ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Ігор Стороженко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

для здобувачів вищої освіти

Харків 2024

УДК 512.64, 514.12

С82

Схвалено
Вченою радою Державного біотехнологічного університету
28 червня 2024 р.

Р е ц е н з е н т и:

Ю. В. Аркуша, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізичної і біомедичної електроніки та комплексних інформаційних технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна;

Н. Б. Кащена, доктор економічних наук, завідувачка кафедри обліку, аудиту та оподаткування Державного біотехнологічного університету.

С т о р о ж е н к о І . П .

С82 **Вища математика: підручник** / І. П. Стороженко. – Харків, 2024. – 376 с. : іл. 87.

У підручнику викладено основи лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу, включаючи теорію границь, диференціальне та інтегральне числення, векторний аналіз, звичайні диференціальні рівняння, числові та функціональні ряди. Підібрані задачі для самостійного розв'язання з відповідями та приклади розв'язування типових задач. Підручник призначено для організації аудиторної та самостійної роботи здобувачів вищої освіти всіх галузей знань, зокрема природничих, інженерних, технологічних, соціально поведінкових та управлінських спеціальностей у вищих навчальних закладах ІІІ – IV рівня акредитації.

УДК 512.64, 514.12

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Якщо що і дає ясне уявлення про математику, так це алгебра. Бар'єр повсякденності тут долається легко і просто. При цьому виявляється, що дивні речі знаходяться не в туманній дали, а зовсім поряд.

Алгебра вивчає математичні операції, відношення й утворення, що базуються на них. Такими утвореннями є многочлени, алгебраїчні рівняння й алгебраїчні структури. Вивчення властивостей композицій різного виду в XIX столітті привело до думки, що основне завдання алгебри – це вивчення властивостей операцій незалежно від об'єктів, до яких вони застосовуються. З того часу алгебру стали розглядати як загальну науку про властивості й закони композиції операцій. Алгебра складається з декілька розділів. Це елементарна алгебра, яка вивчає звичайні алгебраїчні рівняння від першого до четвертого порядку. Абстрактна або загальна алгебра – вивчає алгебраїчні структури такі як групи, кільця, поля; універсальна алгебра – алгебраїчні властивості спільні для всіх алгебраїчних структур; алгебраїчна теорія чисел – числа в різних алгебраїчних структурах; комутативна алгебра – комутативні кільця. Алгебраїчна геометрія – застосовує абстрактну алгебру до задач геометрії, а алгебраїчна комбінаторика до задач комбінаторики, і навпаки. Об’єктом вивчення даного курсу є лінійна алгебра. Лінійна алгебра – важлива частина алгебри, що вивчає лінійні простори, тобто вектори, векторні простори, лінійні відображення і системи лінійних рівнянь. Добре відомо, що вектора часто зустрічаються в математиці та її прикладних застосуваннях. Лінійна алгебра широко використовується у природничих і економічних науках. До лінійної алгебри в свою чергу відносять теорії лінійних рівнянь, визначників, матриць, векторних просторів і лінійних перетворень у них, форм (наприклад, квадратичних), інваріантів та тензорне числення. Деякі із цих теорій буде розглянуто.

РОЗДІЛ 1. МАТРИЦІ

1.1. Комплексні числа

Число – абстрактне поняття, яке використовується для кількісної характеристики відносини структур. Більш вищий ступень абстракції мають *змінні*, коли одному символу ставиться у відповідність безліч чисел. Змінні прийнято позначати літерами латинського або грецького алфавіту.

Розрізняють числа натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні, комплексні та кватерніони.

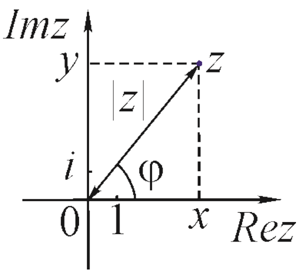
Дійсні числа, що включають раціональні та ірраціональні числа, призначені для кількісного опису безперервних величин.

Комплексне число – впорядкована пара дійсних чисел (x, y).

Число $z = x + yi$, де x і y – будь-які дійсні числа, а $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця, називається комплексним числом. Дійсні числа x та y називаються, відповідно дійсною й уявною частинами комплексного числа z і позначаються $x = Re\, z$ та $y = Im\, z$.

Форми комплексного числа:

1) Алгебраїчна $z = x + yi$;
2) Експоненціальна $z = |z|e^{i\varphi}$, де $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$– модуль комплексного числа, $\varphi = \arg(z) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$ – аргумент комплексного числа;
3) Тригонометрична $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$;
4) Матрична (дивись розділ 1.3) $z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.



Формула Ейлера: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Звідси відоме співвідношення, яке зв’язує дійсну одиницю, уявну одиницю, число π та експоненту e: $e^{i\pi} = 1$

Операції над комплексними числами

Нехай $z_1 = x_1 + y_1 i = |z_1|e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = x_2 + y_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$.

1. *Еквівалентність двох комплексних чисел.* $z_1 = z_2$, якщо

$$x_1 = x_2 \text{ та } y_1 = y_2 \text{ або}$$

$$|z_1| = |z_2| \text{ та } \varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. *Сума двох комплексних чисел* $z = z_1 + z_2$:

$$z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i;$$

$$z = z_1 + z_2 = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_1||z_2|\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}\, e^{i\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}.$$

3. *Добуток двох комплексних чисел* $z = z_1 \cdot z_2$:

$$z = z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2)i;$$

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

4. *Спряження комплексного числа* $z = x + yi = |z|e^{i\varphi}$:

$$\bar{z} = x - yi = |z|e^{-i\varphi}.$$

5. *Ділення двох комплексних чисел* $z = \frac{z_1}{z_2}$:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)i}{x_2^2 + y_2^2};$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

6. *Степінь комплексного числа* (*Формула Муавра*):

$$z^n = |z|^n e^{in\varphi}.$$

7. *Корінь комплексного числа*:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

8. *Логарифм комплексного числа.*

На практиці використовується майже виключно натуральний комплексний логарифм, визначений як безліч всіх чисел q таких, що $e^q = z$. Якщо представити $z = |z|e^{i\varphi}$, то

$$Ln(z) = \ln|z| + i(\varphi + 2\pi k),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Значення, що отримано при $k = 0$, називається *головним значенням комплексного натурального логарифма*.

Приклади операцій з комплексними числами

1. Обчислити значення $z = z_1 + 3z_2$, якщо $z_1 = 3 + 5i$ та $z_2 = 2 - i$.

Розв'язання.

$$z = z_1 + 3z_2 = 3 + 5i + 3(2 - i) = 3 + 6 + (5 - 3)i = 9 + 2i.$$

Відповідь: $z = 9 + 2i$

2. Обчислити значення $z = z_1 \cdot z_2$, якщо $z_1 = 3 + 5i$ та $z_2 = 2 - i$.

Розв'язання.

$$z = z_1 \cdot z_2 = \big(3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1)\big) + (3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2)i = 11 + 7i.$$

Відповідь: $z = 11 + 7i$.

3. Обчислити значення $z = \frac{z_1}{z_2}$, якщо $z_1 = 3 + 5i$ та $z_2 = 2 - i$.

Розв'язання.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 5i}{2 - i} = \frac{(3 + 5i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{(6 - 5) + (3 + 10)i}{4 + 1} = \frac{1}{5} + \frac{13}{5}i = 0{,}2 + 2{,}6i.$$

Відповідь: $z = 0{,}2 + 2{,}6i$

4. Обчислити $q = z^3$, якщо $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Розв'язання.

Модуль комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$:

$$|z| = \sqrt{1 + 3} = 2.$$

Аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

$$q = z^3 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 8e^{i\pi} = 8(\cos\pi + i\sin\pi) = -8.$$

Відповідь: $q = 8e^{i\pi} = -8$.

5. Обчислити $q = z^3$, якщо $z = \sqrt{3} + i$.

Розв'язання.

Модуль комплексного числа $z = \sqrt{3} + i$:

$$|z| = \sqrt{3+1} = 2.$$

Аргумент комплексного числа $z = 1 + \sqrt{3}i$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}.$$

$$q = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\frac{\pi}{6}+2\pi k}{3}}, k = 0, 1, 2.$$

$$k = 0\colon q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{18}}.\ k = 1\colon q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{18}}.\ \ k = 0\colon q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{25\pi}{18}}.$$

Відповідь: $q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{18}};\ q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{13\pi}{18}}; q = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{25\pi}{18}}$

6. Розв'язати рівняння $x^2 + 1 = 0$.

Розв'язання.

$x^2 = -1 \Longrightarrow x = \sqrt{-1} = \sqrt{e^{-i\pi}} = e^{-i\frac{\pi+2\pi k}{2}}, k = 0, 1.$

Отже, існує два корені рівняння $x = e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\pi/2 - i\sin\pi/2 = -i$ при $k = 0$ і $x = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\pi/2 - i\sin\pi/2 = i$ при $k = 1$.

Відповідь: $x = \pm i$

7. Обчислити натуральний логарифм числа $z = \sqrt{3} + i$.

Розв'язання.

$z = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$

$$q = \operatorname{Ln}(z) = \operatorname{Ln}\left(2e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Відповідь: $q = \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right),\ \ k \in \mathbb{Z}$

1.2. Матриці

Матриця – прямокутна таблиця, заповнена математичними об'єктами. Тобто довільна система елементів сукупності *K*, розташована у вигляді прямокутної таблиці, що містить *m* рядків і *n* стовпців, називається (*m*, *n*) – матрицею або просто матрицею над *K*.

Щоб записати матрицю, виписують в належному порядку її елементи і таблицю, що вийшла, беруть в дужки або обмежують подвійними рисами. Таким чином, загальний вид (m, n) матриці буде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

де a_{ij} – елементи матриці. Часто замість такого докладного запису використовують скорочену $\|a_{ij}\|$ або $\|a_{ij}\|_{mn}$.

Матриці є наступним рівнем підвищення абстракції та узагальнення після змінної. Елементами матриці можуть бути не тільки числа, але змінні, функції та оператори, тобто однієї матриці ставиться у відповідність безліч чисел, змінних, функцій та операторів.

Матриці прийнято позначати великими літерами латинського алфавіту.

Якщо число рядків матриці дорівнює числу її стовпців, то матриця називається *квадратною*, а число її рядків (стовпців), називається порядком квадратної матриці. Зокрема, квадратна матриця порядку 1 – це просто один елемент з множини K.

Матрицю, яка має лише один рядок (стовпець), називають *матрицею-рядком* (*стовпцем*).

Виділяють діагональні й одиничні матриці.

Діагональна матриця – квадратна матриця, в якій всі елементи, крім елементів, які стоять на головній діагоналі (пряма, що поєднує елементи a_{11} і a_{nn}) дорівнюють нулю.

Одинична матриця – діагональна матриця, в якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють 1. Одиничну матрицю прийнято позначати E або I:

$$E_1 = (1) \quad \text{або} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Операції над матрицями

1. Дві матриці називаються еквівалентними, якщо збігаються розміри матриць та елементи, які стоять на відповідних місцях цих матриць:

$$A_{nm} = B_{nm}, \text{ якщо } a_{ij} = b_{ij}.$$

2. Добуток матриці на скаляр.

Щоб помножити число λ на матрицю A або матрицю A на число λ, потрібно помножити на λ всі елементи матриці A:

$$B = \lambda A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix};$$

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

3. Додавання матриць.

Щоб скласти дві матриці однакового розміру потрібно скласти між собою всі, відповідні елементи цих матриць:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix};$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, 2, \dots, n, \qquad j = 1, 2, \dots, m.$$

4. Добуток матриць.

Необхідна умова добутку двох матриць – кількість стовпців матриці, що стоїть зліва від знаку помножити, повинно дорівнювати числу рядків матриці, що стоїть справа від знаку помножити.

Щоб одержати елемент, що стоїть в i-му рядку і j-му стовпці добутку двох матриць, потрібно елементи i-го рядка першого матриці помножити на відповідні елементи j-го стовпця другої та отримані добутки скласти.

$$C_{nm} = A_{nl} \cdot B_{lm} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{l} a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{l} a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{l} a_{1i} b_{in} \\ \sum_{i=1}^{l} a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^{l} a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{l} a_{2i} b_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{i=1}^{l} a_{mi} b_{i1} & \sum_{i=1}^{l} a_{mi} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^{l} a_{mi} b_{in} \end{pmatrix};$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj}\,, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

У загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$.

5. Транспонування матриці – заміна рядків матриці її стовпцями.

Якщо $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

6. Спряження $\bar{A}$ – заміна знаку уявної частини елементів матриці.

7. Ермітово-спряжена (спряжено-транспонована) матриця A^* – матриця з комплексними елементами, отримана з вихідної матриці A транспонуванням і заміною кожного елемента комплексно-пов'язаним йому:

$$A^* = (\bar{A})^T.$$

Властивості операцій над матрицями:

1) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$, $(A\alpha)\beta = A(\alpha\beta)$;
2) $0 \cdot A = 0$, $0 + A = A$;
3) $(A + B) + C = A + (B + C)$;
4) $A + B = B + A$;
5) $A + (-A) = 0$;
6) $1 \cdot A = A$;
7) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
8) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
9) $(\alpha A)B = \alpha AB = A(\alpha B)$;
10) $(A + B)C = AC + BC$;
11) $C(A + B) = CA + CB$;
12) $(AB)C = A(BC)$;
13) $(AB)^T = B^T A^T$;
14) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
15) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
16) $I_{mm} \cdot A_{mn} = A_{mn} \cdot I_{nn} = A_{mn}$.

Визначник матриці

Важливою характеристикою квадратної матриці є її *визначник*.

Визначником квадратної матриці називається алгебраїчна сума всяких добутків елементів цієї матриці узятих по одному з кожного рядка і по одному з кожного стовпця. Співмножники в кожному доданку записуються у порядку проходження рядків, тоді номери стовпців утворюють перестановки. Доданки, відповідні парним перестановкам, беруться зі знаком «плюс», відповідні непарним – зі знаком «мінус».

Визначник матриці A позначають, як $\det A$ або обмежують матрицю вертикальними рисами.

Наприклад:

$\det A_{11} = |a_{11}| = a_{11};$

$\det A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$

$\det A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$

Властивості визначників.

1. $\det A^T = \det A$

2. Визначник з двома однаковими або пропорціональними рядками (стовпцями) дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику поміняти місцями сусідні рядки (стовпці), то знак визначника зміниться.

4. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j}+b_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{2j}+b_{2j} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj}+b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{2j} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & b_{2j} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

5. $\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{2j} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$

6. Визначник не зміниться, якщо до якого-небудь рядку (стовпцю) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножений на яке завгодно число.

7. Для довільної квадратної матриці A_{nn} справедлива формула

$$\det A_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{il}A_{il} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}A_{il},$$

де l – яке завгодно натуральне число від 1 до n, A_{il} – алгебраїчне доповнення елемента a_{il} матриці A.

Алгебраїчне доповнення A_{il} дорівнює відповідному *мінору* M_{il} помноженому на $(-1)^{i+l}$: $A_{il} = (-1)^{i+l}M_{il}$.

Мінор M_{il} елемента a_{il} матриці A – визначник, який отримують із матриці A при «викреслюванні» i-ї строки і l-го стовпця, відповідних елементу a_{il}.

Таким чином визначник будь-якого порядку буде дорівнювати:

$$\det A_{nn} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+l}a_{il}M_{il} = \sum_{l=1}^{n} (-1)^{i+l}a_{il}M_{il}.$$

Ранг матриці

Другим важливим числом, яке ставиться у відповідність матриці A, є її ранг.

Ранг матриці – максимальне число лінійно незалежних рядків (стовпців) матриці.

Ранг матриці A позначається rang A або rank A.

Наслідки теореми про базисний мінор:

1) Ранг матриці дорівнює порядку базисного мінору цієї матриці, тобто найвищому порядку відмінного від нуля мінору;

2) Базисні рядки (стовпці) матриці лінійно незалежні;

3) Будь-який рядок (стовпець) матриці є лінійною комбінацією її базисних рядків (стовпців).

Ранг матриці простіше всього находити за допомогою *елементарних перетворень*, тобто таких, які не змінюють ранг. Використовуючи елементарні перетворення, перетворюють початкову матрицю до трикутного вигляду (вигляду, коли під головною діагоналлю всі елементи рівні нулю). Тоді ранг матриці – це кількість не нульових рядків в одержаній трикутній матриці.

Елементарні перетворення матриці:

1) Транспонування;

2) Добуток рядка (або стовпця) на число, яке не рівне нулю;

3) Додавання до рядка (або стовпця) лінійної комбінації інших рядків (або стовпців);

4) Видалення із матриці нульового рядка (або стовпця).

Слід матриці

Слід матриці A – це сума її діагональних елементів a_{ii}:

$$\mathrm{Tr}A = SpA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

У наукових текстах зустрічається два позначення операції узяття сліду TrA (від англійського *Trace* – слід) і SpA (від німецького *Spur* – слід).

Власні значення й вектори матриці

Задача знаходження власних значень і власних векторів матриць є одною з основних задач факторного аналізу, у багатьох розділів фізики і хімії. З такою проблемою доводиться стикатися, наприклад, при дослідженні власних коливань та електронних спектрів молекул і кристалів.

Нехай задана квадратна матриця A і деяка матриця-стовпець X, висота якої співпадає з порядком матриці A. У багатьох задачах доводиться розглядати рівняння відносно X: $A \cdot X = \lambda \cdot X$, де λ – деяке число. Зрозуміло, що при будь-якому λ це рівняння має нульовий розв’язок.

Число λ, при якому це рівняння $A{\cdot}X = \lambda{\cdot}X$ має ненульові розв'язки, називається *власним значенням матриці A*, а X при такому λ називається *власним вектором матриці A*.

Дане матричне рівняння можна переписати у вигляді $(A - \lambda I){\cdot}X = {\cdot}0$, де I – одинична матриця. Тобто має місце система однорідних лінійних рівнянь. Щоб ця система мала ненульові розв'язки необхідне й достатньо, щоб визначник системи був рівний нулю, тобто характеристичний поліном матриці прирівнюється нулю $\det(A - \lambda I) = 0$.

Це рівняння називається *характеристичним рівнянням матриці* A.

Характеристичний поліном матриці A є $\det(A - xI)$. *При цьому матриця* $A - xI$ *називається характеристичною.*

Обернені матриці.

Операція ділення в операціях над матрицями відсутня. Аналогом цієї операції є помноження на обернену матрицю для квадратних матриць і псевдообернену для матриць довільної форми.

Оберненою матрицею A^{-1} квадратної матриці A називається матриця, для якої справедливе наступне співвідношення:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I;$$

$$A^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = A^{-1}; \qquad A \cdot A^{-1} \cdot A = A;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{det\, A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

де елементи A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A.

Властивості обернених матриць:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

3) $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}, \lambda \neq 0$;

4) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

5) $\det A^{-1} = \det^{-1} A$;

6) Власні вектори матриці та її оберненої — збігаються, а власні значення є оберненими.

Таким чином, обернена матриця існує тільки для квадратної матриці. Необхідною умовою існування оборотної матриці A^{-1} є відмінність від нуля визначника матриці A $\det A \neq 0$.

Псевдообернені матриця.

Обернена матриця є частинним випадком, так як її можна поставити у відповідність тільки квадратним матрицям. Псевдообернена матриця – узагальнення поняття оберненої матриці, для якої можна поставити у відповідність вже прямокутну матрицю, а не квадратну.

Матриця A^+ називається *псевдооберненою матрицею* для матриці A, якщо вона задовольняє наступним критеріям:

1) $A \cdot A^+ \cdot A = A$;

2) $A^+ \cdot A \cdot A^+ = A^+$;

3) $(A \cdot A^+)^* = A \cdot A^+$;

4) $(A^+ \cdot A)^* = A^+ \cdot A$.

Властивості псевдообернених матриць:

1) $(A^+)^+ = A$;

2) $(A^T)^+ = (A^+)^T$;

3) $(\lambda A)^+ = \lambda^{-1} A^+, \lambda \neq 0$.

Знайти псевдообернену матрицю A^+ можна за наступними формулами.

1. A_{nn} квадратна матриця, її визначник не дорівнює 0, то

$$A^+ = A^{-1}, \qquad A^+ A = A A^+ = I.$$

2. Матриця A_{mn}, $m > n$, прямокутна матриця, у яких кількість рядків більша, ніж кількість стовпців (рядки матриці лінійно незалежні), то

$$A^+ = (A^* A)^{-1} A^*, \qquad A^+ A = I.$$

3. Матриця A_{mn}, $m < n$, прямокутна матриця, у яких кількість стовпців більша, ніж кількість рядків (стовпці матриці лінійно незалежні), то

$$A^+ = A^* (A A^*)^{-1}, \quad A A^+ = I.$$

Приклади операцій з матрицями

1. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ln x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = 3 \cdot A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ln x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\ln x & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\ln x & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Знайти матрицю $C = 3 \cdot A$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ln x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = 3 \cdot A = 3\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ln x & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\ln x & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3\ln x & 0 \\ 3\sqrt{2} & 0 & -6 & 9 \end{pmatrix}$.

2. Знайти матрицю $C = A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & y \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & x + y \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & x + y \end{pmatrix}$.

3. Знайти матрицю $C = A \cdot B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 1 \cdot 5 & 1 \cdot 2 + 4 \cdot 4 - 1 \cdot 6 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 5 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 36 & 46 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 36 & 46 \end{pmatrix}$.

4. Знайти матрицю $C = A \cdot A^T$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$C = A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}$.

5. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -8.$$

Відповідь: $\det A = -8$.

6. Знайти визначник матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 - 1 - 2(4 - 1) + 3(2 - 1) = -2.$$

Відповідь: $\det A = -2$.

7. Знайти обернену матрицю A^{-1} до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислюємо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0.$$

Знаходимо всі алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = 20 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = -48$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} = -10 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} -2 & 20 & -48 \\ -2 & -10 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

$$A^{-1} = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} -2 & 20 & -48 \\ -2 & -10 & 12 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{30}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -20 & 10 & -5 \\ 48 & -12 & 3 \end{pmatrix}$$

Перевірка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 \\ 8 & -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Відповідь: $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{15} & \frac{1}{15} & \frac{1}{15} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{8}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

8. Знайти псевдообернену матрицю A^+ до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}, \quad AA^+ = I$$

$$A^* = A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad AA^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\det A\,A^* = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 30 \neq 0.$

Знаходимо всі алгебраїчні доповнення: $A_{11} = 5; A_{12} = 0; A_{21} = 0; A_{22} = 6.$

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$$(AA^*)^{-1} = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -2/6 & 1/5 \\ 1/6 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Перевірка: $AA^+ = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -2/6 & 1/5 \\ 1/6 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$

Відповідь: $A^{+} = A^{*}(AA^{*})^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 \\ -2/6 & 1/5 \\ 1/6 & 2/5 \end{pmatrix}$

9. Знайти псевдообернену матрицю A^{+} до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*}, \qquad A^{+}A = I$$

$$A^{*} = A^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{*}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

$\det A^{*}A = \begin{vmatrix} 11 & -1 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} = 98 \neq 0.$

Складемо матрицю із алгебраїчних доповнень $\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$.

$$(A^{*}A)^{-1} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}^{T} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 30 & -6 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 7 & -7 & 28 \\ -21 & 21 & 14 \end{pmatrix}$$

Перевірка: $A^{+}A = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 7 & -7 & 28 \\ -21 & 21 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

Відповідь: $A^{+} = (A^{*}A)^{-1}A^{*} = \frac{1}{98}\begin{pmatrix} 7 & -7 & 28 \\ -21 & 21 & 14 \end{pmatrix}$

10. Знайти ранг і слід матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Слід матриці: $\operatorname{Tr} A = 1 - 1 - 2 = -2$

Перетворимо задану матрицю, використовуючи елементарні перетворення до трапецієподібного вигляду. Ранг матриці дорівнює кількості ненульових рядків.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ I - II \\ 2I - III \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ II - III \end{matrix}.$$

Відповідь: $\operatorname{rang} A = 3.$

11. Знайти власні значення матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Характеристичне рівняння матриці $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) - 2(-\lambda - 3) - 2(3 + \lambda) = 0;$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = 0.$$

Розв'яжемо рівняння: $1 - \lambda = 0;\ \lambda^2 - 9 = 0;\ \lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = +3.$

Відповідь: $\lambda_1 = 1;\ \lambda_2 = -3;\ \lambda_3 = 3.$

Задачі на матриці й комплексні числа

В задачах 1.1 – 1.10 задані комплексні числа z_1 і z_2. Знайти: а) $z_1 + 2z_2$; б) $z_1 - \bar{z}_2$; в) $z_1 \cdot z_2$; г) z_1/z_2.

1.1. $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + i.$

1.2. $z_1 = -2 + 5i,\ z_2 = 3 - 4i.$

1.3. $z_1 = -1 - i,\ z_2 = -2 - 2i.$

1.4. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 + i.$

1.5. $z_1 = 6 + 10i,\ z_2 = 4 + 3i$

1.6. $z_1 = 2 - 3i,\ z_2 = -1 - i.$

1.7. $z_1 = 6 - 2i,\ z_2 = 1 + i.$

1.8. $z_1 = 1 + 2i,\ z_2 = -2 + 2i.$

1.9. $z_1 = 6 + 11i,\ z_2 = 7 + 3i.$

1.10. $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -i.$

В задачах 1.11 – 1.20 комплексні числа, що задані в алгебраїчній формі представити їх у показниковій та тригонометричній формах.

1.11 $z = -i.$

1.12. $z = -3.$

1.13. $z = \sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}.$

1.14. $z = 1 - i.$

1.15. $z = -1 + i.$

1.16. $z = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$

1.17. $z = 1 + i.$

1.18. $z = 1 - i \cdot \sqrt{3}$

1.19. $z = 3i.$

1.20. $z = 2.$

В задачах 1.21 – 1.30 добути всі значення коренів.

1.21 $\sqrt[3]{-i}.$

1.22. $\sqrt[4]{-16}.$

1.23. $\sqrt{\sqrt{2} - i \cdot \sqrt{2}}.$

1.24. $\sqrt[3]{1 - i}.$

1.25. $\sqrt[3]{-1 + i}.$

1.26. $\sqrt{\sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}}.$

1.27. $\sqrt[3]{1+i}$.

1.28. $\sqrt{1-i\cdot\sqrt{3}}$.

1.29. $\sqrt[4]{16i}$.

1.30. $\sqrt[4]{16}$.

В задачах 1.31 – 1.40 комплексне число піднести до степеня.

1.31. $(-i)^9$.

1.32. $(-3+3i)^3$.

1.33. $\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)^6$.

1.34. $(1-i)^4$.

1.35. $(-1+i)^5$.

1.36. $\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^6$.

1.37. $(1+i)^3$.

1.38. $\left(1-i\sqrt{3}\right)^3$.

1.39. $(3i)^3$.

1.40. $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$.

В задачах 1.41 – 1.50 знайти всі корені рівняння.

1.41. $z^2-2z+5=0$.

1.42. $z^3+27=0$.

1.43. $z^2+2z+10=0$.

1.44. $z^4+16=0$.

1.45. $z^2+4z+5=0$.

1.46. $z^2-i=0$.

1.47. $z^2-4z+8=0$.

1.48. $e^{-z}=3-4i$.

1.49. $z^2-3z+9=0$.

1.50. $e^z=\sqrt{3}+i$.

В задачах 1.51 – 1.60 знайти логарифм комплексного числа.

1.51 $z=-i$.

1.52. $z=\sqrt{12}-2i$.

1.53. $z=\sqrt{2}-i\cdot\sqrt{2}$.

1.54. $z=1-i$.

1.55. $z=-1+i$.

1.56. $z=\sqrt{2}+i\cdot\sqrt{2}$.

1.57. $z=1+i$.

1.58. $z=1-i\cdot\sqrt{3}$.

1.59. $z=4+3i$.

1.60. $z=-2$.

1.61. Які із запропонованих матриць є діагональними:

$$A=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0&3\\2&0\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

1.62. Які із запропонованих матриць є: а) верхньою трикутною; б) нижньою трикутною; в) трапецієвидною; г) симетричною?

$$A=\begin{pmatrix}3&9&-5\\9&0&1\\-5&1&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&5&7\\0&3&6\\0&0&2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2&4&-6&3\\0&3&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&0&0\\4&7&5\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&1&1\\5&2&0\end{pmatrix}.$$

1.63. Задані матриці $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 4 & 3 & 5\\ 0 & 7 & -4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -3 & 1 & 4\\ 5 & -7 & 4\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$.

Знайти: а) $2A + 3B - C$; б) $A - B + 2C$.

1.64. Довести, що сума двох симетричних матриць є симетрична матриця.

1.65. Знайти матрицю X, якщо:

а) $2\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}+X=\begin{pmatrix}1 & -7\\ 2 & 8\\ 3 & -9\end{pmatrix}$; б) $3X-\begin{pmatrix}4 & -1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$

1.66. Обчислити лінійну комбінацію матриць:

а) $3\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

б) $2\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0\\ 5\\ 6\end{pmatrix}$;

в) $2\begin{pmatrix}1 & 8 & 7\\ 1 & -5 & -6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 24 & -7\\ -1 & -2 & 7\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3 & 4\\ 2 & 7 & 5\end{pmatrix}$

1.67. Обчислити добуток матриць:

а) $\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}$ б) $\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3 & 0\end{pmatrix}$

1.68. Яким вимогам повинні задовольняти матриці A й B щоб:

а) існував добуток $A \cdot B$;

б) існував добуток $B \cdot A$;

в) існували добутки $A \cdot B$ і $B \cdot A$?

1.69. Перевірити, чи існує добуток матриць, і якщо так, то знайти його:

а) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\end{pmatrix}$.

1.70. Дані матриці A, B, C:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix}; B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}; C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Знайти: а) $A \cdot C$; б) $A \cdot B$.

1.71. Відомо, що $A_{5\times 9}B_{m\times n} = C_{5\times 1}$. Знайти m і n.

1.72. Відомо, що $A_{5\times m}B_{7\times n} = C_{5\times 6}$. Знайти m і n.

1.73. Дані матриці $A_{1\times 3}$, $B_{4\times 1}$ і $C_{3\times 5}$.

Існує добуток: а) $A \cdot B$; б) $A \cdot C$; в) $B \cdot A$; г) $C \cdot A$; д) $A \cdot B \cdot C$?

1.74. Виконати дії:

а) $\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}5 & -1 & 0 & 2\\3 & 4 & - & 0\\3 & 2 & 1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\2 & -1 & 0\\3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\2 & -2\\5 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

1.75. Виконати дії: $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\0 & 1 & 3\\5 & 1 & 1\\0 & 4 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\-4 & 5\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 7\\4 & 0 & 6\end{pmatrix}$.

1.76. Знайти A^2, якщо $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\3 & 4\end{pmatrix}$.

1.77. Обчислити: а) $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}^n$; в) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2$.

1.78. Знайти $f(A)$, якщо $f(x)=x^2-2x+3, A=\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 3\end{pmatrix}$.

1.79. Показати, що матриця $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix}$ є коренем багаточлена x^2-3x+5.

1.80. Обчислити:

а) $\begin{pmatrix}1 & -3\\2 & 0\end{pmatrix}^2$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\2 & 0 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}^3$; в) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$; г) $\begin{pmatrix}a & 1\\0 & a\end{pmatrix}^n$ д) $\begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}^n$.

1.81. Знайти матрицю A, якщо $(3A)^T=\begin{pmatrix}3 & -12\\-3 & 0\\15 & 3\end{pmatrix}$

1.82. Дані матриці $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix}4 & -6\\2 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}$.

Знайти: а) $2A-B^T$; б) $2B^T+3A$.

1.83. Знайти матрицю B, якщо $(A+B)^T=\begin{pmatrix}5 & 4 & 0\\-2 & 6 & 8\\4 & 2 & 0\end{pmatrix}$ і $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\-1 & 3 & 4\\5 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

1.84. Знайти BA, якщо $(A^TB^T)^T=\begin{pmatrix}3 & -5 & 0\\2 & 4 & 6\end{pmatrix}$.

1.85. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix}7 & -5\\4 & 2\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3 & 9\\0 & -5\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}a & b\\ka & kb\end{vmatrix}$.

1.86. При якому значенні α дорівнює нулю наступні визначники:

а) $\begin{vmatrix}1 & \alpha\\3 & 5\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}3-\alpha & 2\\2 & -\alpha\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}\alpha & -2\\2 & \alpha\end{vmatrix}$.

1.87. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix}3 & 0 & 2\\1 & 4 & 7\\0 & -1 & 3\end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix}-4 & 1 & -1\\0 & 2 & 3\\5 & -2 & 4\end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix}1 & 5 & 7\\0 & 3 & 8\\0 & 0 & 6\end{vmatrix}$.

1.88. При якому значенні α дорівнює нулю наступні визначники:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix};\quad \text{б) }\begin{vmatrix} 3-\alpha & 0 & 0 \\ 2 & \alpha & 0 \\ 10 & -5 & 1 \end{vmatrix};\quad \text{в) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & \alpha \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

1.89. Обчислити визначники, користуючись властивості визначника:

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 8 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix};\ \text{б) }\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 7 \\ 4 & -4 & 15 \end{vmatrix};\ \text{в) }\begin{vmatrix} 1 & 17 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -8 & 12 \\ 2 & 34 & 4 & 10 \\ 71 & 8 & 3 & -1 \end{vmatrix};\ \text{г) }\begin{vmatrix} 121 & 283 \\ 221 & 183 \end{vmatrix}.$$

1.90. Обчислити визначників, користуючись розкладанням по елементам будь-якого рядка (стовпця):

$$\text{а) }\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix};\ \text{б) }\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix};\ \text{в) }\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix};\ \text{г) }\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.91. Знайти матриці обернені до даних:

$$\text{а) }\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix};\quad \text{б) }\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};\quad \text{в) }\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 15 & -5 \end{pmatrix};\quad \text{г) }\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.92. Знайти матриці обернені до даних:

$$\text{а) }\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ \text{б) }\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ \text{в) }\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};\ \text{г) }\begin{pmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.93. Знайти псевдообернені матриці обернені до даних:

$$2.\ \text{а) }\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix};\ \text{б) }\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix};\ \text{в) }\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix};\ \text{г) }\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.94. Знайти псевдообернені матриці обернені до даних:

$$3.\ \text{а) }\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ \text{б) }\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix};\ \text{в) }\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};\ \text{г) }\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix};\ \text{д) }\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Контрольні питання

1. Що таке матриця?
2. Що таке діагональна матриця?
3. Яка матриця називається нульовою й одиничною?
4. Які існують операції над матрицями й як вони здійснюються?
5. Сформулювати вимоги, які треба пред'явити до матриць для того, щоб їх можна було скласти.

