмента $h_i \ll a$ для не дуже великих i , тому можна вважати, що $R_i = \sqrt{2ah_i}$, або:

$$R_i = \sqrt{\frac{iar_0\lambda}{a+b}}. \quad (4.25)$$

З формули (5.24) витікає, що площа зони Френеля при не дуже великих i не залежить від номера зони. Тому можна вважати, що із збільшенням номера зон відповідні амплітуди у точці P монотонно зменшуються.

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 > \dots > A_{i-1} > A_i > A_{i+1} > \dots$$

Вираз (4.22) можна записати у вигляді

$$A = \frac{A_1}{2} + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 + \frac{A_3}{2} \right) + \left(\frac{A_3}{2} - A_4 + \frac{A_5}{2} \right) + \dots \quad (4.26)$$

Оскільки внаслідок монотонного зменшення A_i можна вважати, що

$$A_i = \frac{A_{i-1} + A_{i+1}}{2},$$

вирази у дужках в рівнянні (4.26) дорівнюватимуть нулю, тоді:

$$A = \frac{A_1}{2} \quad (4.27)$$

Формула (4.27) свідчить, що результуюча дія у точці P повністю відкритого фронту світлової хвилі, збуджуваної джерелом S_0 , дорівнює половині дії однієї центральної зони Френеля. З великою точністю можна вважати, що у вільному просторі світло від джерела S_0 в точку P поширюється прямолінійно.

Коливання від парних та непарних зон Френеля знаходяться у протифазах, внаслідок чого вони ослаблюють одне одне. Якщо поставити на шляху світлової хвилі пластинку, яка б перекривала усі парні або непарні зони, то інтенсивність світла у точці P різко зросте. Таку пластинку називають амплітудною зонною пластинкою. Ще більшого ефекту можна досягти, якщо не перекривати парні або непарні зони, а змінити фази цих коливань на π . Це можна зробити з допомогою прозорої пластинки, товщина якої в місцях, відповідних парним або непарним зонам, відрізняється на належним чином підібрану величину. Така пластинка називається фазовою зонною пластинкою. У порівнянні з амплітудною зонною пластинкою, фазова дає додаткове збільшення амплітуди у два рази, а інтенсивності світла у чотири рази.

4.2.3. Дифракція Френеля на круглому отворі і диску

Розрізняють два випадки дифракції світла: дифракція Френеля і дифракція Фраунгофера [1, 9, 13]. Дифракція Фраунгофера – це дифракція у паралельних променях. Всі інші види дифракції – дифракція Френеля.

Дифракцію Френеля можна спостерігати, коли на перешкоду падає сферична хвиля, а дифракційна картина спостерігається на екрані, який розташований за перешкодою на кінцевій відстані від неї.

У простих випадках дифракції Френеля вигляд дифракційної картини можна з'ясувати за допомогою метода зон Френеля. Наприклад, дифракцію на круглому отворі і диску.

Світло від точкового джерела S_0 проходячи крізь круглий отвір на непрозорому екрані E_1 , розповсюджується у напрямі S_0P (рис.4.10). Розглянемо результуючу картину на екрані E_2 .

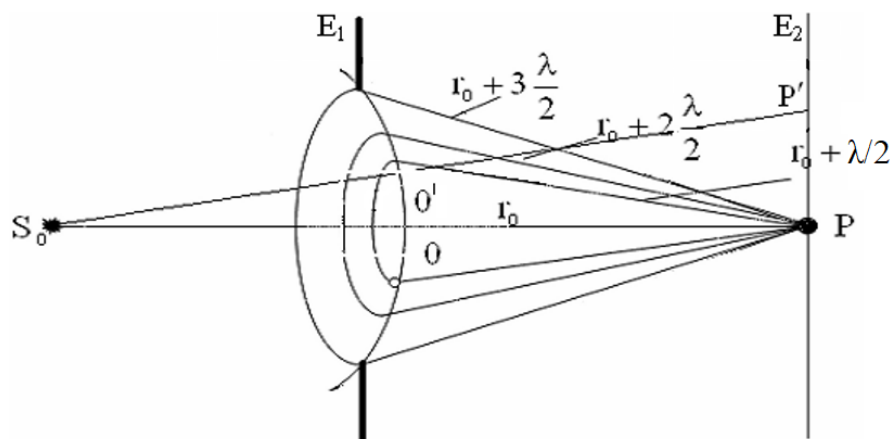


Рис.4.10

Для визначення результуючої інтенсивності у точці P розіб'ємо фронт хвилі, яка підійшла до отвору, на зони Френеля. В залежності від розмірів отвору і довжини хвилі при певному взаємному розташуванні джерела, отвору і екрана E_2 кількість діючих у точці P зон Френеля m буде визначеною – парною або непарною. Якщо кількість діючих зон непарна, то у точці P буде спостерігатись максимум, а якщо парна – то мінімум. Амплітуда результуючого коливання у точці P :

$$A = \frac{A_i}{2} \pm \frac{A_m}{2} \quad (4.28)$$

де знак «+» відповідає непарним m , а «-» – парним m .

Максимальна інтенсивність буде спостерігатись у випадку, коли у отворі розміщується одна зона, а мінімальна – дві зони Френеля. Для того, щоб визначити результуючу інтенсивність у іншій точці екрана E_2 , наприклад у точці P' , потрібно розбити фронт хвилі на зони Френеля з центром у точці O' , яка знаходиться на прямій S_0P' . В цьому випадку частина зон Френеля буде закрыта непрозорим екраном E_1 і інтенсивність у точці P' буде визначатись не тільки числом зон Френеля, що розміщується в отворі, а і ступенем часткового перекриття зон Френеля. Дифракційна картина на екрані E_2 буде мати вигляд чергування концентричних максимумів і мінімумів з центром у точці P , де інтенсивність максимумів спадає при віддаленні від центра екрана E_2 .

Розглянемо дифракцію на круглому диску (рис.4.11).

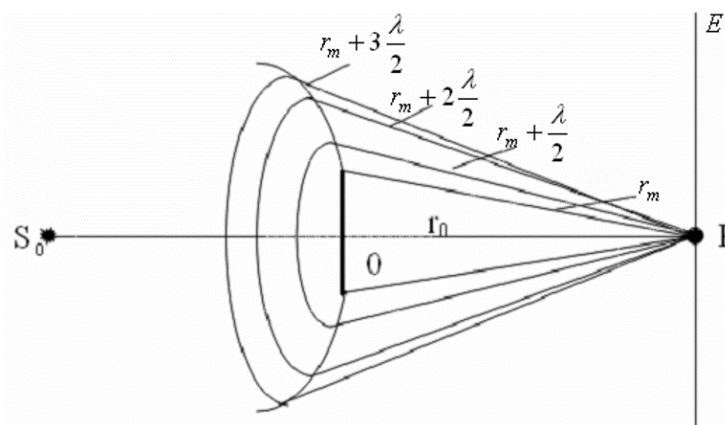


Рис.4.11

Сферична хвиля, яка розповсюджується від точкового джерела S_0 , зустрічає на своєму шляху перешкоду у вигляді диска. Дифракційну картину спостерігаємо на екрані E . Частина зон Френеля m закрыта диском і рахунок зон Френеля необхідно вести починаючи від краю диска з $(m+1)$ -ої зони. Амплітуда результуючого коливання у точці P :

$$A = \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots = \frac{A_{m+1}}{2}. \quad (4.29)$$

При дифракції на круглому диску інтенсивність у центрі екрана відрізняється від нуля. У точці P завжди буде максимум. Навколо точки P розташовані мінімуми та максимуми.

4.2.4. Дифракція Фраунгофера на одній щілині та на дифракційних решітках. Дифракційний спектр

Розглянемо дифракцію Фраунгофера на одній вузькій щілині (рис.4.12) [1, 9, 13]. На перешкоду падає плоска хвиля, а дифракційна картина спостерігається на екрані, який знаходиться у фокальній площині збираючої лінзи, розташованої на шляху світла, що пройшло перешкоду.

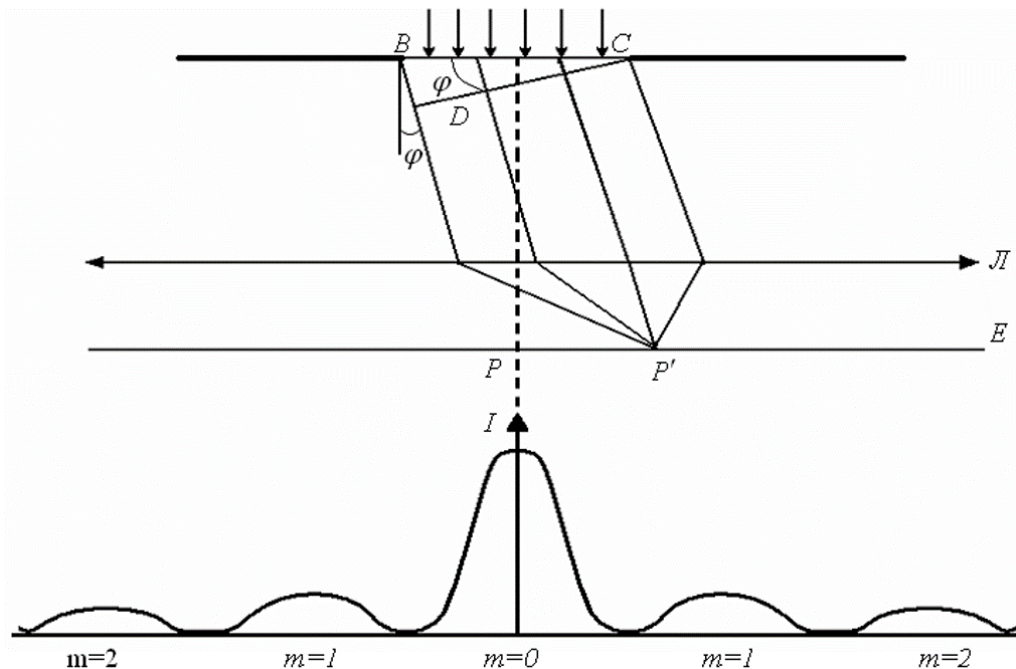


Рис.4.12

Плоска монохроматична хвиля довжиною λ падає нормально до площини щілини. Ширина щілини $BC=a$. Паралельний пучок світла, який пройшов крізь щілину, дифрагує під різними кутами праворуч і ліворуч від початкового напрямку променів. Лінза L збирає паралельні пучки дифрагованих променів у відповідних точках екрана E .

Розіб'ємо хвильову поверхню, яка підходить до щілини, на зони Френеля. Зони Френеля мають вигляд смуг, паралельних ребру щілини. Ширина кожної зони повинна бути така, щоб різниця ходу від сусідніх зон була $\frac{\lambda}{2}$. Різниця ходу між крайніми променями, які ідуть у довільному напрямку φ : $BD=BC \cdot \sin \varphi = a \cdot \sin \varphi$, і

якщо на цій різниці ходу розміщується парна кількість $\frac{\lambda}{2}$ (цьому відповідає парна кількість зон Френеля), то у точці P' буде спостерігатись мінімум дифракційної картини.

Співвідношення:

$$a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2}, \text{ де } m=1, 2, 3, \dots,$$

або

$$a \sin \varphi = \pm m \lambda \quad (4.30)$$

є умовою дифракційного мінімуму.

Якщо на різниці ходу променів BD укладається непарна кількість $\frac{\lambda}{2}$, (відповідно непарна кількість зон Френеля), то у точці P' буде спостерігатись максимум дифракційної картини:

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ де } m=1, 2, 3, \dots \quad (4.31)$$

це умова дифракційного максимуму.

З умов (4.30) та (4.31) можна знайти напрями (кути φ) на точки екрану, в яких виконуються умови максимумів та мінімумів.

На екрані E буде спостерігатись чергування максимумів та мінімумів. Найбільш інтенсивними є центральний максимум, інтенсивність максимумів першого порядку ($m=1$), другого порядку ($m=2$) і т. д., значно менша і спадає з номером максимуму (рис.4.12).

Положення дифракційних максимумів залежить від довжини хвилі λ . При освітленні щілини білим світлом центральний максимум має вигляд білої смуги, тому що при $\varphi=0$ різниця ходу для всіх довжин хвиль дорівнює нулю. Максимум першого, другого та інших порядків мають райдужний колір, тому що умови максимумів в різних точках в межах максимумів, виконуються для різних довжин хвиль. Спектр, який при цьому спостерігається, має назву дифракційного спектру.

Інтенсивність дифракційних максимумів значно збільшується, якщо світло проходить крізь дифракційну решітку. Розглянемо спочатку дифракцію на одновірній дифракційній решітці. Дифракційна решітка уявляє собою систему паралельних щілин однакової ширини, розділених рівними по ширині непрозорими проміжками (рис.4.13).

На рис.4.13: a – ширина щілини, b – ширина непрозорої ділянки, $d=a+b$ – стала дифракційної решітки.

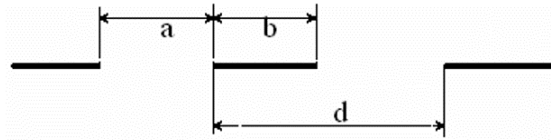


Рис.4.13

Якщо плоска монохроматична хвиля падає нормально до площини дифракційної решітки (рис.4.14), то до всіх щілин дифракційної решітки хвиля дійде одночасно. Тому можна вважати, що всі щілини випромінюють вторинні хвилі в однаковій фазі, тобто вони когерентні. Дифракційна картина на решітці виявляється як результат інтерференції хвиль, які ідуть від усіх щілин.

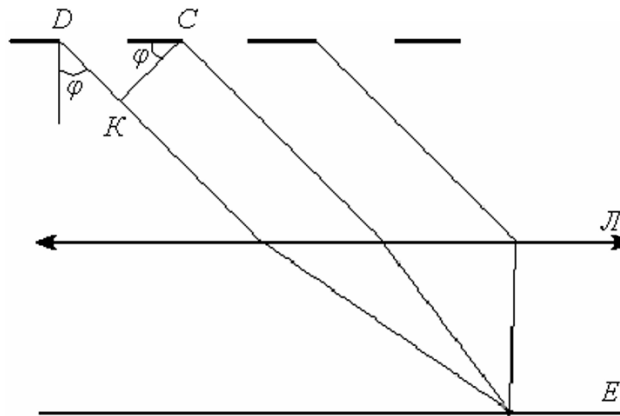


Рис.4.14

Оскільки всі щілини знаходяться на рівній відстані одна від одної, то різниця ходу променів, які ідуть від двох сусідніх щілин, буде для даного кута φ однаковою для всієї дифракційної решітки. Різниця ходу:

$$DK = DC \cdot \sin \varphi = d \cdot \sin \varphi,$$

де d – стала дифракційної решітки.

Різниця ходу залежить від кута φ . У напрямках, в яких різниця ходу дорівнює цілому числу довжини хвилі, будуть спостерігатись дифракційні максимуми:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (4.32)$$

де m – ціле число ($m=0, 1, 2, 3, \dots$).

В напрямках, в яких виконуються умови мінімумів для однієї щілини (5.30), тобто в напрямках, в яких світло не розповсюджується, будуть спостерігатись мінімуми для всієї дифракційної решітки:

$$a \cdot \sin \varphi = \pm m \lambda, \quad (4.33)$$

де a – ширина щілини.

Формула 4.33 є умовою дифракційних мінімумів при дифракції на дифракційних решітках. Умови (4.32) та (4.33) є умовами для головних максимумів та мінімумів.

Якщо на різниці ходу DK (рис.4.14) укладається непарне число напівдовжин хвиль $\frac{\lambda}{2}$, то в цих напрямках будуть теж спостерігатись мінімуми, які називаються додатковими мінімумами.

Умови цих мінімумів:

$$d \cdot \sin \varphi = \pm \frac{m' \lambda}{N}, \quad (4.34)$$

де $m' = 1, 2 \dots N-1, N+1 \dots 2N-1, 2N+1$, а N – кількість щілин у дифракційній решітці.

m' може приймати усі цілі значення, окрім $N, 2N, 3N$, при цих m' умови (4.34) переходять в умови (4.32). Між двома головними максимумами розташовується $N-1$ доповняльних мінімумів, розділених вторинними максимумами, інтенсивність яких мала.

Дифракційна картина на екрані має майже такий же вигляд як і при дифракції на одній щілині, тільки інтенсивність максимумів значно більша, і є додаткові максимуми і мінімуми (рис.4.15).

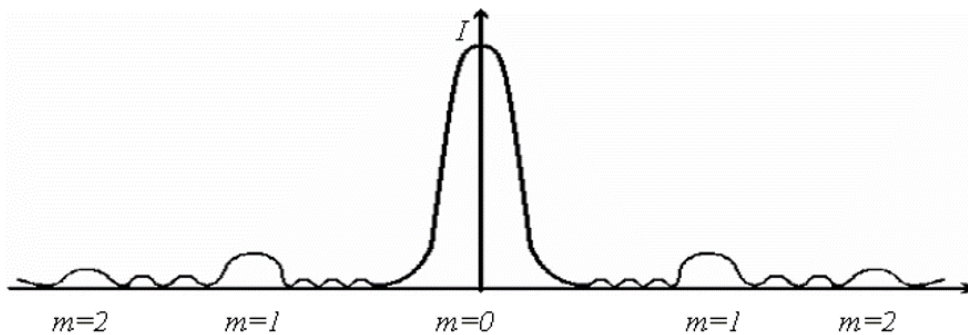


Рис.4.15

Для напрямків, визначених умовами (4.32), коливання від окремих щілин взаємно підсилюють один одне, внаслідок чого амплітуда коливань у відповідній точці екрана:

$$A_{max} = NA,$$

де A – амплітуда коливання від однієї щілини

Інтенсивність $I \approx A^2$, тому

$$I_{max} = N^2 A. \quad (4.35)$$

Інтенсивність максимумів при дифракції на дифракційній решітці в N^2 більш, ніж при дифракції на одній щілині.

Кількість головних максимумів визначається з умови (4.32) – модуль $\sin \varphi$ не може бути більшим одиниці:

$$m \leq \frac{d}{\lambda}. \quad (4.36)$$

При проходженні крізь решітку білого світла всі максимуми, окрім нульового, мають райдужний колір виникає дифракційний спектр, в якому фіолетовий колір розташований ближче до центру дифракційної картини, а червоний – далі від центру. Дифракційна решітка представляє собою спектральний прилад.

4.3. Поляризація світла

4.3.1. Поляризація світла при відбитті та заломленні на границі двох діелектричних середовищ. Закон Брюстера

Випромінювання окремого атома представляє собою електромагнітну хвилю, яка є поперечною хвилею [1, 9, 13]. В ній звершуються коливання векторів \vec{E} та \vec{B} , електричної та магнітної складових електромагнітної хвилі. Площини коливань векторів \vec{E} і \vec{B} взаємно перпендикулярні. Площина коливань $\vec{E} \times \vec{B}$ перпендикулярна до напрямку поширення хвилі. При дії світла на речовину основне значення має електрична складова електромагнітної хвилі. Тому вектор напруженості електричного поля \vec{E} називають світловим вектором. Будь-яке реальне джерело світла складається з великої кількості атомів, які випромінюють електромагнітні хвилі з всілякими орієнтаціями площини коливань вектора \vec{E} . Ці хвилі накладаються одна на одну, в результаті кожному променю, який виходить з джерела світла, відповідає множина різноманітно орієнтованих площин коливань вектора \vec{E} (рис.4.16, на рис. промінь перпендикулярний до площини рисунка). Світло, в якому коливання вектора \vec{E} орієнтовані рівноймовірно за всіма напрямками, називається природним.

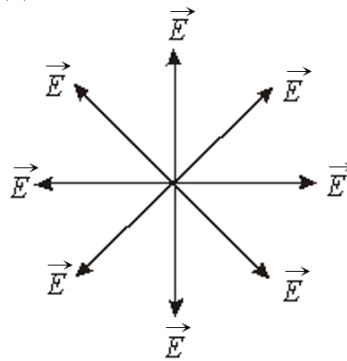


Рис.4.16

Світло, в якому коливання вектора \vec{E} електромагнітної хвилі будь-яким чином впорядковані, називається поляризованим. Якщо коливання вектора \vec{E} відбуваються тільки в одній площині, світло називається плоскополяризованим (рис.4.17).



Рис.4.17

Площина, в якій коливається вектор \vec{E} у плоскополяризованій хвилі, називається площиною коливань або площиною поляризації.

Упорядкованість коливань може заключатись у тому, що вектор \vec{E} повертається навколо променя, одночасно пульсуючи за величиною. В такому випадку кінець вектора \vec{E} описує еліпс і таке світло називається еліптично поляризованим. Якщо кінець вектора \vec{E} описує коло, світло називається циркулярно-поляризованим або поляризованим по колу.

Світло, в якому коливання одного напрямку переважають над коливаннями інших напрямків, називається *частково поляризованим*. Його можна розглядати як суміш природного та плоскополяризованого світла.

Плоскополяризоване світло можна одержати з природного за допомогою приладів, які називаються поляризаторами. Поляризатори вільно пропускають світло, площина коливань вектора \vec{E} якого паралельна площині, яку називають площиною поляризатора, і не пропускають світла, площина коливань вектора \vec{E} якого перпендикулярна площині поляризатора. Як поляризатор можна використовувати анізотропні по відношенню до вектора \vec{E} середовища, наприклад кристали турмаліну, поляроїди. Такий же прилад, застосований для дослідження поляризованого світла, називається аналізатором. Методи одержання поляризованого світла будуть розглянуті в наступних питаннях. Якщо пропускати частково поляризоване світло через поляризатор, повертаючи його навколо напрямку променю, інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор, буде змінюватись від максимального значення I_{max} до мінімального I_{min} .

$$P = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (4.37)$$

P називається ступінню поляризації світла.

Для плоскополяризованого світла $I_{min} = 0$ і $P = 1$, для природного світла $I_{max} = I_{min}$ і $P = 0$. До еліптично поляризованого світла поняття ступень поляризації не використовується.

Світло, яке падає на межу розділу двох діелектриків під кутом падіння $\alpha \neq 0$, частково заломлюється, переходячи в друге середовище, і частково відбивається. При падінні на межу розділу природного світла відбитий і заломлений промені виявляються частково поляризованими. В відбитому промені переважають коливання вектора \vec{E} , перпендикулярні площині падіння (рис.4.18) (точками зображені коливання перпендикулярні площині падіння, стрілками – коливання паралельні площині падіння).

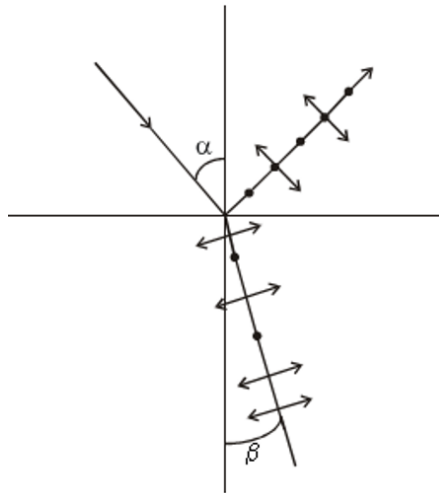


Рис.4.18

При деякому куті падіння, який називається кутом Брюстера, відбитий промінь виявляється поляризованим повністю, а заломлений промінь – частково, але максимально (рис.4.19). Кут Брюстера α_B задовольняє умові:

$$\operatorname{tg} \alpha_B = n_{21} = \frac{n_2}{n_1} \quad (4.38)$$

де n_{21} – показник заломлення другого середовища по відношенню до першого, n_1 і n_2 – абсолютні показники заломлення першого та другого середовищ.

Співвідношення (4.38) називається *законом Брюстера*.

Якщо світло падає на межу двох діелектриків під кутом Брюстера, то відбитий і заломлений промені будуть взаємно перпендикулярні. Для скла з показником заломлення $n = 1,53$ кут Брюстера складає біля 57° .

Відбитий і заломлений промені є результатом взаємодії падаючого світла з середовищем. Падаюча світлова хвиля збуджує у середовищі коливання електронів. В результаті коливання електронів виникають вторинні електромагнітні хвилі з тією ж частотою, як і первинні.