6. Сформулювати вимоги, які треба пред'явити до матриць для того, щоб їх можна перемножити.
7. Що таке спряжена й ермітово-спряжена матриці?
8. Що таке визначник матриці? Як обчислити визначник матриці?
9. Які властивості визначників матриці?
10. Що таке мінор й алгебраїчне доповнення елементів матриці?
11. Теорема про розкладання визначника по елементам рядка або стовпця?
12. Що таке обернена матриця? Як знайти обернену матрицю?
13. Умова існування оберненої матриці?
14. Властивості оберненої матриці?
15. Що таке псевдообернена матриця?
16. Властивості псевдооберненої матриці?
17. Що таке ранг матриці?
18. Теорема про базисний мінор матриці?
19. Які перетворення не змінюють ранг матриці?
20. Як обчислити ранг матриці?
21. Що таке характеристичне рівняння матриці?
22. Що таке характеристичний поліном матриці?
23. Що таке уявна одиниця?
24. Що таке комплексне число?
25. Які відомі форми комплексного числа?
26. Формули переходу з однієї форми комплексного числа в інші?
27. Що таке модуль й аргумент комплексного числа?
28. Формула Ейлера?
29. Які відомі дії над комплексними числами?
30. Як знайти суму двох комплексних чисел в алгебраїчної та показникової формі?
31. Як знайти добуток двох комплексних чисел в алгебраїчної та показникової формі?
32. Як поділити два комплексних числа в алгебраїчної та показникової формі?
33. Що таке комплексно спряжене число?
34. Як знайти логарифм комплексного числа?
35. Як піднести комплексно число до степеня (формула Муавра)?
36. Як добути корінь із комплексного числа?

РОЗДІЛ 2. МАТРІЧНІ РІВНЯННЯ

2.1. Матричні рівняння

Основною задачею лінійної алгебри, як одного із розділів математики, є дослідження рівнянь і пошук універсальних методів їх розв'язання.

Алгебраїчним рівнянням називається рівняння виду $P_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$, де P – багаточлен порядку n, а $x_1, x_2, \dots, x_k$ – невідомі. Алгебричні рівняння з одним невідомим степеню n, можна записати у вигляді:

$$a_n x^n + a_{n\text{-}1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0 \text{ або } \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = 0.$$

Якщо невідомою є матриця, то маємо матричне рівняння. Розглянемо матричні рівняння першого порядку, тобто при $n = 1$. В загальному вигляді такі рівняння мають вигляд

$$A \cdot X = B \quad \text{або} \quad X \cdot A = B.$$

Тут враховується, що для матриць $A \cdot X \neq X \cdot A$.

Нехай матриця A – невироджена квадратна матриця, $\det A \neq 0$.

Помножимо праву й ліву частини рівняння на обернену матрицю A^{-1}:

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} \cdot B; \qquad X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A \cdot A^{-1};$$

$$X = A^{-1} \cdot B. \qquad X = B \cdot A^{-1}.$$

Якщо матриця A прямокутна розміром $m \times n$, то точний розв'язок X можна знайти для частинних випадків за допомоги псевдооберненої матриці A^{+}:

$$A \cdot X = B, \quad m < n; \qquad X \cdot A = B, \quad m > n;$$

$$X = A^{+} \cdot B, \qquad X = B \cdot A^{+},$$

де $A^{+} = A^T (A A^T)^{-1}, \quad A A^{+} = I.$ де $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T, \; A^{+} \cdot A \cdot= I.$

В інших використання псевдооберненої матриці дає лише приблизне значення X, але з мінімальною квадратичною помилкою.

$$A \cdot X = B, \quad m > n; \qquad X \cdot A = B, \quad m < n;$$

$$X \approx A^{+} \cdot B, \qquad X \approx B \cdot A^{+},$$

де $A^{+} = (A^T A)^{-1} A^T, \quad A^{+} A = I.$ де $A^{+} = A^T (A A^T)^{-1}, \; A^{+} A = I.$

Приклад розв'язання матричного рівняння:

Нехай задано рівняння $A \cdot X = B$, де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = A^{+}B, \;\; A^{+} = A^{T} \cdot (A \cdot A^{T})^{-1}.$$

$$AA^{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 21 \end{pmatrix};$$

$$\det AA^{T} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = 69, \qquad (AA^{T})^{-1} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A^{+} = A^{T}(AA^{T})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 21 & -6 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 12 & -10 \\ 36 & -7 \end{pmatrix};$$

$$X = A^{+}B = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} -3 & 14 \\ 12 & -10 \\ 36 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 31 & 14 & 36 \\ -32 & -10 & -6 \\ -50 & -7 & 51 \end{pmatrix}.$$

Зробимо перевірку:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{69}\begin{pmatrix} 31 & 14 & 36 \\ -32 & -10 & -6 \\ -50 & -7 & 51 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = B.$$

2.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) – частинний випадок матричних лінійних алгебраїчних рівнянь, коли невідома матриця є матрицею стовбцем. *Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими* – це система рівнянь виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

де коефіцієнти a_{ij}, b_i – відомі величини, а x_i – невідомі.

Запис системи лінійних алгебраїчних рівнянь зручний в *матричній формі*

$$AX = B \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

де матриця A – *матриця системи рівнянь*, B – *матриця-стовпець вільних членів системи рівнянь*, X – невідома матриця-стовпець. Додатково запроваджують поняття *розширеної матриці* $A|B$ – матриця системи рівнянь з добавленим стовпцем вільних членів.

Системи лінійних рівнянь класифікуються по матриці вільних членів B:

1) *Однорідна* – матриця B є нульовою;

2) *Неоднорідна* – хоч один елемент матриці B відмінний від нуля.

Розв'язок системи лінійних рівнянь – набір елементів x_i невідомої матриці X, підстановка яких в кожне із рівнянь системи перетворює їх в тотожність.

Якщо система рівнянь має розв'язок, то вона *сумісна*.

Критерієм існування розв'язання СЛАР є теорема Кронекера-Капеллі.

Теорема Кронекера-Капеллі.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг її основної матриці дорівнює рангу її розширеної матриці, причому система має єдиний розв'язок, якщо ранг цих матриць дорівнює числу невідомих, і безліч розв'язків, якщо ранг цих матриць менше числа невідомих:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B.$$

Таблиця 1.

Існування розв'язань системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Рівняння	$\boldsymbol{AX = B}$	$\boldsymbol{AX = 0}$
$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B = n$	Розв'язок єдиний	Розв'язок тривіальний
$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B < n$	Розв'язок неєдиний	
$\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} A|B$	Розв'язок не існує	–

У випадку якщо розв'язок системи лінійних алгебраїчних рівнянь неєдиний розрізняють наступні типи розв'язків:

1) Загальний розв'язок – розв'язок, в якому залежні невідомі елементи виражені через незалежні елементи, число яких дорівнює $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A|B$;

2) Частинний розв'язок – загальний розв'язок, в якому незалежні елементи приймають будь-яке значення;

3) Базисне розв'язок – загальний розв'язок, в якому незалежні елементи приймають значення 0;

4) Фундаментальна система розв'язків – набір лінійно незалежних розв'язків однорідної системи рівнянь.

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Крамера

Метод Крамера заснований на теоремі Крамера й застосовується тільки для неоднорідних СЛАР, в яких число невідомих збігається з кількістю рівнянь.

Терема Крамера (*правило*): Якщо в неоднорідній системі n лінійних рівнянь з n невідомими визначник матриці системи відмінний від нуля, то система має розв'язок і причому єдиний. Цей розв'язок задається формулами:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де $\Delta = \det A$ – визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, Δ_i – визначник матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, в якій i-стовпець замінено матрицею-стовпцем вільних членів B.

Матричний метод

Матричний метод можна використовувати, як і метод Крамера, для розв'язання неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь, в яких число невідомих збігається з кількістю рівнянь. Припустимо, що для матриці системи рівнянь A існує обернена матриця A^{-1}. Тоді,

$$AX = B;$$

$$X = A^{-1}B.$$

Метод Гауса

Метод Гауса – класичний метод розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Це метод послідовного виключення змінних, коли за допомогою елементарних перетворень система рівнянь приводиться до рівнозначної за її розв'язком системи трапецієвидної форми, із якої послідовно, починаючи з останніх (по номеру) змінних, знаходиться вся решта змінних. Метод Гауса засновано на тому, що при елементарних перетвореннях розширеної матриці системи лінійних рівнянь розв'язок відповідної системи алгебраїчних рівнянь не змінюється.

Нехай маємо розширену матрицю системи алгебраїчних рівнянь $A|B$.

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Після елементарних перетворень маємо матрицю

$$H|D=\left(\begin{array}{cccccccc|c} h_{11} & h_{12} & h_{13} & \cdots & h_{1r} & h_{1r+1} & \cdots & h_{1n} & d_1 \\ 0 & h_{22} & h_{23} & \cdots & h_{2r} & h_{2r+1} & \cdots & h_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{rr} & h_{rr+1} & \cdots & h_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Їй відповідає система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} h_{11}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n = d_1 \\ \qquad\quad h_{22}x_2 + \cdots + h_{2n}x_n = d_2 \\ \qquad\quad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ \qquad\quad h_{rr}x_r + \cdots + h_{rn}x_n = d_r. \end{cases}$$

Тоді, розв'язок отриманий з $H|D$ буде розв'язком для системи з $A|B$:

$$x_r=\frac{1}{h_{rr}}\cdot(d_r-h_{rr+1}x_{r+1}-\cdots-h_{rn}x_n);$$

$$x_i=\frac{1}{h_{ii}}\cdot\left(d_i-\sum_{j=i+1}^{n}h_{ij}x_j\right)$$

Метод Гауса можна використовувати для розв'язання як однорідних, так і неоднорідних систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Метод Жордана – Гауса

Це модифікований метод Гауса для числового розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, Він дозволяє повністю виключити залежні невідомі в кожному з рівнянь. В лівій частині кожного із рівнянь системи залишається тільки одна залежана змінна, в правій частині присутні тільки не залежні змінні.

Процес перетворення розширеної матриці системи алгебраїчних рівнянь за допомоги елементарних перетворень в методі Жардана – Гауса не завершується матрицею трапецієвидної форми, а продовжується поки не отримують діагональну матрицю для залежних змінних. Отже, з розширеної матриці $A|B$ оза допомоги елементарних перетворень отримуємо матрицю $H|D$ вигляду

$$H|D=\left(\begin{array}{cccccccc|c} h_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_{1r+1} & \cdots & h_{1n} & d_1 \\ 0 & h_{22} & 0 & \cdots & 0 & h_{2r+1} & \cdots & h_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{rr} & h_{rr+1} & \cdots & h_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тоді,

$$x_i=\frac{1}{h_{ii}}\cdot(d_i-h_{ii+1}x_{i+1}-\cdots-h_{in}x_n),\quad i=1,\dots r.$$

Приклади розв'язання систем алгебраїчних рівнянь

1. Методом Гауса розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ 2I-II \\ 3I-III \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 7 & 8 & 38 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \\ 5III-7II \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1=16-3\cdot 2-3\cdot 3=1 \\ x_2=\frac{1}{5}(16-2\cdot 3)=2 \\ x_3=\frac{-78}{-26}=3. \end{cases}$$

2. Методом Жордана – Гауса розв'язати систему рівнянь задачі 1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 3 & 16 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 2 & 1 & 4 & 16 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 7 & 8 & 38 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & -26 & -78 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 5 & 2 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} I-3III \\ II-2III \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{c} 5I-3II \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

3. Методом Крамера розв'язати систему рівнянь задачі 1.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 26 \neq 0;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 16 & 1 & 4 \\ 10 & 2 & 1 \\ 16 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 16\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 16\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 26;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 16 & 4 \\ 3 & 10 & 1 \\ 1 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 10 & 1 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 16 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 16 & 4 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 52;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 16 \\ 3 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 3 & 16 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 78;$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{26}{26} = 1 \\ x_2 = \dfrac{52}{26} = 2 \\ x_3 = \dfrac{78}{26} = 3. \end{cases}$$

4. Матричним способом розв'язати систему рівняння задачі 1.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$A^{-1} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -7 \\ -8 & 2 & 10 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ – обернена матриця.

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & -7 \\ -8 & 2 & 10 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 52 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

5. Дані матриці A і B. Розв'язати систему рівнянь $AX = B$ відносно x_1, x_3, x_5. Знайти базисний, частинний при $x_2 = x_4 = 1$ та фундаментальні розв'язки.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 0 & -2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)_{3I+III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & -5 & -5 & -1 & 0 \end{array}\right)_{3II+III} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & 2 & -6 \end{array}\right).$$

$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A|B) = 3$ – система має розв'язок.

На основі отриманої матриці складемо нову систему алгебраїчних рівнянь, яка буде мати такі ж самі корені, що початкова система рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 = -1 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = -2 \\ -2x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -6. \end{cases}$$

Отже, загальний розв'язок системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 = -3 - x_4 \\ x_3 = 0{,}5 - x_2 - 0{,}5x_4 \\ x_5 = -2{,}5 - x_2 - 2{,}5x_4. \end{cases}$$

Базисний розв'язок отримуємо зі загального, якщо $x_2 = x_4 = 0$:

$$X^T = (-3 \quad 0 \quad 0{,}5 \quad 0 \quad -5).$$

Частинний розв'язок отримуємо зі загального, якщо x_2, x_4 – будь-які. Нехай $x_2 = x_4 = 1$. Тоді,

$$X^T = (-4 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -6).$$

Фундаментальна система розв'язків – сукупність частинних розв'язків при лінійно незалежних вільних змінних $x_2,\ x_4$:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
X_1	–3	1	–0,5	0	–3,5
X_2	–4	0	0	1	–5

або так $X_1^T = (-3 \quad 1 \quad -0{,}5 \quad 0 \quad -3{,}5)$ та $X_2^T = (-4 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -5)$.

Знаходження власних значень і векторів матриці

Знайти власні числа λ і власні вектора X матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'яжемо характеристичне рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 9) - (-2\lambda + 6) + (6 - 2\lambda) = 0;$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 9) = (1-\lambda)(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = -3 \\ \lambda = 3. \end{array}\right.$$

Власний вектор отримуємо для конкретного власного значення λ матриці A при розв'язанні однорідного матричного рівняння $(A - \lambda I)X = 0$, яке має не тільки тривіальний розв'язок $X = 0$. Так як власне значення λ підібрано таким чином, щоб система рівнянь мала не тільки тривіальний розв'язок. Знайдем будь-який частинний розв'язок.

Знайдем власний вектор X, відповідний власному числу $\lambda_1 = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_1 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_1 = -2z_1 \\ y_1 = z_1. \end{cases}$$

Нехай $z_1 = 1$. Тоді частинним випадком власного вектора X, відповідного власному числу $\lambda_1 = 0$, є $X_1^T = (-2 \quad 1 \quad 1)$.

Власний вектор, відповідний власному числу $\lambda_2 = -3$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_2 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 10 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} x_2 = 1{,}2z_2 \\ y_2 = -1{,}4z_2. \end{cases}$$

Нехай $z_2 = 5$. Тоді частинним випадком власного вектора X, відповідного власному числу $\lambda_2 = -3$, є $X_2^T = (6 \quad -7 \quad 5)$.

Власний вектор, відповідний власному числу $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_3 & 2 & -2 \\ 1 & -\lambda_3 & 3 \\ 1 & 3 & -\lambda_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Гауса:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ y_3 = z_3. \end{cases}$$

Нехай $z_3 = 1$. Тоді частинним випадком власного вектора X, відповідного власному числу $\lambda_2 = -3$, є $X_3^T = (0 \quad 1 \quad 1)$.

2.3. Квадратичні форми

Квадратичною формою $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від n змінних називається сума, кожен член якої є квадратом однієї із змінних, або добутком двох різних змінних:

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = X^T A X$$

Коефіцієнти квадратичної форми $a_{ij},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$ створюють *матрицю квадратичній форми* A, яка є симетричною $a_{ij} = a_{ji}$.

Квадратична форма у матричному записі має вигляд $Q = X^T \cdot A \cdot X$.

Отже, маємо ще один частинний випадок матричних рівнянь $X^T \cdot A \cdot X = B$, який відноситься вже до рівнянь другого порядку.

Нехай $X = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)^T$ та $Y = (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n)^T$ зв'язані між собою співвідношенням $X = C \cdot Y$, де C – невироджена квадратна матриця. Тоді,

$$Q = X^T \cdot A \cdot X = Y^T \cdot A' \cdot Y, \qquad A' = C^T \cdot A \cdot C.$$

Квадратична форма називається *канонічною*, якщо її матриця є діагональною, тобто $a_{ij} = 0$ для $i \neq j$. Необхідність перетворення квадратичної форми до канонічного вигляду дуже часто виникає при аналізі кривих і поверхонь другого порядку. Для цього використовують наступну теорему.

Будь-яку квадратичну форму $Q = X^T \cdot A \cdot X$ можна за допомоги ортогонального перетворення змінних привести до канонічного вигляду:

$$Q = Y^T \cdot A' \cdot Y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – власні значення матриці A. Іншим способом перетворення квадратичної форми до канонічного вигляду є виділенні повних квадратів.

Квадратичні форми поділяються на додатновизначені, від'ємновизначені та невизначені. Завдання по вирішенню якою самою є квадратична форма виникає при дослідженні функцій на екстремум.

Квадратична форма називається *додатновизначеною*, якщо для будь-якого $X \neq 0\ \ Q = X^T \cdot A \cdot X > 0$.

Квадратична форма називається *від'ємновизначеною*, якщо для будь-якого $X \neq 0\ \ Q = X^T \cdot A \cdot X < 0$.

Якщо нерівності більше нуля або менше нуля для будь-якого не виникає, то квадратична форма називається *невизначеною.*

Для вирішення питання про знаковизначеність квадратичної форми застосовують наступні критерії.

1. Для того щоб квадратична форма була *додатно* (*від'ємно*) *визначеною* необхідно й достатньо, щоб усі власні значення матриці квадратичної форми були додатні (від'ємні).

2. *Критерій Сільвестра*.

2.1. Для того щоб квадратична форма була *додатно визначеною* необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори матриці квадратичної форми були додатними.

2.2. Для того щоб квадратична форма була *від'ємно визначеною* необхідно й достатньо, щоб усі головні мінори матриці квадратичної форми чергуються за знаком починаючи з «мінус».

Приклади на квадратичну форму

1. Квадратичну форму $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 - 3x_2^2 + 10x_3^2$ записати в матричному вигляді.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 1{,}5 \\ 0 & 1{,}5 & 10 \end{pmatrix}, \quad Q = X^T A X$$

2. Знайти квадратичну форму, яка відповідає матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$Q = X^T A X = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ -3x_1 - x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_2^2.$$

3. Задана квадратична форма $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Знайти квадратичну форму, отриману із заданої лінійним перетворенням $x_1 = 2y_1 - 3y_2,\ x_2 = y_1 + y_2$.

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 2y_1 - 3y_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Q(y_1, y_2) = Y^T A' Y;$$

$$A' = C^T A C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q(y_1, y_2) = X^T A X = Y^T A' Y = 13y_1^2 - 34y_1 \cdot y_2 + 3y_2^2.$$

4. Квадратичну форму $Q = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$ перетворити до канонічного вигляду.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = X^T A X, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні значення λ матриці A з рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$: $\lambda = 2; \lambda = -1; \lambda = 5.$ Отже, дана квадратична форма в канонічному вигляді:

$$Q(y_1, y_2, y_3) = Y^T \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} Y = 2y_1^2 - y_2 + 5y_3^2.$$

5. З'ясувати знаковизначенність $Q = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$.

$$Q(x_1, x_2) = X^T A X, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні значення λ матриці A з рівняння $\det(A - \lambda I) = 0$: $\lambda = 2 \pm \sqrt{2} > 0$. Всі власні значення матриці квадратичної форми додатні. Отже, квадратична форма додатно визначена.

6. З'ясувати знаковизначенність $Q = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3 - 9x^2$.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = X^T A X, \qquad A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо всі головні мінори матриці A:

$$M_1 = |-2| = -2 < 0;$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0;$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -9 \end{vmatrix} = -3 < 0.$$

Всі головні мінори матриці квадратичної форми чергуються за знаком починаючи з «мінус». За критерієм Сельвестра квадратична форма від'ємно визначена.

Задачі на розв'язання матричних рівнянь

При яких значеннях λ системи рівнянь мають єдиний розв'язок?

2.1. $\begin{cases} 6\lambda x_1 + 2x_2 = 5 \\ 9x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \lambda x_1 + 2x_2 = 3 \\ 8x_1 + 4\lambda x_2 = 9 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \lambda^2 x_1 + 3\lambda x_2 = 4 \\ 3x_1 + \lambda x_2 = 6 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ 9x_1 - 3\lambda x_2 = 1 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 = 3 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases}$

Розв'язати системи матричним способом і методом Крамера.

2.7. $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 = 5 \\ 5x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 = 8 \\ 6x_1 + 5x_2 = -8 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} 9x_1 + 2x_2 = 3 \\ 7x_1 - 2x_2 = 13 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7 \\ 4x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

Методом Гауса розв'язати системи рівнянь.

2.15. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5 \\ 6x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 = 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_3 = 2 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 - 2 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 - 2 = 0 \end{cases}$

Знайти загальний і всі базисні розв'язки систем рівнянь.

2.21. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_3 = 21 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases}3x_1 + x_2 - 9x_3 = 4\\ x_1 - 3x_3 + x_4 = 2\end{cases}$

2.24. $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16\\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8\end{cases}$

2.25. $\begin{cases}x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 24\\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0\end{cases}$

2.26. $\begin{cases}4x_1 + x_2 - 12x_3 + x_4 = 6\\ 2x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 2\end{cases}$

2.27. $\begin{cases}7x_1 - 4x_2 - 4x_3 + x_4 = -1\\ 5x_1 - 4x_3 - x_4 = 5\\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 3\end{cases}$

2.28. $\begin{cases}5x_1 + x_2 - x_3 = 2\\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 7\\ 5x_1 + x_2 + x_3 = 8\end{cases}$

Знайти загальний і будь який частинний розв'язки.

2.29. $\begin{cases}x_1 + 2x_2 - x_3 = 5\\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4\end{cases}$

2.30. $\begin{cases}3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4\\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1\end{cases}$

2.31. $\begin{cases}2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1\\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1\end{cases}$

2.32. $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\\ x_1 - x_2 - x_4 = 2\end{cases}$

2.33. $\begin{cases}x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2\\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0\\ 4x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 4\\ 5x_1 + 2x_2 - x_4 = 6\end{cases}$

2.34. $\begin{cases}x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 2x_5 = -5\\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 1\\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 11\\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4\end{cases}$

2.35. Знайти загальний розв'язок систем алгебраїчних рівнянь:

а) $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_4 = 2\\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\end{cases}$

при незалежних x_1 та x_2;

б) $\begin{cases}x_1 - 7x_2 + x_3 + x_4 = 28\\ 5x_1 - 9x_2 - x_3 + x_4 = 20\end{cases}$

при незалежних x_1 та x_3;

в) $\begin{cases}2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1\\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2\\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1\end{cases}$

при незалежних x_2 та x_3;

г) $\begin{cases}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2\\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2\\ x_1 - x_2 - x_4 = 2\end{cases}$

при незалежному x_2.

2.36. Знайдіть фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

а) $\begin{cases}x_1 + x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 0\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0\\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0\end{cases}$;

б) $\begin{cases}x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0\\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0\end{cases}$;

в) $\begin{cases}x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0\\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0\\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 0\end{cases}$;

г) $\begin{cases}2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0\\ 3x_1 - x_3 + x_4 = 0\end{cases}$;

д) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+3x_3+3x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+3x_2-x_3+4x_4+2x_5=0 \\ 4x_1+4x_2+5x_3+2x_4+x_5=0 \\ x_1+3x_2+3x_3-x_4+2x_5=0 \end{cases}$; е) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+7x_3+3x_4-x_5=0 \\ 3x_1-2x_2-2x_3+x_4-2x_5=0 \\ -3x_1+4x_2+5x_3+3x_4-7x_5=0 \\ 6x_1+2x_2+5x_3+x_4+5x_5=0 \end{cases}$

2.37. Знайдіть загальний розв'язок і фундаментальну систему розв'язків системи однорідних рівнянь:

$a)$ $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1-3x_2+4x_3+8x_4+9x_5=0 \\ 6x_1-2x_2+6x_3+7x_4+x_5=0 \\ 3x_1-x_2+4x_3+4x_4-x_5=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2-x_4=0 \\ -x_1+x_3-x_5=0 \\ -x_2+x_4-x_6=0 \\ -x_3+x_5=0 \\ -x_4+x_6=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1-x_3+x_5=0 \\ x_2-x_4+x_6=0 \\ x_1-x_2+x_5-x_6=0 \\ x_2-x_3+x_6=0 \\ x_1-x_4+x_5=0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3+2x_4+3x_5=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4+4x_5=0 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+x_4+5x_5=0 \\ 7x_1+10x_2+x_3+6x_4+5x_5=0. \end{cases}$

2.38. Чи утворюють рядки матриць

$A=\begin{pmatrix} 3 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}$ і $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

фундаментальну систему розв'язків системи алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0 \\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0 \\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0 \end{cases}$$

Знайти власні числа і відповідні їм вектора матриць.

2.39. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 2.40. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2.41. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2.42. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2.43. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

2.44. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

2.45. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.46. $\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2.47. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.48. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

В задачах 2.49 – 2.51 визначити, які з векторів X_1, X_2, X_3 є власними векторами матриці A. Знайти власні числа матриці A.

2.49. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$; $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2.50. $A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2.51. $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.52. Розв’язати матричне рівняння:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \end{pmatrix}$;

е) $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

2.53. Розв’язати матричне рівняння:

а) $X \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;

г) $X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $X\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; д) $X\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 12 \\ -3 & 2 \\ 26 & 14 \end{pmatrix}$;

в) $X\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 9 & 20 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$; е) $X\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 10 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 90 & 150 \\ 130 & 56 \end{pmatrix}$.

2.54. Скласти матрицю квадратичної форми:

а) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$;

б) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$;

в) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;

г) $x_1^2 + 4x_1x_2 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;

д) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 8x_2x_3$;

е) $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_3^2$.

2.55. Квадратичну форму привести до канонічного вигляду:

а) $4x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$;

б) $x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2$;

в) $x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;

г) $x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$;

д) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$;

е) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$.

2.56. Дослідити на знаковизначеність задані квадратичні форми:

а) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_3^2$;

б) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$;

в) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$;

г) $-5x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$;

д) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;

е) $4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3$.

Контрольні питання

1. Що таке матричне рівняння?
2. Що таке алгебраїчне матричне рівняння?
3. Як розв'язати матричні рівняння $AX = B$ та $XA = B$, якщо матриця A квадратна?
4. Як розв'язати матричні рівняння $AX = B$ та $XA = B$, якщо матриця A прямокутна?
5. Що таке система лінійних алгебраїчних рівнянь?
6. Яка система називається однорідною й неоднорідною?
7. Що таке загальний, частинний та базисний розв'язки?
8. Які системи рівнянь називаються сумісними й несумісними?
9. В чому суть теореми Кронекера-Капели?
10. Метод Крамера розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
11. Методи Гауса і Джордана – Гауса розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
12. Яким методом можна розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь у якої ранг матриці системи менше кількості невідомих?
13. Яким методом можна знайти нетривіальний розв'язок, якщо він є, однорідної системи алгебраїчних рівнянь?
14. Як знайти обернену й псевдообернену матриці?
15. Що таке характеристичний поліном матриці?
16. Які числа є власними даної матриці? Як їх знайти?
17. Що таке власні вектора матриці? Як їх знайти?
18. Що таке квадратична форма і як її записати у матричному вигляді?
19. Знаковизначеність квадратичні форми? Як її визначити?
20. Канонічна квадратична форма? Як її знайти?
21. В чому полягає критерій Сільвестра?

РОЗДІЛ 3. ВЕКТОРИ

3.1. Лінійний простір. Вектор

Лінійність представляє дуже загальне й найпростіше поняття. Це як би перша сходинка залежності однієї групи чисел від іншої: лінійні алгебраїчні рівняння, лінійні диференціальні рівняння та інше. Що ж спільного у всіх лінійних моделях? Що ж таке – лінійність? Всі лінійні моделі мають властивості *адитивності* й *гомогенності*.

Адитивність означає, що якщо змінна величина x призводить ефект α при її одиночному використанні та змінна величина y призводить ефект β при її одиночному використанні, то змінні величини $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ при їх спільному використанні призводять ефект $\alpha + \beta$.

Гомогенність означає, що якщо змінна величина x призводить ефект α, то при будь-якому дійсному числі λ змінна $\lambda \cdot \boldsymbol{X}$ призводить ефект $\lambda \cdot \alpha$.

З математичної точки зору, лінійні моделі добре вивчені, легкі в обігу, достатньо прості. Проте переважна більшість явищ або не лінійні, або лінійні за певних умов. А це означає, що всі лінійні математичні моделі, що описують ті або інші явища, являються лише першим наближенням до реальності.

Лінійний простір L. Безліч L елементів будь-якої природи називається *лінійним* (або *афінним*) простором, якщо для цієї множини визначені.

I. Операція суми елементів, тобто кожній парі елементів x та y із L поставлений у відповідність певний елемент $\boldsymbol{Z}$ із L такій, що $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}$.

II. Операція добутку елементів на скалярне число λ (у тому числі й комплексне), тобто кожному елементу $\boldsymbol{X}$ із L і числу λ поставлено у відповідність певний елемент y із L такій, що $\boldsymbol{Z} = \lambda \cdot \boldsymbol{X}$.

III. Вказані операції задовольняють *аксіомам лінійного простору*:

1) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{X}$;

2) $(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) + \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + (\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{Z})$;

3) Існує нульовий елемент $\boldsymbol{0}$ такий, що $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{X}$;

4) Існує протилежний елемент $\bar{\boldsymbol{X}}$ такий, що $\boldsymbol{X} + \bar{\boldsymbol{X}} = 0$;

5) Існує елемент одиниця 1 такий, що $1 \cdot \boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}$;

6) Для будь-яких дійсних чисел α і β $\quad \alpha \cdot (\beta \cdot \boldsymbol{X}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \boldsymbol{X}$;

7) $(\alpha + \beta) \cdot \boldsymbol{X} = \alpha \cdot \boldsymbol{X} + \beta \cdot \boldsymbol{X}$;

8) $\alpha \cdot (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y}) = \alpha \cdot \boldsymbol{X} + \alpha \cdot \boldsymbol{Y}$.

Підкреслимо, що при введенні поняття лінійного простору ми абстрагуємося не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але й від конкретного виду правил утворення суми елементів і добутку елемента на число. Важливо лише, щоб ці правила задовольняли восьми аксіомам лінійності, сформульованими в даному вище визначенні.

Якщо ж природа об'єктів, що вивчаються, і правила утворення суми елементів та добутку елементу на скаляр вказані, то такий лінійний простір називається *конкретним*.

Лінійний простір над полем комплексних чисел називається *комплексним лінійним простором*, а над полем дійсних чисел – *дійсним лінійним простором*.

Прикладом конкретних просторів може служити множина всіх вільних векторів у трьохмірному просторі, множина впорядкованих дійсних чисел, множина всіх функцій $x(t)$ визначених і неперервних в інтервалі $a \le t \le b$.

З поняттям лінійного простору дуже тісно пов'язано поняття вектора. Вектор в алгебрі має більш ширше значення, ніж направлений відрізок.

Вектор – це будь-який елемент лінійного простору.

3.2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Базис

Елементи $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \dots, \boldsymbol{X}_n$ простору L називаються *лінійно залежними*, якщо знайдуться такі дійсні числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, з яких хоч одне відмінно від нуля, що лінійна комбінація елементів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ з вказаними коефіцієнтами є нульовим елементом простору L, тобто має місце рівність

$$a_1 \boldsymbol{X}_1 + a_2 \boldsymbol{X}_2 + a_3 \boldsymbol{X}_3 + \dots + a_n \boldsymbol{X}_n = 0 \text{ або } \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{X}_i = 0,$$

якщо хоч би одне $a_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3, \dots n$.

Елементи $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \dots, \boldsymbol{X}_n$ простору L називаються *лінійно незалежними*, якщо лінійна комбінація цих елементів є нульовим елементом простору L лише при умові, що дійсні числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ рівні нулю, тобто має місце рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{X}_i = 0 \text{ при умові, що всі } a_i = 0, i = 1, 2, 3, \dots n.$$

Для того, щоб елементи $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \boldsymbol{X}_3, \dots, \boldsymbol{X}_n$ простору L були лінійно залежні, необхідне й достатньо, щоб один з цих елементів був лінійною комбінацією решти елементів.

Базис – будь-яка сукупність *лінійно незалежних* елементів $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}$ простору L називається *базисом* цього простору, якщо для кожного елементу x простору L знайдуться дійсні числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ такі, що справедлива рівність:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{X}.$$

Така рівність називається *розкладанням елементу по базису* $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}$, а числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ – *координатами елементу* $\boldsymbol{X}$ відносно базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}$.

Лінійний простір характеризується *розмірністю*

Лінійний простір L називається *n-мірним*, якщо в ньому існує n лінійно незалежних елементів, а будь-які $n + 1$ елементів є лінійно залежними. При цьому число n називається *розмірністю простору L.*

Тобто *розмірність лінійного простору L* визначається максимальним числом лінійно незалежних елементів цього лінійного простору. Розмірність простору L позначається так: $\dim L = n$.

Можливий також нескінченномірний простір.

Лінійний простір L називається *нескінченномірним*, якщо в ньому існує будь-яке, необмежено число лінійно незалежних елементів.

Справедливо таке важливе твердження.

Якщо L – лінійний простір розмірності n, то будь-які n лінійно незалежних елементів цього простору утворюють його базис.

Вектор $\boldsymbol{X}$, через його координати в базисі E: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ записують у вигляді матриці-стовбця:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ або } \boldsymbol{X} = (x_1 \quad \cdots \quad x_2)^T$$

Використовуючи розкладання вектора по базисним векторам можна ввести операцію суми векторів і добутку вектора на число.