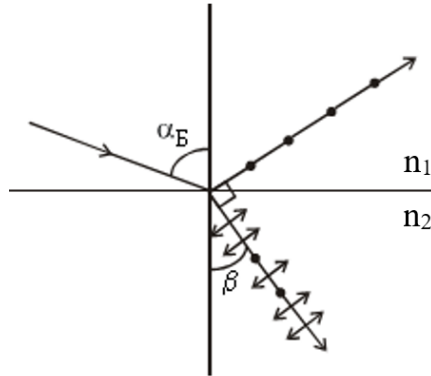


Рис.4.19

Ці хвилі є когерентними з первинними і можуть взаємно інтерферувати. При накладанні первинних і вторинних хвиль і виникають відбиті та заломлені хвилі. Ступінь поляризації заломленого і відбитого променів можна розрахувати за допомогою формул Френеля, які можна одержати з умов, що накладаються на електромагнітне поле на межі двох діелектриків.

Ступінь поляризації заломленого променя можна значно збільшити шляхом багаторазового заломлення при проходженні світла крізь 8-10 скляних платівок, накладених одна на одну. Така сукупність платівок називається стопою. Якщо на стопу падає природне світло під кутом Брюстера, то світло, яке виходить з неї, буде практично повністю поляризованим. Стопа може бути використана як поляризатор або аналізатор.

4.3.2. Полярійди та поляризаційні призми. Закон Малюса

Для одержання плоскополяризованого світла, про яке йшла мова вище, використовуються поляризаційні призми (поляризатори). Плоскополяризоване світло можна одержати при відбитті світла, яке падає на поверхню під кутом Брюстера, а також при проходженні світла крізь стопу. Для одержання плоскополяризованого світла можна використати і явище подвійного променезаломлення. У 1828 році У. Ніколь запропонував поляризаційний прилад, який одержав назву призми Ніколя або просто ніколя.

Призма Ніколя складається з двох частин, виготовлених з ісландського шпата і склеєних канадським бальзамом (рис.4.20). Показник заломлення звичайного променя $n_z = 1,658$, показник заломлення незвичайного променя лежить у межах $1,468 \leq n_H \leq 1,658$.

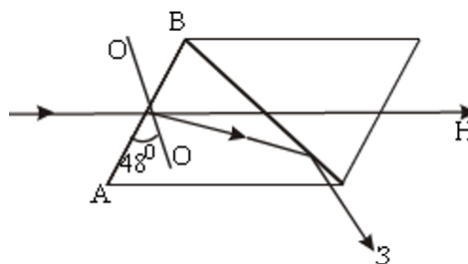


Рис.4.20

Показник заломлення канадського бальзаму $n_{К.Б.} = 1,550$ і знаходиться у межах між n_3 і n_H . Оптична вісь OO призми складає кут 48° з поверхнею призми AB . Оскільки $n_3 > n_{К.Б.}$ при відповідному куті падіння може відбутись повне внутрішнє відбиття і звичайний промінь вийде з кристалу крізь бокову поверхню, незвичайний плоскополяризований промінь пройде крізь призму.

Як поляризаційний прилад можна використовувати і пластинку турмаліну. Подвійнозаломлюючі кристали мають властивість, яку називають дихроїзмом – різне поглинання світла в залежності від орієнтації вектора \vec{E} світлової хвилі. В кристалі турмаліну звичайний промінь практично повністю поглинається при товщині пластинки 1 мм і крізь пластинку проходить тільки незвичайний промінь. Пластинка турмаліну селективно поглинає різні кольори, окрім жовто-зеленого, і може бути використана як світлофільтр.

Сильний дихроїзм спостерігається також у кристалів герпатиту (сульфату йодистого хініну), в цьому кристалі один з променів поглинається на шляху приблизно в 0,1 мм. Кристали герпатиту використовують для виготовлення тонких плівок, які називаються поляроїдами. Поляроїд представляє собою целулоїдну плівку, в яку введена велика кількість однаково орієнтованих дрібних кристалів герпатиту. Природне світло, яке пройшло крізь поляроїд, буде плоскополяризованим. Поляроїди використовують для захисту від сліпучої дії світлових променів.

Нехай два поляризатора (поляризатор і аналізатор) розташовані один за одним таким чином, що площини поляризації OO' та OO' утворюють кут α (рис.4.21) (площини поляризаторів перпендикулярні площині рисунка). Перший поляризатор пропускає світло, в якому площина коливань вектора \vec{E}_0 паралельна площині поляризатора OO' . Вектор \vec{E}_0 можна розкласти на дві складові $E_{||}$ та E_{\perp} , де $E_{||}$ – складова паралельна площині аналізатора, E_{\perp} – складова перпендикулярна площині аналізатора. Складова E_{\perp} буде затримана аналізатором. Крізь обидва поляризатори пройде світло з електричним вектором $E_{||}$, довжина якого $E_{||} = E_0 \cos \alpha$.

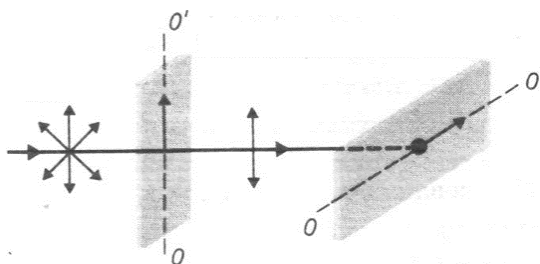


Рис.4.21

Інтенсивність світла пропорційна квадрату амплітуди, тому інтенсивність світла, яке пройшло крізь аналізатор:

$$I = I_0 \cos^2 \alpha \quad (4.39)$$

де I_0 – інтенсивність світла, яке пройшло крізь поляризатор, α – кут між площинами поляризатора і аналізатора або кут між площиною коливань вектора \vec{E} світла, яке пройшло крізь поляризатор, і площиною коливань вектори \vec{E} світла, яке пройшло крізь аналізатор.

Співвідношення (4.39) називається *законом Малюса*.

Якщо крізь поляризатор пропустити природне світло, то інтенсивність світла, яке вийде з поляризатора $I_0 = \frac{1}{2} I_{np}$, оскільки за законом Малюса $I_0 = I_{np} \cos^2 \alpha$, а середнє значення $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}$ (I_{np} – інтенсивність природного світла). При проходженні природного світла крізь поляризатор і аналізатор, кут між площинами яких $\alpha = 90^\circ$, інтенсивність світла, який виходить з поляризатора дорівнює нулю ($I = 0$).

4.3.3. Обертання площини поляризації. Поляриметри та їх використання

При проходженні плоскополяризованого світла крізь деяку речовину спостерігається поворот площини поляризації [1, 9, 13]. Речовина, яка може повертати площини поляризації у відсутності зовнішніх впливів, називається оптично активною.

Оптично активними є деякі кристали (кварц, кіновар та ін.), чиста рідина (скіпідар та ін.), розчини оптично активної речовини у оптично неактивних розчинниках (розчин цукру у воді та ін.).

Розрізняють праворучповертаючі (за годинниковою стрілкою) і ліворучповертаючі (проти годинникової стрілки) оптично активні речовини. При цьому одна і та ж речовина може бути як праворуч так і ліворучповертаюча.

Кут повороту φ площини поляризації оптично активної речовини

$$\varphi = \alpha l, \quad (4.40)$$

де l – товщина шару оптично активної речовини, α – питоме обертання.

Питома обертання – кут повороту площини поляризації при проходженні світлом шару речовини одиночної товщини. Питома обертання залежить від природи речовини, температури та довжини хвилі світла, яке проходить крізь речовину.

У розчинах оптично активної речовини кут повороту:

$$\varphi = [\alpha] c l, \quad (4.41)$$

де $[\alpha]$ – питома обертання розчиненої речовини, c – концентрація розчиненої речовини.

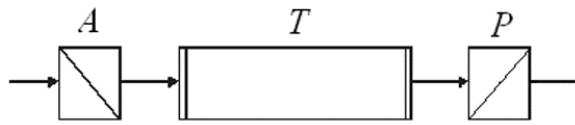


Рис.4.22

Принципова оптична схема поляриметра приведена на рис.4.22, де P – поляризатор, A – аналізатор, T – трубка з розчином оптично активної речовини. Поляризатор і аналізатор установлюють при відсутності розчину оптично активної речовини в положення, при якому кут між площинами поляризатора і аналізатора складає 90° . В цьому випадку, у відповідності із законом Малюса, світло крізь таку систему не пройде і поле зору буде темним. При установленні між поляризатором і аналізатором трубки з розчином оптично активної речовини відбувається поворот площини поляризації і світло частково пройде крізь систему. Для того, щоб світло не пройшло крізь систему, необхідно повернути аналізатор на кут φ . По куту повороту площини поляризації та відомому значенню питомого обертання можна визначити концентрацію розчиненої речовини.

В 1846 році Фарадей виявив, що оптично неактивна речовина під дією зовнішнього магнітного поля може отримати здатність повертати площину поляризації (ефект Фарадея).

Приклади розв'язання завдань Елементи геометричної оптики

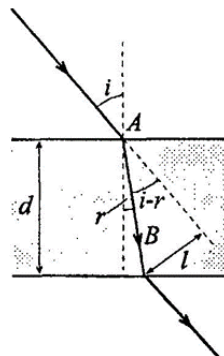
Приклад 1. Промінь світла падає під кутом $i=30^\circ$ на плоскопаралельну скляну пластинку і виходить із неї паралельно первісному променю. Показник заломлення скла $n=1,5$. Яку товщину d має пластинка, якщо відстань між променями $l=1,94$ см.

Розв'язання:

Зміщення променя $l = AB \sin(i - r)$ (1), де r – кут заломлення променя в склі.

Товщина пластинки d зв'язана зі зміщенням променя наступним співвідношенням: $d = AB \cos r$. Оскільки із (1) $AB = \frac{l}{\sin(i - r)}$, та враховуючи, що

$$\sin(i - r) = \sin i \cos r - \cos i \sin r, \text{ то можна отримати } d = \frac{l \cos r}{\sin i \cos r - \cos i \sin r} \quad (2).$$



Відповідно до закону заломлення $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$, де n_1 та n_2 показники заломлення першого та другого середовища, тобто $n_1 = 1$, а $n_2 = n$. Тоді $\frac{\sin i}{\sin r} = n$

та $\frac{\sin i}{n} = \sin r$, а $\cos r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n}$.

Підставляючи в (2), отримуємо $d = \frac{l\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{\sin i\sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos i \sin i}$.

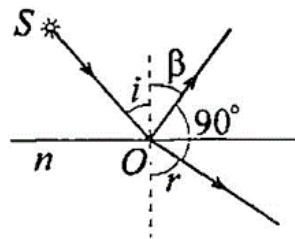
Після розрахунку отримуємо $d = 0,1$ м.

Приклад 2. Промінь падає під кутом i на тіло з показником заломлення n . Як повинні бути зв'язані між собою i та n , щоб відбитий промінь був перпендикулярним до заломленого.

Розв'язання:

Відповідно до закону заломлення $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$, оскільки $n_1 = 1$, а $n_2 = n$, то

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad (1).$$



Із рисунка видно, що $\angle \beta + \angle r + 90^\circ = 180^\circ$.

Із закону відбиття відомо, що $\angle i = \angle \beta$, тоді $\angle i + \angle r = 90^\circ$, звідки $\angle r = 90^\circ - \angle i$.

Підставимо отримане в (1): $\frac{\sin i}{\sin(90^\circ - \angle i)} = n$.

Враховуючи, що $\sin(90^\circ - \angle i) = \cos(-i) = \cos i$, отримуємо $\frac{\sin i}{\cos i} = \operatorname{tgi} = n$.

Приклад 3. Промінь світла виходить із скипидару у повітря. Граничний кут повного внутрішнього відбиття для цього променя $\beta = 42^\circ 23'$. Знайти швидкість поширення світла в скипидарі.

Розв'язання:

Фізичний зміст абсолютного показника заломлення полягає в тому, що він показує, у скільки разів швидкість світла у вакуумі більше швидкості світла у даній речовині, тобто $n = \frac{c}{v}$.

Тоді швидкості поширення світла в скипидарі та повітрі зв'язані з відповідними показниками заломлення співвідношенням: $\frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$ (1).

Оскільки $n_2 = 1$, а $v_2 = c$, то $n_1 = \frac{c}{v_1}$ (2), де $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла. Значення n_1 знайдемо із співвідношення: $\sin \beta = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_1}$, звідки $n_1 = \frac{1}{\sin \beta}$.

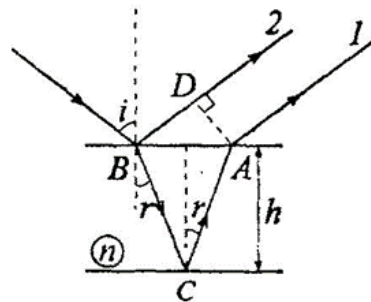
Далі із (2) знайдемо: $v_1 = \frac{c}{n_1} = c \cdot \sin \beta$. Підставляючи числові значення, отримаємо: $v_1 = 2,02 \cdot 10^8$ м/с.

Інтерференція світла

Приклад 1. На мильну плівку падає біле світло під кутом $i = 45^\circ$ до її поверхні. При якій найменшій товщині плівки відбиті промені будуть забарвлені в жовтий колір ($\lambda = 600$ нм)? Показник заломлення мильної води $n = 1,33$.

Розв'язання:

Максимум інтерференції буде спостерігатись, коли світлові хвилі, відбиті від обох поверхонь плівки (див. рисунок), будуть підсилювати одна одну. Для цього оптична різниця ходу Δd променів 1 і 2 повинна дорівнювати цілому числу довжин хвилі: $\Delta d = \frac{\lambda}{2} + n(AC + BC) - AD = k\lambda$.



Доданок $\frac{\lambda}{2}$, враховує, що під час відбиття променя 1 від оптично більш щільного середовища фаза коливань електромагнітного поля змінюється на протилежну, тобто виникає така ж зміна фази, як при проходженні шляху $\frac{\lambda}{2}$.

Множник n враховує зменшення швидкості світла в середовищі. Використовуючи співвідношення: $AC = BC = \frac{h}{\cos r}$; $AD = 2h \cdot \sin i \cdot \operatorname{tgr}$, а також

використовуючи закон заломлення світла, отримуємо: $\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i}$.

$$\text{Звідки } h = \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

При $k=1$ (мінімальна товщина плівки): $h = 0,13 \cdot 10^{-6}$ м.

Приклад 2. Установка для спостереження кілець Ньютона освітлюється монохроматичним світлом, що падає по нормалі до поверхні пластинки. Радіус кривизни лінзи $R = 15$ м. Спостереження ведеться в відбитому світлі. Відстань між п'ятим та двадцятим світлими кільцями Ньютона $l = 9$ мм. Знайти довжину хвилі λ монохроматичного світла.

Розв'язання:

Радіус k -го світлого кільця у відбитому світлі визначається співвідношенням $r_k = \sqrt{(2k-1)R\frac{\lambda}{2}}$.

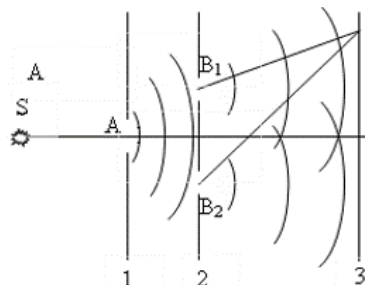
$$\text{Тоді } l = r_{25} - r_5 = \sqrt{(2 \cdot 25 - 1)R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{(2 \cdot 5 - 1)R\frac{\lambda}{2}} = \sqrt{49R\frac{\lambda}{2}} - \sqrt{9R\frac{\lambda}{2}},$$

$$l = 4\sqrt{R\frac{\lambda}{2}}. \text{ Звідси } \lambda = \frac{l^2}{8R} = 675 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

Приклад 3. У скільки разів збільшиться відстань між сусідніми інтерференційними смугами на екрані в досліді Юнга, якщо зелений світлофільтр ($\lambda_1 = 500$ нм) замінити червоним ($\lambda_2 = 650$ нм).

Розв'язання:

Умова інтерференційного максимуму: $y_{\max} = k\frac{L}{d}\lambda$ (1), де $k = 0, 1, 2, \dots$



Умова інтерференційного мінімуму: $y_{\max} = \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{L}{d}\lambda$ (2), де $k = 0, 1, 2, \dots$

Відстань між сусідніми максимумами інтенсивності називається відстанню між інтерференційними смугами, а відстань між мінімумами інтенсивності – шириною інтерференційної смуги.

Із (1) та (2) слідує, що відстань між смугами та ширина смуги мають однакове значення, яке дорівнює $\Delta y = \frac{L}{d} \lambda$.

Тоді відстань між інтерференційними смугами при зеленому світлофільтрі дорівнює $\Delta y_1 = \frac{L}{d} \lambda_1$, а при червоному – $\Delta y_2 = \frac{L}{d} \lambda_2$, де L відстань від екрану до

джерел світла, а d – відстань між джерелами світла. Тоді $\frac{\Delta y_2}{\Delta y_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 1,3$.

Дифракція світла

Приклад 1. Світло від монохроматичного джерела ($\lambda = 600\text{нм}$) падає нормально на діафрагму з діаметром отвору $r = 6\text{мм}$. За діафрагмою на відстані $b = 3\text{м}$ від неї знаходиться екран. Яке число k зон Френеля укладається в отвір діафрагми. Яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним.

Розв'язання:

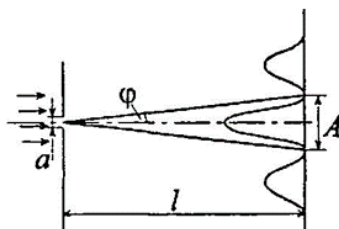
Нехай в отворі діафрагми укладається k зон Френеля, тоді радіус k -ої зони дорівнює радіусу отвору діафрагми: $r_k = \frac{d}{2} = \sqrt{bk\lambda}$. Звідки $k = \frac{d^2}{4b\lambda} = 5$.

Оскільки число відкритих зон непарне, то центр дифракційної картини буде світлим.

Приклад 2. На щілину шириною $a = 20\text{мкм}$ падає нормально паралельний пучок монохроматичного світла ($\lambda = 500\text{нм}$). Знайти ширину A зображення щілини на екрані, який віддалений від щілини на відстань $l = 1\text{м}$. Шириною зображення вважати відстань між першими дифракційними мінімумами, що розміщуються по обидві сторони від головного максимуму освітленості.

Розв'язання:

Із рисунка видно, що $\frac{A}{2} = l \cdot \text{tg} \varphi$.



Оскільки кут φ малий, то можна вважати $\text{tg} \varphi = \sin \varphi$. Тоді $A = 2l \cdot \sin \varphi$
 (1). Умова мінімумів інтенсивності дифракції світла від щілини $a \cdot \sin \varphi = k\lambda$,
 звідки при $k = 1$: $\sin \varphi = \frac{\lambda}{a}$ (2).

Підставляючи (2) в (1), отримаємо: $A = \frac{2l\lambda}{a} = 0,05\text{ м}$.

Приклад 3. Яку кількість штрихів N_0 на одиницю довжини має дифракційна решітка, якщо зелена лінія ртуті ($\lambda = 546\text{ нм}$) в спектрі першого порядку спостерігається під кутом $\varphi = 19^\circ 8'$.

Розв'язання:

Відповідно до умови максимуму дифракційної решітки $d \cdot \sin \varphi = k\lambda$.

Оскільки число штрихів N_0 , що приходяться на одиницю довжини решітки, пов'язане з періодом решітки d співвідношенням $N_0 = \frac{1}{d}$, то $\frac{\sin \varphi}{N_0} = k\lambda$.

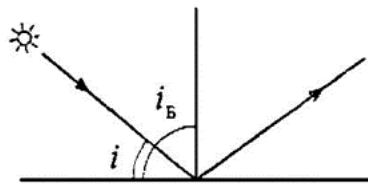
Звідки $N_0 = \frac{\sin \varphi}{k\lambda} = 600$ штрихів.

Поляризація світла

Приклад 1. Під яким кутом i до горизонту повинне знаходитися Сонце, щоб його промені, відбиті від поверхні озера, були найбільш повно поляризовані.

Розв'язання:

Нехай i_B – кут падіння сонячних променів, i – кут між напрямком на Сонце та горизонтом.



За законом Брюстера для умови найбільш повної поляризації відбитого світла: $\text{tg} i_B = n$, де n – показник заломлення води.

Тоді $i_B = \text{arctg}(n) = 53^\circ$. Звідки $i = 90^\circ - i_B = 37^\circ$.

Приклад 2. Природне світло проходить через поляризатор та аналізатор так, що кут між їх головними осями дорівнює φ . Як поляризатор, так і аналізатор поглинають та відбивають 8% світла, що падає на них. В результаті, інтенсивність променя, що вийшов із аналізатора, дорівнює 9% інтенсивності природного світла, що падає на поляризатор. Знайти кут φ .

Розв'язання:

Відповідно до закону Малюса, інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор та аналізатор: $I = I_0'' \cos^2 \varphi$ (1), де I_0'' – інтенсивність природного світла з урахуванням поглинання і відбиття поляризатора та аналізатора.

Інтенсивність світла, що пройшло через поляризатор дорівнює $I_0' = (1 - 0,08)I_0 = 0,92I_0$ (2).

Інтенсивність світла, що пройшло через аналізатор дорівнює $I_0'' = (1 - 0,08)I_0' = 0,92I_0' = 0,8464I_0$ (3).

За умовою інтенсивність світла, що вийшло із аналізатора: $I = 0,09I_0$ (4).

Із формули (1) маємо $\cos \varphi = \sqrt{\frac{I}{I_0''}}$, звідки кут між головними осями поляризатора та аналізатора $\varphi = \arccos\left(\sqrt{\frac{I}{I_0''}}\right)$ (5).

Підставляючи (3) та (4) в (5), отримаємо $\varphi = 70^\circ 54'$.

5. ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ ТА АТОМНОЇ ФІЗИКИ

5.1. Елементи квантової механіки

5.1.1. Корпускулярно-хвильова подвійність властивостей частинок речовини.

Формула де Бройля. Деякі властивості хвиль де Бройля

У 1923 р. французький вчений Луї де Бройль (1892-1987) висунув гіпотезу про універсальність корпускулярно-хвильового дуалізму [1, 9, 13]. Він стверджував, що не тільки фотони, але й електрони і будь-які інші частинки матерії поряд з корпускулярними володіють також і хвильовими властивостями.

Згідно де Бройлю, з кожним мікрооб'єктом зв'язані з однієї сторони корпускулярні характеристики енергія E та імпульс p , а з іншої хвильові частота ν і довжина хвилі λ .

За аналогією з фотонами: $E = h\nu$, $p = \frac{h}{\lambda}$

Будь-якій частинці, що має імпульс, відповідає хвильовий процес з довжиною хвилі, яка визначається по формулі де Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{p}. \quad (5.1)$$

У 1927 р. гіпотеза була підтверджена експериментально американськими фізиками К.Девісоном (1881-1958) і Л.Джермером (1896-1971). Вони визначили, що пучок електронів, який розсіюється від природної дифракційної решітки кристала нікелю дає чітку дифракційну картину. Дифракційний максимум відповідав формулі Вульфа-Бреггів, а довжина хвилі виявилася в точності рівною λ , обчислений по формулі (5.1). Оскільки дифракційна картина визначалась для пучка електронів необхідно було довести, що хвильові властивості має кожний електрон. Це в 1948 р. підтвердив радянський фізик В.А.Фабрикант (1907 р.н.). Він показав, що навіть у випадку слабого пучка, коли кожен електрон проходить через прилад окремо (час між послідовним проходженням електронів у 10^4 разів більше часу проходження електронами приладу), дифракційна картина при тривалій експозиції не відрізняється від дифракційної картини при короткій експозиції для пучка. Згодом подібні дифракційні картини були виявлені для нейтронів, протонів, атомних і молекулярних пучків.

Чи володіють хвильовими властивостями макроскопічні тіла? Наприклад для тіла з характеристиками $m=1\text{г}$ та $v=1\text{М}/\text{с}$ довжина хвилі де Бройля буде $\lambda = 6.62 \cdot 10^{-28}\text{м}$. Така довжина λ лежить за межами області доступної для спостереження (періодичних структур з $d \approx 10^{-28}\text{м}$ немає). Тому вважається, що макроскопічні тіла проявляють тільки корпускулярні властивості.