3.3. Властивості векторів

Сума векторів і добуток вектора на скаляр

Нехай дані два вектори $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ з координатами $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ та $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ в базисі $\boldsymbol{E}$: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$.

Сумою векторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ є вектор $\boldsymbol{Z}$, координати якого обчислюються як сума відповідних координат векторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\boldsymbol{e}_i \quad \text{або} \quad \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}.$$

Добутком вектора $\boldsymbol{X}$ *на скаляр* λ є вектор $\boldsymbol{Z}$, координати якого обчислюються як добуток λ на відповідні координати вектора $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{Z} = \lambda \cdot \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \boldsymbol{e}_i \quad \text{або} \quad \boldsymbol{Z} = \lambda \cdot \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Операція суми векторів і добутку вектора на скаляр повністю задовольняє аксіомам лінійності й повністю співпадає з такими ж операціями для матриць.

Евклідовий простір. Скалярний добуток векторів.

Розглянуті лінійні простори, в деякому розумінні, бідніше за властивостями, чим наш звичайний простір. Такі поняття, як довжина відрізка й величина кута, не знайшли відображення в загальній теорії лінійних просторів. Якщо ми хочемо, щоб загальна теорія охоплювала найбільш суттєві властивості звичайного простору, ми повинні, окрім операцій суми векторів і добутку їх на число, ввести ще операцію скалярного добутку.

Простір в яких існує скалярний добуток є *Евклідовим простором*.

Означення дійсного Евклідова простору. Дійсний лінійний простір L називається *дійсним Евклідовим простором* (або просто *Евклідовим простором*), якщо виконані такі дві вимоги.

I. Є правило, за допомогою якого будь-яким двом елементам цього простору $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ ставиться у відповідність дійсне число, зване скалярним добутком цих елементів і що позначається символом $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$.

II. Вказане правило підпорядковане наступним чотирьом аксіомам:

1) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$ симетрія, щодо переміщення елементів.

2) $(\boldsymbol{X_1}+\boldsymbol{X_2},\boldsymbol{Y}) = (\boldsymbol{X_1},\boldsymbol{Y}) + (\boldsymbol{X_2},\boldsymbol{Y})$ розподільна властивість.

3) $(\lambda\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) = \lambda(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ для будь-якого дійсного λ.

4) $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}) > 0$, якщо $\boldsymbol{X}$ – ненульовий елемент та $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}) = 0$, якщо $\boldsymbol{X}$ – нульовий елемент.

Підкреслимо, що при введенні поняття Евклідова простору ми абстрагуємося не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але й від конкретного виду правил утворення суми елементів, добутку елементу на число і скалярного добутку елементів (важливо лише, щоб ці правила задовольняли восьми аксіомам лінійного простору й чотирьом аксіомам скалярного добутку).

Способи позначення скалярного добутку – $(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$, $(\boldsymbol{XY})$, $(\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y})$, $\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Y}$, $\vec{x}\cdot\vec{y}$.

Якщо ж природа об'єктів, що вивчаються, і вид перерахованих правил вказано, то Евклідовий простір називається *конкретним*.

Прикладом конкретних *Евклідових* просторів може служити простір вільних векторів або нескінченномірний лінійний простір всіх функцій $x(t)$, визначених і неперервних в інтервалі $a \le t \le b$ зі скалярним добутком $\int_a^b x(t)y(t)dt$.

Нормований простір і кут між векторами

Важливою властивістю Евклідових просторів є його *нормування*.

Лінійний простір L називається *нормованим*, якщо виконані такі дві вимоги.

I. Є правило, за допомогою якого кожному елементу $\boldsymbol{X}$ простору L ставиться у відповідність дійсне число, зване *нормою* (або *довжиною*) вказаного елементу, що позначається символом $|\boldsymbol{X}|$ або $\|\boldsymbol{X}\|$.

II. Вказане правило підпорядковане наступним аксіомам:

1) $|\boldsymbol{X}| > 0$, якщо $\boldsymbol{X}$ – ненульовий елемент та $|\boldsymbol{X}| = 0$, якщо $\boldsymbol{X}$ – нульовий елемент

2) $|\lambda \boldsymbol{X}| = |\lambda| \cdot |\boldsymbol{X}|$ для будь-якого елементу $\boldsymbol{X}$ і будь-якого дійсного числа λ.

3) Для будь-яких двох елементів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ справедлива нерівність Мінковського $|\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}| \leq |\boldsymbol{X}| + |\boldsymbol{Y}|$.

При цьому справедливо таке ствердження.

Всякий Евклідовий простір є нормованим, якщо в ньому норму будь-якого елементу $\boldsymbol{X}$ визначити рівністю:

$$|\boldsymbol{X}| = \sqrt{(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X})}.$$

Норма (довжина) вектора дає можливість ввести поняття *кута* між векторами *x та y*.

Кут φ між векторами $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ визначається співвідношенням:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y})}{|\boldsymbol{X}| \cdot |\boldsymbol{Y}|}.$$

Умова ортогональності (перпендикулярності) векторів – $(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) = 0$.

Властивість ортогональності є зручною для обчислень й аналізу. Тому вектора, як правило, представляють за допомогою ортонормованих базисів (ортогональних і нормованих). У ортонормованому базисі кожний з лінійно незалежних векторів цього базису перпендикулярний до всієї решти векторів цього базису й має довжину 1.

Дотепер ми абстрагувалися не тільки від природи об'єктів, що вивчаються, але й від конкретного виду правила утворення скалярного добутку елементів.

Визначимо це правило, як правило, добутку матриць, тобто обмежимо Евклідовий простір множеною матриць.

Тоді для векторів $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$ з координатами з координатами $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ та $\{y_1, y_2, y_3, \dots, y_n\}$ в базисі $\boldsymbol{E}$: $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ справедливі такі формули.

1. *Сума векторів* $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y} = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\boldsymbol{e_i}.$$

2. *Добуток вектора* $\boldsymbol{X}$ на *скаляр* λ:
4. $\boldsymbol{Z} = \lambda \boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda x_i \boldsymbol{e_i}.$

3. *Скалярний добуток векторів* $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$:
5. $(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}) = \sqrt{(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{X})} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$

4. *Норма (довжина) вектора* $\boldsymbol{X}$:
6. $|\boldsymbol{X}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

5. *Косинус кута між векторами* $\boldsymbol{X}$ та $\boldsymbol{Y}$:

$$\cos\varphi = \frac{(\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y})}{|\boldsymbol{X}| \cdot |\boldsymbol{Y}|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}}$$

6. *Координати* x_i *вектора* $\boldsymbol{X}$, *що сполучує точку* A з координатами ($a_1, a_2, \ldots, a_n$) з точкою B з координатами ($b_1, b_2, \ldots, b_n$):

$$x_i = b_i - a_i, \;\; i = 1, \ldots, n.$$

Векторний добуток векторів

У багатьох задачах інженерії та фізики потрібно мати можливість «будувати» вектор, перпендикулярний двом існуючим. Цю можливість надає *векторний добуток* векторів.

Векторний добуток – це псевдовектор, перпендикулярний площині, побудованій по двох співмножниках і що є результатом операції векторного добутку над векторами у трьохмірному або семимірному Евклідовому просторі.

Обмежимося розглядом трьохмірного простору з базисом $\{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}\}$.

Нехай дані два вектори $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_2\vec{e}_3$ та $\vec{y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_2\vec{e}_3$. Тоді *векторним добутком* $\vec{x} \times \vec{y}$ *векторів* $\vec{x}$ та $\vec{y}$ *називатиметься вектор*:

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix};$$

$$|\vec{z}| = |\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \sin\varphi,$$

де φ – кут між векторами $\vec{x}$ та $\vec{y}$.

Способи позначення – $\vec{x} \times \vec{y}$,$[\vec{x} \times \vec{y}]$, $[\vec{x} \cdot \vec{y}]$, $[\vec{x}\vec{y}]$, $[\vec{x}, \vec{y}]$, $(\vec{x} \times \vec{y})$.

Властивості векторного добутку векторів:

1) $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$ – антикомутативність;

2) $\lambda\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \lambda\vec{y} = \lambda(\vec{x} \times \vec{y})$ – асоціативність;

3) $(\vec{x} + \vec{y}) \times \vec{z} = \vec{x} \times \vec{z} + \vec{y} \times \vec{z}$ – дистрибутивність;

4) $\vec{x} \times \vec{x} = 0$ – умова колінеарності;

5) $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) = \vec{y} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{z}) - \vec{z} \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$ – тотожність Лагранжа;

6) $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} + (\vec{y} \times \vec{z}) \times \vec{x} + (\vec{z} \times \vec{x}) \times \vec{y} = 0$ – тотожність Якобі;

7) $(\vec{x} \times \vec{y})^2 + (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$;

8) $\vec{x} \times \vec{y} \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{y} \times \vec{z}$ – властивість змішаного добутку векторів.

Для ортонормованого базису Декартової системи координат $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ будь-який вектор $\vec{a}$ можна представити, як $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$, де a_x, a_y, a_z проєкції вектора $\vec{a}$ на вісь *Ox*, *Oy* та *Oz*. Тоді векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$ має вигляд:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = \lambda$.

Площа паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $S = \frac{1}{2} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

Змішаний добуток векторів

Змішаний добуток векторів: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $V = \left|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$

Об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}\right|$.

Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$: $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

Властивості змішаного добутку векторів:

1) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$;

2) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{b}\times\vec{a}\cdot\vec{c}=-\vec{c}\times\vec{b}\cdot\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{c}\cdot\vec{b}$;

3) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a}=\vec{c}\times\vec{a}\cdot\vec{b}$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{d}$;

5) $\lambda\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$.

Способи позначання $\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)$, $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right),\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Приклади розв'язання задач про вектори

1. Задані вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Скалярний добуток векторів:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-2\cdot2+3\cdot(-1)-2\cdot(-1)=-3$$

Кут між векторами:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-3}{\sqrt{2+9+4}\sqrt{4+1+1}}=-\frac{3}{\sqrt{90}}=-\sqrt{0{,}1};$$

$$\varphi=\arccos(-\sqrt{0{,}1})\approx1{,}892.$$

2. Знайти кут між векторами $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$ і $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\cdot1+4\cdot2-6\cdot(-3)}{\sqrt{4+16+36}\sqrt{1+4+9}}=\frac{28}{\sqrt{56}\sqrt{14}}=\frac{28}{\sqrt{784}}=1\Rightarrow\varphi=0.$$

3. Знайти кут між векторами $\vec{a}=4\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ і $\vec{b}=4\vec{i}+4\vec{j}-7\vec{k}$.

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{2\cdot4+3\cdot4-4\cdot7}{\sqrt{16+9+16}\sqrt{16+16+49}}=0\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}.$$

4. Задані вектори $\vec{a}=-2\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ і $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$. Знайти скалярний добуток векторів $-2\vec{a}$ і $3\vec{b}$.

$$(-2\vec{a},\ 3\vec{b})=4\cdot6-6\cdot(-3)+4\cdot(-3)=30.$$

5. Задані точки $A(9-2,7)$, $B(3,5,4)$ і $C(4,6,7)$. Знайти векторний добуток векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$. Знайти модуль векторного добутку. Чому рівна площа трикутника, побудованого по даним точкам?

Знайдемо координати векторів $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{BA} = (9-3 \quad -2-5 \quad 7-4)^T = (6 \quad -7 \quad 3)^T;$$

$$\overrightarrow{BC} = (4-3 \quad 6-5 \quad 7-4)^T = (1 \quad 1 \quad 3)^T$$

$\overrightarrow{BC} = (4-3 \quad 6-5 \quad 7-4)^T = (1 \;\; 1 \;\; 3)^T.$

Векторний добуток знайдемо наступним чином:

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 6 & -7 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 6 & -7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -24\vec{\imath} - 15\vec{\jmath} + 13\vec{k}$$

Довжина цього вектора:

$$\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{24^2 + 15^2 + 13^2} = \sqrt{970} \approx 31{,}14.$$

Площа трикутника ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{970} \approx 15{,}57.$$

6. Задані вектори $\vec{a} = -6\vec{\imath} - 7\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = -4\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} - 6\vec{k}$ і $\vec{c} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$. Чи є вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ компланарними? Якщо вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ не компланарні, то знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Об'єм паралелепіпеда визначається змішаним добутком векторів $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Умовою компланарності є рівність нулю змішаного добутку векторів.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -7 & 3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -7 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -7 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-5 \cdot 3 + 6 \cdot 1) + 4(-7 \cdot 3 - 1 \cdot 3) + (-7(-6) + 5 \cdot 3) = -93 \neq 0.$$

Вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ не є компланарними, тобто не лежать на одній площині.

Об'єм паралелепіпеда: $V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right| = 93$.

7. Перевірити, що вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_3$ є базисом і розкласти по ньому вектор $\vec{b} = (1 \quad -2 \quad 3)^T$: $\vec{a}_1 = (3 \quad 0 \quad 0)^T$; $\vec{a}_2 = (0 \quad 3 \quad 0)^T$; $\vec{a}_3 = (0 \quad 0 \quad 3)^T$).

Перевіримо, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_3$ є базисом, тобто лінійно незалежні:

$$\alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 + \gamma\vec{a}_3 = 0;$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 \neq 0.$$

Система рівнянь має тільки тривіальне розв'язок. Відповідно, вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_3$ є лінійно незалежні, тобто є базисом.

Розкладемо по цьому базису вектор $\vec{b}$: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + x_3\vec{a}_3 = \vec{b}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{a}_1 - \frac{2}{3}\vec{a}_2 + \vec{a}_3$.

Задачі про вектори

Знайти координати вектора, що сполучає точку A з точкою B.

3.1. $A(4; –5; 2)$, $B(2; –3; 1)$

3.2. $A(7; 3; –2)$, $B(4; 3; 2)$

3.3. $A(9; 4)$, $B(3; – 4)$

3.4. $A(1; 3; 5; 2)$, $B(6; 5; –1; 4)$

3.5. $A(1;0;1;3;2)$, $B(2;3;8;11;5)$

3.6. $A(4; \pi/2; \pi/6)$, $B(5; \pi; \pi/4)$

Перевірити наявність лінійної залежності системи векторів.

3.7. $\boldsymbol{X}_1=(2 \ \ -6 \ \ 2 \ \ -6)^T$, $\boldsymbol{X}_2=(1 \ \ 0 \ \ 1 \ \ 0)^T$, $\boldsymbol{X}_3=(1 \ \ -1 \ \ 1 \ \ -1)^T$, $\boldsymbol{X}_4=(0 \ \ -2 \ \ 5 \ \ 4)$.

3.8. $\boldsymbol{X}_1=(0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 2)^T$, $\boldsymbol{X}_2=(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 1)^T$, $\boldsymbol{X}_3=(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ -4)^T$, $\boldsymbol{X}_4=(0 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 1)^T$.

3.9. $\boldsymbol{X}_1=(1 \ \ 2 \ \ 0 \ \ -1)^T$, $\boldsymbol{X}_2=(2 \ \ -3 \ \ -1 \ \ 1)^T$, $\boldsymbol{X}_3=(0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1)^T$, $\boldsymbol{X}_4=(-1 \ -1 \ -1 \ -1)^T$.

3.10. $\boldsymbol{X}_1=(1 \ \ 0 \ \ 3 \ \ 4)^T$, $\boldsymbol{X}_2=(2 \ \ 1 \ \ 0 \ \ 3)^T$, $\boldsymbol{X}_3=(1 \ \ 0 \ \ 4 \ \ 3)^T$, $\boldsymbol{X}_4=(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 4)^T$.

Знайти ранг системи векторів, визначити їх лінійну залежність

3.11. $\boldsymbol{X}_1=(0 \ \ 1 \ \ 1 \ \ 2)^T$, $\boldsymbol{X}_2=(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ 1)^T$, $\boldsymbol{X}_3=(1 \ \ 2 \ \ 3 \ \ -4)^T$, $\boldsymbol{X}_4=(0 \ \ 2 \ \ 1 \ \ 1)^T$.

3.12. $X_1=(2\ \ 1\ \ 1)^T, X_2=(2\ \ 2\ \ -2)^T, X_3=(1\ \ 0\ \ 2)^T$.

3.13. $X_1=(1\ \ 1\ \ 2)^T, X_2=(1\ \ 2\ \ -1)^T, X_3=(2\ \ 2\ \ 1)^T$.

3.14. $X_1=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 1)^T, X_2=(2\ \ 0\ \ 2\ \ 0)^T, X_3=(3\ \ 2\ \ 5\ \ 1)^T, X_4=(1\ \ 0\ \ 1\ \ -2)^T$.

3.15. $X_1=(2\ \ -1\ \ 3\ \ -2\ \ 4)^T, X_2=(-4\ \ -2\ \ 5\ \ 1\ \ 7)^T, X_3=(2\ \ -1\ \ 1\ \ 8\ \ 2)^T$.

Знайти ранг і всі базиси системи векторів.

3.16. $X_1=(3\ \ 5\ \ 7)^T, X_2=(1\ \ 2\ \ 3)^T, X_3=(1\ \ 3\ \ 5)^T, X_4=(1\ \ 1\ \ 1)^T$.

3.17. $X_1=(1\ \ 2\ \ 0\ \ 0)^T, X_2=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T, X_3=(3\ \ 6\ \ 0\ \ 0)^T$.

3.18. $X_1=(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)^T, X_2=(2\ \ 3\ \ 4\ \ 5)^T, X_3=(3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)^T, X_4=(4\ \ 5\ \ 6\ \ 7)^T$.

3.19. $X_1=(1\ \ 1\ \ 2\ \ 3)^T, X_2=(0\ \ 1\ \ 2\ \ 1)^T, X_3=(1\ \ 0\ \ 1\ \ 1)^T, X_4=(2\ \ 1\ \ 0\ \ 0)^T$.

3.20. Вектор $\boldsymbol{X} = (6\ \ -1\ \ 3)^T$ задано в базисі $\boldsymbol{E}\ \{\boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_3\}$. Знайти його координати в базисі $\boldsymbol{F}\ \{\boldsymbol{f}_1\ \ \boldsymbol{f}_2\ \ \boldsymbol{f}_3\}$, якщо базиси зв'язані співвідношеннями $\boldsymbol{f_1} = \boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_2} = 2\boldsymbol{e_1} - \boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_3}$, $\boldsymbol{f_3} = -\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$.

3.21. Вектор $\boldsymbol{X} = (-1\ \ 7\ \ 14)^T$ в базисі $\{\vec{\imath}\ \ \vec{\jmath}\ \ \vec{k}\}$. Знайти його координати в базисі $\{\vec{f}_1\ \ \vec{f}_2\ \ \vec{f}_3\}$, якщо $\vec{f}_1 = \vec{\imath} + 8\vec{\jmath}/7 - \vec{k}$, $\vec{f}_2 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{f}_3 = 8\vec{\imath} + \vec{k}$.

3.22. Вектор $\boldsymbol{X} = (2\ \ 4\ \ 3)^T$ в базисі $\{\vec{\imath}\ \ \vec{\jmath}\ \ \vec{k}\}$. Знайти його координати в базисі $\{\vec{f}_1\ \ \vec{f}_2\ \ \vec{f}_3\}$, якщо $\vec{f}_1 = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$ $\vec{f}_2 = \vec{\imath} - \vec{\jmath} - \vec{k}$, $\vec{f}_3 = -\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Знайти норму векторів.

3.23. $\vec{a} = (0\ \ 7\ \ -1)^T$

3.24. $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath}$

3.25. $\vec{c} = -2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

3.26. $\boldsymbol{X} = (-2\ \ 2\ \ 6\ \ 1)^T$

3.27. $\vec{d} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$

3.28. $\boldsymbol{Y} = (1\ \ 8\ \ -4)^T$

Знайти відстань між точками.

3.29. $\boldsymbol{A}\,(-13;\ -8;\ 2)$, $\boldsymbol{B}\,(12;\ 2;\ 0)$

3.30. $\boldsymbol{A}\,(7;\ -5;\ 5)$, $\boldsymbol{B}\,(1;\ -1;\ 12)$

3.31. $\boldsymbol{A}\,(-10;\ -4;\ -5)$, $\boldsymbol{B}\,(-6;\ -12;\ 8)$

3.32. $\boldsymbol{A}\,(-9;\ 11;\ -7)$, $\boldsymbol{B}\,(-9;\ 2;\ 12)$

3.33. $\boldsymbol{A}\,(-9;\ -5;\ -4)$, $\boldsymbol{B}\,(-10;\ -3;\ -10)$

3.34. $\boldsymbol{A}\,(8;\ -11;\ 3)$, $\boldsymbol{B}\,(-1;\ -2;\ 3)$

Обчислити скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

3.35. $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 5, \varphi = 0.$

3.36. $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4, \varphi = \pi/3.$

3.37. $|\vec{a}| = 7,\ |\vec{b}| = 9, \varphi = \pi/2.$

3.38. $|\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = \sqrt{2}, \varphi = 3\pi/4.$

3.39. $|\vec{a}| = 4,\ |\vec{b}| = 2, \varphi = 5\pi/4.$

3.40. $|\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 4, \varphi = \pi/6.$

Обчислити скалярний добуток векторів.

3.41. $\vec{a} = (4 \quad -3)^T,\ \vec{b} = (2 \quad 1)^T.$

3.42. $\vec{a} = (5 \quad -4)^T,\ \vec{b} = (3 \quad 8)^T.$

3.43. $\vec{a} = (1 \ -3 \quad 4)^T,\ \vec{b} = (5 \quad 1 \quad 2)^T$

3.44. $\vec{a} = (6 - 2 \quad 1)^T, \vec{b} = (1 \quad 8 - 3)^T$

3.45. $\boldsymbol{X} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 6\vec{k},\ \boldsymbol{Y} = 2\vec{\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$

3.46. $\boldsymbol{X} = (1 \ \ 3 \ \ 5 \ \ 7)^T, \boldsymbol{Y} = (3 \ \ 4 \ -2 \ \ 1)^T$

Знайти кут між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, які задані своїми координатами.

3.47. $\boldsymbol{a} = (1 - 1 \quad 1)^T, \boldsymbol{b} = (-2 \quad 2 - 2)^T$

3.48. $\boldsymbol{a} = (1 - 1 \quad 1)^T, \boldsymbol{b} = (3 - 3 \quad 3)^T$

3.49. $\boldsymbol{a} = (3 \quad 1 - 2)^T, \boldsymbol{b} = (1 - 1 \quad 1)^T$

3.50. $\boldsymbol{a} = (-1\ 1\ 0)^T, \boldsymbol{b} = (1 - 2 \quad 2)^T$

3.51. $\boldsymbol{a} = (-2 \quad 1 \quad 1)^T, \boldsymbol{b} = (1 \quad 2 \quad 3)^T$

3.52. $\boldsymbol{a} = (2 - 5 \quad 1)^T, \boldsymbol{b} = (-3 \quad 1 \quad 4)^T$

Знайти скалярний добуток між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$, якщо

3.53. $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 1, \angle \boldsymbol{ab} = 45°$

3.54. $|\boldsymbol{a}| = 6, |\boldsymbol{b}| = 7, \angle \boldsymbol{ab} = 120°$

3.55. $|\boldsymbol{a}| = 4, |\boldsymbol{b}| = 2, \angle \boldsymbol{ab} = 90°$

3.56. $|\boldsymbol{a}| = 5, |\boldsymbol{b}| = 1, \angle \boldsymbol{ab} = 0$

3.57. $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3, \angle \boldsymbol{ab} = \pi$

3.58. $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 4, \angle \boldsymbol{ab} = 3\pi/2$

Дано три вектори $\boldsymbol{a} = (1 \ -1 \quad 1),\ \boldsymbol{b} = (5 \quad 1 \quad 1), \boldsymbol{c} = (0 \quad 3 - 2)$. Обчислити вирази.

3.59. $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

3.60. $|\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{c}|^2 - (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

3.61. $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - |\boldsymbol{a}|^2 \cdot (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$

3.62. $|\boldsymbol{b}|^2 + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{c})$

Знайти довжину вектора $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

3.63. $|\boldsymbol{a}| = 3, |\boldsymbol{b}| = 1, \angle \boldsymbol{ab} = 0$

3.64. $|\boldsymbol{a}| = 4, |\boldsymbol{b}| = 7, \angle \boldsymbol{ab} = 135°$

3.65. $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3, \angle \boldsymbol{ab} = 330°$

3.66. $|\boldsymbol{a}| = 5, |\boldsymbol{b}| = 2, \angle \boldsymbol{ab} = 5\pi/3$

3.67. $|\boldsymbol{a}| = 7, |\boldsymbol{b}| = 1, \angle \boldsymbol{ab} = 7\pi/6$

3.68. $|\boldsymbol{a}| = 1, |\boldsymbol{b}| = 3, \angle \boldsymbol{ab} = 3\pi/2$

Знайти векторний добуток між векторами $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$.

3.69. $\boldsymbol{a} = (1 \quad 2 \quad 3)^T,\ \boldsymbol{b} = (3 \quad 2 \quad 4)^T$

3.70. $\boldsymbol{a} = (-3 \quad 1 \quad 4)^T, \boldsymbol{b} = (2 - 1 \quad 3)^T$

3.71. $\boldsymbol{a} = (3 \quad 1 - 1)^T,\ \boldsymbol{b} = (-3 - 1 \quad 1)^T$

3.72. $\boldsymbol{a} = (1 \quad 5 \quad 2)^T, \boldsymbol{b} = (1 \quad 0 \quad 3)^T$

3.73. $\boldsymbol{a} = (1\ \ 4\ \ 2)^T$, $\boldsymbol{b} = (2\ \ -2\ \ 3)^T$ 3.74. $\boldsymbol{a} = (-3\ \ 2\ \ 3)^T, \boldsymbol{b} = (1 - 2\ \ 3)^T$

Знайти змішаний добуток векторів $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$.

3.75. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -11 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}$ 3.76. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}$

3.77. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ -5 \end{pmatrix}$ 3.78. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 11 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

3.79. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -11 \\ 5 \\ -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$ 3.80. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ -9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -9 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix}$

Знайти площу трикутника побудованого на точках A, B і C.

3.81. $A(7;\ 7;\ -7)$, $B(10;\ 5;\ -3)$, $C(-2;\ -8;\ 2)$.

3.82. $A(4; -4; -12)$, $B(-9; -5; -8)$, $C(-1; -2; 2)$.

3.83. $A(7;\ 0;\ 9)$, $B(12;\ 2;\ 0)$, $C(10;\ 8;\ 13)$.

3.84. $A(-2; 9; 4)$, $B(-11; 10; -5)$, $C(-12; -2; -12)$.

3.85. $A(2;\ -7;\ 8)$, $B(-3;\ 5;\ -12)$, $C(-5;\ 3;\ 9)$.

3.86. $A(-9; 13; -9)$, $B(-13; 0; 2)$, $C(-9; -2; -12)$.

Знайти об'єм піраміди побудованої на точках A, B, C і D.

3.87. $A(-13;\ -8;\ 2), B(12;\ 2;\ 0), C(-9;\ 13;\ -9)$, $D(-9;\ -2;\ -12)$.

3.88. $A(7;\ -5;\ 5), B(1;\ -1;\ 12)$, $C(5;\ -10;\ 8)$, $D(1;\ -1;\ 9)$.

3.89. $A(-10;\ -4;\ -5)$, $B(-6;\ -12;\ 8)$, $C(-10;\ 8;\ 2)$, $D(-7;\ 2;\ -10)$.

3.90. $A(-8;\ 2;\ -6)$, $B(7;\ 4;\ 8)$, $C(3;\ 3;\ 0)$, $D(1;\ 10;\ 5)$.

3.91. $A(-9;\ -5;\ -4)$, $B(-10;\ -3;\ -10)$, $C(7;\ 0;\ 7)$, $D(-11;\ 2;\ 2)$.

3.92. $A(8;\ -11;\ 3)$, $B(-1;\ -2;\ 3)$, $C(-8;\ 3;\ 2)$, $D(12;\ -2;\ -8)$

При якому значенні x вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ ортогональні?

3.93. $\boldsymbol{a} = (x\ \ -2\ \ 6)^T, \boldsymbol{b} = (-7\ \ 0 - 6)^T$ 3.94. $\boldsymbol{a} = (x\ \ -2\ \ 0)^T$, $\boldsymbol{b} = (-4\ \ 4\ \ 2)^T$

3.95. $\boldsymbol{a} = (x\ \ -6\ \ -6)^T, \boldsymbol{b} = (2x\ \ 0\ \ 1)^T$ 3.96. $\boldsymbol{a} = (7x\ \ -4 - 2)^T, \boldsymbol{b} = (1\ 4x\ 1)^T$

3.97. $\boldsymbol{a} = (-2x\ 2\ 2)^T, \boldsymbol{b} = (2\ \ -2x\ 3)^T$ 3.98. $\boldsymbol{a} = (0\ 3\ \ -1)^T, \boldsymbol{b} = (1\ \ -4x\ 0)^T$

При яких x та y вектори $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ колінеарні?

3.99. $\boldsymbol{a} = (-x\ 2y - 4)^T, \boldsymbol{b} = (9\ 1\ 1)^T$

3.100. $\boldsymbol{a}(-3x\ \ -2y\ \ -6)^T, \boldsymbol{b}(3\ \ -7\ \ -4)^T$

3.101. $\boldsymbol{a} = (4x\ 3\ 3)^T, \boldsymbol{b} = (2 - 5y\ \ 8)^T$

3.102. $\boldsymbol{a} = (3x\ \ 5\ \ 8)^T, \boldsymbol{b} = (5\ \ -3y\ \ 1)^T$

3.103. $\boldsymbol{a} = (2x\ \ -9y\ \ 0)^T, \boldsymbol{b} = (2\ \ 1\ \ 0)^T$

3.104. $\boldsymbol{a} = (10x - 8\ \ 8)^T, \boldsymbol{b} = (6\ 3y\ 3)^T$

При якому значенні x вектори $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ і $\boldsymbol{c}$ компланарні?

3.105. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4x \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$

3.106. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3x \\ -7 \\ -9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.107. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4x \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

3.108. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3x \\ x \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3.109. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.110. $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.111. Обчислити об’єм паралелепіпеда, який побудовано на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

3.112. Показати, що точки $A(2;\ -1;\ -2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ і $D(5;\ 0;\ -6)$ лежать на одній площині.

3.113. Показати, що:

1) $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{b}] = -\boldsymbol{abc}$;

2) $(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \cdot [(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = 3\boldsymbol{abc}$.

3.114. Показати, що вектори $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарні й розкласти вектор $\vec{c}$ по векторам $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Контрольні питання

1. Що таке лінійний простір і вектор?
2. Приведіть аксіоми лінійного простору.
3. Які вектори є лінійно залежними і які лінійно незалежними?
4. Що таке базисна система векторів?

5. Що таке координати вектора?
6. Як знайти координати вектора, що сполучує точки A і B ?
7. Як здійснюється операція добутку вектора на скаляр?
8. Як знайти суму двох векторів?
9. Що таке Евклідовий простір
10. Що таке нормований простір?
11. Норма Евклідового простору?
12. Що таке скалярний добуток векторів?
13. Як визначити кут між векторами?
14. Назвіть умову ортогональності векторів?
15. Приведіть формулу скалярного добутку векторів, якщо використовувати правила добутку матриць.
16. Приведіть формулу векторного добутку векторів.
17. Як направлений вектор рівний векторному добутку векторів $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$
18. Приведіть формулу довжини векторного добутку векторів.
19. Приведіть властивості векторного добутку векторів.
20. Що таке змішаний добуток векторів?
21. Приведіть властивості змішаного добутку векторів.
22. Чому дорівнює площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$?
23. Чому дорівнює об'єм паралелепіпеда побудованого на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$ і $\vec{c}$?
24. Назвіть умову компланарності векторів.
25. Назвіть умову колінеарності векторів.

ЧАСТИНА 2. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

Аналітична геометрія – розділ геометрії, в якому геометричні фігури та їх властивості досліджуються засобами алгебри за допомоги метода координат. Цей метод будь-якої геометричної сукупності точок ставить у відповідність деяке рівняння, яке пов'язує координати фігури або тіла між собою. Лінія, поверхня або тіло розглядаються як множина точок, координати яких задані певним рівнянням.

РОЗДІЛ 4. ПРЯМА І ПЛОЩИНА

4.1. Системи координат

Система координат – комплекс визначень, які дають можливість однозначно задати положення точки у просторі за допомоги чисел або інших символів. Під простором слід вважати необов'язково тривимірний фізичний простір, а множину, елементи якої пов'язані будь-якими відношеннями.

Сукупність чисел, що визначають положення конкретної точки називається *координатами* цієї точки в конкретній системі координат. Отже, одна й та сама точка в різних системах координат має різні координати. Для того щоб точно з'ясувати положення точки в просторі крім координати точки треба обов'язково вказувати, в якій самі системі координат задані ці координати.

Для того щоб задати систему координат треба вказати точку відліку, напрямки й масштаб осей. Кількість незалежних осей координат, які однозначно можуть описати положення точки в простору без додаткових умов, дорівнює розміру цього простору. Тобто для однозначного опису положення точки в n-мірному просторі треба задати n осей. В залежності від конкретної задачі підбирають зручну для її розв'язання систему координат.

Завдання напрямку осей пов'язано з Евклідовим простором, так як напрямок векторів з'являється після визначення скалярного добутку векторів. Напрям осей координат та їх масштабування створюється через базисні вектора. Базисні вектора за напрямком співпадають за напрямом з осями координат, а масштаб – довжиною базисного вектора. Отже, завдання системи координат означає завданню точки відліку й системі базисних векторів.

В прикладних задачах більше використовуються ортогональні нормовані афінні системи координат.

Афінна система координат – прямолінійна система координат в афінному просторі.

Афінний простір на відміну від векторного простору оперує з як з векторами, так і з точками.

Ортогональні система векторів – це система векторів, які взаємно перпендикулярні один одному. Скалярний добуток таких векторів дорівнює нулю. Як правило довжину базисних векторів беруть рівною одиниці. *Одиничний вектор* $\hat{\boldsymbol{e}}$ – це вектор одиничної довжини обраного масштабу. Термін нормований вектор означає, те що вектор має норму (довжину). Але термін нормований вектор використовується також, як синонім одиничного вектору, так як одиничний вектор $\hat{\boldsymbol{e}}$ – вектор, який нормується на свою довжину. Таким чином, *ортогональна нормована* (*ортонормована*) *система базисних векторів* – це система лінійно незалежних, перпендикулярних один до одного векторів з довжиною рівною одиниці обраного масштабу.

Система координат та її базисні вектора не обов'язково повинні бути ортогональними. В загальному випадку система координат – є косокутною системою. Крім того система координат не обов'язково повинна бути лінійною. Прикладами таких систем можуть служити будь-які криволінійні системи координат, логарифмічні, гіперболічні й еліптичні системи координат.

Афінна система координат називається *прямокутною*, якщо її базис ортонормований. Прямокутна й косокутна системи поєднуються під назвою *декартової системи координат.*

Декартова система координат

Декартова система координат – прямолінійна система координат, в якій положення точки може бути визначено як її проєкції на фіксовані прямі, що перетинаються в одній точці, яка називається початком координат.

Якщо говорити про прямокутною декартову систему координат, то її загально прийняті базисні вектора $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ та проєкції точки на осі є – абсциса x, ордината y й апліката z.

Прямолінійні системи координат для великої кількості задач не є зручними. В евклідовому просторі крім декартової системи координат особливе значення має використання полярної, циліндричної та сферичної систем координат. Ці системи є криволінійними ортогональними системами.

Полярна система координат

В полярній системі координат положення точки на плоскості визначається відстанню r від точки відліку (полюсу) O до точки M_0 та кутом між вектором $\vec{r}$, який сполучує поліс O з точкою M_0 та напрямком полярної осі Ox. Координатами точки M_0 є числа r і φ (рис. 4.1), Базисні вектора – $\{\boldsymbol{e}_r,\ \boldsymbol{e}_\varphi\}$.

Циліндрична система координат

Циліндрична система координат – тривимірна ортогональна система координат, кожна точка якої задається двома полярними координатами й аплікатою. У циліндричної системи координат у просторі вибирається площина (основна площина) і на ній задається полярна система координат з полюсом O й полярною віссю Ox. Через точку O перпендикулярно до основної площини проведемо вісь Oz (вісь аплікат) і виберемо її напрямок так, щоб зростання полярного кута φ, що спостерігається з боку додатного напрямку осі Oz, відбувалося проти годинникової стрілки ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z$ – права трійка векторів). Тоді положення точки M, що не належить осі аплікат, характеризується полярними координатами r і φ точки M_0 – ортогональної проєкції точки M на основну площину, й аплікати z – координатою точки M_z – ортогональної проєкції точки M на вісь аплікат (рис. 4.1). Таким чином, циліндричні координати точки M – це впорядкована трійка чисел r, φ, z – полярний радіус ($r \geq 0$), полярний кут ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) й апліката ($-\infty < z < +\infty$). У точок, що належать осі аплікат, φ не визначено полярний кут, в $r = 0$. Базисні вектора циліндричної системи координат $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$ є ортогональними.

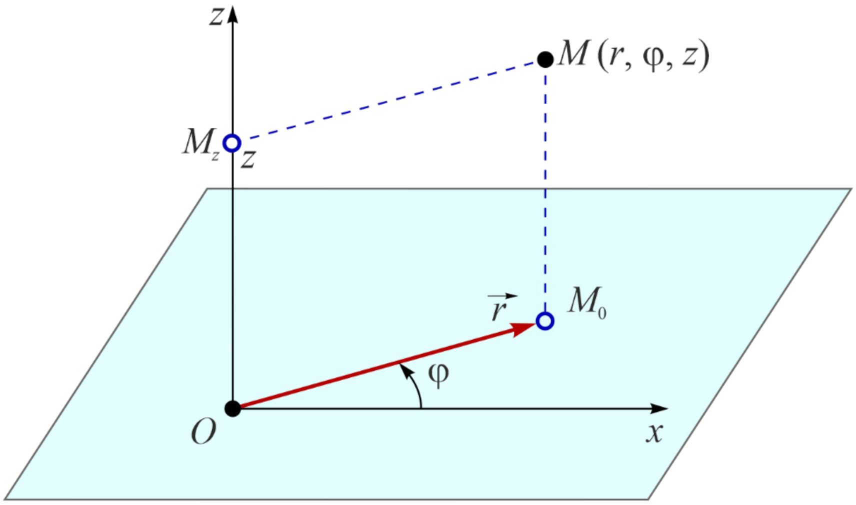


Рис. 4.1. Циліндрична система координат

Сферична система координат

Сферична система координат – тривимірна ортогональна система координат, кожна точка якої задається відстанню від точки відліку r і двома кутами θ й φ – зенітний і азимутальний кути відповідно.

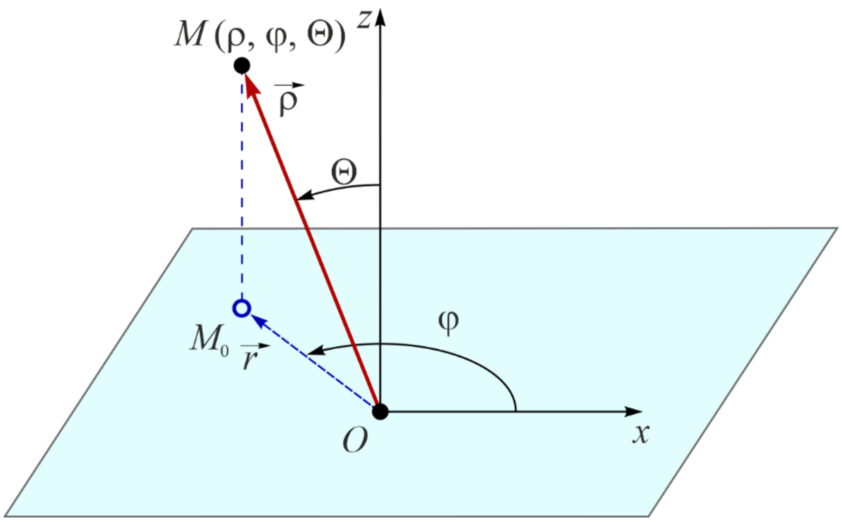


Рис. 4.2. Циліндрична система координат.

Для введення сферичної системи координат у просторі вибирається основна площина й задається полярна система координат з полюсом O (початок сферичної системи координат) і полярною віссю Ox. Через точку O

перпендикулярно до основної площини проведемо вісь Oz (вісь аплікат) і виберемо її напрямок так, щоб зростання полярного кута з боку додатного напрямку осі Oz відбувалося проти годинникової стрілки ($\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta$ – права трійка векторів).

У сферичній системі координат положення точки M, що не лежить на осі аплікат, характеризується відстанню $\rho = |\vec{\rho}|$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OM}$ до початку координат, полярним кутом φ точки M_0 – ортогональної проєкції точки M на основну площину, і кутом θ між вектором $\vec{\rho}$ й додатним напрямом осі аплікат. Таким чином, сферичні координати точки M – це впорядкована трійка чисел ρ, φ, θ – радіус ($\rho \geq 0$), азимутальний кут ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$) й зенітний кут ($0 \leq \theta \leq \pi$). У точок, що належать осі аплікат, не визначено азимутальний кут, їх положення задається радіусом r і зенітним кутом. Базисні вектора $\{\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta\}$ циліндричної системи координат є ортогональними.

Зв'язок між системами координат

Таблиця 2.

Відображення декартової системами координат в криволінійні

Декартова прямокутна $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$, (x, y, z)	
Циліндрична $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z\}$, (r, φ, z)	**Сферична** $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_\theta\}$, (r, φ, θ)
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\rho}\right)$
$x = r \cdot \cos\varphi$ $y = r \cdot \sin\varphi$ $z = z$	$x = \rho \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi$ $y = \rho \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi$ $z = \rho \cdot \cos\theta$

4.2. Означення лінії та поверхні геометрії

Лінія – це множина точок простору, координати яких є функціями однієї змінної: $x_i = f_i(t),\ i = 1, 2, \dots, n$ або $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, де $\boldsymbol{r}$ – радіус вектор.

Термін «крива» в різних розділах математики визначається по різному. Наприклад, в накреслювальній геометрії криву розглядають як траєкторію, яка описується рухомою точкою, проєкцію іншої кривої або лінію перетину двох поверхонь. Криві підрозділяються на *алгебраїчні* та *трансцендентні* залежно від того чи є їх рівняння алгебраїчними або трансцендентними в прямокутній системі координат.

Множина алгебраїчних кривих в свою чергу підрозділяється на множини, залежно від порядку кривої, що визначається степенем її рівняння. Наприклад, алгебраїчну лінію, яка описується в системі декартових координат рівнянням другого степеня щодо відносно поточних координат, називають кривою лінією другого порядку. Криві лінії першого порядку називають *прямою лінією*.

Крива називається *плоскою*, якщо всі її точки належать на одній площині, інакше вона називається просторовою.

Поверхня – традиційна назва для двовимірного різноманіття в просторі. Поверхня визначається як множина точок, координати яких задовольняють певному виду рівнянь: $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Якщо функція $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лінійна відносна всіх змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, то поверхнею є *площина*.

По аналогії з означенням лінії як одномірної множини точок можна дати означення поверхні.

Поверхня – це неперервна двовимірна множина точок, координати яких є функціями двох параметрів u та v: $x_i = f_i(u, v),\ i = 1, 2, \dots, n$.

Отже, якщо кожна функція $f_i(u, v),\ i = 1, 2, \dots, n$ – лінійна, щодо параметрів u та v, то поверхня буде лінійною або *площиною*.

У декартовій системі координат положення точки на площині визначається двома параметрами – абсцисою й ординатою. Точка на довільній поверхні також визначатиметься двома параметрами – криволінійними координатами u та v.

Відповідно, існує можливість дати ще одне означення поверхні.

Поверхня – це безперервна однопараметрична (одномірна) множина ліній, які мають єдиний закон утворення. Залежно від виду ліній, закону їх утворення й розподілу отримуємо різні поверхні. Наприклад, площина може розглядатися як множина твірних прямих або кривих.

4.3. Лінії та поверхні першого порядку

Розглянемо пряму і площину, відповідно лінії та поверхні першого порядку. Загальне означення лінії та поверхні дає нам можливість сформулювати означення прямої та площині.

Пряма – це множина точок простору, координати яких є лінійними функціями однієї змінної t: $x_i = a_i t + b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Площина – це множина точок простору, координати яких є лінійними функціями двох змінних u та v: $x_i = a_i u + b_i v + c_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$

Рівняння прямої лінії на площині

Однозначно задати пряму на площині можна декількома способами:

1) Задати будь-яку точку на прямій і вектор паралельний прямій;

2) Задати будь-які дві точки, які лежать на прямій;

3) Задати будь-яку точку на прямій і вектор перпендикулярний прямій;

4) Задати будь-яку точку й кут між прямою й віссю координат.

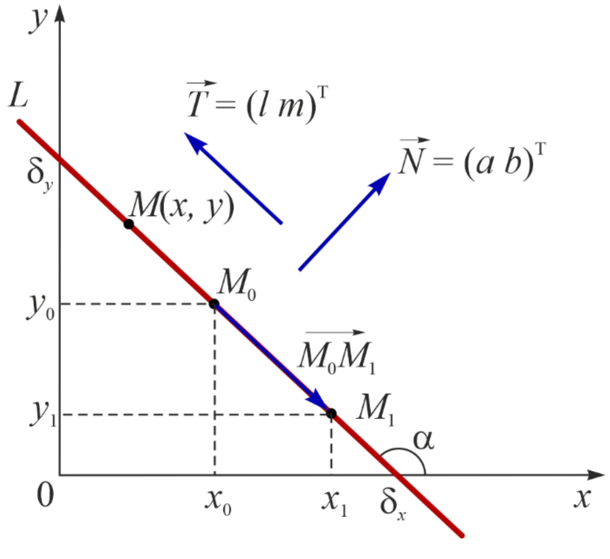


Рис. 4.3. Способи однозначно задати пряму на площині

Виходячи з названих способів задавання прямої є наступні рівняння.

Рівняння прямої лінії L на площині.

1. *Канонічне рівняння прямої* (прямої, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ *та паралельна вектору* $\vec{T} = (l\ m)^T$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

2. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_0(x_0, y_0)$ *та* $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

3. Якщо канонічне рівняння прямої лінії прирівняти деякому параметру t, то можна отримати *параметричне рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0. \end{cases}$$

4. *Рівняння прямої, що проходить через точку* $M_0(x_0, y_0)$ *і перпендикулярно вектору* $\vec{N} = (a\ b)^T$*:*

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

5. *Загальне рівняння прямої*:

$$ax + by + c = 0, \text{ де } c = -ax_0 - by_0.$$

6. *Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом*, тобто що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і що має кут нахилу (кут з віссю абсцис Ox) α:

$$y - y_0 = k(x - x_0), \text{ де } k = \mathrm{tg}(\alpha) \text{ або, де } b = y_0 - kx_0.$$

7. *Рівняння прямої, що відсікає на осях* Ox та Oy відрізки δ_x і δ_y:

$$\frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} = 1.$$

Взаємне розташування прямих L_1 і L_2 на площині.

Знаючи будь-яке з приведених рівнянь прямих можна встановити взаємне розташування двох прямих L_1 і L_2 (рис. 4.2).

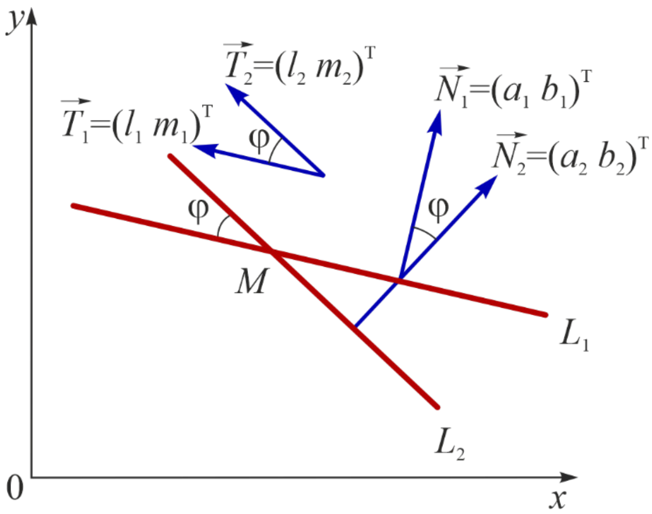


Рис. 4.4. Ілюстрація визначення кута між прямими

1. *Кут φ між двома прямими L_1 і L_2*:

- $\operatorname{tg}(\varphi)=\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}$, якщо відоме рівняння з кутовим коефіцієнтом;
- $\cos\varphi=\frac{l_1l_2+m_1m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$, якщо відоме канонічне рівняння;
- $\cos\varphi=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$, якщо відоме загальне рівняння.

З цих формул витікає умови паралельності й перпендикулярності прямих L_1 і L_2.

Паралельність $L_1 \parallel L_2$

$$k_1=k_2$$

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2}$$

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$$

Ортогональність $L_1 \perp L_2$

$$k_1=-\frac{1}{k_2}$$

$$l_1l_2+m_1m_2=0$$

$$a_1a_2+b_1b_2=0$$

2. *Відстань ρ від точки $M_0\,(x_0, y_0)$ до прямої L $ax+by+c=0$*:

$$\rho=\frac{ax_0+by_0+c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

3. *Перетин двох прямих L_1 і L_2* – точка $M\,(x, y)$:

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0.\end{cases}$$

Рівняння прямої лінії в просторі

Задати пряму в просторі можна, якщо вказати точку на прямій та вектор паралельний прямій (рис. 4.3) або вказати перетин двох площин (рис. 4.4).

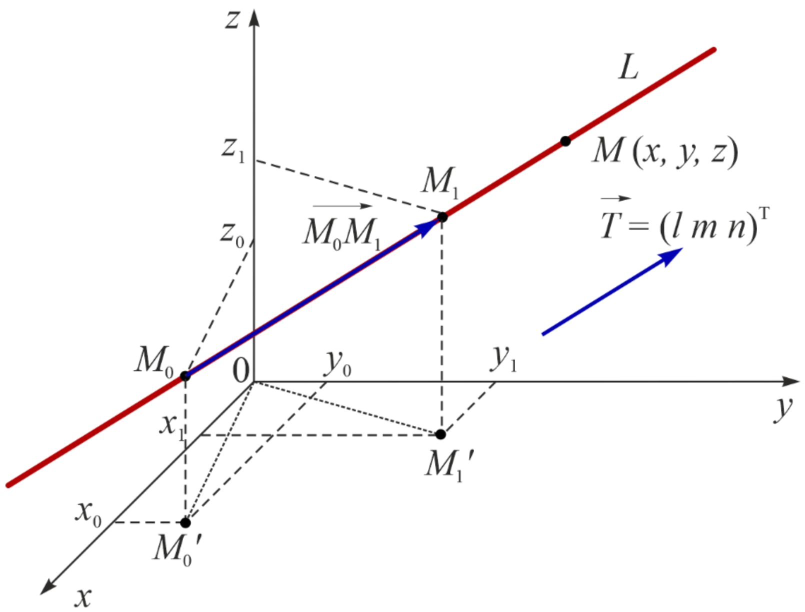


Рис. 4.5. Способи задати пряму L в трьохмірному просторі

Рівняння прямої *L* в просторі:

1. *Канонічне рівнянні прямої* (що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *та паралельно вектору* $\vec{T} = (l\ m\ n)^T$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

2. *Рівняння прямої, що проходить через дві точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *та* $M_1(x_1, y_1, z_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}.$$

3. *Параметричне рівняння прямої:*

$$\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \\ z = nt + z_0. \end{cases}$$

4. *Рівняння прямої лінії, як перетин двох площин плоскості:*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$$

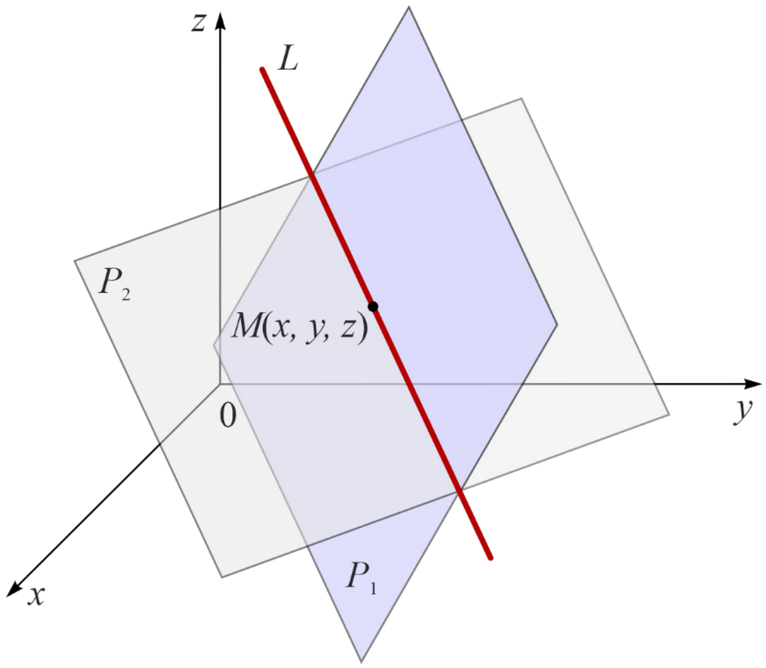


Рис. 4.6. Ілюстрація прямої L, як перетин двох площин

Взаємне розташування прямих L_1 та L_1.

Знаючи будь-яке з приведених рівнянь прямих можна встановити взаємне розташування двох прямих.

1. *Кут φ між двома прямими L_1 та L_1:*

$$\cos\varphi = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

- Умова паралельності: $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$.
- Умова ортогональності: $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.
- Умова компланарності: $\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0$.

2. *Відстань від точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямої* $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$:

$$\rho = \frac{|\vec{T} \times \vec{r}_1|}{|\vec{T}|},$$

де $\vec{T} = (l\ m\ n)^T$ і $\vec{r} = (x_1 - x_0 \quad y_1 - y_0 \quad z_1 - z_0)^T$.

3. *Відстань між мимобіжними прямими* $\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$, $\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$:

$$d = \frac{\left|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \times \vec{T}_1 \cdot \vec{T}_2\right|}{\left|\vec{T}_1 \times \vec{T}_2\right|},$$

де $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1 \ y_2 - y_1 \ z_2 - z_1)^T, \vec{T}_1 = (l_1 \ m_1 \ n_1)^T, \vec{T}_2 = (l_2 \ m_2 \ n_2)^T$.

Рівняння площини

Площину P можна однозначно задати, якщо задати будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на площині P і вектор $\vec{N}$ перпендикулярний їй або задати будь-які три точки M_1, M_2, M_3, які лежать на площині P (рис. 4.5).

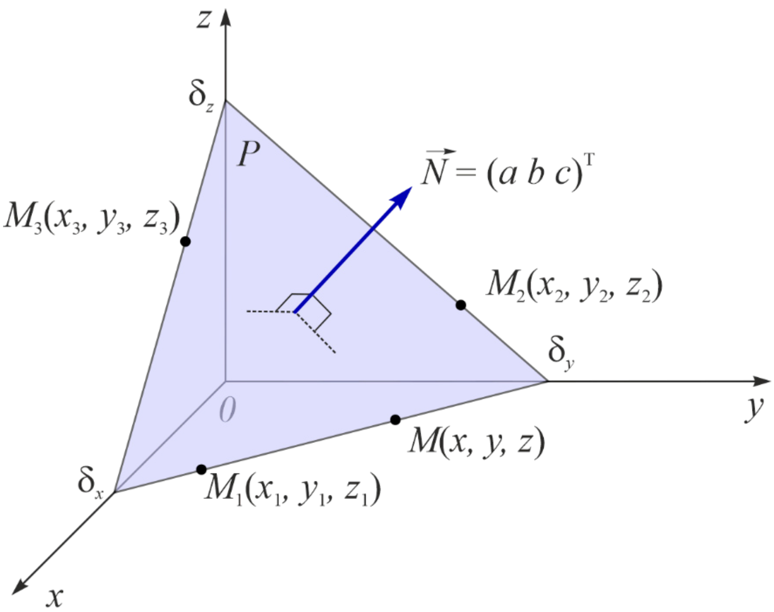


Рис. 4.7. Способи задати площину P

Рівняння площини P.

1. *Рівняння площини*, яка проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і перпендикулярна вектору $\vec{N} = (a \ b \ c)^T$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2. *Загальне рівняння площини*:

$$ax + by + cz + d = 0,$$

де $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ – відстань від початку координат до площини, a, b, c – координати вектора, що перпендикулярній до площини $\vec{N} = (a \ b \ c)^T$.

3. Рівняння *площини, що проходить через три точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ і $M_3(x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Рівняння площини у відрізках:*

$$\frac{x}{\delta_x} + \frac{y}{\delta_y} + \frac{z}{\delta_z} = 1.$$

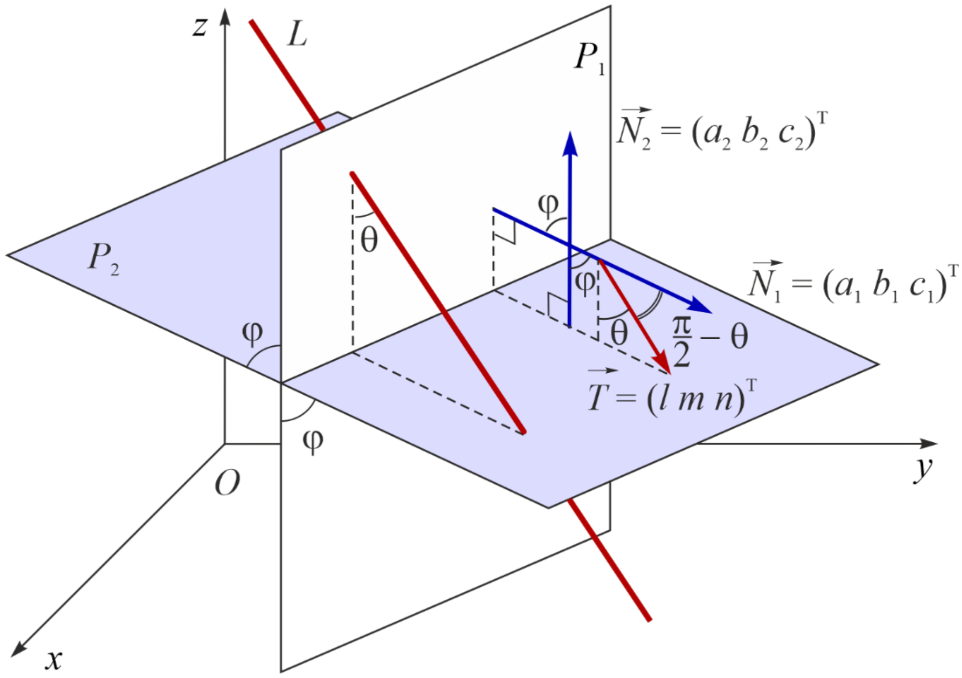


Рис. 4.8. Ілюстрація визначення кута між площами, між площиною і прямою

Взаємне розташування двох площин.

Кут φ між двома площами P_1 і P_2:

$$\cos\varphi = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Умова паралельності:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Умова перпендикулярності:

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0.$$

Взаємне розташування площини і прямої.

Кут Θ *між площиною P і прямою лінією L* (рис. 4.8):

$$\sin\Theta = \cos\frac{\pi}{2} - \Theta = \frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Умова паралельності:

$$al + bm + cn = 0.$$

Умова ортогональності:

$$\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = \frac{c}{n}.$$

Приклади розв'язання задач про пряму лінію і площину

1. Знайти рівняння прямої, яка паралельна прямій $3x - 4y - 25 = 0$ і віддалена від неї на відстань $d = 2$.

Розв'язання.

Загальне рівняння прямої на площині: $Ax + By + C = 0$.

Умова паралельності двох прямих $3x - 4y - 25 = 0$ і $Ax + By + C = 0$:

$$\frac{A}{3} = -\frac{B}{4}.$$

Нехай $A = 3, B = -4$.

Тоді шукане рівняння прямої приймає вигляд $3x - 4y + C = 0$.

Відстань від точки з координатами (x_0, y_0) до прямої $3x - 4y - 25 = 0$:

$$d = \frac{|3x_0 - 4y_0 - 25|}{\sqrt{9+16}} = 2.$$

Точка з координатами (x_0, y_0) лежить на прямій $3x - 4y + C = 0$.

Тобто необхідно розв'язати наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_0 - 4y_0 = 35 \\ 3x_0 - 4y_0 + C = 0 \end{cases};$$

$$C = -35.$$

Рівняння прямої, яке шукали $3x - 4y - 35 = 0$.

Відповідь: $3x - 4y - 35 = 0$.

2. Знайти довжину AD висоти трикутника, вершини якого знаходяться в точках $A(2 - 1)$, $B(-1, -2)$ і $C(3,1)$.

Розв'язання.

Координати вектора $\overrightarrow{BC} = (3 + 1 \quad 1 + 2)^T = (4 \quad 3)^T$.

Координати вектора $\overrightarrow{AD} = (x_D - 2 \quad y_D + 1)^T$.

Вектор $\overrightarrow{BC}$ повинен бути перпендикулярним вектору $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(x_D - 2) + 3(y_D + 1) = 0$$

Рівняння прямої, що проходить через точки B і C:

$$\frac{y+2}{1+2} = \frac{x+1}{3+1}.$$

Отже, рівняння прямої лінії, що проходить через точки B і C:

$$\frac{y+2}{3} = \frac{x+1}{4}.$$

Оскільки точка D лежить на прямій, що проходить через точки B і C, то координати точки D повинні задовольняти рівнянню:

$$\frac{y_D+2}{3} = \frac{x_D+1}{4}.$$

Розв’язуючи систему рівнянь, знайдемо невідомі координати точки D.

$$\begin{cases} 4(x_D - 2) + 3(y_D + 1) = 0 \\ \dfrac{y_D+2}{3} = \dfrac{x_D+1}{4} \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x_D + 3y_D = 5 \\ 3x_D - 4y_D = 5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x_D + 3y_D = 5 \\ 25y_D = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_D = 1{,}4 \\ y_D = -0{,}2. \end{cases}$$

Довжина вектора, тобто висота трикутника:

$$AD = \sqrt{(1{,}4 - 2)^2 + (-0{,}2 + 1)^2} = 1.$$

Відповідь: $AD = 1$.

3. Знайти кут між двома прямими:

$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-7}{-2}; \qquad \frac{x-8}{1} = \frac{y+6}{2} = \frac{z-1}{2}.$$

Розв’язання.

Вектора, що направляють прямі:

$$\vec{P}_1 = (2 \quad 1 \quad -2)^T; \qquad\qquad \vec{P}_2 = (1 \quad 2 \quad 2)^T.$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{P}_1 \cdot \vec{P}_2}{\left|\vec{P}_1\right| \cdot \left|\vec{P}_2\right|} \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2}{\sqrt{4+1+4}\sqrt{1+4+4}} = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

4. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_1\,(0;\,-1;\,3)$ і перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо $M_2\,(1;\,3;\,5)$.

Розв'язання.

Рівняння площини, що проходить через точку M_1:

$$a(x-0) + b(y+1) + c(z-3) = 0,$$

де a, b і c координати вектора перпендикулярного площині, тобто вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Координати вектора $\overrightarrow{M_1M_2} = (1-0 \quad 3+1 \quad 5-3)^T = (1 \quad 4 \quad 2)^T$.

Рівняння площини, яке шукали:

$$x + 4(y+1) + 2(z-3) = 0;$$

$$x + 4y + 2z - 2 = 0.$$

Відповідь: $x + 4y + 2z - 2 = 0$.

5. Знайти рівняння площини, яка проходить через вісь *0y*, точку M_0 (4; 0; 3) та перпендикулярна вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$, якщо M_2 (1; 3; 5).

Розв'язання.

Рівняння площини, що проходить через точку M_0:

$$A(x-4) + B(y-0) + C(z-3) = 0,$$

де A, B і C координати вектора перпендикулярного площині. Знайдемо їх із умови, що площина проходить через вісь *0y*, тобто $x = 0,\ z = 0$.

Підставив $x = 0$ і $z = 0$ в рівняння площини отримуємо вираз:

$$-4A + By - 3C = 0.$$

Відомо, що площина проходить через вісь *0y*. Візьмемо на площині при $x = 0$ і $z = 0$ дві будь-які точки. Нехай $y_1 = 0$ і $y_2 = 1$. Тоді,

$$\begin{cases} -4A - 3C = 0 \\ -4A + B - 3C = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A = -3C/4 = 0 \\ B = 0. \end{cases}$$

Нехай $C = 4$. Тоді $A = -3$.

Рівняння площини, яке шукали:

$$-3(x-4) + 4(z-3) = 0;$$

$$-3x + 4z = 0.$$

Відповідь: $-3x + 4z = 0$.

6. Знайти кут між площинами:

$$x - 2y + 2z - 8 = 0 \quad \text{і} \quad x + z - 6 = 0.$$

Розв'язання.

Вектора що направляють площини:

$\vec{N}_1 = (1 \quad -2 \quad 2)^T, \qquad \vec{N}_2 = (1 \quad 0 \quad 1)^T.$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{1+0+1}} = \frac{3}{\sqrt{9}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Відповідь: $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Задачі про прямі й площини

4.1. При якому значенні C точка $M(3; -2)$ лежіть на прямій $2x + 5y + C = 0$?

4.2. При якому значенні C пряма $2x - Cy + 3 = 0$ перпендикулярна прямій $5x + 2y + 7 = 0$?

4.3. Визначити, при якому значенні m пряма $(m-9)x + (3m-6)y + (m+3) = 0$ паралельна осі Ox.

4.4. Визначити, при якому значенні m пряма $(m-9)x + (3m-6)y + (m+3) = 0$ паралельна осі Oy.

4.5. Визначити, при якому значенні m пряма $(m-9)x + (3m-6)y + (m+3) = 0$ проходить через початок координат.

4.6. При якому значенні C пряма $2x - Cy + 3 = 0$ паралельна прямій $5x + 2y + 7 = 0$?

4.7. При якому значенні k пряма $y = kx + 3$ перпендикулярна прямій $y = -5x + 7$?

4.8. При якому значенні k пряма $y = kx + 3$ параллельна прямій $y = -5x + 7$?

4.9. При якому значенні l пряма $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{3}$ перпендикулярна прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{6}$?

4.10. При якому значенні l пряма $\frac{x-3}{l} = \frac{y-1}{3}$ паралельна прямій $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{6}$?

4.11. Знайти косинус кута між прямими $x + 3y - 2 = 0$ і $2x + 5y - 6 = 0$.

4.12. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{4}$ і $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9}$.

4.13. Знайти косинус кута між прямими $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{4}$ і $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{9}$.

4.14. Знайти тангенс кута між прямими $y = 6x - 10$ і $y = \frac{x}{3} + 1$.

4.15. Знайти відстань між точкою $M\,(4; 9)$ і прямою $x + 3y - 2 = 0$.

4.16. Знайти точку перетину прямих $x + 3y - 2 = 0$ і $2x + 5y - 6 = 0$.

4.17. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{8}$ перпендикулярна прямій $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+2}{n}$?

4.18. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{8}$ паралельна прямій $\frac{x-4}{4} = \frac{y-1}{6} = = \frac{z+2}{n}$?

4.19. При якому значенні n пряма $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{1}$ компланарна прямої $\frac{x-4}{4} = \frac{y-2}{6} = \frac{z+2}{n}$?

4.20. Знайти косинус кута між площинами $x + 3y - 2z + 6 = 0$ і $2x + 5y - 6z - 9 = 0$.

4.21. Знайти C, при якому площини $x + 3y + Cz + 6 = 0$ і $2x + 5y - 6z - 9 = = 0$ перпендикулярні

4.22. Знайти C, при якому площини $x + 2{,}5y + Cz + 6 = 0$ і $2x + 5y - 6z - 9 = 0$ паралельні.

4.23. Знайти кут між площиною $x + 3y - 2z + 6 = 0$ і прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{8}$

4.24. Знайти C, при якому площина $x + 3y - 2z + 6 = 0$ паралельна прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{C}$.

4.25. Знайти C, при якому площина $x + 0{,}5y - 2z + 6 = 0$ перпендикулярна прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+5}{C}$.

4.26. Знайти координати точки перетину прямої L і площини P, якщо:

а) L: $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12}$; P: $x - 2y - 3z + 36 = 0$;

б) L: $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$; P: $x + 7y + 3z + 11 = 0$;

в) L: $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}$; P: $2x + y + 7z - 3 = 0$.