Уявлення про подвійну корпускулярно-хвильову природу частинок речовини поглиблюється ще й тим, що на частинку переноситься зв'язок її повної енергії E з частотою хвиль де Бройля ν :

$$E = h\nu. \quad (5.2)$$

Це універсальне співвідношення справедливе як для фотонів, так і для інших мікрочастинок.

Розглянемо вільний рух частинки зі швидкістю ν і масою m . Обчислимо фазову і групову швидкості.

Фазова швидкість:

$$u_\phi = \frac{W}{k} = \frac{\hbar W}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{m\nu} = \frac{c^2}{\nu}, \quad (5.3)$$

де $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Групова швидкість:

$$u = \frac{dW}{dk} = \frac{d(\hbar W)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}.$$

Для вільної частинки:

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2},$$

тому маємо:

$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{m\nu c^2}{mc^2} = \nu. \quad (5.4)$$

Отже групова швидкість хвиль де Бройля дорівнює швидкості частинки.

Групова швидкість фотона:

$$U = \frac{pc^2}{E} = \frac{mcc^2}{mc^2} = c.$$

5.1.2. Співвідношення невизначеностей Гейзенберга

Мікрочастинкам не можна приписувати всі властивості частинок і всі властивості хвиль. Необхідно ввести деякі обмеження в застосуванні до об'єктів мікросвіту понять класичної механіки [1, 9, 13].

В класичній механіці тіло рухається по визначеній траєкторії так, що в будь-який момент часу відомі і фіксовані його імпульс і координати. Мікрочастинки через наявність хвильових властивостей відрізняються від класичних тіл. Основна розбіжність полягає в тому, що не можна водночас говорити про точні значення координат і імпульсу. Це впливає з корпускулярно-

хвильового дуалізму (немає λ в даній точці) і оскільки $p=f(x)$, то частинка з визначеним імпульсом має невизначені координати і навпаки.

В.Гейзенберг у 1927 р. прийшов до висновку, що об'єкт мікросвіту не може з наперед заданою точністю одночасно характеризуватися імпульсом (проекції p_x , p_y , p_z) і координатами (x , y , z).

Невизначеність цих величин відповідає умовам:

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p \geq h \\ \Delta y \Delta p \geq h \\ \Delta z \Delta p \geq h \end{cases} \quad (5.5)$$

Якщо $\Delta x = 0$ то $\Delta p \rightarrow \infty$ і навпаки.

Таким чином для мікрочастинок немає станів для яких координати і імпульс були б точно визначені.

Оскільки у класичній механіці приймається, що вимірювання координат і імпульсу може бути зроблене з будь-якою точністю, то співвідношення невизначеності являється таким чином квантовим обмеженням застосування класичної механіки до мікрооб'єктів.

Співвідношення показує з яким ступенем точності можна говорити про траєкторії мікрочастинок.

Запишемо співвідношення невизначеності у виді:

$$\Delta x \Delta v \geq \frac{h}{m}.$$

Чим більше m , тим менше невизначеність.

У квантовій теорії розглядається також співвідношення невизначеностей для E и t :

$$\Delta E \Delta t \geq h.$$

ΔE зростає зі збільшенням Δt :

$$\Delta E \geq \frac{h}{\Delta t}. \quad (5.6)$$

Частота випромінювання фотона також повинна мати невизначеність $\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h}$. Лінії спектра повинні характеризуватися частотою $\nu \pm \frac{\Delta E}{h}$. Дослід показав, що всі спектральні лінії розмиті. Вимірюючи ширину спектральних ліній можна оцінити порядок часу знаходження атому в збудженому стані.

5.2. Будова та лінійчаті спектри воднеподібних систем

5.2.1. Моделі атома Томсона і Резерфорда

Уявлення про атоми як неподільні частинки виникло в древні часи (Демокрит, Епікур, Лукрецій) [1, 9, 13]. До початку XVIII ст. атомістична теорія придбала велику популярність, наявність атома доведено в роботах Лувуазьє (1743-1794) М.В.Ломоносова, Д.Дальтона. Але як і раніше атоми вважалися неподільними частинками. Велику роль зіграли роботи Д.Менделєєва, що порушив питання про єдину природу атомів. У другій половині XIX ст. було доведено, що електрони є складовою часткою будь-якої речовини. На початку XX ст. встало питання про будівлю атома.

Перша модель атома запропонована Д.Томсоном (1903). Відповідно до цієї моделі атом це неперервно заряджена позитивним зарядом куля, усередині якої біля положення рівноваги коливаються електрони. Сумарний негативний заряд електронів та позитивний заряд кулі роблять атом нейтральним.

Велику роль зіграли досліди Е.Резерфорда (1871-1937) по розсіюванню α -частинок у речовині. α -частинки утворюються при радіоактивному перетворенні (заряд $-2e$; маса $-7300 m_e$; володіють високою монохроматичністю; $v=10^7$ м/с). Резерфорд досліджував проходження α -частинок крізь золоту пластину товщиною 1мкм і встановив, що частинки різко відхилялись від первісної траєкторії (до 180°). Він зробив висновок, що це результат взаємодії з позитивним зарядом великої маси. Оскільки значне відхилення було тільки у деяких α -частинок, Резерфорд зробив висновок, що вони проходять поблизу позитивного заряду, що зосереджений у малому об'ємі атома.

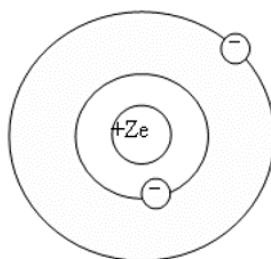


Рис.5.1

На основі своїх дослідів Резерфорд у 1911р. запропонував планетарну модель атома (Рис.5.1, де Z –порядковий номер у таблиці Менделєєва). Розмір ядра 10^{-15} - 10^{-14} м, маса приблизно дорівнює масі атома, розмір атома 10^{-10} м. Оскільки атом нейтральний, то навколо ядра рухаються Z електронів. Для простоти уявимо, що електрони рухаються по круговій орбіті з радіусом r . Кулонівська сила між ядром і електроном надає електрону доцентрове прискорення. Другий закон Ньютона для електрона, що рухається по коловій орбіті:

$$\frac{Zee}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r}. \quad (5.7)$$

В рівнянні r і ν – невідомі, тому рівняння має безліч рішень, значить атом повинен мати неперервний спектр енергії. В дійсності досвід показав, що атоми мають лінійчаті спектри. Згідно з законами електродинаміки прискорені електрони повинні випромінювати електромагнітні хвилі і безупинно втрачати енергію. У результаті втрати енергії електрони упадуть на ядро. Але це суперечить дійсності. Протиріччя потребували створення квантової теорії атома.

5.2.2. Лінійчатий спектр атома водню

Дослідження спектрів випромінювання розріджених газів (тобто спектрів випромінювання окремих атомів) показали, що кожному газу відповідає свій визначений лінійчатий спектр який складається із окремих спектральних ліній чи груп близько розміщених ліній. Самим вивченим є спектр водню.

Швейцарський учений І.Бальмер (1825-1898) підібрав емпіричну формулу, яка описує усі відомі в той час спектральні лінії водню у видимій області спектру [1, 9, 13]:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=3, 4, 5\dots), \quad (5.8)$$

де $R' = 1.10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Ридберга.

Оскільки $\nu = c/\lambda$ то для частот:

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=3, 4, 5\dots), \quad (5.9)$$

де $R = R'c = 3.29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ – стала Ридберга.

Спектральні лінії з різними n , утворюють групу або серію ліній, яку називають серією Бальмера. Зі збільшенням n лінії зближаються. Значення $n \rightarrow \infty$ визначає границю серії, до якої з боку великих частот примикає суцільний спектр.

На початку ХХ ст. були виявлені ще кілька серій. В ультрафіолетовій області – серія Лаймана:

$$\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=2, 3, 4\dots).$$

В інфрачервоній:

Серія Пашена $\nu = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=4, 5\dots);$

Серія Брекета $\nu = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (n=5, 6\dots);$

Серія Пфунда $\nu = R\left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2}\right), (n=6, 7\dots);$

Серія Хемфрі $\nu = R\left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2}\right), (n=7, 8\dots).$

Узагальнена ф-ла Бальмера:

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \quad (5.10)$$

де $m=1, 2, 3\dots$ визначає серію, $n=m+1, m+2\dots$ визначає лінію в серії.

Ці формули підібрані емпірично і довгий час не мали теоретичного обґрунтування. Повторюваність формул з цілими числами, універсальність сталої Рідберга свідчать про глибину фізичного змісту знайденого закону, розкрити який в рамках класичної фізики виявилось неможливим.

5.2.3. Постулати Бора. Досліди Франка і Герца

Перша спроба побудувати квантову теорію атома була зроблена в 1913р. датським фізиком Н.Бором (1885-1962) [1, 9, 13]. Він зв'язав емпіричні закономірності лінійчатих спектрів, модель атома Резерфорда і квантовий характер випромінювання і поглинання світла.

Перший постулат (постулат стаціонарного стану): в атомі існують стаціонарні стани, у яких він не випромінює енергії. Стаціонарним станам атому відповідають стаціонарні орбіти, по яким рухаються електрони. Рух електронів на стаціонарних орбітах не супроводжується випромінюванням електромагнітних хвиль.

У стаціонарному стані атому електрон, рухаючись по круговій орбіті, повинен мати дискретні квантові значення моменту імпульсу, які задовольняють умові:

$$m_e v r_n = n \hbar, (n=1, 2, 3\dots), \quad (5.11)$$

де m_e – маса електрону, v – його швидкість на n -ій орбіті радіуса r_n .

Другий постулат (правило частот): При переході електрона з однієї стаціонарної орбіти на іншу випромінюється (поглинається) один фотон з енергією $h\nu = E_n - E_m$, де E_n, E_m – енергія стаціонарного стану атому до і після випромінювання (поглинання). При $E_n < E_m$ – випромінювання, при $E_m > E_n$ – поглинання (перехід на більш віддалену орбіту).

Набір можливих дискретних частот $\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$ визначає лінійчатий спектр атому.

Німецькі фізики Д.Франк і Г.Герц, вивчаючи методом затримуючого потенціалу зіткнення електронів з атомами газів (1913), експериментально довели

дискретність значень енергії атомів. Основою експериментальної установки (рис.5.2) являлась вакуумна трубка заповнена парами ртуті ($p=13$ Па)

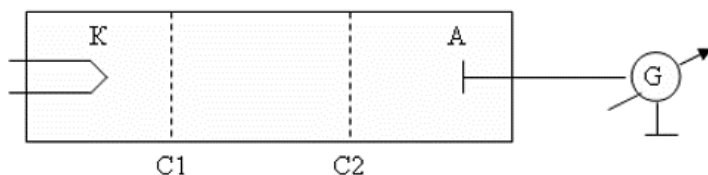


Рис.5.2

Електрони, які емітуються катодом, прискорювалися різницею потенціалів між катодом K і сіткою $C1$. Між сіткою $C2$ і анодом A прикладений невеликий затримуючий потенціал (0,5 В). Електрони, що після зіткнення мають енергію для подолання затримуючого потенціалу, досягають анода.

Згідно Боровській теорії кожен атом при зіткненні з електронами може одержати лише цілком визначену енергію, переходячи при цьому в один зі збуджених станів. Електрони при зіткненні з атомами ртуті повинні втрачати енергію дискретно, визначеними порціями, рівними різниці енергій відповідних стаціонарних станів атома.

З досліду випливає, що при збільшенні прискорюючого потенціалу до 4,86В анодний струм монотонно зростає переходить через максимум і різко падає. Далі максимуми спостерігаються при $2 \times 4,86$ В, $3 \times 4,86$ В і т.д.

Поки енергія електрона менша 4,86 еВ електрони зазнають тільки пружних зіткнень. При 4,86 еВ енергії стає достатньо, щоб викликати непружні зіткнення при яких електрон віддає всю кінетичну енергію атому ртуті, збуджуючи перехід одного з електронів атому з нормального стану на новий енергетичний рівень. Досліди показали, що електрони передають визначені порції енергії. Величина 4,86 еВ є найменшою порцією, тому досліди доказали наявність стаціонарних станів атому.