4.27. Знайти координати точки перетину трьох площини, якщо вони задані рівняннями:

а) $3x + y - z + 1 = 0,\ 2x - y + 3z - 19 = 0,\ -x + 3y + z + 7 = 0$;

б) $x + 9y - 3z + 28 = 0,\ x - y - z + 2 = 0,\ x + 2z - 5 = 0$;

в) $x + 2y + 3z + 6 = 0,\ 3x + y + 2z + 5 = 0,\ 2x + 3y + z - 5 = 0$.

4.28. Дві сторони ромба мають рівняння $2x - 5y - 1 = 0$ і $2x - 5y - 34 = 0$, а рівняння однієї з діагоналей $x + 3y - 6 = 0$. Знайти рівняння другої діагоналі.

4.29. Знайти відстань між прямими $x = -2y = z$ і $x = y = 2$.

4.30. Знайти відстань від точки $M(3;\ 0;\ 4)$ до прямої $y = 2x + 1, z = 2x$.

4.31. Знайти відстань від точки $M(4;\ 3;\ 0)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;\ 3;\ 0)$, $M_2(4;\ -1;\ 2)$ і $M_3(3;\ 0;\ 1)$

4.32. Знайти відстань між паралельними площинами $4x + 3y - 5z - 8 = 0$ і $4x + 3y - 5z + 12 = 0$.

Контрольні питання

1. Що таке лінія й поверхня з точки зору аналітичної геометрії?
2. Що таке поверхня з точки зору аналітичної геометрії?
3. Що таке ортонормований базис?
4. Декартова система координат та її ортонормовані базисні вектори?
5. Полярна система координат та її ортонормовані базисні вектори?
6. Циліндрична система координат та її ортонормовані базисні вектори?
7. Сферична система координат та її ортонормовані базисні вектори?
8. Перетворення координат декартової системи у циліндричні та навпаки?
9. Перетворення координат декартової системи у сферичні та навпаки?
10. Що таке пряма?
11. Що таке площина?
12. Напишіть та поясніть рівняння прямої на площині через координати вектора, який перпендикулярний прямій?
13. Напишіть та поясніть канонічне рівняння прямої на площині?
14. Напишіть та поясніть параметричне рівняння прямої на площині?
15. Кут між прямими на площині? Відстань між точкою і прямою?
16. Рівняння прямої в тривимірному просторі?
17. Рівняння площини через вектор, який перпендикулярний площині?
18. Кут між площинами?
19. Кут між площиною і прямою?
20. Відстань між точкою і площиною, між прямою і площиною?
21. Відстань між точкою і прямою, між паралельними та між мимобіжними прямими?
22. Умова перпендикулярності, паралельності й компланарності прямих?
23. Як знайти перетин прямої та площини?
24. Що є перетином двох площин? Як знайти перетин двох площин?

РОЗДІЛ 5. ЛІНІЇ ТА ПОВЕРХНІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Алгебраїчною лінією (кривою) на площині називається множина точок, яка в будь-якій афінній системі координат Ox_1x_2 може бути задана рівнянням:

$$p(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m} a_{ij}\, x_1^i x_2^j = 0.$$

Це рівняння називається алгебраїчним з двома невідомими. Порядок рівняння та лінії дорівнює максимальному значенню суми показників степенів $l + m$, які входять до рівняння: $a_{kl}x_1^l x_2^m$. Отже, якщо на площині xOy лінію задає рівняння, в яке входить x^2, y^2 або $x \cdot y$, то це буде *лінія другого порядку на площині*. Будь-яку неалгебраїчну лінію називають трансцендентною.

Аналогічно визначається *порядок поверхні* – через порядок алгебраїчного рівняння, яке трьох або більше змінних:

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=0}^{l}\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} a_{ijk}x_1^i x_2^j x_3^k = 0.$$

Складніше з лініями в тривимірному просторі. *Лінію в багатовимірному просторі розглядають як перетин двох поверхонь.*

Система рівнянь $\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$ визначає лінію L в тривимірному просторі, якщо координати будь-якої точки M лінії L є розв'язок системи рівнянням, координати будь-якої точки, яка не лежить лінії L не є розв'язок системи рівнянь

Розглянемо алгебраїчні лінії другого порядку на площині й алгебраїчні поверхні другого порядку в тривимірному просторі.

5.1. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПЛОЩИНІ

Лінією другого порядку на площині xOy називається множина точок на площині xOy, координати яких зв'язані між собою рівнянням другого порядку:

$$p(x) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0.$$

Тут хоча б один з коефіцієнтів $a_{11},\ a_{22},\ a_{12}$ повинен бути відмінним від нуля.

Це рівняння зручно записати через квадратичну форму:

$$(x \quad y \quad 1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ або } X^T P X = 0,$$

де $X = (x \quad y \quad 1)^T$ – змінних, $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ – матриця рівняння.

Якщо $a_{11} = 0, a_{22} = 0$ і $a_{12} = 0$, то рівняння задає пряму на площині. В аналізі важливе місце займає матриця квадратичної форми рівняння Q:

$$p(x) = X^T Q X + 2LX + a_0, \qquad Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Якщо в деякій афінній системі координат на площині лінія задана рівнянням $p(x_1, x_2) = 0$ порядку n, *то в іншій афінній системі координат ця лінія теж задається рівнянням такого ж вигляду й такого ж порядку* n. Це твердження виражає властивість многочленів не змінюватися при лінійних невироджених перетвореннях. Отже, для будь-якого рівняння лінії на площині можна підібрати зручну для розгляду цієї лінії систему координат.

Для будь-якої ліній другого порядку на площині існує прямокутна система координат, в якій вона має одне з можливих канонічних рівнянь (таблиця 3).

Рівняння лінії другого прядка мають декілька інваріантів, які залишаються незмінними при переході від однієї системи координат до іншої завдяки паралельному переносу й обертання навколо центру координат.

Функція J від коефіцієнтів многочлена називається *ортогональним інваріантом*, якщо вона не змінюється при переході від однієї прямокутної системи координат до іншої: $J(P) = J(P')$.

По значенню цих інваріант можна визначити, який само тип кривої задає рівняння. Як правило введенням нової системи координат рівняння кривої другого порядку перетворюється до канонічного вигляду. Параметри канонічних рівнянь обчислюються через інваріанти й корені характеристичного рівняння.

Ортогональні інваріанти ліній другого порядку на площині:

1) $\Delta = \det P = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$;

2) $\delta = \det Q = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2;$

3) $\tau = \operatorname{tr} Q = a_{11} + a_{22};$

4) $k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$

5) Власні значення Q: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0.$

Існують дійсні й уявні криві другого порядку. Варіанти дійсних кривих другого порядку представлені в таблиці 3.

Таблиця 3.

Класифікація дійсних ліній другого порядку

Вид лінії	**Канонічне рівняння**	**Інваріанти**
	Не вироджені $\Delta \neq 0$	
Еліпс	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \begin{cases} a^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} \\ b^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{\Delta}{\lambda_2\lambda_1^2} \end{cases}$	$\Delta = -a^4b^4$ $\delta = a^2b^2$ $\tau = a^2 + b^2$
Гіпербола	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \begin{cases} a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{\delta} = -\frac{\Delta}{\lambda_2\lambda_1^2} \\ b^2 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2} \end{cases}$	$\Delta = a^4b^4$ $\delta = -a^2b^2$ $\tau = a^2 - b^2$
Парабола	$y^2 = 2px, \ \ \lambda_2 = 0$	$\Delta = p^2\tau$ $\delta = 0$
	Вироджені $\Delta = 0$	
Точка	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta = a^2b^2$ $\tau = a^2 + b^2$
Дві прямі, що перетинаються	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	$\delta = -a^2b^2$ $\tau = a^2 - b^2$
Дві паралельні прямі	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	$\delta = 0$ $\tau = 1$
Дві співпадаючі прямі	$x^2 = 0$	$\delta = 0$ $\tau = 1$

Канонічне рівняння невиродженої кривої другого порядку за допомогою відповідного переносу початку координат може бути приведено до вигляду:

- $y^2 = 2px - (1-\varepsilon^2)x^2, \ \ p > 0$ – в декартовій системі координат;
- $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ – в полярній системі координат.

В цьому випадку крива проходить через початок нової системи координат, а вісь *Ox* є віссю симетрії кривої.

Ці рівняння виражають той факт, що невироджена крива другого порядку є геометричним місцем точок, для яких відношення відстаней до даної точки (фокус) і до даної прямої (директриса) є постійним. Це відношення називається ексцентриситетом $\varepsilon \geq \ 0$.

Лінія другого порядку, у якої ексцентриситет ε:

$\varepsilon \ = \ 0$ називається *колом;*

$0 \ < \ \varepsilon \ < \ 1$ – *еліпсом*

$\varepsilon \ = \ 1$ – *параболою*

$\varepsilon \ > \ 1$ – *гіперболою.*

Рівняння директриси кривої виражається рівнянням

$$x = -\frac{p}{\varepsilon(1+\varepsilon)},$$

а координати фокусу

$$x = -\frac{p}{(1+\varepsilon)}, \ \ y = 0.$$

Директриса перпендикулярна осі симетрії, що проходить через фокус і вершину кривої (фокальна вісь). Відстань між фокусом і директрисою дорівнює p/ε.

Якщо крива другого порядку *центральна* (еліпс або гіпербола), то пряма $x = \frac{p}{(1-\varepsilon^2)}$ є віссю симетрії і, отже, крива має два фокуси і дві директриси.

Параметр p називається фокальним параметром.

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна: $r_1 + r_2 = 2a$, де r_1 і r_2 – фокальні відстані, a – велика напіввісь (відстань від центру еліпса до найбільш віддаленої від неї точки кривої, рис. 5.1).

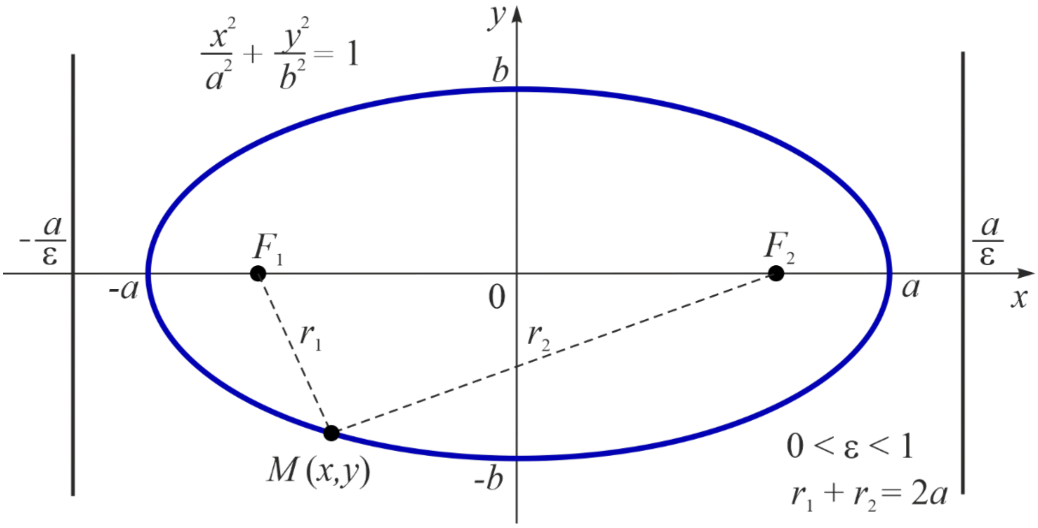


Рис. 5.1. Еліпс

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох даних точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина постійна: $r_1 - r_2 = 2a$ (рис. 5.2).

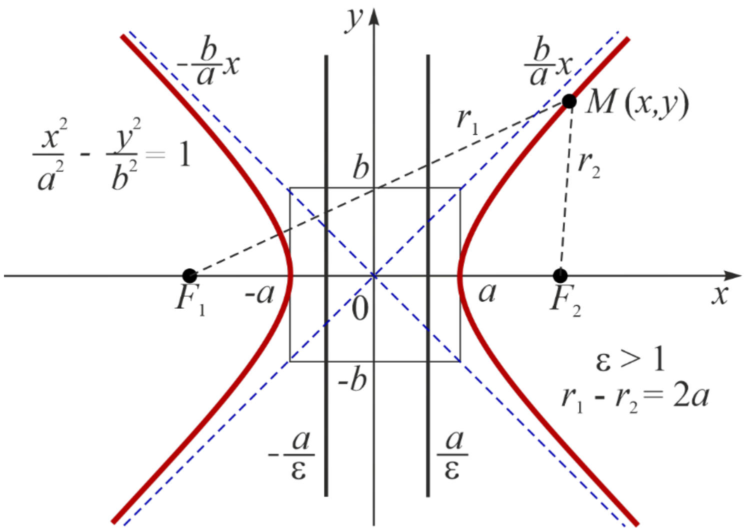


Рис. 5.2. Гіпербола

Параболою називається геометричне місце точок, однаково віддалених від даної точки (фокусу) й даної прямої (директриса, рис. 5.3).

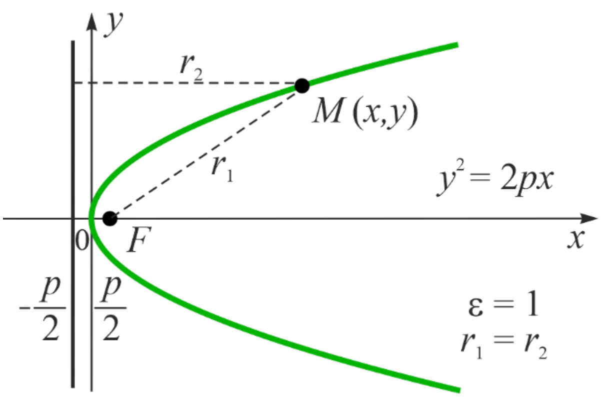


Рис. 5.3. Парабола

Теорема. При ортогональній заміні змінних $X = S \cdot X' + S_0$ квадратичної функції інваріанти τ, δ, Δ не зміняються: $\tau = \tau', \delta = \delta', \Delta = \Delta'$.

Зауваження.

1. При однорідній $S_0 = 0$ ортогональній зміні змінних квадратичної функції κ не зміняється: $\kappa = \kappa'$

2. Якщо $\delta = \Delta = 0$, то $\kappa = \kappa'$

3. При ортогональній заміні змінних власні значення Q не змінюються

4. Існує ортогональна заміна змінних, що у рівнянні відсутній добуток змінних

$$p'(x', y') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1' x' + 2a_2' y' + a_0$$

Таблиця 4.

Характеристики кривих другого порядку

Параметр кривої	***Еліпс***	***Гіпербола***	***Парабола***
Канонічне рівняння	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$y^2 = 2px$
Параметричне рівняння	$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases}$	$\begin{cases} x = a \cdot \operatorname{ch} t \\ y = b \cdot \operatorname{sh} t \end{cases}$	$\begin{cases} x = t \\ y^2 = 2pt \end{cases}$
Рівняння в полярній системі координат	$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos\varphi}$		
Міжфокусна відстань	$2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}$	$2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$	–
Ексцентриситет	$\varepsilon = \frac{c}{a}$		$\varepsilon = 1$
	$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$	$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$	
Кількість фокусів	2	2	1
Фокальна відстань	$r_1 = \lvert a - \varepsilon x \rvert$ і $r_2 = \lvert a + \varepsilon x \rvert$		$r = x + \frac{p}{2}$
Директриси	$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$		$x = -\frac{p}{2}$
Асимптоти	–	$y = \pm\frac{b}{a}x$	–

5.2. Поверхні другого порядку

Поверхня другого порядку – геометричне місце точок в просторі, координати яких задовольняють в деякій афінної системі координат рівнянню:

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0.$$

Причому необхідно, щоб серед квадратичної частині коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} хоча б один з коефіцієнтів був відмінний від нуля. Якщо ввести:

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

то рівняння поверхні другого порядку можна записати у вигляді:

$$X^T \cdot Q \cdot X + 2LX + a_0 = 0.$$

Також можна об’єднати матриці Q та L. Тоді рівняння поверхні:

$$X^T \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_0 \end{pmatrix} \cdot X = 0, \text{ де } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Нехай в деякій прямокутній системі координат задана квадратична частина $q(x,y,z)$. Тоді найдеться інша прямокутна система координат з таким же початком, в якому квадратична частина прийме діагональний вигляд:

$$q'(x',y',z') = \lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2,$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – власні значення матриці Q, а нові базисні вектора $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3{}'$ – відповідні власні вектора матриці Q. Всі власні значення – дійсні числа, а власні вектора, що відповідні власним значенням, – ортогональні.

Для будь-якого многочлена другої степені у просторі існує прямокутна система координат, в якій він приймає один з наступних п’яті видів:

1) $F = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \lambda_3z^2 + \tau, \quad (\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0);$

2) $F = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + 2b_3z, \quad (\lambda_1\lambda_2b_3 \neq 0);$

3) $F = \lambda_1x^2 + \lambda_2y^2 + \tau, \quad (\lambda_1\lambda_2 \neq 0);$

4) $F = \lambda_1x^2 + 2c_2y, \quad (\lambda_1c_2 \neq 0);$

5) $F = \lambda_1x^2 + \tau, \quad (\lambda_1 \neq 0).$

Відповідно, для будь-якого рівняння поверхні другого порядку існує така прямокутна система координат, в якій це рівняння має один з 17 виглядів канонічних рівнянь, які представлені у таблиці 5. Канонічне рівняння, на відміну канонічної системи координат, визначені однозначно.

Таблиця 5.

Канонічні рівняння поверхонь другого порядку

Еліпсоїди	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}-1\\0\\1\end{cases}$	– уявний – вироджений (точка) – дійсний (рис. 5.4)
Гіперболоїди	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\begin{cases}0\\1\end{cases}$	– конус (рис. 5.5) – однопорожнинний (рис. 5.6)
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	– двопорожнинний (рис. 5.7)
Параболоїди	$2pz=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	– еліптичний (рис. 5.8)
	$2pz=\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}$	– гіперболічний (рис. 5.9)
Циліндри	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	– еліптичний (рис. 5.10)
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	– гіперболічний (рис. 5.11)
	$y=2px^2$ або $x=2py^2$	– параболічний (рис. 5.12)
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\begin{cases}-1\\0\end{cases}$	– уявний – вироджений еліптичний
Площини	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	– дві пересічні
	$\frac{x^2}{a^2}=\begin{cases}-1\\0\\1\end{cases}$	– дві уявних паралельних – дві співпадаючих – дві дійсних паралельних

Еліпсоїд.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Плоским перерізом поверхні другого порядку обов'язково буде крива, порядок якої не перевищує двох. Для еліпсоїда всі непусті плоскі перерізи будуть еліпсом або точкою. Частинним випадком еліпсоїду ($a=b=c$) є сфера.

Гіперболоїди. Конус другого порядку.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Конус другого порядку відноситься до гіперболоїдів. Характерною ознакою їх рівнянь є присутність квадратичних членів усіх змінних, серед яких є від'ємні доданки. Рівняння конуса другого порядку є однорідним другого порядку $F(\lambda x,\lambda y,\lambda z)=\lambda^2F(x,y,z)$. Отже, будь-яка пряма, яка має точку O та точку конуса, – є його твірною.

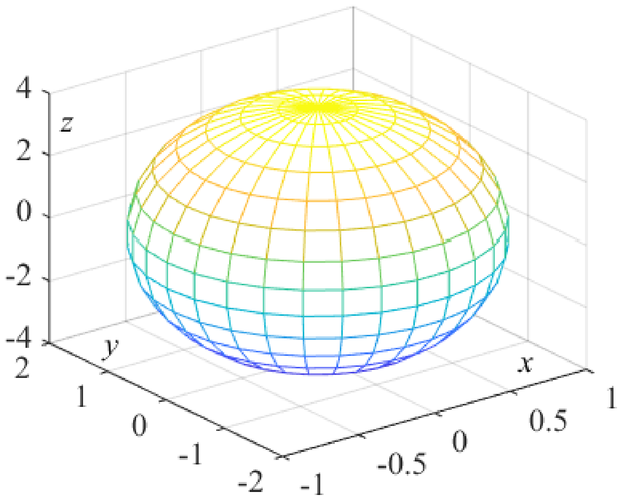


Рис. 5.4. Еліпсоїд

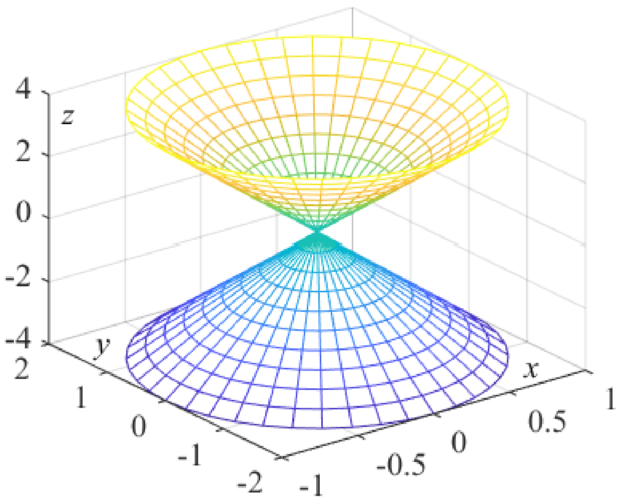


Рис. 5.5. Конус

Однопорожнинний гіперболоїд.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Переріз однопорожнинного гіперболоїда площиною $z=0$ є еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, який називається *горловим*. Однопорожнний гіперболоїд має чудову властивість. Він може бути утворений прямими. Однопорожнний гіперболоїд має два сімейства твірних прямих. Через кожну точку поверхні проходить рівно одна пряма кожного сімейства. Дві різні прямі з одного сімейства твірних є мимобіжними, а з різних – перетинаються або паралельні.

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\quad \gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\delta\left(1-\frac{y}{b}\right)\text{ і}$$

$$\beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\quad \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\gamma\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Двопорожнинний гіперболоїд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Двопорожнинний гіперболоїд не проходить через початок координат, не має твірних прямих, складається з двох симетричних частин, які називаються *порожнинами*. Якщо двопорожнинний гіперболоїд перетнути площиною $z = h$, де $h^2 > c^2$ то в перерізі утвориться еліпс.

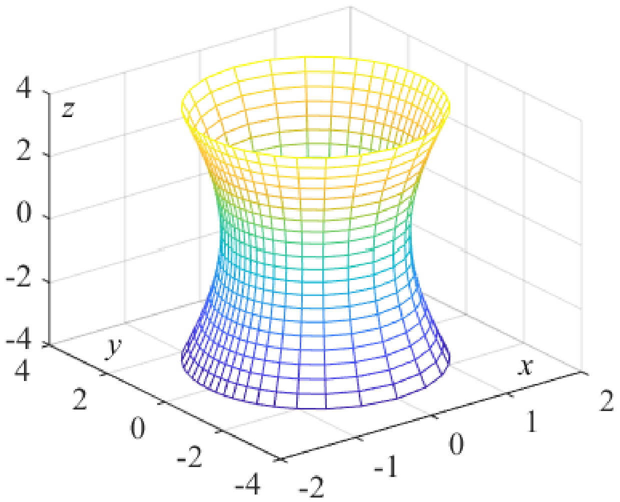


Рис. 5.6. Однопорожнинний гіперболоїд

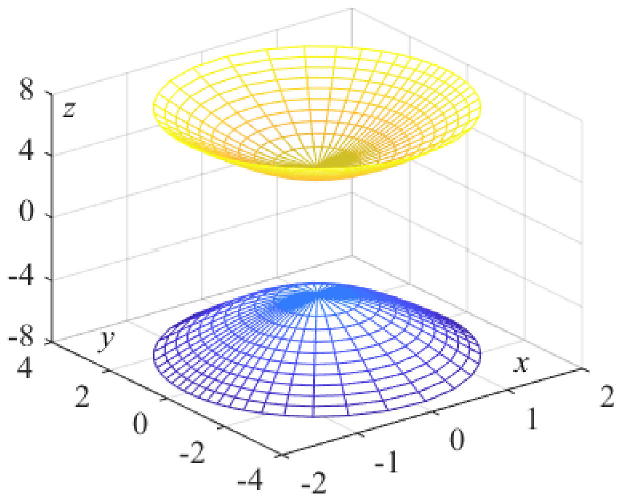


Рис. 5.7. Двопорожнинний гіперболоїд

Параболоїди. Еліптичний параболоїд.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

Характерною ознакою канонічних рівнянь параболоїдів є присутність квадратичних членів двох змінних та однієї змінної першого порядку. Параболоїди можуть бути *еліптичними* й *гіперболічними* в залежності від того додаються квадратичні доданки або віднімаються.

Еліптичний параболоїд не має прямолінійних твірних. Його можна уявити як поверхню, утворену еліпсами, вершини яких лежать на головних параболах. Перерізами еліптичного параболоїда площиною паралельною осі Oz є параболи, а площиною $z > 0$ перпендикулярної осі Oz – еліпси.

Еліптичний параболоїд з $a = b$ називається *параболоїдом обертання*.

Гіперболічний параболоїд.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz$$

Гіперболічний параболоїд має два сімейства твірних, які проходять через кожну точку поверхні. Твірні одного сімейства попарно мимобіжні й паралельні однієї площині, а різних – перетинаються.

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\beta,\quad \gamma\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\delta z \text{ і}$$
$$\beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\alpha z,\quad \delta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\gamma.$$

Переріз гіперболічного параболоїда площиною перпендикулярної осі Oz $z\neq 0$ – гіперболи, площиною $z=0$ – пара прямих, що перетинаються в початку координат. Перерізи площинами xOz та yOz представляють собою параболи, яких називають головними параболами. Так як осі симетрії головних парабол направлені в протилежні боки, то гіперболічний параболоїд має ще одну назву – *сідлова поверхня*.

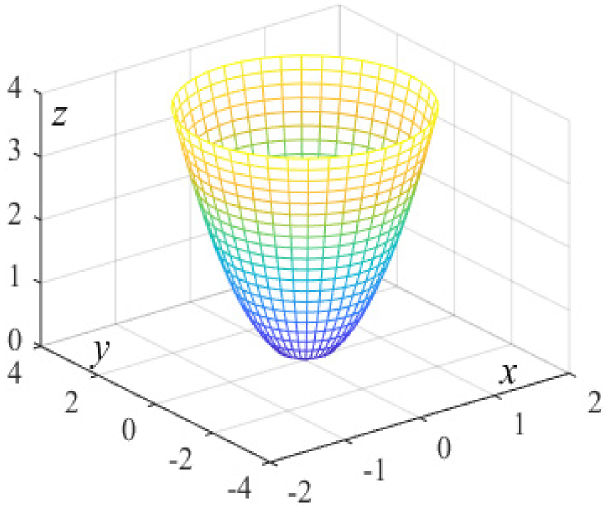


Рис. 5.8. Еліптичний параболоїд

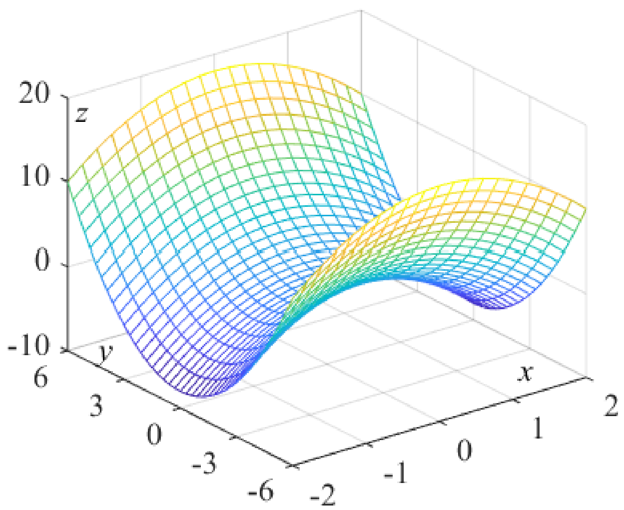


Рис. 5.9. Гіперболічний параболоїд

Циліндри. Еліптичний циліндр.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Характерна ознака канонічних рівнянь циліндрів – відсутність залежності від однієї з трьох змінних. Наприклад, рівняння циліндрів на рис. 5.10 – 5.11 не залежать від змінної z. Перерізи еліптичного циліндру площиною перпендикулярною до осі Oz є однакові еліпси, а площиною паралельної осі Oz в межах $|y|<b,\ |x|<a$ – пара паралельних прямих.

Параболічний циліндр.

$$y = 2px^2.$$

Перерізи параболічного циліндру площиною перпендикулярною до осі Oz є однакові параболи, а площиною паралельної осі Oz $y > 0$ – пара паралельних прямих.

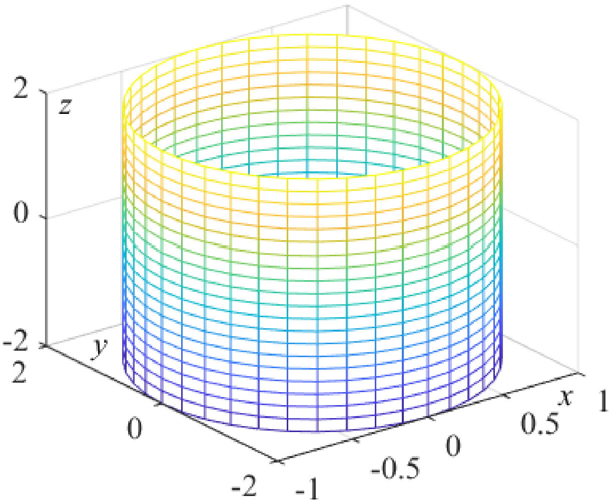


Рис. 5.10. Еліптичний циліндр

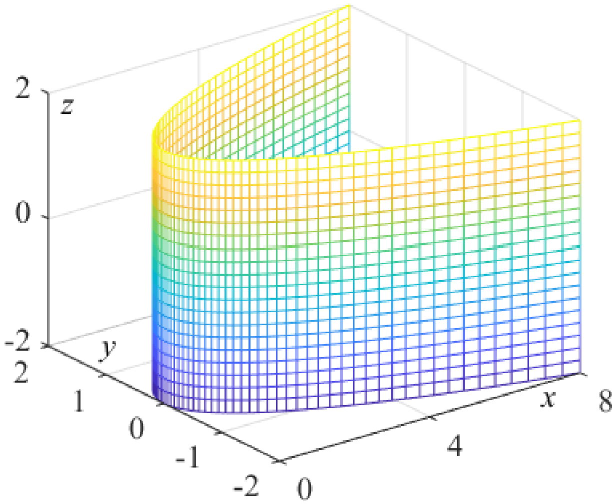


Рис. 5.11. Параболічний циліндр

Гіперболічний циліндр.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

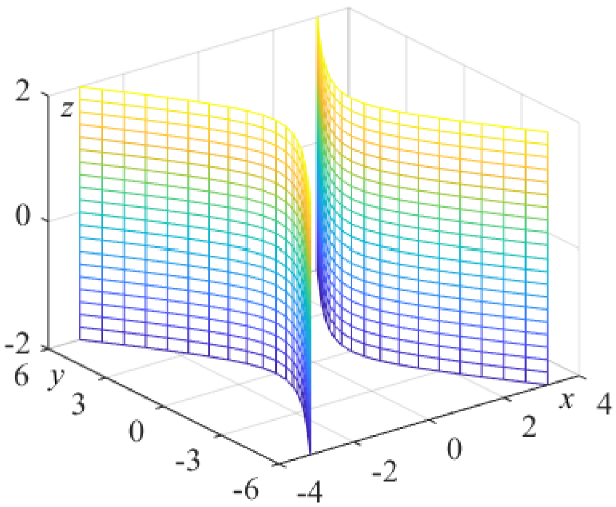


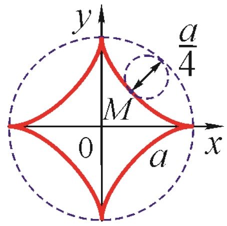
Рис. 5.12. Гіперболічний циліндр

Перерізи гіперболічного циліндру площиною перпендикулярною до осі Oz є однакові гіперболи, а площиною паралельної осі Oz в межах $|y| < b,\ |x| < a$ – пара паралельних прямих.

5.3. Визначні криві й поверхні

Плоскі криві

1. *Астроїда*:

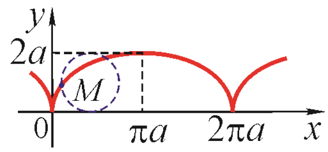


$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3};$$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t\,, t \in [0; 2\pi] \end{cases}$$

Атроїда – траєкторія руху точки M кола радіусом $a/4$, що котиться по внутрішній дузі окружності радіуса $a > 0$.

2. *Циклоїда*:



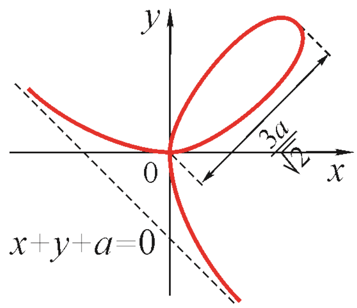
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Циклоїда – траєкторія руху точки кола, що котиться вздовж нерухомої прямої без ковзання. Циклоїду утворює нескінченна кількість арок, кожна з яких відповідає одному обороту кола.

3. *Декартів листок*:

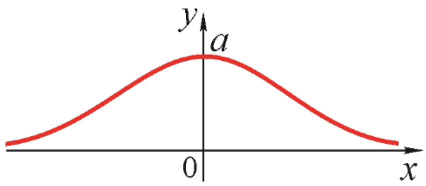
$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0.$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

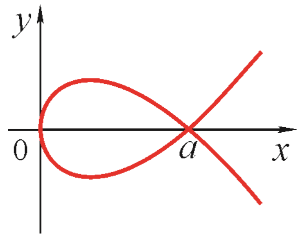


4. *Кучер Аньєзі*:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

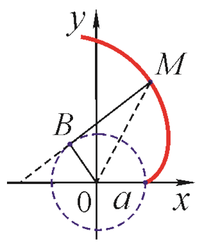


5. *Петльова парабола*:



$$ay^2 = x(x - a)^2.$$

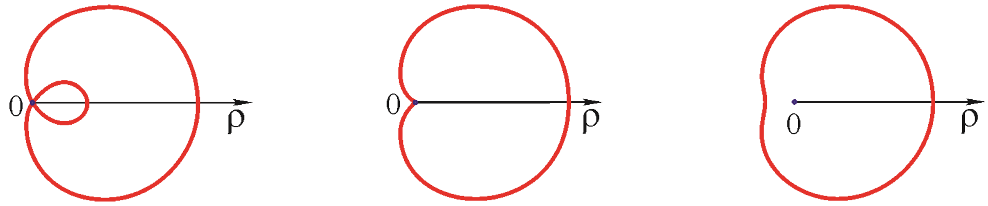
6. *Розгортка кола*:



$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t) \\ y = a(\sin t - t\cos t), t \in [0; +\infty). \end{cases}$$

7. *Паскалів завиток*:

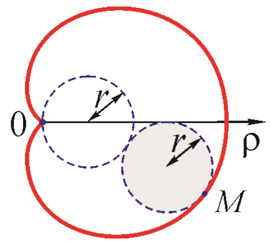
$$\rho = 2a\cos\varphi \pm l.$$



Лінія симетрична щодо осі Ox; якщо $l < 2a$, то точка O — вузлова (в ній лінія перетинає себе), якщо $l = 2a$, то полюс є точкою вертання, якщо $l > 2a$, то точка O, яка належить кривій, є ізольованою особливою точкою.

Паскалів завиток використовують для креслення профілю ексцентрика, якщо потрібно, щоб стрижень, який ковзає профілем, коливався гармонічно

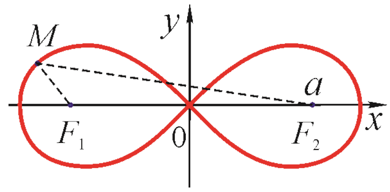
8. *Кардіоїда*:



$$\rho = 2a(1 + \cos\varphi).$$

Кардіоїда – траєкторія руху точки кола радіусом r, яке котиться зовнішнім боком кола з таким самим радіусом – окремий випадок паскалевого завитка

9. *Лемніската Бернуллі:*

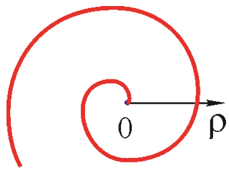


$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2);$$

$$\rho = a\sqrt{2\cos 2\varphi}.$$

Лемніската Бернуллі – множина всіх точок площини, для яких добуток відстаней до двох заданих точок цієї площини є сталим і рівним квадрату половини відстані між заданими точками.

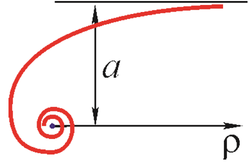
10. *Архімедова спіраль:*



$$\rho = a\varphi.$$

Архімедова спіраль – траєкторія руху точки, що рівномірно рухається прямою, яка рівномірно обертається навколо фіксованої точки.

11. *Гіперболічна спіраль:*

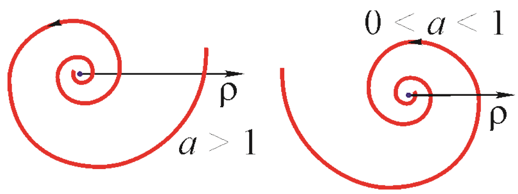


$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

12. *Логарифмічна спіраль:*

$$\rho = a^{\varphi}, a > 1 \text{ (для правої)};$$

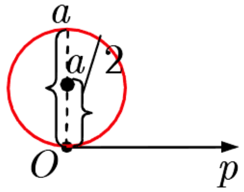
$$\rho = a^{\varphi}, 0 < a < 1 \text{ (для лівої)}.$$



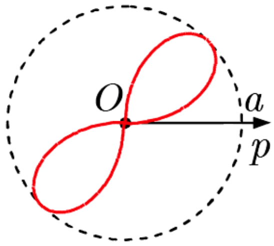
13. *Троянди:*

$$\rho = a \cdot \sin n\varphi \text{ або } \rho = a \cdot \cos n\varphi, \qquad a > 0.$$

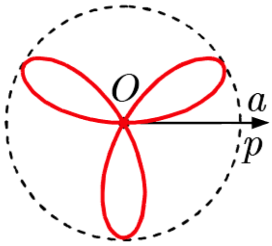
Троянди містяться всередині кола радіусом a. Коли n ціле, то мають n пелюсток.



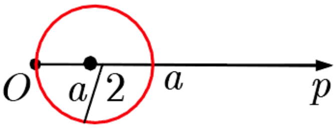
$\rho = a\sin\varphi$



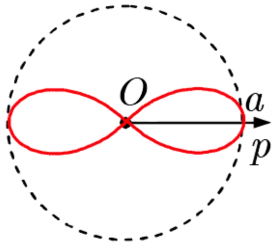
$\rho = a\sin 2\varphi$



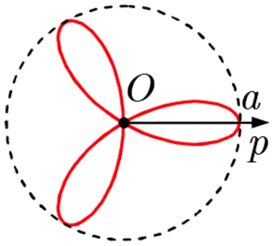
$\rho = a\sin 3\varphi$



$\rho = a\cos\varphi$



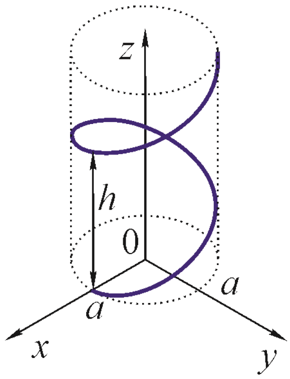
$\rho = a\cos 2\varphi$



$\rho = a\cos 3\varphi$

Просторові криві

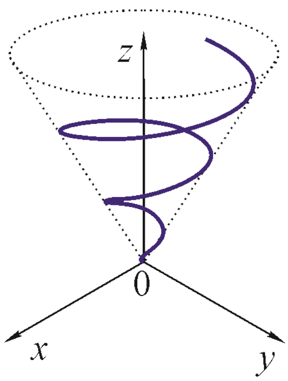
1. *Циліндрична гвинтова лінія* – просторова крива, яку описує точка, що обертається зі сталою кутовою швидкістю навколо нерухомої осі й одночасно переміщується поступально зі сталою швидкістю вздовж цієї осі:



$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = \dfrac{ht}{2\pi}, t \in [0; +\infty), \end{cases}$$

де a – радіус циліндра; h – крок гвинтової лінії.

2. *Конічна гвинтова лінія* – лінія на поверхні колового конуса, що перетинає всі твірні кола під однаковим кутом:



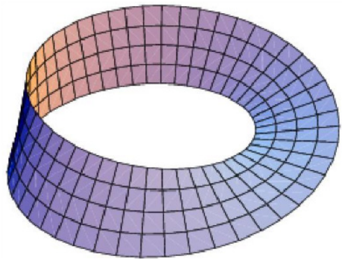
$$\begin{cases} x = a \cdot t \cdot \cos t \\ y = a \cdot t \cdot \sin t \\ z = bt, t \in [0; +\infty). \end{cases}$$

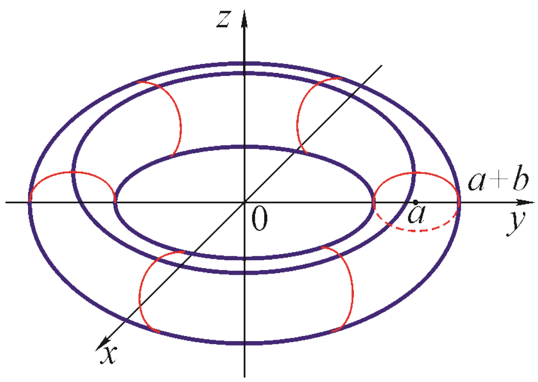
3. *Крива Вівіані* – лінія перетину сфери з коловим циліндром, удвічі меншого радіуса, ніж сфера:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax. \end{cases}$$

Поверхні

1. *Мебіюсів листок* – поверхня, яку можна одержати склеюванням двох протилежних боків перекрученої прямокутної смужки. Ця поверхня є прикладом однобічної неорієнтованої поверхні: якщо рухатись уздовж мебіюсова листка, не перетинаючи його межі, то (на відміну від двобічних поверхонь, приміром, сфери, циліндра) можна потрапити в початкову точку, опинившись у перевернутому положенні, тобто з «другого боку».



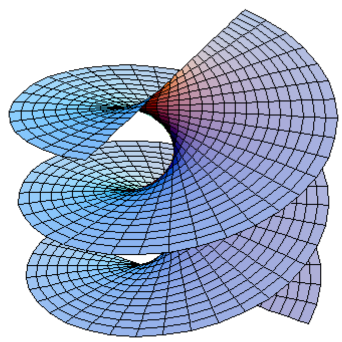


2. *Тор* – поверхня, одержана обертанням кола навколо осі, що лежить у площині кола і її не перетинає:

$$\begin{cases} x = (a + b \cdot \cos u)\cos v \\ y = (a + b \cdot \cos u)\sin v \\ z = b\sin u\,, u \in [0; 2\pi], v \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$

3. *Гелікоїд* – гвинтова поверхня, яку у просторі задають параметричні рівняння:

$$\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = hv, u, v \in R \end{cases}.$$



Висновки по темі криві й поверхні другого порядку

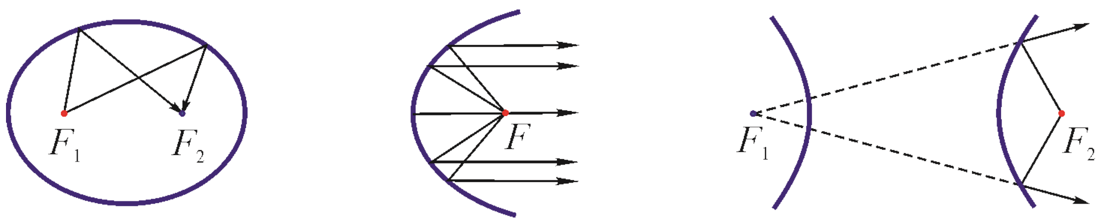
1. В аналітичній геометрії передусім вивчають лінії, які в Декартовій системі координат мають алгебраїчні рівняння $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + +2a_{23}y + a_{33} = 0$, в якому принаймні один з коефіцієнтів a_{11}, a_{22} або a_{12} відмінний від нуля.
2. Таке алгебричне рівняння може визначати: дійсні криві, сукупності кривих другого порядку, точки (вироджені криві) або порожню множину (так звані «уявні» криві).

3. До кривих другого порядку належать: еліпс, парабола й гіпербола. Окремими випадком еліпса є коло.
4. Криві другого порядку можуть вироджатися в точку або в дві прямі (паралельні, пересічені або співпадаючі)
5. Канонічне рівняння еліпсу: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$
6. Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ або $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1.$
7. Канонічне рівняння параболи: $y^2 = 2px$ або $x^2 = 2py$.
8. Криві другого порядку мають важливі оптичні властивості:

   а) Якщо помістити в один з фокусів еліпса точкове джерело світла, то всі промені після відбиття від еліпса зійдуться в іншому його фокусі;

   б) Якщо помістити у фокус параболи точкове джерело світла, то всі промені, відбиті від параболи, спрямуються паралельно фокальній осі параболи (ця властивість обґрунтовує форму параболічних антен, дзеркал для прожекторів тощо);

   в) Якщо помістити в один з фокусів гіперболи точкове джерело світла, то кожний промінь після відбиття від гіперболи начебто виходить з іншого фокуса.



9. Поверхнею другого порядку називають геометричне місце точок в просторі, координати яких задовольняють наступному рівнянню $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$ причому серед коефіцієнтів a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23} є ненульові.
10. Загальне рівняння поверхні другого порядку може задавати порожню множину, точку, пару площин, які перетинаються, пару паралельних площин, циліндри, конуси, еліпсоїди, гіперболоїди, параболоїди

Приклади розв'язання задач на лінії й поверхні другого порядку

Задача 1.

Визначте вигляд лінії на площині, яка задана рівнянням

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0.$$

Розв'язання.

Напишемо матрицю рівняння та її квадратичної частини:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Знайдем всі інваріанти ліній другого порядку на площині:

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 3 & 5 & -8 \\ -8 & -8 & -16 \end{vmatrix} = -512;$$

$$\delta = \det Q = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 16;$$

$$\tau = \operatorname{tr} Q = 5 + 5 = 10;$$

$$k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -8 & -8 \end{vmatrix} = -208.$$

Власні значення Q:

$$\det(Q - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0.$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0;$$

$$\lambda = 5 \pm \sqrt{25 - 16} = 5 \pm 3;$$

$$\lambda_1 = 2, \qquad \lambda_2 = 8.$$

$\Delta = -512 < 0$ і $\delta = 16 \neq 0$. Це означає, що лінія не вироджена, центрована, а само є еліпс. При ортонормованої перетворенні системи координат можна отримати рівняння в канонічної формі:

$$a'_{11}x'^2 + a'_{22}y'^2 + a'_0 = 0.$$

Невідомі коефіцієнти $a'_{11}, a'_{22},\ a'_0$ знаходять з системи рівнянь складеної з ортогональних інваріант ліній другого порядку. Причому $a'_{11} = \lambda_1 = 2, a'_{22} = \lambda_2 = 8$.

$$\begin{cases} \Delta = \det P = \det P' = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_0 \\ \delta = \det Q = \det Q' = a'_{11} \cdot a'_{22} \\ \tau = tr\,Q = tr\,Q' = a'_{11} + a'_{22} \end{cases};$$

$$\begin{cases} a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_0 = -512 \\ a'_{11} \cdot a'_{22} = 16 \\ a'_{11} + a'_{22} = 10 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 16 \cdot a'_0 = -512 \\ a'_{11} = 2 \\ a'_{22} = 8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a'_0 = -32 \\ a'_{11} = 2 \\ a'_{22} = 8. \end{cases}$$

Таким чином, канонічне рівняння лінії в системі координат $Ox'y'$:

$$2x'^2 + 8y'^2 - 32 = 0;$$

$$\frac{x'^2}{32} + \frac{9y'^2}{4} = 1.$$

Знайдем перетворення з системи координат Oxy в $Ox'y'$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \text{ або } \operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{11} - a_{11}}{a_{12}}.$$

Підставимо значення і розв'яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0{,}6 & -1{,}6 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right);$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = -1;$$

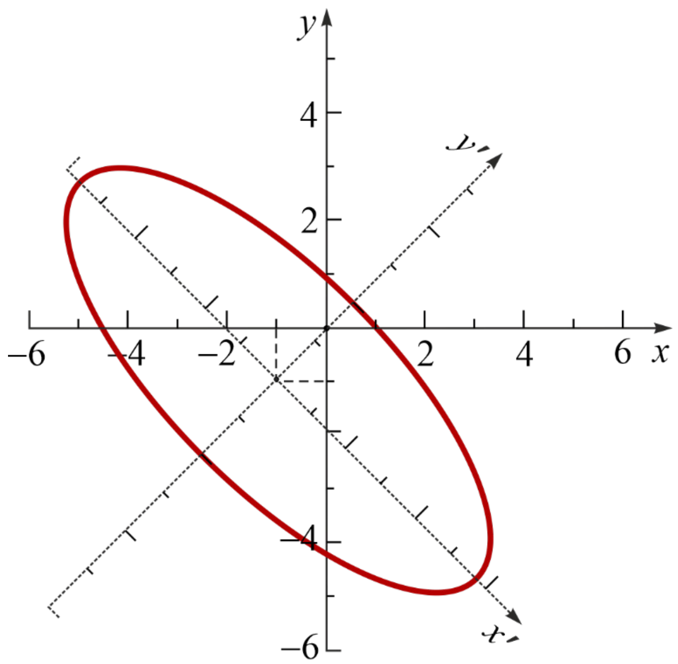
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{11} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{2 - 3}{3} = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

Пряме й обернене перетворення системи координат:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Відповідь. Задане рівняння – це рівняння еліпсу. В системі координат $Ox'y'$, центр якої знаходиться в системі координат Oxy в точці з координатами $x_0 = -1$, $y_0 = -1$ й повернутої на кут $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$$\frac{x'^2}{32} + \frac{9y'^2}{4} = 1.$$



Зауваження: Якщо за умовою задачі не треба знаходити перетворення системи координат, а треба з'ясувати тільки вид кривою, то можна обмежитися обчислення параметрів кривої за формулами, що зазначені в таблиці 3.

Задача 2.

Привести до канонічного вигляду рівняння й знайти перетворення системи координат

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Розв'язання.

Напишемо матрицю рівняння:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} -13 \\ -13 \end{pmatrix}, \qquad a_0 = 11.$$

Знайдем інваріанти ліній другого порядку на площині:

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 3 & 8 & -13 \\ -6 & -13 & 11 \end{vmatrix} = 81;$$

$$\delta = \det Q = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -9;$$

$$T = \operatorname{tr} Q = 0 + 8 = 8;$$

Власні значення Q:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0;$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16+9} = 4 \pm 5;$$

$$\lambda_1 = -1, \qquad \lambda_2 = 9.$$

$$a'_{11} = \lambda_1 = -1, \;\; a'_{22} = \lambda_2 = 9.$$

$\Delta = 81 > 0$ і $\delta = -9 < 0$. Це означає, що лінія не вироджена, центрована, а само є гіпербола. Коефіцієнт a'_0 знаходимо з рівняння:

$$a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot a'_0 = \det A\,;$$

$$-1 \cdot 9 \cdot a'_0 = 81;$$

$$a'_0 = -9.$$

Таким чином, канонічне рівняння лінії в системі координат $Ox'y'$:

$$-x'^2 + 9y'^2 - 9 = 0;$$

$$-\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Перехід з системи координат Oxy в $Ox'y'$ відбувається за перетворенням:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0 \end{cases};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \;\text{ або }\; \operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{11} - a_{11}}{a_{12}}.$$

Підставимо значення і розв’яжемо отриману систему рівнянь:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$x_0 = -1, \;\; y_0 = 2$$

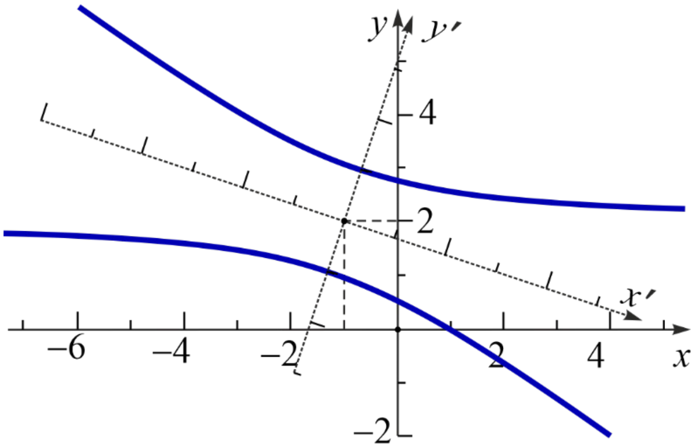
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a'_{11} - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-1-0}{3} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx -18{,}4°.$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \qquad \sin\alpha = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Пряме й обернене перетворення системи координат:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Відповідь. Задане рівняння – це рівняння гіперболи. В системі координат $Ox'y'$, центр якої знаходиться в системі координат Oxy в точці з координатами $x_0 = -1$, $y_0 = 2$ й повернута на кут $\alpha = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3} \approx -18{,}4°$



$$-\frac{x'^2}{9} + \frac{y'^2}{1} = 1.$$

Задача 3.

Привести до канонічного вигляду рівняння й знайти перетворення системи координат

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 21 = 0.$$

Розв'язання 1.

Напишемо матрицю рівняння та її квадратичну частину:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 21 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a_0 = 21.$$

Знайдем інваріанти ліній другого порядку на площині:

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 \\ -5 & -3 & 21 \end{vmatrix} = -64;$$

$$\delta = \det Q = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\tau = \operatorname{tr} Q = 1 + 1 = 2;$$

Власні значення Q:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = \lambda^2 - 2\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 2.$$

Так як, $\Delta \neq 0, \delta = 0$, то лінію є парабола. Оскільки лінія параболічного типу, корні характеристичного рівняння позначимо так $a'_{11} = \lambda_1 = 0$, $a'_{22} = \lambda_2 = 2$.

Знаходимо взаємно ортогональні власні вектора (напрямки) $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, що відповідають корінням λ_1, λ_2 характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = 0:\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{l}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

В якості $\boldsymbol{l}_2$, можна взяти ненульовий стовпець $\boldsymbol{l}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, пропорційний першому стовпцю матриці P.

Умова $\tau \cdot\ A^T \cdot\ \boldsymbol{l}_1 \le 0$ для вектора $\boldsymbol{l}_1$ виконується:

$$2 \cdot (-5 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -16 \le 0.$$

Інакше треба змінити на протилежний (помножити на -1).

Нормуючи отримані вектори $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, визначаємо координатні стовпці векторів канонічного базису:

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{s}_y = \frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо координати x_0, y_0 початку O' канонічної системи координат. Оскільки лінія є параболою, то x_0, y_0 знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot \boldsymbol{l}_2^T \cdot S_0 + \boldsymbol{l}_2^T \cdot A = 0 \\ \left(A + A_{pr}\right)^T \cdot S_0 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$S = (x_0\ \ y_0)^T, \qquad A_{pr} = (A^T \cdot \boldsymbol{s}_x) \cdot \boldsymbol{s}_x.$$

$$A^T \cdot \boldsymbol{s}_x = (-5 \quad -3) \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{-8}{\sqrt{2}},\quad A_{pr} = \frac{-8}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix},$$

$$A + A_{pr} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} \\ (-9 \quad -7)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 21 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{2}}x_0 - \dfrac{2}{\sqrt{2}}y_0 = \dfrac{2}{\sqrt{2}} \\ 9x_0 + 7y_0 = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ 9x_0 + 7y_0 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ 16y_0 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1{,}75 \\ y_0 = 0{,}75 \end{cases}$$

Отже, вектор перенесення початку координат має координати $S_0 = (1{,}75 \quad 0{,}75)^T$ або, що те саме, початок O' канонічної системи координат має координати $O'(1{,}75; 0{,}75)$ щодо вихідної системи координат.

Обчислюємо коефіцієнт канонічного рівняння параболи (таблиця 3):

$$p = \sqrt{\frac{\Delta}{\tau^3}} = \sqrt{-\frac{-64}{2^3}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Отже, канонічне рівняння заданої лінії має вигляд:

$$(y')^2 = 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \ x'.$$

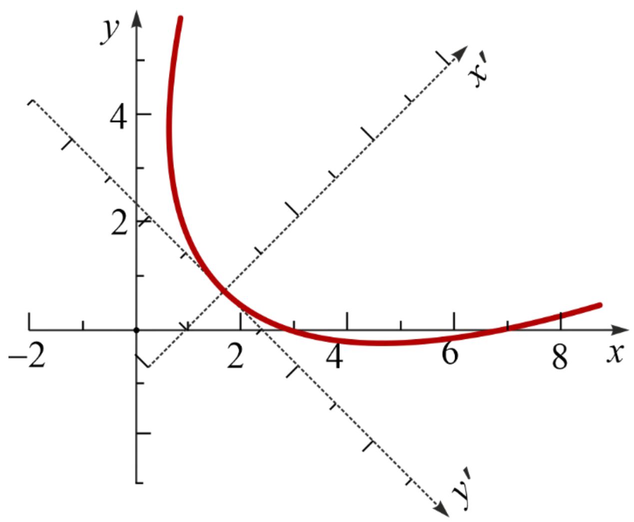
На координатній площині Oxy зображаємо канонічну систему координат $O'x'y'$ з початком у точці $O'(1{,}75; 0{,}75)$, з базисними векторами

$$\vec{s}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}, \ \ \vec{s}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

У канонічній системі координат будуємо параболу

$$(y')^2 = 4\sqrt{2}\, x'.$$

Відповідь. Задане рівняння – це рівняння параболи. В системі координат $Ox'y'$ $(y')^2 = 4\sqrt{2}\, x'$. Центр $Ox'y'$ знаходиться в точці $O'(1{,}75; 0{,}75)$. Базисні вектора напрямку осей $Ox'y'$ відповідно Oxy: $\vec{s}_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}, \ \ \vec{s}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$



Зауваження.

Так як, $\Delta \neq 0, \delta = 0$, то лінію є парабола. Тоді,

$$\Delta = \det P' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_1 \\ 0 & 2 & 0 \\ a'_1 & 0 & a'_0 \end{vmatrix} = -2a'^2_1 = -64$$

$$a'_1 = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

Таким чином, канонічне рівняння лінії в системі координат $Ox'y'$:

$$y'^2 = 4\sqrt{2}x'.$$

Розв'язання 2.

Задачі можна розв'язувати послідовним перетворенням системи координат. Спочатку позбавляються доданка xy за допомоги повороту системи координат на кут α. Потім роблять паралельне перенесення системи координат.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-2}{1-1} \to \infty \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Нехай, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тоді, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Підставимо $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$ у рівняння:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix};$$

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) \\ + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 10(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) \\ - 6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 21 = 0;$$

$$(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)(x')^2 + (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)(y')^2 \\ + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x'y' - (10\cos\alpha + 6\sin\alpha)x' \\ + (10\sin\alpha - 6\cos\alpha)y' + 21 = 0.$$

Підставимо кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і враховуємо, що $\cos 2\frac{\pi}{4} = \cos^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{4} = 0$:

$$2(y')^2 - 8\sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 21 = 0;$$

$$2\left((y')^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) - 8\sqrt{2}x' + 21 = 0;$$

$$2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x' - 20;$$

$$\left(y' + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x' - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right).$$

Відповідь. Таким чином, отримали рівняння $(y'')^2 = 4\sqrt{2}x''$ в системі координат $O''x''y''$, центр якої має координати $O''\left(\frac{5}{2\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ в системі координат $O'x'y'$, яка в свою чергу отримала поворот на кут $\frac{\pi}{4}$ відносно системи координат Oxy.

Задача 4.

Привести до канонічного вигляду рівняння послідовним перетворенням системи координат.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0.$$

Розв'язання.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad a_0 = 4.$$

Здійснимо поворот вихідної системи координат на кут α так щоб у новій системі отримати доданку xy не було. Кут α знайдем за формулою, яка дійсна тільки для параболічного випадку:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} \text{ або } \operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{12}}{a_{22}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{1}{-1} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Нехай, $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Тоді, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. В результаті подальших дій може вийти неканонічне рівняння. Це можливо в єдиному випадку, коли досліджуване рівняння задає параболу і вона розгорнута в інший бік. Тоді слід розглянути протилежний кут повороту $\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 6y + 4 = 0.$$

Підставимо $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$, $y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$ у рівняння:

$$(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)^2 - 2(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) + 6(x'\sin\alpha + y'\cos\alpha) + 4 = 0\,;$$

$$(\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha)(x')^2 + (\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)(y')^2 + 2(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)x'y' + (-2\cos\alpha + 6\sin\alpha)x' + (2\sin\alpha + 6\cos\alpha)y' + 4 = 0.$$

Підставимо кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$ та враховуємо, що $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0.$:

$$(y')^2 + \sqrt{2}x' + 2\sqrt{2}y' + 2 = 0;$$

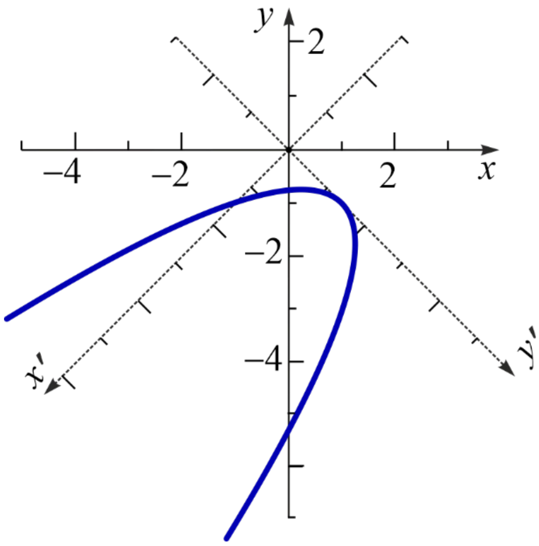
$$(y')^2 + 2\sqrt{2}y' = -\sqrt{2}x' - 2.$$

Доданок $-\sqrt{2}x'$ виявився від'ємним. Це означає, що з двох можливих кутів $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ вибрано не зручний кут. Замість кута $\alpha = \frac{\pi}{4}$ підставимо $\alpha = \frac{5\pi}{4}$

$$(y')^2 - \sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0;$$

$$\left((y')^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 - 2\right) = \sqrt{2}x' - 2;$$

$$\left(y' - \sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2}x'.$$



Відповідь. Таким чином, отримали рівняння $(y'')^2 = \sqrt{2}x''$ в системі координат $O''x''y''$, центр якої має координати $O''\left(0;\ \sqrt{2}\right)$ в системі координат $O'x'y'$, яка в свою чергу отримала поворот на кут $\frac{5\pi}{4}$ відносно системи координат Oxy.

Задача 5.

Привести до канонічного вигляду рівняння й знайти перетворення системи координат

$$25x^2 - 120xy + 144y^2 - 78x + 1066y + 845 = 0.$$

Розв'язання.

Напишемо матрицю рівняння та її квадратичну частину:

$$P = \begin{pmatrix} 25 & -60 & -39 \\ -60 & 144 & 533 \\ -39 & 533 & 845 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix}, \quad a_0 = 845.$$

Знайдем рівняння в канонічної формі:

Знайдем всі інваріанти ліній другого порядку на площині:

$$\Delta = \det P = \begin{vmatrix} 25 & -60 & -39 \\ -60 & 144 & 533 \\ -39 & 533 & 845 \end{vmatrix} = -4\,826\,809;$$

$$\delta = \det Q = \begin{vmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\tau = \operatorname{tr} Q = 25 + 144 = 169;$$

Власні значення Q: $\det(Q - \lambda I) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = \lambda^2 - 169\lambda = 0;$$

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 169.$$

Так як, $\Delta \neq 0, \delta = 0$, то лінію є парабола. Оскільки лінія параболічного типу, коріння характеристичного рівняння позначимо так $a'_{11} = \lambda_1 = 0$, $a'_{22} = \lambda_2 = 2$.

Знаходимо взаємно ортогональні власні вектора $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, що відповідають корінням λ_1, λ_2 характеристичного рівняння:

$$\lambda_1 = 0:\ \begin{pmatrix} 25 & -60 \\ -60 & 144 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{l}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

В якості $\boldsymbol{l}_2$, можна взяти ненульовий стовпець $\boldsymbol{l}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, пропорційний першому стовпцю матриці P.

Умова $\tau \cdot A^T \cdot \boldsymbol{l}_1 \leq 0$ для вектора $\boldsymbol{l}_1$ не виконується:

$$169 \cdot (-39 \quad 533) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = 371\,293 > 0.$$

Тому замінюємо стовпець $\boldsymbol{l}_1$ на протилежний помножуючи на -1:

$$\boldsymbol{l}_1 = \begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Нормуючи отримані вектори $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ визначаємо координатні стовпці векторів канонічного базису:

$$\boldsymbol{s}_x = \frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|} = \frac{1}{\sqrt{12^2 + 5^2}}\begin{pmatrix} -12 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{12}{13} \\ -\dfrac{5}{13} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{s}_y = \frac{\boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_2|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{13} \\ -\dfrac{12}{13} \end{pmatrix}.$$

Знаходимо координати x_0, y_0 початку O' канонічної системи координат. Оскільки лінія є параболою, то x_0, y_0 знаходимо з системи рівнянь:

$$\begin{cases} \lambda_2 \cdot \boldsymbol{l}_2^T \cdot S_0 + \boldsymbol{l}_2^T \cdot A = 0 \\ \left(A + A_{pr}\right)^T \cdot S_0 + a_0 = 0 \end{cases}$$

$$S_0 = (x_0 \;\; y_0)^T, \qquad A_{pr} = (a^T \cdot s_1) \cdot s_1.$$

$$A^T \cdot \boldsymbol{s}_x = (-39 \quad 533) \cdot \begin{pmatrix} -12/13 \\ -5/13 \end{pmatrix} = -169, \;\; A_{pr} = -169 \cdot \begin{pmatrix} -12/13 \\ -5/13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 156 \\ 65 \end{pmatrix},$$

$$A + A_{pr} = \begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 156 \\ 65 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 117 \\ 598 \end{pmatrix},$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 169(5 \quad -12)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (5 \quad -12)\begin{pmatrix} -39 \\ 533 \end{pmatrix} \\ \qquad (117 \quad 598)\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + 845 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 845x_0 - 2028y_0 = 6591 \\ 117x_0 + 598y_0 = -845 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x_0 - 12y_0 = 39 \\ 9x_0 + 46y_0 = -65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Отже, вектор перенесення початку координат має координати $\boldsymbol{s} = (3 \quad -2)^T$ або, що те саме, початок O' канонічної системи координат має координати $O'(3;-2)$ щодо вихідної системи координат.

Обчислюємо коефіцієнт канонічного рівняння параболи (таблиця 3):

$$p = \sqrt{\frac{\Delta}{\tau^3}} = \sqrt{-\frac{-4\,826\,809}{169^3}} = 1.$$

Отже, канонічне рівняння заданої лінії має вигляд:

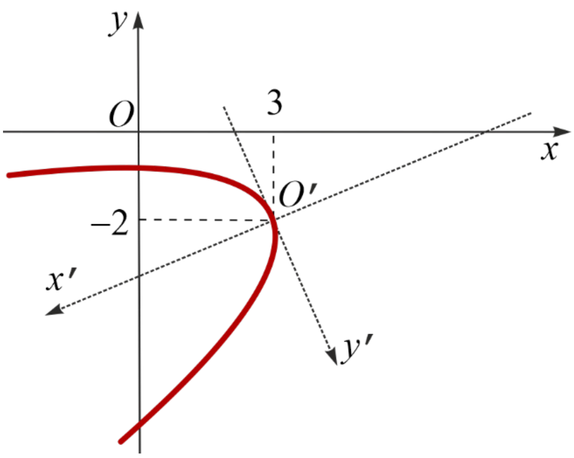
$$(y')^2 = 2 \cdot 1 \cdot \, x'.$$

На координатній площині Oxy зображаємо канонічну систему координат $O'x'y'$ з початком у точці $O'(3;-2)$, з базисними векторами

$$\vec{s}_x = -\frac{12}{13}\vec{\imath} - \frac{5}{13}\vec{\jmath}, \;\; \vec{s}_y = \frac{5}{13}\vec{\imath} - \frac{12}{13}\vec{\jmath}$$

У канонічній системі координат будуємо параболу

$$(y')^2 = 2\,x'.$$



Відповідь. Задане рівняння – це рівняння параболи. В системі координат $Ox'y'$ $(y')^2 = 2\,x'$. Центр $Ox'y'$ знаходиться в точці $O'(3;-2)$. Базисні вектора напрямку осей $Ox'y'$ відповідно Oxy: $\vec{s}_x = -\frac{12}{13}\vec{\imath} - \frac{5}{13}\vec{\jmath}, \;\; \vec{s}_y = \frac{5}{13}\vec{\imath} - \frac{12}{13}\vec{\jmath}$

Задача 6.