5.2.4. Спектр атома водню по Бору

Постулати, висунуті Бором, дозволили розрахувати спектр атома водню і воднеподібних систем, що складаються з ядра з зарядом Ze і одного електрона (He^+ , Li^{2+}), а також теоретично обчислити сталу Рідберга [1, 9, 13].

Розглянемо рух електрона у воднеподібній системі на стаціонарній орбіті. Вирішуючи рівняння (5.10) і (5.11) одержимо вираз для n -ої стаціонарної орбіти:

$$r_n = n^2 \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Z e^2}, \quad n=1, 2, 3 \dots \quad (5.12)$$

Для атома водню ($Z=1$) радіус першої орбіти $r_1 = a = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{m_e e^2} = 0,528 \cdot 10^{-10}$ м,

що відповідає розрахункам на підставі кінетичної теорії газів.

Оскільки радіуси виміряти неможливо, для перевірки теорії потрібно звернутися до величин, які можуть бути виміряні експериментально. Така величина – енергія випромінювання чи поглинання атомами водню.

Повна енергія електрона у воднеподібній системі складається з кінетичної і потенціальної енергії у електростатичному полі:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (5.13)$$

при цьому врахували, що $\frac{m_e v^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

Враховуючи квантові значення для радіуса:

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}, \quad n=1, 2, 3, \dots, \quad (5.14)$$

знак «–» означає що електрон знаходиться у зв'язаному стані.

Енергетичні стани атому утворюють послідовність енергетичних рівнів, n – головне квантове число: $n=1$ – основний стан (нормальний), $n>1$ – збуджені рівні.

Теорія Бора великий крок у розвитку атомної фізики. Однак, вона має протиріччя (з однієї сторони застосовує закони класичної фізики, а з другої базується на квантових постулатах). Вона розглянула спектри атома водню і воднеподібних систем, обчислила частоти спектральних ліній, але не змогла пояснити їхню інтенсивність. Серйозний недолік – неможливість опису спектра атому гелію, одного з найпростіших атомів, наступним за атомом водню.

5.3. Елементи фізики ядра

5.3.1. Основні властивості та будова ядра

Велику роль у розумінні будови атомного ядра відіграло відкриття нейтрона [1, 9, 13]. Радянський фізик Д.Д.Іваненко і німецький вчений В.Гейзенберг у 1932 році запропонували протон-нейтронну модель, за якою ядро будь-якого хімічного елемента складається з двох видів елементарних частинок: протонів p і нейтронів n , які пізніше дістали назву нуклонів. Подальшими експериментальними дослідженнями було доведено справедливість цієї моделі, і тепер вона загально визнана.

Протони мають позитивний заряд, який за модулем дорівнює заряду електрона. Нейтрони електрично нейтральні. Маса протона в 1836 разів більша за масу електрона. Маса нейтрона більша від маси протона на 2,5 маси електрона.

Маси нейтрона m_n і протона m_p у вуглецевій шкалі атомних мас (а.о.м.) відповідно дорівнюють: $m_n=1.008665012$ а.о.м., $m_p=1.007276470$ а.о.м. Протон і нейтрон належать до класу ферміонів – частинок, які мають півцілий спин. Кількість протонів у ядрі визначає заряд ядра $+Ze$. Значення Z збігається з

атомним номером відповідного хімічного елемента в періодичній системі Менделєєва. Загальну кількість нуклонів у ядрі називають масовим числом A ядра:

$$A=N+Z, \quad (5.15)$$

де N – кількість нейтронів, Z – кількість протонів.

Атомні ядра позначають символами. Якщо X відповідає символу атомного хімічного елемента в періодичній системі Менделєєва, то символ цього ядра має вигляд ${}^A_Z X$. Ядра, які мають той самий Z при різних A , називають ізотопами. Ізотопи ядер хімічного елемента мають однакове число протонів, але різне число нейтронів у складі ядра.

Існування ізотопів у 1910 році встановив англійський фізик Ф.Содді. Усі хімічні елементи (крім технецію ${}^{99}_{43}Tc$ і прометію ${}^{141}_{61}Pm$) мають ізотопи. Наприклад, водень має три нукліди: легкий з ядром 1_1H (протій), важкий з ядром 2_1H (дейтерій) і штучний з ядром 3_1H (третій). Уран ($Z=92$) має 12 ізотопів з масовими числами від $A=228$ до $A=239$. Усі хімічні елементи – це природні суміші ізотопів. Тому кожний хімічний елемент має відносну атомну масу, яка є середнім значенням атомних мас усіх його ізотопів.

Фізичні властивості ізотопів відмінні від стабільних елементів. Наприклад, температура кипіння протію 20,39 К, а дейтерію 23,57 К.

Ядра, які мають те саме A при різних Z , називають ізобарами. Прикладом ізобарної пари можуть бути ${}^{36}_{16}S$ і ${}^{36}_{18}Ar$, ізобарної тріади – ${}^{50}_{22}Ti$, ${}^{50}_{23}V$ і ${}^{50}_{24}Cr$.

Ядро має спін, який дорівнює векторній сумі спінів нуклонів, що утворюють його. За встановленою термінологією під спіном частинки або ядра розуміють спінове квантове число. Спінові квантові числа протонів і нейтронів дорівнюють $1/2$. Для обчислення спіну ядра має значення парність чи непарність чисел Z і N .

Спін ядра, яке складається з парного числа нуклонів, є цілим числом або нулем. Спін ядра, яке складається з непарного числа нуклонів, півцілий.

Внаслідок того, що нуклони, які входять до складу ядра, мають хвильові властивості, атомне ядро не має різко виражених меж.

Під радіусом атомних ядер розуміють лінійні розміри області, в якій проявляється дія ядерних сил. Експериментальні дані з розсіювання α -частинок речовиною дали можливість установити емпіричну формулу для обчислення радіусу ядра:

$$R = R_0 \cdot A^{1/3}, \quad (5.16)$$

де $R_0 = (1,3\dots 1,7) \cdot 10^{-15}$ м.

Об'єм ядра пропорційний числу нуклонів A , які входять до нього, це означає, що нуклони в усіх ядрах упаковані приблизно з однаковою густиною.

Густина ядерної речовини велика і її значення приблизно відповідає $\rho \approx 10^{17} \text{ кг/м}^3$.

5.3.2. Ядерні сили. Енергія зв'язку ядер

Більшість ядер це стійкі утворення, хоч між протонами, що входять до складу ядра, діють сили кулонівського відштовхування [1, 9, 13]. Стійкість атомних ядер означає, що між нуклонами в ядрах існує певна взаємодія. Про міцність того чи іншого утворення роблять висновки з того, наскільки легко чи важко зруйнувати його: чим важче його зруйнувати, тим воно міцніше. Зруйнувати ядро – це значить розірвати зв'язки між його нуклонами, або, інакше кажучи, виконати роботу проти сил зв'язку між ними. Такий підхід, що ґрунтується на законі збереження енергії, дає можливість зробити ряд важливих висновків про специфіку тих зв'язків, які утримують нуклони в ядрі.

Введемо поняття енергії зв'язку окремого нуклона в ядрі, тобто питомої енергії зв'язку W_{num} . Це фізична величина, що дорівнює роботі, яку необхідно виконати, щоб видалити нуклон з ядра. Повна енергія зв'язку ядра вважається роботою, яку необхідно виконати щоб розщепити ядро на нуклони, які його утворюють. Із закону збереження енергії випливає, що при утворенні ядра виділяється енергія, необхідна для розщеплення ядра на нуклони, з яких воно складається. Повну енергію зв'язку ядра характеризує величина Δm , яку називають дефектом маси. Під дефектом маси розуміють різницю між сумою мас протонів і нейтронів, які перебувають у вільному стані, і масою утвореного з них ядра. Якщо ядро з масою $M_{я}$, утворене із Z протонів з масою m_p кожний, і з $(A-Z)$ нейтронів з масою m_n кожний, то:

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{я}. \quad (5.17)$$

Наявність дефекту маси показує, що для повного розщеплення ядра на нуклони (протони і нейтрони), які його утворюють, необхідно витратити енергію:

$$W_{зв} = \Delta mc^2. \quad (5.18)$$

Величину $W_{зв}$ називають енергією зв'язку (повною енергією зв'язку). Вона є безпосередньою мірою стійкості ядра.

У ядерній фізиці для обчислення енергій застосовують атомну одиницю енергії (а.о.е.) – величину, яка відповідає енергії однієї атомної одиниці маси: $1 \text{ а.о.е.} = c^2 \cdot 1 \text{ а.о.м.} = 9 \cdot 10^{16} \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 1.5 \cdot 10^{-10} \text{ Дж} = 931.1 \text{ МеВ}$.

Як було вже показано, питома енергія зв'язку – це енергія, що припадає на один нуклон:

$$W_{num} = \frac{\Delta W_{зв}}{A}. \quad (5.19)$$

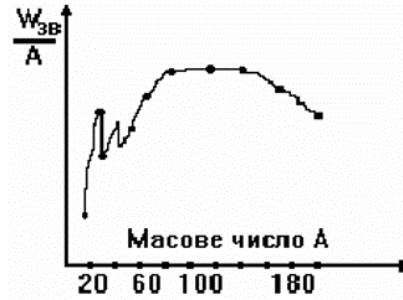


Рис.5.3

Питома енергія зв'язку дуже велика. Вона становить у середньому близько 8 МеВ на один нуклон. На рис.5.3 показано криву залежності питомої енергії зв'язку від масового числа A . З малюнку видно, що різні ядра мають різні значення W_{num} . Найміцніше зв'язані нуклони в ядрах середньої частини періодичної системи Менделєєва. У цих ядрах питома енергія зв'язку близько 8,7 МеВ. Із зростанням числа нуклонів у ядрі питома енергія зв'язку зменшується. Для ядер, розміщених у кінці періодичної системи (наприклад, для урану), ΔW_{num} приблизно становить 7,6 МеВ. Це свідчить про те, що для добування ядерної енергії принципово можливі два методи. Один ґрунтується на поділі важких ядер, другий – на синтезі легких.

До складу ядра входять протони, які зазнають взаємного нуклонівського відштовхування, і нейтрони. Стійкість ядер, які не розлітаються під дією кулонівських сил відштовхування, свідчить про те, що в ядрах діють специфічні сили притягання, які називають ядерними силами. Ядерні сили не можуть бути звичайними силами кулонівської взаємодії. Кулонівська взаємодія між протоном і протоном зводиться до відштовхування, а між нейтроном і протоном та нейтроном і нейтроном її не має. Електричні сили залежать від заряду і малі порівняно з ядерними. Гравітаційні сили також не можуть утримувати частинки в ядрі, бо вони дуже малі. Наприклад, гравітаційна взаємодія двох протонів у 1036 раз менша від їх кулонівської взаємодії. У ролі ядерних сил не можуть виступати і сили магнітної взаємодії. Розрахунки показують, що енергія магнітної взаємодії, наприклад протона і нейтрона в ядрі атома дейтерію 2_1H , становить близько 0,1 МеВ, що значно менше від енергії зв'язку нуклонів у ядрі (2,2 МеВ). Усе це свідчить про те, що ядерні сили не можна звести ні до електричних, ні до магнітних, ні до гравітаційних, вони є специфічним видом сил.

Взаємодія між нуклонами в ядрі є прикладом сильних взаємодій – взаємодій через ядерні сили.

Ядерні сили мають ряд характерних властивостей:

- 1) вони є силами притягання;
 - 2) це короткодіючі сили, їх дія проявляється на відстані порядку 10^{-15} м.
- Відстань, на якій діють ядерні сили, називають радіусом дії ядерних сил;

3) ядерні сили мають властивість зарядової незалежності: ядерні сили, які діють між протоном і нейтроном, між двома протонами або між двома нейтронами, однакові;

4) ядерні сили не є центральними, як, наприклад, сили гравітаційні і кулонівські;

5) ядерні сили мають властивість насичення.

Кожний нуклон взаємодіє не з усіма нуклонами ядра, а тільки з обмеженим числом найближчих до нього нуклонів. Наслідком цієї властивості є майже лінійна залежність енергії зв'язку в ядрі від масового числа A . Якби насичення не було, то кожний нуклон у ядрі взаємодіяв би з рештою $(A-1)$ нуклонів і енергія зв'язку була б пропорційна числу пар нуклонів у ядрі, тобто $2A$. Крім того, питома енергія зв'язку нуклонів у ядрі, якщо число нуклонів збільшується, приблизно стала (рис.5.3). Прикладом повного насичення ядерних сил може бути ядро атома гелію, тобто α -частинка, яка є стійким утворенням із двох протонів і двох нейтронів.