Яку поверхню визначає рівняння

$$4x^2 + y^2 - 8z^2 + 8x - 4y + 16z - 32 = 0.$$

Розв'язання.

Перетворимо рівняння до канонічного вигляду. У рівняння нема змішаних квадратичних доданків – добутків $x \cdot y, x \cdot z, y \cdot z$. Тому перетворити таке рівняння до канонічного вигляду можна паралельним перенесенням системи координат. Для цього виділим повні квадрати.

$$4x^2 + y^2 - 8z^2 + 8x - 4y + 16z - 32$$
$$= 4(x^2 + 2x + 1 - 1) + (y^2 - 2y \cdot 2 + 4 - 4) - 8(z^2 - 2z + 1 - 1)$$
$$- 32 = 4(x+1)^2 + (y-2)^2 - 8(z-1)^2 - 32 = 0;$$
$$\frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{32} - \frac{(z-1)^2}{4} = 1.$$

Відповідь. Задане рівняння – це рівняння однопорожнинного гіперболоїда, центр симетрії гіперболоїда в точці з координатами $(-1; 2; 1)$.

Задача 7.

Дослідити взаємне розташування сфери та прямої

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 43 = 0.$$
$$L: x = 3 + t, y = -4 - t, z = 5 + 2t.$$

Розв'язання.

Підставимо у рівняння $F(x, y, z)$ координати з параметричного рівняння прямої:

$$F(L_1) = (3+t)^2 + (-4-t) + (5+2t)^2 - 2(3+t) + 4(-4-t) - 2(5+2t)$$
$$- 43 = 6t^2 + 14t - 25 = 0$$

Відповідь. Рівняння $6t^2 + 14t - 25 = 0$ має два кореня. Отже, пряма перетинає сферу в двох точках, координати яких визначаються коренями цього рівняння.

Задачі про лінії та поверхні другого порядку

5.1. Записати рівняння кола з радіусом $R = 7$ і центром в точці $C(2; 3)$.

5.2. Записати рівняння кола з радіусом $R = 5$ і центром в точці $C(–3; 4)$.

5.3. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від початку координат на 5 одиниць. Чи належать цьому геометричному місцю точок точки $C(1; 6)$ і $D(–3; 4)$?

5.4. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких сума відстаней до точок $F_1(0; –5)$ і $F_2(0; 5)$ дорівнює 26.

5.5. Скласти рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких сума відстаней до точок $F_1(–3; 0)$ і $F_2(3; 0)$ дорівнює 10.

5.6. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Oy симетрично відносно початку координат, якщо:

а) велика піввісь дорівнює $3\sqrt{2}$, мала піввісь дорівнює $2\sqrt{3}$;

б) відстань між фокусами дорівнює 24, мала вісь дорівнює 10;

в) мала вісь дорівнює 12, ексцентриситет дорівнює 0,8;

г) відстань між фокусами дорівнює 6, сума півосей дорівнює 9.

5.7. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

а) велика піввісь дорівнює 8, мала піввісь дорівнює 6;

б) відстань між фокусами дорівнює 10, велика піввісь дорівнює 26;

в) велика вісь дорівнює 20, ексцентриситет дорівнює 0,6;

г) відстань між фокусами дорівнює 14, ексцентриситет дорівнює 7/9.

5.8. Знайти півосі, фокуси й ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1.$

5.9. Знайти півосі, фокуси й ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{64}=1.$

5.10. Знайти піввісі, фокуси й ексцентриситет еліпса, заданого рівнянням: $4x^2 + 9y^2 = 1$.

5.11. Записати рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких різниця відстаней до точок $F_1(-5; 0)$ і $F_2(5; 0)$ дорівнює 8.

5.12. Записати рівняння геометричного місця точок площини, для кожної із яких різниця відстаней до точок $F_1(0; -10)$ і $F_2(0; 10)$ дорівнює 12.

5.13. Записати канонічне рівняння гіперболи, фокуси якого розміщені на осі Ox симетрично відносно початку координат, якщо:

а) дійсна вісь дорівнює 14, уявна вісь дорівнює 10;

б) відстань між фокусами дорівнює 20, дійсна вісь дорівнює 12;

в) дійсна вісь дорівнює 6, ексцентриситет дорівнює 5/3;

г) відстань між фокусами дорівнює 26, ексцентриситет дорівнює 2,6.

5.14. Знайти піввісі, фокуси й ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

5.15. Знайти піввісі, фокуси й ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$.

5.16. Знайти піввісі, фокуси й ексцентриситет гіперболи, заданого рівнянням: $x^2 - 8y^2 + 8 = 0$.

5.17. Записати рівняння геометричного місця точок площини, рівновіддалених від указаної точки $F(1;\ 0)$ і прямої $x = -1$.

5.18. Записати рівняння геометричного місця точок площини, рівно віддалених від указаної точки $F(0;\ -3)$ і прямої $y = 3$.

5.19. Записати канонічне рівняння параболи, якщо відомо, що:

а) фокус знаходиться в точці $F(4;\ 0)$;

б) фокус знаходиться в точці $F(0;\ 3)$;

в) директриса має рівняння $x - 3 = 0$;

г) директриса має рівняння $y - 2 = 0$.

5.20. Задане рівняння параболи $5y^2 - 4x = 0$. Чи належить точка $M(5;\ -2)$ цій параболі?

5.21. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $4x^2 + 9y^2 = 1$.

5.22. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $y^2 = 2x$.

5.23. Знайти ексцентриситет кривої другого порядку $4x^2 - 9y^2 = 1$.

5.24. При якому значенні b ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ дорівнює 1,5?

5.25. При якому значенні b ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ дорівнює 0,25?

5.26. Визначити тип і скласти канонічне рівняння лінії:

1) $x^2 + 4y^2 + 6x + 8y + 1 = 0$;

2) $4x^2 + 4y^2 + 12x + 12y + 17 = 0$;

3) $x^2 - 4y^2 + 12x + 32y - 28 = 0$;

4) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 32 = 0$;

5) $x^2 + y^2 + 3xy + 1 = 0$;

6) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$;

7) $x^2 + 3xy - 3y^2 + 5x - 7y + 1 = 0$;

8) $5x^2 + 2xy + 5y^2 - 12x + 20y + 32 = 0$;

9) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + 13 = 0$;

5.27. Визначити тип лінії, скласти канонічне рівняння, знайти канонічну систему координат:

1) $2x^2 + 6xy + 10y^2 - 121 = 0$;

2) $9xy + 4 = 0$;

3) $2x^2 - 2\sqrt{3}xy + 9 = 0$;

4) $18x^2 + 24xy + 11y^2 - 3 = 0$;

5) $x^2 - 2xy + y^2 - 10 = 0$;

6) $9x^2 - 6xy + y^2 - 10 = 0$;

7) $81x^2 - 36xy + 4y^2 = 0$;

8) $3x^2 - 4\sqrt{5}xy + 4y^2 = 0$.

5.28. Визначити тип лінії, скласти канонічне рівняння, знайти канонічну систему координат:

1) $2x^2 - 4xy + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$;

2) $4xy - 3y^2 - 4x + 10y - 6 = 0$;

3) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 8x + 19y + 4 = 0$;

4 $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$;

5) $xy + 2x + y = 0$;

6) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;

7) $5x^2 + 12xy + 10y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;

8) $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$;

9) $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$;

10) $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$;

11) $4x^2 + 12xy + 9y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$;

12) $225x^2 - 240xy + 64y^2 + 30x - 16y + 1 = 0$;

13) $x^2 + 2xy + y^2 - 5x - 5y + 4 = 0$.

5.29. Визначити тип лінії, яка задана рівнянням:

1) $(3x - 4y)^2 - 5(x + 2y - 1) = 1$;

2) $(12x - 17y - 6)^2 + (17y + 5x + 1)^2 = 1$;

3) $(x - y - 3)(x + y + 3) = 4$;

4) $(4x + 3y - 1)^2 + (4x + 3y + 2)^2 = 5$;

5) $17x^2 - 2xy + y^2 - 3x - y - 3 = 0$;

6) $4x^2 + 28xy + 49y^2 - 3x - 15y + 2 = 0$;

7) $4x^2 - 12xy + 8y^2 - 15x + 25y + 14 = 0$;

8) $2x^2 + 2xy + 5y^2 - 2y + 4 = 0$;

9) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 9x + y + 4 = 0$;

10) $x^2 + 10xy + 25y^2 + 2x + 10y - 3 = 0$;

11) $5x^2 - 16xy + 13y^2 + 6x - 10y + 2 = 0$;

12) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 5 = 0$;

13) $x^2 - 8xy + 16y^2 + 6x - 24y + 9 = 0$.

5.30. Записати рівняння кола, діаметром якого є відрізок прямої $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

5.31. Знайти відстань від центра кола $x^2+y^2+ay=0$ до прямої $y=2(a-x)$

5.32. Еліпс, симетричний щодо осі Ox і прямої $x=-5$, проходить через точки $(-1;\ 1{,}8)$ і $(-5;\ 3)$. Написати рівняння еліпса й побудувати його.

5.33. Знайти кут між діагоналями прямокутника, вершини якого знаходяться в точках пересічення еліпса $x^2+3y^2=12l^2$ і гіперболи $x^2-3y^2=6l^2$.

5.34. Побудувати еліпс $x^2+4y^2=4$ і параболу $x^2=6y$. Знайти площу трапеції, основами якої є велика піввісь еліпса й загальна хорда еліпса і параболи.

5.35. Побудувати лінії: 1) $r=a\varphi$; 2) $r=a(1-\cos\varphi)$; 3) $r^2=a^2\cdot\cos 2\varphi$; 4) $r=\frac{a}{\varphi}$; 5) $r=a(1+2\cdot\cos\varphi)$.

5.36. Перетворити до полярних координат рівняння ліній: 1) $x^2-y^2=a$; 2) $x^2+y^2=a$; 3) $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$; 4)$y=x$; 5) $x^2+y^2=ax$.

5.37. Написати канонічне рівняння кривих другого порядку:

1) $r=\frac{9}{5-4\cdot\cos\varphi}$; 2) $r=\frac{9}{4-5\cdot\cos\varphi}$; 3) $r=\frac{3}{1-\cos\varphi}$.

5.38. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$ навколо осі *0z*.

5.39. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням еліпса $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$: 1) навколо осі *0z*; 2) навколо осі *0x*.

5.40. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням прямої $z=y, x=0$: 1) навколо осі *0y*; 2) навколо осі *0z*.

5.41. Знайти центр і радіус сфери $x^2+y^2+z^2-3x+5y-4z=0$.

5.42. Написати рівняння циліндричної поверхні твірною $y^2=4x,\ z=0$ та твірною паралельною вектору $\boldsymbol{P}=(1\ \ 2\ \ 3)^T$.

5.43. Назвати та побудувати поверхні:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$;

2) $x^2 + y^2 = 2az$;

3) $x^2 + z^2 = 2az$;

4) $x^2 - y^2 = 2az$

5) $x^2 - y^2 = z^2$;

6) $x^2 = 2az$;

7) $x^2 = 2yz$;

8) $z = 2 + x^2 + y^2$;

9) $(z - a)^2 = xy$;

10) $(z - 2x)^2 + 4(z - 2x) = y^2$.

5.44. Побудувати гіперболоїд $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = 1$ знайти його твірні, що проходять через точку з координатами $(4; 1; -3)$.

5.45. Написати рівняння поверхні, яка утворюється обертанням параболи $az = x^2$ навколо осі Oz

5.46. Визначити тип поверхні, яка задана у декартовій системі координат рівнянням:

1) $(x + y + z)(x - y + 125z) = 1$;
2) $(x + y)(x + y + 1) = 1$;
3) $(x + y)(x + y + 1) = x - y$;
4) $(x + y + z + 1)(x - y + z) = x + z + 1$;
5) $(x + y + z + 1)(x - y + z) = x + 2z + 1$;
6) $(x + y)(x - y) = z$;
7) $(x + y + z)(x - y + z) = 0$;
8) $(x + 2y)(x + 2y + 1) = z$;
9) $(x + y)(x - 75y) = z^2$.

Контрольні питання

1. Що називається алгебраїчною лінію порядку n на площині?
2. Як можна визначити лінію в тривимірному середовище?
3. Яким рівнянням визначається лінію другого порядку на площині? Запишіть рівняння лінії в матричному вигляді.
4. Ортогональні інваріанти ліній другого порядку на площині?
5. Що таке еліпс? Назвіть його елементи й властивості.
6. Запишіть канонічне й параметричне рівняння еліпсу.

7. Що таке гіпербола? Назвіть її елементи й властивості.
8. Запишіть канонічне й параметричне рівняння гіперболи.
9. Що таке парабола? Назвіть її елементи й властивості.
10. Запишіть канонічне й параметричне рівняння параболи.
11. Що таке ексцентриситет і директриса? Чому дорівнює ексцентриситет?
12. Запишіть у полярній системі координат рівняння лінії другого порядку.
13. Невироджені лінії другого порядку?
14. Вироджені лінії другого порядку?
15. Що таке поверхня другого порядку? Яким рівнянням вона визначається?
16. До яких п’яти загальних видів може бути перетворено многочлен другої степені у просторі ортогональною зміною прямокутної системи координат.
17. Що таке еліпсоїди? Які вони бувають? Написати його канонічне рівняння.
18. Що таке однопорожнинний гіперболоїд? Які він має властивості?
19. Написати та пояснити канонічне рівняння однопорожнинного гіперболоїду
20. Що таке двопорожнинний гіперболоїд? Які він має властивості?
21. Написати та пояснити канонічне рівняння двопорожнинного гіперболоїду.
22. Що таке конус другого порядку? Які він має властивості?
23. Написати та пояснити канонічне рівняння конуса другого порядку.
24. Що таке еліптичний параболоїд. Які він має властивості?
25. Написати та пояснити канонічне рівняння еліптичного параболоїда.
26. Що таке гіперболічний параболоїд. Які він має властивості?
27. Написати та пояснити канонічне рівняння гіперболічного параболоїда.
28. Що таке еліптичний циліндр. Які він має властивості?
29. Написати та пояснити канонічне рівняння еліптичного циліндру.
30. Що таке гіперболічний циліндр. Які він має властивості?
31. Написати та пояснити канонічне рівняння гіперболічного циліндру.
32. Що таке параболічний циліндр. Які він має властивості?
33. Написати та пояснити канонічне рівняння параболічного циліндру.
34. В яких випадках канонічне рівняння другого порядку визначає дві прямі, що перетинаються.
35. В яких випадках канонічне рівняння другого порядку визначає дві площини.

ЧАСТИНА 3. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Математику умовно можна розділити на елементарну і сучасну («вищу»). Ісаком Ньютоном і Готфрідом Лейбніцем був створений апарат диференціального й інтегрального числення, який становить основу математичного аналізу і навіть основу всього сучасного природознавства, і представляється найбільшою подією в історії науки.

Математичний аналіз – це сукупність розділів математики, заснованих на понятті нескінченно малої величини і включає в себе теорію функцій, теорії границь і рядів, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння і диференціальну геометрію. Дисципліна веде свій відлік з XVII століття, коли було сформульовано поняття «нескінченно малої величини». В англомовній традиції класичному математичному аналізу відповідає курс під назвою «Обчислення» («Calculus»).

Поняття «нескінченно малої» обговорювалося ще в античні часи у зв'язку з концепцією неподільних атомів, але в класичну математику не ввійшло. Знову воно відродилося з появою в XVI столітті «методу неподільних» – розбиття досліджуваної фігури на нескінченно малі перетини.

У XVII столітті відбулася алгебратізація обчислення нескінченно малих. Вони стали визначатися як числові величини, які менше всякої кінцевої (додатної) величини і все ж не рівні нулю. Мистецтво аналізу полягало в складанні співвідношення, яке містить нескінченно малі (диференціали), а потім – в його інтегруванні. Математики старої школи піддали концепцію нескінченно малих різкій критиці. Мішель Ролль писав, що нове числення є «набір геніальних помилок»; Вольтер отруйно зазначив, що це обчислення є мистецтвом обчислювати і точно вимірювати речі, існування яких не може бути доведено. Гюйгенс зізнавався, що не розуміє сенсу диференціалів вищих порядків.

Спори в Паризькій Академії наук з питань обґрунтування аналізу отримали настільки скандальний характер, що Академія одного разу взагалі заборонила своїм членам висловлюватися на цю тему.

Склалася парадоксальна ситуація, коли строгість і плодючість в математиці заважали один одному. Незважаючи на використання незаконних дій з погано визначеними поняттями, число помилок було дивно малим – виручала інтуїція. І все ж все XVIII століття математичний аналіз бурхливо розвивався, не маючи по суті ніякого обґрунтування. Ефективність його була разюча і говорила сама за себе, але зміст диференціала оставався неясним. Особливо часто плутали нескінченно малий приріст функції і його лінійну частину.

Протягом всього XVIII століття робилися грандіозні зусилля для виправлення становища, причому в них брали участь кращі математики століття, проте переконливо побудувати фундамент аналізу вдалося тільки Коші на початку XIX століття. Він строго визначив базові поняття – границю, збіжність, безперервність, диференціал та інше, після чого актуальні нескінченно малі зникли з науки. Деякі тонкощі, що залишилися, роз'яснив пізніше Вейерштрасс. В даний час термін «нескінченно мала» математики в переважній більшості випадків відносять не до чисел, а до функцій або послідовностей.

Як іронію долі можна розглядати появу в середині XX століття нестандартного аналізу, який довів, що первісна точка зору – актуальні нескінченно малі – також несуперечлива і могла б бути покладена в основу аналізу. З появою нестандартного аналізу стало ясно, чому математики XVIII століття, виконуючи незаконні з точки зору класичної теорії дії, проте, отримували вірні результати.

Таким чином, розвиток математичного аналізу показує нам, що значна частина історії розвитку природознавства являє собою літопис безперервного прагнення людства до узагальнень, які дозволили представити навколишній світ в математичних термінах. Щоб математично описати закони реального світу створюють математичні моделі тих чи інших об'єктів цього світу. Математичні моделі полегшують розуміння і опис закономірностей об'єктів, які вивчаються. При цьому важливо пам'ятати, що модель, в тому числі математична не тотожна об'єкту, що вивчається.

Інша сторона при вивченні всесвіту – це безперервний перехід від конкретних образів (п'ять яблук, або п'ять якихось предметів) до абстрактних понять (до поняття «п'ять»), від одних абстрактних понять до більш загальних абстрактних понять. Поняття числа, безумовно, є абстрактним. Перехід на більш високий рівень абстрактності відбувається, коли безліч чисел замінюється змінною, а конкретні арифметичні дії над числами – функцією. Саме в математичному аналізі здійснюється цей новий перехід.

Термін «математичний аналіз» в класичному розумінні використовується тільки для позначення навчальної дисципліни. Самі математики все це називають просто «аналізом», навіть не згадуючи приставки «математичний». Мабуть, вважають, що без математики взагалі нічого аналізувати не можна.

Взагалі кажучи, сам «аналіз» як наука був досить корисним аж до кінця XIX століття. Потім з'явилася загальна топологія, яка перевела половину математики на нові рейки і відправила стару половину матеріалу на звалище. Тому, наприклад, взяття інтегралів стало потрібно лише в прикладних задачах. У XX столітті з'явилися комп'ютери, завдяки чому конкретні обчислювальні задачі та інші розрахунки бухгалтерії стали обчислюватися не руками, а численними способами, тобто з використанням обчислювальної математики. Таким чином, нинішні професійні математики-дослідники займаються взагалі іншими речами, а «прикладники» використовують комп'ютери. Виникає природне запитання, навіщо потрібен сучасній людині математичний аналіз або як його неформально називають «матан». Математичний аналіз сам по собі вже давно не актуальний з наукової точки зору, але викладається він повсюдно, бо він є основою майже всіх «речей» сучасної науки. Не знаючи аналізу, займатися топологією, атомною фізикою, математичним моделюванням і багато іншим – справа марна. У кожній зі спеціальності від теоретичної фізики до журналістики можна знайти безліч аргументів як на користь вивчення математичного аналізу, так і ні. Математичний аналіз нітрохи не складніше інших наук, які викладаються в навчальних закладах. За ступенем потрібності або непотрібності в майбутньому житті він також мало відрізняється від інших дисциплін. Ця властивість випливає з того, що якщо «викинути» з дисципліни все початкові «причини», то весь математичний аналіз не більше ніж список формальних правил перетворення одних «буквочок» в інші. Які сумніваються можуть подумати, з чого б це раптом комп'ютер навчився розв'язувати рівняння нічого не розуміючи в їх суті. А це означає одну із властивостей математичного аналізу – нульову інформацію перетворень. Перетворення математичного аналізу не додають нової інформації про об'єкт. Математичний аналіз дозволяє лише поглянути на об'єкт під таким кутом, щоб та інформація, яка вже міститься в об'єкті, стала доступною нашій такій недосконалій свідомості та надає можливості описати цю інформацію.

РОЗДІЛ 6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

6.1. Число

Математика працює з одним з найважливішим абстрактним поняттям сучасного світу – числом. Виникнувши ще в первісному суспільстві з потреб рахунку, поняття числа з розвитком наукової думки значно поширилось. Не дивлячись на те, що сучасна людина розуміє, що таке число, але спроби дати йому означення викликає труднощі. Воно як би вислизає від укладення в словесну форму. З давніх-давен люди з трепетом ставилися до цього філософського поняття. У піфагорійської школі крім кількісної міри числа вивчалася і його якісна характеристика. Однозначною заслугою піфагорійців було висунення думки про кількісні закономірності розвитку світу, що сприяло розвитку математичних, фізичних, астрономічних і географічних знань. Роздуми піфагорійців про якість чисел привело також до розвитку філософії. В основі речей лежить число, вчив Піфагор, пізнати Всесвіт – значить пізнати числа, що керують їм. Вивчаючи числа, піфагорійці розробили числові відносини, і знайшли їх у всіх областях людської діяльності. Числа і пропорції вивчалися з тим, щоб пізнати й описати душу людини, а пізнавши, управляти процесом переселення душі. Ці дослідження тривають і в сьогоденні у рамках метафізичних поглядів. Як приклад можна привести праці Велимира Хлєбнікова. Він займався розробкою математичних законів, за допомогою яких можна обчислити майбутнє: «Весь час працюю над числами і долями народів, як залежними змінними чисел» (з листа Матюшину, 1911). Створюючи свою систему обчислень на основі таблиць Піфагора, він зумів передбачити події 1915 і 1917 років. Число – це та сила, яка здатна змусити «війни стримати свій гнів», ця сила, здатна управляти роком. У Хлєбнікова доля сильніше божественної волі. Хлєбніков бачить в числі ключ до розгадки таємниць всесвіту «Якщо Бог наділив кожну крихту творіння смислом, то його можна осягнути за допомогою обчислень». Навіть від'ємні числа містять в собі велику таємницю. Якщо число – це кількісна міра, то яка кількісна міра у від'ємного числа? Стародавній Єгипет, Вавилон і Давня Греція не використовували від'ємних чисел, а якщо виходили від'ємні коріння рівнянь, то вони відкидалися як неможливі. Виняток становив Діофант, який в III столітті вже знав правило знаків і вмів множити від'ємні числа. Однак він розглядав їх лише як проміжний етап, корисний для встановлення остаточного, додатного результату. Вперше від'ємні числа були частково узаконені в Китаї, а потім (приблизно з VII століття) і в Індії, де трактувалися як борги (недостача), або, як у Діофанта, визнавалися як тимчасові значення. Множення і ділення для від'ємних чисел тоді ще не були визначені. Корисність і законність від'ємних чисел затверджувалися поступово. Індійський математик Брахмагупта (VII століття) вже розглядав їх нарівні з додатними. В Європі визнання наступило на тисячу років пізніше, та й то довгий час від'ємні числа називали «помилковими», «уявними» або «абсурдними». Перший опис їх в європейській літературі з'явився в «Книзі абака» Леонарда Пізанського (1202 рік), який трактував від'ємні числа як борг. Бомбеллі і Жирар в своїх працях вважали від'ємні числа цілком можливими і корисними, зокрема, для позначення чого-небудь. Навіть в XVII столітті Паскаль вважав, що, так як ніщо не може бути менше, ніж ніщо. Віддзеркалення тих часів є та обставина, що в сучасній арифметиці операція віднімання і знак від'ємних чисел позначаються одним і тим же символом (мінус), хоча алгебраїчно це абсолютно різні поняття. У XVII столітті, з появою аналітичної геометрії, від'ємні числа одержали наочне геометричне уявлення на числової осі. З цього моменту настає їх повна рівноправність. Проте, теорія від'ємних чисел довго перебувала в стадії становлення. Жваво обговорювалася, наприклад, дивна пропорція 1: (– 1) = (–1): 1 – в ній перший член зліва більше другого, а праворуч – навпаки, і виходить, що більше дорівнює меншому («парадокс Арно»). Незрозуміло було також, який сенс має множення від'ємних чисел, і чому множення від'ємних – додатне; на цю тему проходили запеклі дискусії. Гаус в 1831 році вважав за потрібне пояснювати, що від'ємні числа принципово мають ті ж права, що і додатні, а то, що вони застосовні не до всіх речей, нічого не означає, тому що дроби теж застосовні не до всіх речей (наприклад, неприйнятні для рахунку людей). Повна і цілком сувора теорія від'ємних чисел була створена тільки в XIX столітті (Вільям Гамільтон і Герман Грассман).

Таким чином, число – це абстрактне поняття, яке використовується для вивчення і опису світобудови. Нашим завданням буде ознайомитися з усталеними в науковому світі правилами поводження з числами. І перше важливий крок у вирішенні цього завдання засвоїти, що таке функція.

6.2. Числові функції однієї дійсної змінної

Чисел існує велика кількість. Описувати всі правила для кожного числа недоцільно. Тому, для зручності замість одного числа розглядають групу або множену чисел. Таку множину прийнято позначати літерою, наприклад *X* або *Y*.

Об'єктами математичного аналізу є послідовності, функції та ряди. Зупинимо увагу спершу на функціях

Числова функція $f(x)$ – однозначне відображення (закон, правило) кожного елемента x з групи чисел X в один єдиний елемент y з групи *Y*.

Якщо кожному значенню однієї змінної x, взятому з області його можливих значень по деякому закону, ставиться у відповідність одне єдине певне значення іншої змінної y, то *y* називається залежною змінною чи функцією від незалежної змінної x.

Значення функції – число y_0, яке ставиться у відповідність аргументу $x = x_0$ за правилом $y = f(x)$.

Сукупність всіх значень аргументу *x*, для яких функція визначена, називається *областю визначення* цієї функції і позначається $D[y]$. Сукупність усіх значень, прийнятих змінної *y*, називається *областю значень* функції $y = f(x)$ і позначається $E[y]$.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Парні функції симетричні щодо осі ординат (0*y*), а непарні щодо початку координат.

Якщо $y = f(x)$, то $x = \varphi(y)$ називають *оберненою до функції* $y = f(x)$.

Функцію можна задати аналітично, графічно, словесно або за допомогою таблиці. В сучасному природознавстві найчастіше використовують аналітичний спосіб завдання функції. Розглянемо основні типи функцій.

Елементарні функції – функції, які задаються однією формулою

1. Степенева функція $y = x^r$

Узагальнене поняття для декількох функцій.

$r = 0, y = 1 - const$. Постійна лінійна функція, графік – пряма лінія, паралельна осі абсцис і проходить через $y = 1$, визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$ (раціональних чисел, тобто які можуть бути представлені у вигляді відношення чисел).

$r = 1, y = x$. Лінійна функція, графік – пряма лінія, що проходить через початок координат, визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$.

$r = n > 0\ (n \in N), y = x^n$. Графік функції – парабола. Якщо $n = 2$, то графіком є квадратична парабола, якщо $n = 3$, то – кубічна. Функція визначена для всіх $x \in \mathbb{R}$.

$r = \frac{1}{n} > 0\ (n \in N), y = \sqrt[n]{x}$ – корінь (радикал) n-ї степені від x. Функція, є оберненою до $y = x^n$. Тобто, якщо $y = x^n$, то $x = y^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{y}$. Функція визначена для всіх $x \in R$, якщо n непарне і для всіх $x \geq 0$, якщо n парне. Такі функції відносяться до *ірраціональних* функцій.

$r < 0$. У разі якщо показник степені від'ємний, то $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Функція визначена для $x \neq 0$, так як арифметичного правила ділення на нуль немає.

2. Показникова функція $y = a^x, a > 0$.

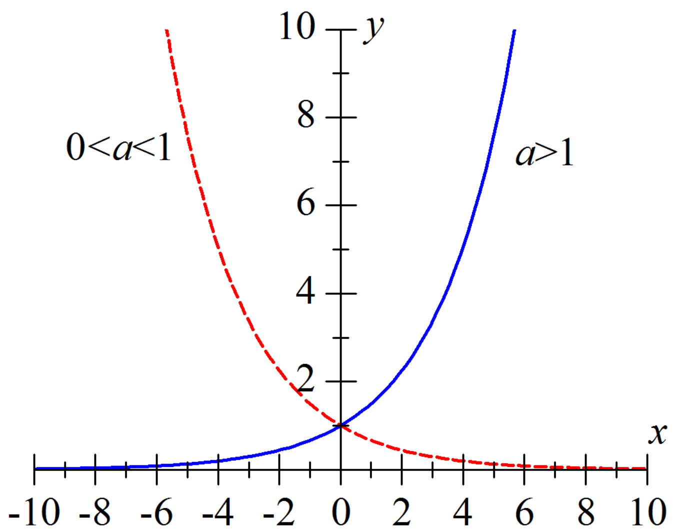


Рис. 6.1. Графіки показникових функцій

Область визначення $D[y]: x \in \mathbb{R}$.

Область значень $E[y]: y \in (0, +\infty)$.

При $a > 1$ функція монотонно зростає, при $0 < a < 1$ – спадає.

З усіх показникових функцій особливо виділяють експоненціальну функцію: $y = e^x$, де $e = 2{,}7182818284590\ldots$ – експонента

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x, a > 0$.

Логарифмічна функція являється оберненою функцією до показникової. Тобто, якщо $x = a^y$, то $y = \log_a x$.

Особливо виділяють два логарифма: натуральний $\ln x$ – основа логарифма e і десятковий $\lg x$ – основа логарифма 10.

Область визначення $D[y]: x \in (0;\ +\infty)$ $x \in (0, +\infty)$.

Область значення $E[y]: y \in \mathbb{R}$.

Нулі функції: $x = 1$

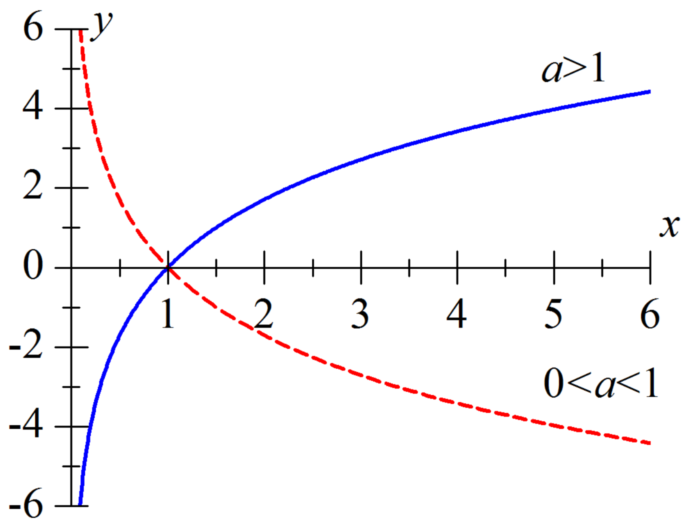


Рис. 6.2. Графіки логарифмічних функцій

4. Тригонометричні функції

Синус $y = \sin x$.

Область визначення $D[y]: x \in \mathbb{R}$.

Область значень $E[y]: y \in [-1; 1]$.

Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin x$.

Функція періодична: $T = 2\pi$.

Нулі функції: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Косинус $y = \cos x$.

Область визначення $D[y]: x \in \mathbb{R}$.

Область значень $E[y]$: $y \in [-1; 1]$.

Функція парна: $\cos(-x) = -\cos x$

Функція періодична: $\mathrm{T} = 2\pi$

Нулі функції: $x = \pi\left(n + \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{Z}$.

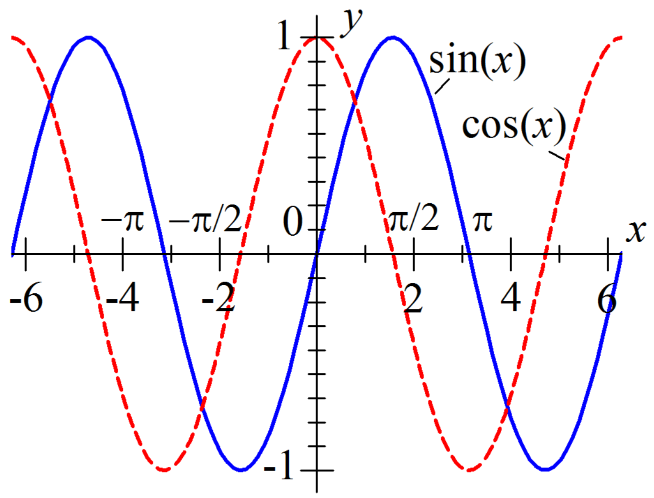


Рис. 6.3. Графіки функцій синус і косинус

Тангенс $y = \mathrm{tg}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$ *або* $y = \tan x$

Область визначення $D[y]$: $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Область значень $E[y]$: $y \in \mathbb{R}$.

Функція парна: $\mathrm{tg}\,(-x) = -\mathrm{tg}\, x$.