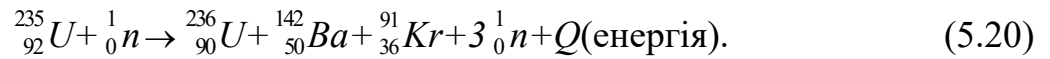
Ядерні сили докладно ще не вивчено. Закінченої теорії ядерних сил немає. Є ядерна речовина, яка може бути в двох станах: мати позитивний заряд або не мати заряду. За гіпотезою, яку висловив у 1935 році японський фізик Х.Юкава, в ядрах протони і нейтрони з величезною швидкістю ніби обмінюються частинками, що мають масу в 200...300 разів більшу, ніж електрон. Пізніше ці частинки назвали π -мезонами. За сучасними уявленнями, нуклон має таку будову: у центрі нуклона розміщене ядро-кern, радіус якого $\sim 0.3 \cdot 10^{-15}$ м. Kern оточений "хмарою", яка складається з мезонів. Носіями ядерних сил є π -мезони: позитивні π^+ , негативні π^- і нейтральні π^0 -мезони.

5.3.3. Радіоактивність. Ядерні реакції. Термоядерні реакції

Відкриття в 1932 році нейтрона і штучної радіоактивності в 1934 році стало поворотним пунктом у дослідженні ядерних реакцій [1, 9, 13]. В 1938 році німецькі фізики О.Ган і Ф.Штрассман встановили, що при бомбардуванні урану його ядро ділиться на два (рідко три) осколки з виділенням великої кількості енергії. Внаслідок поділу ядер урану утворились нові елементи, що належать до середньої частини періодичної системи, – барій, лантан та ін. Стало очевидно, що початкова реакція з ядрами урану ускладнюється великою кількістю наступних процесів. Експериментальні результати пояснили Л.Мейтнер і О.Фріш, які висловили припущення, що ядро урану, ділиться на два ядра (осколки) приблизно з однаковими зарядами і масовими числами. У нормальному стані важке ядро має більш або менш сферичну форму. Ядро, захопивши тепловий нейтрон, переходить у збуджений стан з енергією збудження, яка дорівнює енергії зв'язку захопленого нейтрона (5,8...7,5 MeV). Рух нуклонів у ядрі стає інтенсивнішим, форма ядра швидко і хаотично змінюється і воно розпадається на осколки.

Ядра-осколки, які виникли в процесі поділу, радіоактивні. Їх радіоактивність зумовлена тим, що вони мають надлишок нейтронів над протонами порівняно з ядрами стійких ізотопів. Такі ядра-осколки низкою β -розпадів зменшують свій надлишок нейтронів, перетворюючись у стабільні ядра.

Найтипівішим прикладом реакції поділу є:



Подальші дослідження показали, що під дією нейтронів можуть ділитися ядра й інших важких елементів: ${}_{92}^{238}\text{U}$, ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, ${}_{90}^{232}\text{Th}$ тощо. Одні ядра важких елементів діляться під дією швидких нейтронів (наприклад: ${}_{92}^{238}\text{U}$, ${}_{90}^{232}\text{Th}$), інші – під дією теплових (наприклад: ${}_{91}^{235}\text{U}$, ${}_{91}^{239}\text{Pu}$).

Відкриття поділу ядер урану і деяких важких елементів дало можливість практично здійснити ланцюгову ядерну реакцію. Оскільки при поділі ядра урану, крім ядер-осколків можуть вилітати 2-3 нейтрони, то за сприятливих умов ці нейтрони можуть влучити в інші ядра урану, викликаючи їх поділ. При поділі 2-3 ядер урану вивільняється вже 4-9 нейтронів, які можуть сприяти поділу нових ядер урану з утворенням 8-27 нейтронів і т.д.: виникає самопідтримуючий процес поділу, який і називають ланцюговою ядерною реакцією.

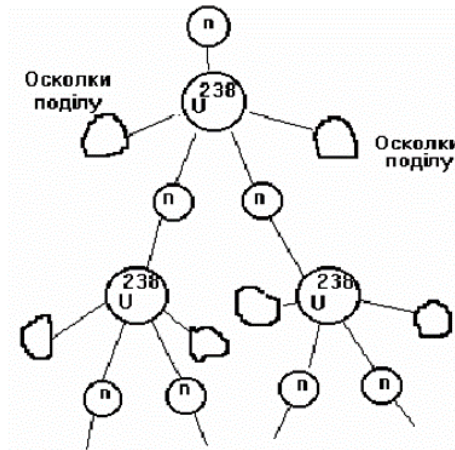


Рис.5.4

Ланцюгова реакція (рис.5.4) супроводжується значним виділенням енергії, тобто є екзотермічною. При поділі одного ядра урану виділяється енергія $\sim 200\text{MeV}$. Визначимо, яка енергія вивільняється від поділу всіх ядер, що містяться в 1 кг ($2,5 \cdot 10^{24}$ ядер) урану 235:

$$W = 2 \cdot 10^2 \cdot 2,5 \cdot 10^{24} = 5 \cdot 10^{26} \text{ MeV} = 8 \cdot 10^{13} \text{ Дж.}$$

Ця енергія еквівалентна тій енергії, яку отримують від згорання приблизно 1800 т бензину або 2500 т кам'яного вугілля. Величезне значення вивільненої енергії спонукало вчених та інженерів шукати шляхи використання ланцюгової ядерної енергії в практичних цілях. Практичне здійснення ланцюгових ядерних реакцій – не таке просте завдання, як здається на перший вигляд. Справа в тому, що природний уран в основному складається з двох нуклідів: 99,3% ${}_{92}^{238}\text{U}$ і 0,7% ${}_{92}^{235}\text{U}$. Теоретичні і експериментальні дані показують, що нейтрони, які

виділяються в процесі поділу ядер урану, сприяють поділ ядер ізотопу урану 235, а ядрами урану 238 вони лише поглинаються, не викликаючи їх поділу, тобто ядра урану 238 не беруть участі в розвиненні ланцюгової реакції. Це є причиною того, що в природному урані ланцюгової реакції немає. Отже для утворення ланцюгової ядерної реакції необхідно розв'язати задачу – поділити природний уран на два його ізотопи. На сьогодні цю складну і трудомістку задачу розв'язано.

Як саме практично можна здійснити ланцюгову реакцію? Якщо всі вторинні нейтрони, які утворюються в процесі поділу, беруть участь у наступних актах поділу, то число нейтронів зростає у геометричній прогресії: отже найважливішою характеристикою розвинення ланцюгової ядерної реакції є коефіцієнт розмноження нейтронів

$$k = \frac{N_i}{N_{i-1}}, \quad (5.21)$$

де N_i – число нейтронів, які спричинюють поділ ядер на попередньому етапі.

Коефіцієнт розмноження визначає також число поділів ядер, спричинене одним поділом попередньої ланки реакції. Якщо $k < 1$, то реакція швидко затихає. Якщо $k = 1$, то ланцюговий процес відбувається із старою інтенсивністю, яку називають критичною. Систему з $k > 1$ називають надкритичною: у цьому разі ланцюговий процес розвивається лавинно і призводить до ядерного вибуху.

Установку, в якій здійснюється керований ланцюговий процес поділу ядер важких елементів, називають ядерним реактором. Перший ядерний реактор було побудовано в Чикагському університеті в 1942 році під керівництвом Е.Фермі.

Розглянемо умови роботи ядерного реактора, в якому як пальне використовують природний уран, збагачений до 5% нуклідом урану 235. Оскільки розвинення ланцюгової реакції можливе тільки під дією теплових нейтронів на ядрах урану 235, то одночасно із збільшенням його концентрації необхідно створити умови для сповільнення вторинних нейтронів до теплових швидкостей. Для цього використовують спеціальну речовину, яку називають сповільнювачем. Ядра речовини сповільнювача повинні в основному сповільнювати, але не поглинати нейтрони. Такою речовиною є важка вода D_2O . Проте добування її у великих кількостях пов'язано з певними труднощами. У звичайній воді на 6000 молекул H_2O є лише одна молекула D_2O , тому в реакторах використовують такі сповільнювачі, як звичайна вода або графіт.

Активна зона реактора, в якій відбувається самопідтримуюча ланцюгова реакція – це графітовий циліндр.

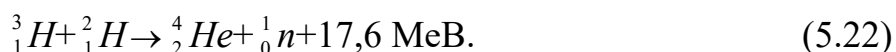
Щоб зменшити витікання нейтронів, активну зону оточено шаром відбивача, роль якого виконують стінки графітового циліндра. Ядерне пальне (уран) вводять в активну зону, як правило у вигляді стержнів, між якими розміщений сповільнювач нейтронів. У процесі ланцюгової реакції температура в активній зоні досягає 800-900 К. Для відведення теплоти через активну зону реактора по трубах пропускають теплоносій, наприклад, звичайну воду або рідкий

металічний натрій. Керують ланцюговою реакцією за допомогою регулюючих стержнів, виготовлених з бору або кремнію, які добре поглинають теплові нейтрони. Ланцюгова реакція, яка розвивається, приводить до того, що число ядер, які діляться, безперервно зростає, тобто збільшується потужність реактора. Щоб ланцюговий процес не набув лавинного характеру, необхідно, щоб коефіцієнт розмноження нейтронів весь час дорівнював одиниці; цього досягають за допомогою регулюючих стержнів. Якщо регулюючі стержні будуть вийняті з активної зони, то $k > 1$, а коли вони повністю всунуті, то $k < 1$. За допомогою стержнів у будь-який момент часу можна припинити розвиток ланцюгової реакції.

Самопідтримуюча ланцюгова реакція може відбуватися в активній зоні ($k > 1$) тоді, коли об'єм її не менше від деякого критичного значення. Мінімальний об'єм активної зони, при якому можливе здійснення ланцюгової реакції, називають критичним об'ємом. Маса подільної речовини, внесена в критичний об'єм, називають критичною. Залежно від будови установок і типу пального критична маса може змінюватися від кількох сотень грамів до кількох десятків тон ядерного пального.

Ядерна енергія може вивільнятися не тільки в процесі поділу важких ядер, але й при злитті (синтезі) легких ядер у важчі. Ці реакції можуть відбуватися при температурі 10^7 К і вище.

За нормальних умов ядра не можуть зливатися, тому що позитивно заряджені ядра зазнають величезних сил кулонівського відштовхування. Під час синтезу легких ядер завдання зводиться до того, щоб зблизити ядра на такі відстані, при яких дія ядерних сил притягання перевищувала б кулонівські сили відштовхування. Щоб атомні ядра злилися треба збільшити їх рухливість, тобто збільшити кінетичну енергію. Цього досягають, підвищуючи температуру. За рахунок одержаної теплової енергії збільшується рухливість ядер і вони можуть підійти одне до одного на такі близькі відстані, що під дією ядерних сил зчеплення зіллються в нове, складніше ядро. Внаслідок злиття легких ядер вивільняється енергія, оскільки нове ядро має велику питому енергію зв'язку. Якщо при поділі важкого ядра урану виділяється енергія порядку 1 МеВ на нуклон, то при синтезі дейтерію і тритію утворюється ядро гелію:



Реакція злиття легких атомних ядер у важчі відбувається при дуже високих температурах (10^7 К і вище) і такі реакції називають термоядерними.

Реакцію (7.43) злиття ядер дейтерію і тритію покладено в основу створення водневої бомби. Запалом у такої бомби є атомна бомба, під час вибуху якої температура має порядок 10^7 К, достатній для перебігу реакції синтезу (яка в цьому випадку є некерованою).

Приклади розв'язання задач Елементи квантової механіки

Приклад 1. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для атома водню, який рухається при температурі $T = 293\text{K}$ з найбільш імовірною швидкістю.

Розв'язання:

Найбільш імовірна швидкість руху атома водню: $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$ (1), де $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – стала Больцмана.

Довжина хвилі де Бройля: $\lambda = \frac{h}{p}$, де $p = mv$. Таким чином, отримуємо:
 $\lambda = \frac{h}{mv}$ (2). Підставляючи (1) в (2), отримаємо: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2kTm}} = 180\text{нм}$.

Приклад 2. Знайти довжину хвилі де Бройля λ для електронів, що пройшли різницю потенціалів $U = 1\text{В}$ та $U = 100\text{В}$.

Розв'язання:

Пучок елементарних частинок має властивості плоскої хвилі, яка поширюється в напрямку руху цих частинок. Довжина хвилі λ , що відповідає даному пучку, визначається співвідношенням де Бройля $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$ (1), де m – маса частинки; v – її швидкість.

Швидкість частинки можна знайти із виразу для її кінетичної енергії $W_k = \frac{mv^2}{2}$, звідки $v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}$. Підставляючи у вираз (1), отримаємо: $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mW_k}}$ (2).

Якщо швидкість частинки сумірна зі швидкістю світла, то формула (2) приймає вид: $\lambda = \frac{h}{m_0v} \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{h}{\sqrt{2m_0W_k + \frac{W_k^2}{c^2}}}$ (3), де $\beta = \frac{v}{c}$; m_0 – маса спокою частинки.

При проходженні електроном різниці потенціалів, він отримує кінетичну енергію: $W_k = \frac{mv^2}{2} = qU$, де q – заряд електрона. Звідси $v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ (4). При $U = 1\text{В}$: $v = 6 \cdot 10^5$ м/с; при $U = 100\text{В}$: $v = 6 \cdot 10^6$ м/с.

У першому випадку для знаходження довжини хвилі де Бройля слід користуватись формулою (2), а в другому – формулою (3).

Після підстановки числових даних отримаємо: $\lambda_1 = 1,22 \cdot 10^{-9}$ м;
 $\lambda_2 = 0,122 \cdot 10^{-9}$ м.

Будова воднеподібних систем

Приклад 1. Знайти радіуси r_k трьох перших борівських електронних орбіт в атомі водню та швидкості v_k електрона на них.

Розв'язання:

На електрон, який рухається в атомі водню по k -тій борівській орбіті, діє кулонівська сила: $F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_k^2}$ (1), де q – заряд електрона.

Дана сила є доцентровою та надає електрону нормальне прискорення: $a_n = \frac{v_k^2}{r_k}$ (2), де v_k – швидкість електрона на k -тій борівській орбіті.

За другим законом Ньютона: $F = ma$ (3). Підставляючи (1) та (2) в (3), отримаємо: $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_k^2} = \frac{mv_k^2}{r_k}$. Звідки $r_k = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 mv_k^2}$ (4).

Згідно першому постулату Бора рух електрона навколо ядра можливий лише по визначених орбітах, радіуси яких задовольняють умовам: $mv_k r_k = k \frac{h}{2\pi}$ (5).

Вирішуючи спільно рівняння (4) та (5), знайдемо $v_k = \frac{q^2}{2\epsilon_0 kh}$; $r_k = \frac{\epsilon_0 k^2 h^2}{\pi m q^2}$.

Підставляючи числові дані отримаємо: $r_1 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ м; $v_1 = 2,19 \cdot 10^6$ м/с; $r_2 = 2,12 \cdot 10^{-10}$ м; $v_2 = 1,1 \cdot 10^6$ м/с; $r_3 = 4,77 \cdot 10^{-10}$ м; $v_3 = 7,3 \cdot 10^5$ м/с.

Приклад 2. Знайти період T обертання електрона на першій борівській орбіті атома водню та його кутову швидкість ω .

Розв'язання:

Радіус k -тої борівської орбіти електрона в атомі водню та швидкість руху електрона по k -тій орбіті відповідно дорівнюють $r_k = \frac{\epsilon_0 k^2 h^2}{\pi m q^2}$ (1);

$v_k = \frac{q^2}{2\epsilon_0 kh}$ (2). Період обертання електрона по k -тій орбіті дорівнює:

$T_k = \frac{2\pi r_k}{v_k}$ (3).

Підставляючи (1) та (2) в (3), отримаємо $T_k = \frac{4\epsilon_0^2 k^3 h^3}{\pi m q^4}$ (4). Для $k=1$ знайдемо $T_1 = 1,52 \cdot 10^{-16}$.

Кутова швидкість руху електрона по k -тій орбіті $\omega_k = \frac{2\pi}{T_k}$ (5).

Підставляючи (4) в (5), отримаємо $\omega_k = \frac{\pi m q^4}{2 \varepsilon_0^2 k^3 h^3}$. Для $k=1$ знайдемо $\omega_1 = 4,13 \cdot 10^{16}$ рад/с.

Приклад 3. Знайти потенціал іонізації U_i атома водню.

Розв'язання:

Потенціал іонізації U_i атома визначається співвідношенням $U_i = A_i$, де A_i – робота по віддаленню електрона з нормальної орбіти на нескінченність.

Для атома водню $A_i = h\nu = hRc \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$, де $R = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ – стала Рідберга. При $k=1$ та $n=\infty$ маємо: $A_i = hRc$. Тоді потенціал іонізації $U_i = \frac{A_i}{q} = \frac{hRc}{q} = 13,6 \text{ В}$.

Елементи фізики ядра

Приклад 1. Скільки атомів полонія розпадеться за час $\Delta t = 1$ доба із $N = 10^6$ атомів.

Розв'язання:

За час Δt розпадеться число атомів $|\Delta N| = \lambda N \Delta t$ (1). Дана формула справедлива за умови $\Delta t \ll T_{1/2}$, де $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$ – період напіврозпаду.

Період напіврозпаду полонію $T_{1/2} = 138$ діб (табличні дані), відповідно, оскільки $\Delta t \ll T_{1/2}$, число атомів, що розпадаються, можна визначити за формулою (1). Підставляючи числові дані, отримаємо: $|\Delta N| = \frac{\ln 2}{\lambda} N \Delta t = 5025$ атомів.

Приклад 2. Знайти сталу розпаду λ радону, якщо відомо, що число атомів зменшується за час $t = 1$ доба на 18,2%.

Розв'язання:

Число атомів радіоактивної речовини dN , що розпадається за час dt , пропорційне числу наявних атомів і визначається співвідношенням: $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$,

звідки розділяючи змінні, отримаємо: $\frac{dN}{N} = -\lambda dt$.

Інтегруючи вираз, отримаємо: $\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t$, звідки постійна розпаду

$$\lambda = \frac{\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{t} \quad (1).$$

З умови задачі $N = (1-x)N_0$ (2), де N – число атомів після проходження часу t ; $x = 0,182$ – доля атомів, що розпались за час t . Підставляючи (2) в (1), отримуємо $\lambda = \frac{N_0(1-x)}{t} = 2,33 \cdot 10^{-6} \text{ c}^{-1}$.

Приклад 3. Знайти число протонів та нейтронів, що входять в склад ядер трьох ізотопів магнія: а) ${}^{24}_{12}\text{Mg}$; б) ${}^{25}_{12}\text{Mg}$; в) ${}^{26}_{12}\text{Mg}$.

Розв'язання:

Ядро позначається тим же символом, що і нейтральний атом: ${}^A_Z X$, де X – символ хімічного елемента; Z – зарядове число (атомний номер, число протонів в ядрі); A – масове число ядра (число нуклонів в ядрі).

Число нейтронів в ядрі $N = A - Z$.

Зурахуванням вищевикладеного знайдемо:

а) ядро ${}^{24}_{12}\text{Mg}$ утримує 12 протонів та 12 нейтронів;

б) ядро ${}^{25}_{12}\text{Mg}$ утримує 12 протонів та 13 нейтронів;

в) ядро ${}^{26}_{12}\text{Mg}$ утримує 12 протонів та 14 нейтронів.

Приклад 4. Знайти енергію зв'язку ядра ізотопу літія ${}^7_3\text{Li}$.

Розв'язання:

Енергія зв'язку ядра будь-якого ізотопу визначається співвідношенням: $W_{зв} = \Delta m c^2$, де Δm – дефект маси, який показує різницю між масою частинок, що входять до складу ядра, та масою ядра.

Дефект маси дорівнює: $\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - M_{\text{я}} \quad (1)$, де $m_p = 1,00759 \text{ а.о.м}$ – маса протона; $m_n = 1,00899 \text{ а.о.м}$ – маса нейтрона; $M_{\text{я}} = 7,01823 \text{ а.о.м}$ – маса ядра ізотопу ${}^7_3\text{Li}$ (табличні дані).

Підставляючи числові дані у рівняння (1), отримаємо: $\Delta m = 0,0405 \text{ а.о.м}$.

Масі 1 а.о.м відповідає енергія 931 MeV , тоді енергія зв'язку ядра ${}^7_3\text{Li}$ дорівнює $\Delta W_{зв} = 0,0405 \cdot 931 = 37,7055 \text{ MeV}$. Таку енергію необхідно витратити, щоб розщепити ядро ${}^7_3\text{Li}$ на нуклони.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Погожих, М. І. Фізика [Текст] : навчальний посібник / М. І. Погожих, М. М. Цуркан, А. О. Пак, Ж. В. Воронцова ; Харк. держ. ун-т харч. та торгівлі. – Х., 2012. – 466 с.
2. Механіка. Молекулярна фізика та термодинаміка. Електростатика [Електронний ресурс] : навч. посібник / М. І. Погожих, А. О. Пак, М. А. Чеканов, Л. В. Купріянова. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2019. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.
3. Погожих М. І. Електромагнетизм. Оптика. Атомна фізика: практичні завдання для самостійної роботи : навч. посібник [Електронний ресурс] / М. І. Погожих, А. О. Пак, Л. В. Рурак. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2018. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.
4. Фізика та фізичні методи дослідження: практичні завдання для самостійної роботи з розв'язанням [Електронний ресурс] : навч. посібник / М. І. Погожих, А. О. Пак, М. А. Чеканов. – Електрон. дані. – Х. : ХДУХТ, 2020. – 1 електрон. опт. диск (CD-ROM); 12 см. – Назва з тит. екрана.
5. Спольнік О.І., Гайдусь А.Ю., Каліберда Л.М. Механіка. Молекулярна фізика. Термодинаміка. Підручник. Харків, КП «Міська друкарня», 2017 р. (ISBN 978-617-619-192-6).
6. Спольнік О.І., Каліберда Л.М. Підручник. Електромагнетизм. – Харків, КП «Міська друкарня», 2017 р. (ISBN 978-617-619-202-2).
7. Каліберда Л.М. , Спольнік О.І. Посібник. Фізика. – Харків, КП «Міська друкарня», 2018 р. (ISBN 978-617-619-216-9).
8. Спольнік О.І., Власенко В.Г., Каліберда Л.М. Курс фізики. Посібник. (Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. 1.07.2002 р. за № 14/182-1416. ISBN 5-7763-1104-7.), Харків, 2005 р.
9. Погожих М.І., Фощан А.Л., Цуркан М.М. Фізика і фізичні методи дослідження сировини та матеріалів: Навчальний посібник. – Харків: ХДУХТ, 2008 р. – 279 с.
10. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно модульна система: Навчальний посібник у 2-х ч. – Ч.1 / В. В. Куліш, А. М. Соловйов, О. Я. Кузнецова, В. М. Куліщенко. – К.: НАУ, 2004. – 456 с.
11. Фізика для інженерних спеціальностей. Кредитно модульна система: Навчальний посібник у 2-х ч. – Ч.2 / В. В. Куліш, А. М. Соловйов, О. Я. Кузнецова, В.М.Куліщенко. - К.: НАУ, 2005. – 380 с.
12. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики : у 3-х томах: навч. посіб. для студ. вищ. тех. і пед. спец. ВНЗ. / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик. – 2-е вид., випр. – К.: Техніка, 2006. – 1502 с.
13. Погожих, М. І. Фізичні основи обробки сировини [Текст] : навчальний посібник / М. І. Погожих, А. О. Пак ; Харк. держ. ун-т харч. та торгівлі. – Х., 2011. – 82 с.

Навчальне видання

ПАК Андрій Олегович
ПОГОЖИХ Микола Іванович
СМЕТАНКІНА Наталля Володимирівна
СИЧОВА Тетяна Олександрівна
СІНЯЄВА Ольга Володимирівна

ФІЗИКА

Навчальний посібник

В авторській редакції