Функція періодична $T = \pi$

Нулі функції: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

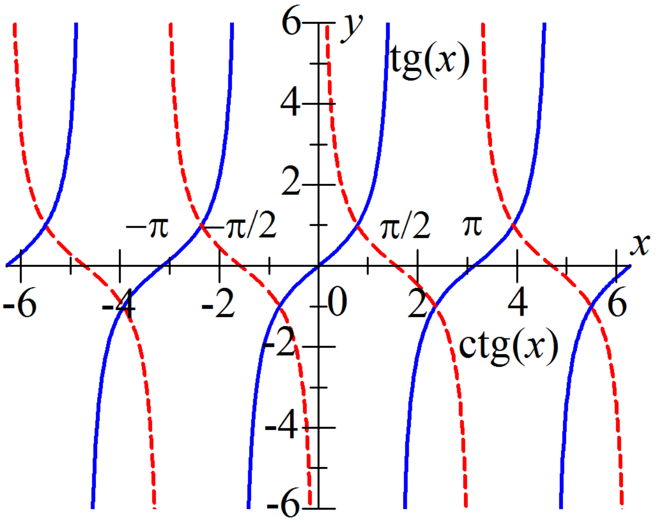


Рис. 6.4. Графіки функції тангенс і котангенс

Котангенс $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ або $y = \cot x$.

Область визначення $D[y]: x \in (-\pi; \pi)$.

Область значень $E[y]: y \in \mathbb{R}$.

Функція парна: $\cot(-x) = -\cot x$.

Функція періодична $\mathrm{T} = 2\pi$

Нулі функції: $x = \pi\left(\frac{1}{2} + n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Косеканс $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ або $y = \csc x$.

Секанс $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$.

5. Гіперболічні функції

Синус гіперболічний

$$y = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Косинус гіперболічний

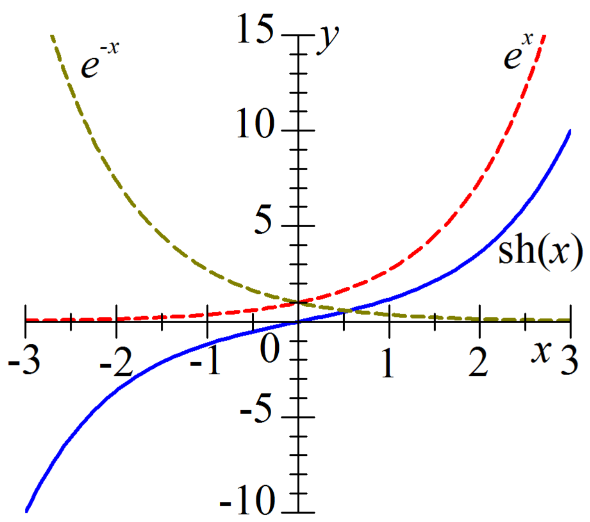
$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Тангенс гіперболічний

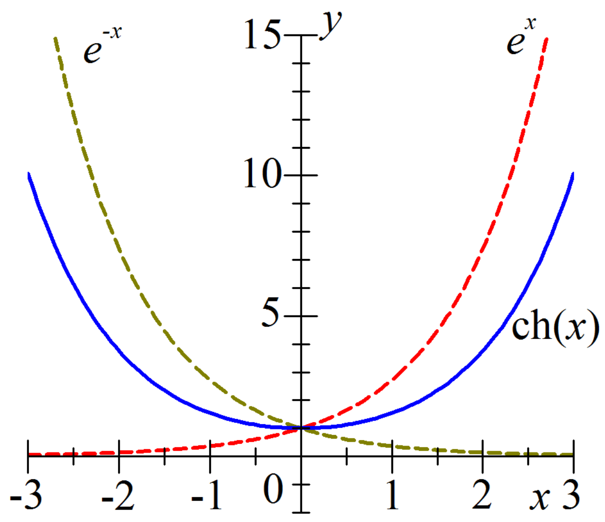
$$y = \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Котангенс гіперболічний

$$y = \operatorname{cth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$



а)



б)

Рис. 6.5. Графіки функцій синус гіперболічний (а) і косинус гіперболічний (б)

6. Обернені до тригонометричних функцій

Арксинус $y = \arcsin x$ або $y = \operatorname{asin} x$

Область визначення $D[y]: x \in [-1; 1]$.

Область значень $E[y]: y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Функція парна $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.

Нулі функції $x = 0$

Арккосинус $y = \arccos x$ або $y = \operatorname{acos} x$

Область визначення $D[y]: x \in [-1; 1]$.

Область значень $E[y]: y \in [0; \pi]$.

Нулі функції $x = 1$

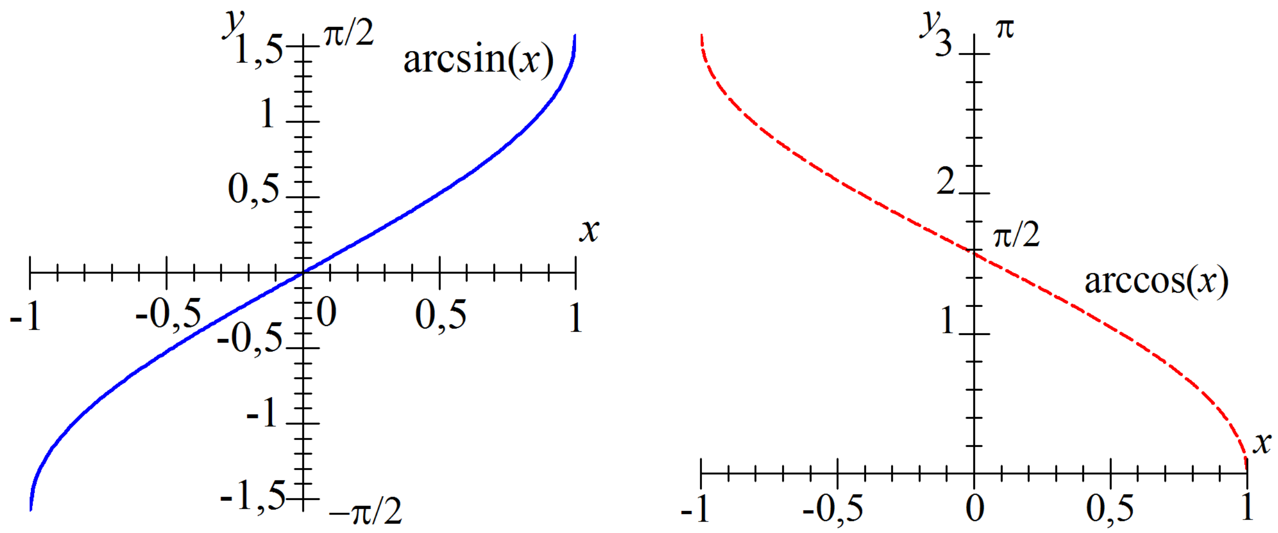


Рис. 6.6. Графіки функцій арксинус і арккосинус

Арктангенс $\mathrm{y} = \operatorname{arctg} \mathrm{x}$ або $y = \operatorname{atan} x$.

Область визначення $D[y]: x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значень $E[y]: y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функція парна $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

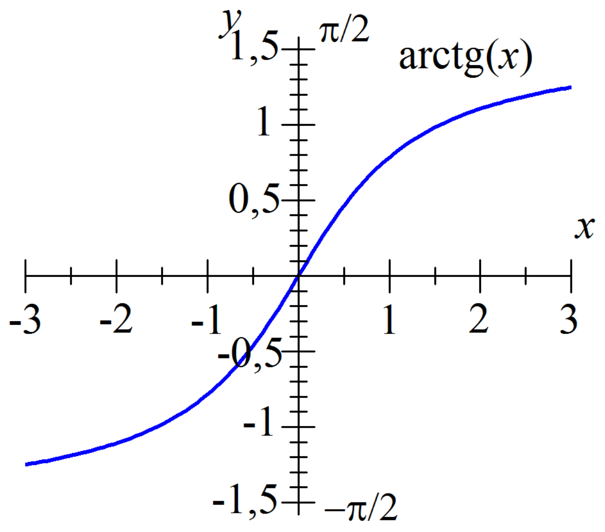
Нулі функції $x = 0$.

Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$ або $y = \operatorname{acot} x$

Область визначення $D[y]: x \in (-\infty; +\infty)$.

Область значень $E[y]: y \in (0; \pi)$.

Неелементарні функції – функції, які задаються декількома формулами До неелементарних функції відносяться, наприклад, такі спеціальні функції.



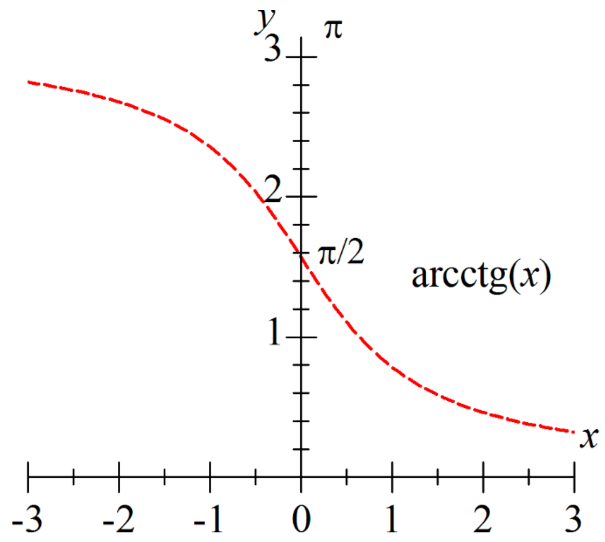


Рис. 6.7. Графіки функцій арктангенс і арккотангенс

7. Спеціальні функції

Сигнум $y = \mathrm{sgn}(x)$ (від латинського *signum* – знак) – кускова-стала функція, яка визначається наступним чином.

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Функція Хевисайда $y = \theta(x)$ – кускова-стала функція, яка дорівнює нулю для від'ємних значень аргументу і одиниці для додатних. В нулі ця функція, взагалі кажучи, не визначена, однак її зазвичай додатково визначають в цій точці деяким числом, щоб область визначення функції містила всі точки дійсної осі. Найчастіше неважливо, яке значення функція приймає в нулі, тому можуть використовуватися різні означення функції Хевісайда, зручні з тих чи інших міркувань:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, x \geq 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}.$$

Дельта-функція δ(x) (δ-функція Дірака) – узагальнена функція, яка дозволяє записати точковий вплив, а також просторову щільність фізичних величин (маса, заряд, інтенсивність джерела тепла, сила і точці п.), зосередженої або прикладеної в одній точці:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

6.3. Границя функції

Означення границі функції

Означення Коші

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околу точки x_0 за винятком може бути самою точки x_0. Функція $f(x)$ має в точки x_0 границю, яка дорівнює A, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $0 < |f(x) - A| < \varepsilon$

Означення Гейне

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околу точки x_0 за винятком може бути самою точки x_0. Якщо для будь-якої послідовності x, яка збігається до x_0 існує послідовність значень функції, що збігається до числа A, то число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці x_0

Спосіб позначання: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Однобічна границя – це границя функції в деякій точці, коли змінна прямує до точці зі сторони більших або менших значень.

Щоб показати, що послідовність x прямує до x_0 з боку менших значень x записують $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ – *лівобічна границя*.

Щоб показати, що послідовність x прямує до x_0 з боку більших значень x записують – $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$– *правобічна границя*.

Якщо – 0 або + 0 не вказується, то послідовність x прямує до x_0 за абсолютним значенням $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – *двобічна границя*

Якщо при послідовності x, що прямує до x_0 існує послідовність значень функції, що необмежено збільшується за абсолютним значенням, то границя функції *прямує до нескінченності* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Неперервність функції

Функція $\mathrm{f(x)}$ *неперервна в точці* $\mathrm{x_0}$ *тоді і тільки тоді, коли вона*:

1) Визначена в точці x_0, тобто існує значення функції $f(x_0)$;

2) Існують кінцеві однобічні границі $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$;

3) Границі співпадають зі значенням функції $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Іншими словами, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції. Якщо одне з перерахованих вимог не виконано, то функція має розрив в точці x_0.

Розрізняють 3 типів розривів функції.

Типи розривів:

1) Усувний розрив («виколота точка») $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

2) Кінцевий розрив (I роду) $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

3) Нескінченний розрив (II роду) $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ або $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$.

Рис. 6.8. Приклади типів розривів функцій

Теореми для неперервних функцій

1. *Всяка елементарна функція неперервна в кожній внутрішній точці її області визначення.*

Для неперервної функції має місце важливе положення:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f\left(\lim_{x \to x_0} x\right) = f(x_0)$$

Неперервні функції є підмножиною функцій, що мають границю, тому на них поширюються всі теореми про границі функції.

2. *Неперервність складеної функції.* Якщо функція $f(x)$ неперервна на множині X, а функція $x = g(t)$, що має множину значень співпадаючу з множиною X, неперервна на множині T, то функція $f(g(t))$ неперервна на множині T.

3. Якщо $y = f(x)$ визначена, неперервна і строго монотонна на множині X, а Y – множина її значень, то на множині Y існує строго монотонна і неперервна обернена функція $x = \varphi(y)$.

Властивості неперервних на відрізку функцій

Функція неперервна в інтервалі $[a, b]$, *якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.*

Наведемо без доведення ряд теорем, що відносяться до функцій, які неперервні на відрізку. Кожна з цих теорем має важливе самостійне значення в математичному аналізі. Незважаючи на уявну простоту і очевидність сенсу даних теорем, довести їх виявилося справою нелегкою. Це вдалося здійснити порівняно недавно в XIX столітті видатним математикам Вейерштрасу, Больцано і Коші.

1. *Якщо функція* $y = f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$, *то вона досягає на ньому свого найбільшого й найменшого значень*. Наприклад, найбільше значення функції на рис. 6.9 досягається відразу в двох точках області визначення: на кінці відрізка в точці a і в його внутрішній точці c, яка є її максимумом. Найменше значення досягається не в точці мінімуму, а на кінці b цього відрізка. Цей приклад показує, що мінімум і максимум функції не завжди є її найменшим і найбільшим значеннями.

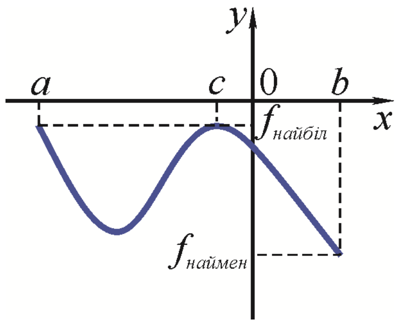


Рис. 6.9. Досягнення неперервною функцією своїх найбільшого і найменшого значень.

2. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$ *і приймає на його кінцях значення різних знаків, то в інтервалі* (a, b) *знайдеться хоча б одна точка с, в якій функція дорівнює нулю:* $f(c) = 0$ (рис. 6.10). Існує багато різних методів наближеного розв’язання рівняння $f(x) = 0$. Всі вони ґрунтуються на цій теоремі.

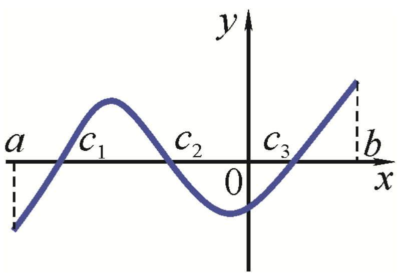


Рис. 6.10. Досягнення неперервною функцією нуля

3. *Якщо функція* $\mathrm{y = f(x)}$ *неперервна на відрізку* $[\mathrm{a, b}]$ *і* m *– її найменше значення, а* M *– найбільше, то для будь-якого числа* μ *що лежить між* m *і* M*, знайдеться таке значення аргументу* $\mathrm{a \le c \le b}$*, що* $\mathrm{f(c) = \mu}$.

Сенс даної теореми полягає в тому, що неперервна на відрізку функція приймає всі значення, укладені між її найменшим і найбільшим значеннями (рисунок 6.11).

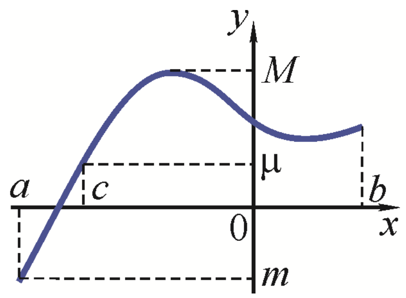


Рис. 6.11 Неперервна функція приймає всі значення між її найменшим і найбільшим значеннями

Нескінченно великі й нескінченно малі величини

Функція (величина) $\alpha(x)$ називається *нескінченно малою* в околі x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Наприклад, $\sin x$ – нескінченно мала в околі π, так як $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = 0$.

Нескінченно мала може бути як від'ємною, так і додатною. Наприклад, $\lim\limits_{x \to 2-0} x - 2 = -0$. При прямуванні x до 2 з боку менших значень функція $x - 2$ не досягає 0, залишаючись від'ємною. При прямуванні x до 2 з боку більших значень $x - 2$ теж не досягає 0, залишаючись додатною $\lim\limits_{x \to 2+0} x - 2 = +0$.

Функція (величина) $\mathrm{A}(x)$ – *нескінченно велика* в околі x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{A}(x) = \infty$ ($\mathrm{A}(x)$ необмежено збільшується при прямуванні x до x_0). Наприклад, функція $\frac{1}{(x-3)^2}$ – нескінченно велика в околі 3: $\lim\limits_{x \to 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \infty$

З означення нескінченно великої величини випливає, що знак $\mathrm{A}(x)$ не якої ролі не відіграє. Необхідно лише, щоб абсолютна величина послідовності А необмежено зростала при прямуванні x до x_0.

Якщо послідовність $\mathrm{A}(x_i)$ починаючи з деякого номера i буде додатною, то $\mathrm{A}(x)$ – *додатна нескінченно велика величина* й позначається символом $+\infty$: $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{A}(x) = +\infty$.

Якщо послідовність $\mathrm{A}(x_i)$ починаючи з деякого номера i буде від'ємною, то $\mathrm{A}(x)$ – *від'ємна нескінченно велика величина* і позначається символом $-\infty$: $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{A}(x) = -\infty$.

Треба пам'ятати, що символи ∞, $-\infty$, $+\infty$ не є числами, а символи для запису того факту, що $A(x)$ необмежено зростає. Ніяких арифметичних дій над цими символами робити не можна.

Властивості нескінченно малих

1. Сума кінцевого числа нескінченно малих – нескінченно мала.
2. Добуток нескінченно малих – нескінченно мала.
3. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену величину або на константу – нескінченно мала.
4. Якщо α – нескінченно мала зберігає знак, то $A = 1/\alpha$ – нескінченно велика. Вірно і зворотне, якщо A – нескінченно велика, то $\alpha = 1/A$ – нескінченно мала.

Еквівалентні величини

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то α_1 и α_2 є еквівалентними величинами ($\alpha_1 \sim \alpha_2$)

Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x) \to 0$, то справедливі наступні співвідношення еквівалентності (наслідки з чудових границь):

1) $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
2) $\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
3) $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$
4) $\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$
5) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$
6) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$
7) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\cdot\frac{1}{\ln a}$
8) $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}$
9) $\big(1+\alpha(x)\big)^r - 1 \sim r\alpha(x), r \in \mathbb{R}$

Теорема: Границя відношення двох нескінченно малих величин не зміниться, якщо одну з них (або обидві) замінити еквівалентною величиною

Поведінка деяких функцій на нескінченності та околі нуля

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0<a<1 \\ +\infty, & a>1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & 0<a<1 \\ +\infty, & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ 0, & a>1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to-\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ -\infty, & a>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1, \qquad \lim_{x\to 1}\log_a x = 0 \qquad \lim_{x\to+0} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & 0<a<1 \\ -\infty, & a>1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ – не існує

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \cos x$– не існує

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{tg} x$– не існує

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{ctg} x$– не існує

$\lim\limits_{x\to\pi/2\pm0} \operatorname{tg} x = \mp\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm0} \operatorname{ctg} x = \pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \mp\dfrac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \operatorname{arcctg} x = \pm0$

Теореми про границі функції

Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = A$ і $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) = B$, тоді справедливі наступні теореми.

1. $\lim\limits_{x\to x_0} C = C - const.$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(u(x) + v(x)\big) = A + B.$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(C \cdot u(x)\big) = C \cdot A, \ \ C - const.$
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(u(x) \cdot v(x)\big) = A \cdot B.$
5. $\lim\limits_{x\to x_0} u^C(x) = A^C, \qquad C - const.$
6. $\lim\limits_{x\to x_0} C^{u(x)} = C^A, \qquad C - const.$
7. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{u(x)}{v(x)} = \dfrac{A}{B}, \qquad B \neq 0.$
8. $\lim\limits_{x\to x_0} u\big(v(x)\big) = u(A), \qquad u(x)$ і $v(x)$ неперервні в околі x_0.
9. Якщо $u(x) < v(x)$ в околі x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} u(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} v(x)$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1, \quad \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{C} = 1, \qquad C - const.$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ – перша чудова границя.
12. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$ – друга чудова границя.

Зауваження: вирази виду $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞ є невизначеними, знаходження границь такого виду носить назву «розкриття невизначеності»

Приклади розв'язання задач на границі функції

В задачах 1 – 21 знайти границі функцій.

1. $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2 = 4\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 4\cdot 3^2 = 36.$

2. $\lim\limits_{x\to e}\left(\ln(x)+\sqrt{x}\right) = \ln e + \sqrt{e} = 1+\sqrt{e}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(2^x\cdot(x-1)) = 2^0(0-1) = -1.$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2^x}{\cos(x)} = \dfrac{2^\pi}{\cos(\pi)} = -(2^\pi).$

5. $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)^x = (2+3)^2 = 5^2 = 25.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)^x = 3^0 = 1.$

7. $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0,\quad \lim\limits_{x\to \mp\infty} 2^x = +\infty.$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_2 x = +\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1}\log_2 x = 0,\qquad \lim\limits_{x\to +0}\log_2 x = -\infty.$

9. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{0,2} x = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to 1}\log_{0,2} x = 0,\qquad \lim\limits_{x\to +0}\log_{0,2} x = +\infty.$

10. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}+0}\dfrac{\sin x}{\cos x} = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg} x = +\infty.$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2+2x}.$

В цієї задачі при підстановці значення змінної $x=2$ в функцію існує невизначеність – нескінченно мала поділити на нескінченно малу. Для того щоб зняти цю невизначеність напишемо чисельник і знаменник в іншій формі. По перше, знайдемо всі корені чисельника і знаменника:

$$x^2-5x+6=0;$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2};x=2;x=3;x^2-5x+6=(x-2)(x-3);$$

$$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=0;$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2};x=0;x=1;\ x=2$$

$$x^3-3x^2+2x=x(x-1)(x-2).$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{x(x-1)}=\frac{2-3}{2(2-1)}=-0{,}5$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^3-3x^2+2x}=-0{,}5.$

12. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x}.$

В цієї задачі при підстановці значення змінної $x=\pi$ в функцію теж існує невизначеність – нескінченно мала поділити на нескінченно малу. Але на відміну від попередньої задачі будемо використовувати тригонометричні перетворення:

$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos 2x}{2};$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2(x)}{\sin(x)}=2\lim_{x\to\pi}\sin x=2\sin\pi=0.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x}=0.$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{x}.$

Ця задача на першу чудову границю. Щоб послідовно знайти відповідь будемо використовувати такий широко застосований метод як заміна змінної:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{x}=\begin{Bmatrix} t=9x; \\ x\to 0;\, t\to 0\end{Bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{9\sin t}{t}=9\lim_{t\to 0}\frac{9\sin t}{t}=9\cdot 1=9.$$

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 9x}{\sin 3x}.$

Для розв’язання цієї задачі можна скористатися еквівалентними величинами:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{9x}{3x}=3.$$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{3/x}.$

Ця задача на другу чудову границю:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{3/x}=\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^3=e^3.$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$.

Застосуємо заміну змінної:

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{1/x} = \begin{Bmatrix} t=-3x, x=-t/3 \\ x\to 0, t\to -3\cdot 0=0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to 0}(1+t)^{-3/t} = \left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right)^{-3} = e^{-3}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x} = e^{-3}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$.

Ця задача теж на другу чудову границю. Використовуємо властивості логарифму:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}\right);$$

$$\ln\left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}\right) = \begin{Bmatrix} t=3x; x=t/3 \\ x\to 0; t\to 3\cdot 0=0 \end{Bmatrix} = \ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{3/t}\right) =$$

$$= \ln\left(\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]^3\right) = \ln(e^3) = 3\ln(e) = 3.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{x} = 3$.

18. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

Ця задача на другу чудову границю.

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x} = \lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x} = \begin{Bmatrix} t=\dfrac{1}{x};\ x=\dfrac{1}{t} \\ x\to -\infty;\ t\to -0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{t\to -0}(1+t)^{-\frac{1}{t}} = \left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}\right)^{-1} = e^{-1}.$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$.

Ця задача на другу чудову границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3}=\begin{Bmatrix} t=\dfrac{x}{4};\, x=\dfrac{t}{4} \\ x\to\infty;\, t\to\infty \end{Bmatrix}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3+\frac{t}{4}}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}\cdot\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{1}{4}}=1^3\cdot e^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{e}.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}=\sqrt[4]{e}.$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^3}-x}{x^{3/2}+x-1}.$

В цієї задачі виникає невизначеність відношення нескінченно великих величин. В цьому випадку можна перейти від нескінченно великих до нескінченно малих:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^3}-x}{x^{3/2}+x-1}=\begin{Bmatrix} t=1/x;\, x=1/t \\ x\to\infty;\, t\to 0 \end{Bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sqrt{(1/t)^3}-1/t}{(1/t)^{3/2}+1/t-1}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(\frac{\dfrac{2-t}{t^{3/2}}}{\dfrac{1+t^{1/2}-t^{3/2}}{t^{3/2}}}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2-t}{1+t^{1/2}-t^{3/2}}\right)=2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^3}-x}{x^{3/2}+x-1}=2.$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right).$

В цієї задачі виникає невизначеність різниці нескінченно великих величин. В цьому випадку можна перейти до невизначеності відношення нескінченно великих величин шляхом множення і ділення виразу на спряжений вираз, а потім перейти до нескінченно малих:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2+2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2-2}}=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2}\right)=0.$

Задачі на границі функції

В задачах 6.1 – 6.58 обчислити границі функцій

6.1. $\lim\limits_{x\to 0{,}13} 108$

6.2. $\lim\limits_{x\to\pi} x\cdot\cos x$

6.3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(2x+3)\cdot(4x-3)}{5-x}$

6.4. $\lim\limits_{x\to 3}(x+4)\cdot(2x-7)$

6.5. $\lim\limits_{x\to 11}\left(\frac{1}{11}x^2+x+3\right)$

6.6. $\lim\limits_{x\to -1}(2x-1)\cdot(x+2)$

6.7. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x-3}{(x+2)^2}$

6.8. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+9}{x^2-2x+1}$

6.9. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x+2)^2}$

6.10. $\lim\limits_{x\to -2} 3^x$

6.11. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{-x}$

6.12. $\lim\limits_{x\to -2}\left(\sqrt{3}\right)^x$

6.13. $\lim\limits_{x\to -2}\sin^x\frac{\pi}{6}$

6.14. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{-x}$

6.15. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-1}$

6.16. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x^2-1}$

6.17. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x}$

6.18. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{2}$

6.19. $\lim\limits_{x\to -0}\sqrt[x]{2}$

6.20. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x]{0{,}16}$

6.21. $\lim\limits_{x\to -0}\sqrt[x]{0{,}04}$

6.22. $\lim\limits_{x\to 1+0}\sqrt[x-1]{x}$

6.23. $\lim\limits_{x\to +0}\sqrt[x-1]{x}$

6.24. $\lim\limits_{x\to\pi/3} 0{,}25^{\cos x}$

6.25. $\lim\limits_{x\to\pi/4} 9^{\operatorname{tg} x}$

6.26. $\lim\limits_{x\to\pi/2+0} 5^{\operatorname{tg} x}$

6.27. $\lim\limits_{x\to\pi/2-0} 3^{\operatorname{tg} x}$

6.28. $\lim\limits_{x\to -3}(x^2+1)^{3+x}$

6.29. $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt[x]{x^{-2}+3}$

6.30. $\lim\limits_{x\to 3+0}(x^2-9)^{-x}$

6.31. $\lim\limits_{x \to -1} \cos^x \frac{\pi}{3}$

6.32. $\lim\limits_{x \to -2} \cos^x \frac{\pi}{4}$

6.33. $\lim\limits_{x \to -1} \ln(x+2)$

6.34. $\lim\limits_{x \to -1} \lg(x^2+9)$

6.35. $\lim\limits_{x \to -1} \log_3(x^2+8)$

6.36. $\lim\limits_{x \to -\infty} \ln(x^2-9)$

6.37. $\lim\limits_{x \to 3} \ln(x^2-9)$

6.38. $\lim\limits_{x \to 1} \lg(x^2+2x-3)$

6.39. $\lim\limits_{x \to 3} \log_{0,2} x^2 - 2x - 3$

6.40. $\lim\limits_{x \to \pi - 0} \lg(\sin x)$

6.41. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)$

6.42. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \log_3(\operatorname{tg} x)$

6.43. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{7x^2-x^4-3x}{4x^4+3x-2}$

6.44. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x}}{x^2-2}$

6.45. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x^3-x+4}{2x^3-4x^2+3}$

6.46. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^{3/2}-x^2\right)$

6.47. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-4x+2}{x^2-5x+4}$

6.48. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

6.49. $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x^2-4x+2}{x^2-5x+4}$

6.50. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

6.51. $\lim\limits_{x \to 0} (1-4x)^{(1-x)/x}$

6.52. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$

6.53. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{x-4}$

6.54. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 3x}{x^2}$

6.55. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{\sin 9x}$

6.56. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg}(x^2-1)}{x-1}$

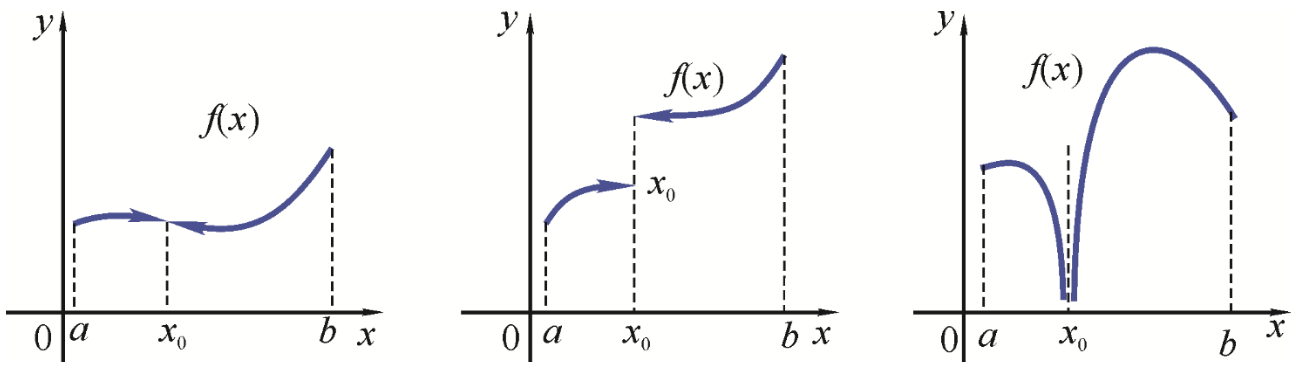
6.57. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right)$

6.58. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x-1}{x}$

Контрольні питання

1. Що таке границя функції?
2. Що таке однобічна границя функції?
3. Як позначається границя функції?
4. Чи завжди можна обчислити границю функції?

5. Чи існує границя функції $y=\frac{1}{(x-a)^2}$ при $x \to a$. Якщо так, то чому вона дорівнює? Чи існує значення цієї функції $x=a$
6. Поясніть фізичний зміст неперервності функції $F(m_1)$ і $F(r)$, де F – сила взаємодії двох мас m_1 і m_2, r – відстань між ними: $F=\gamma\frac{m_1 m_2}{r^2}$ при деяких допустимих фіксованих значеннях інших параметрів.
7. Які процеси в економіці можна вважати неперервними, а які розривними?
8. Чи може обмежена функція мати розрив II роду?
9. На рис. наведені графіки функцій, що мають розриви. Класифікуйте ці розриви? Які фізичні або інші процеси могли б їм відповідати?



а)   *б*)   *с*)

Різні розриви функції

10. Чи можуть всі значення неперервної функції бути раціональними?
11. Яка функція називається нескінченно великою?
12. Яка функція називається нескінченно великою?
13. Вкажіть властивості нескінченно малої величини.
14. Як порівняти нескінченно мали величини?
15. Які величини називаються еквівалентними нескінченно малими (великими)
16. Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих величин.
17. Чи зміниться границя відносини двох нескінченно малих, якщо одну (або обидві) замінити на їх еквівалентні величини?
18. Як можна перейти від нескінченно великий до нескінченно малої і навпаки.

6.4. Диференціювання

Розглядаючи нескінченно малі функції, ми порівнювали їх між собою шляхом знаходження границь їх відношення. Однак необхідність такої процедури виникає навіть тоді, коли вивчаються властивості однієї заданої функції $y = f(x)$. При вивченні миттєвої швидкості або кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції ми зіткнемося з розглядом відношення приросту функції до приросту аргументу, який прямує до нуля. Таких задач існує безліч. Неочевидність їх рішення пов'язана з принциповою трудністю: навіть для неперервних функцій виникає необхідність розкриття невизначеності 0/0. Розкрити цю невизначеність часом буває дуже непросто. Можливо, геніальність Ньютона, який дав поняття миттєвої швидкості, полягала саме в тому, що від умоглядного сприйняття переміщення за нескінченно малий проміжок часу йому вдалося перейти до границі відношення приросту переміщення точки до приросту часу, яке породило цю зміну шляху. Ця ж ідея стала основною у визначені кутового коефіцієнта дотичної до кривої і була реалізована Лейбніцем. Саме поняття границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останнє прямує до нуля, введене цими вченими в кінці XVII століття у зв'язку з розглядом зазначених задач придбало стрімке продовження. Відшукання цієї границі, яку назвали похідною, дозволило вивчити найважливіші властивості функціональних залежностей, створити теорію диференціальних рівнянь, що описує найрізноманітніші процеси реального світу та розвинути нові математичні ідеї.

Похідна функції

Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 – це границя відношення приросту функції $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ до приросту змінної $\Delta x = x - x_0$ при прямуванні x до x_0:

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Похідна функції $f(x)$ як функція – це границя відношення приросту функції $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$ до приросту змінної Δx при прямуванні приросту змінної Δx до нуля (Δx може приймати як додатні, так і від’ємні значення):

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Загально прийняті позначення похідної функції такі:

$f'(x)$ – форма Лагранжа;

$\frac{df}{dx}$ – форма Лейбніца;

$Df(x)$ – форма Ейлера;

$\dot{f}(x_0)$– форма Ньютона.

Функція називається *диференційованою* в точці, якщо вона має в цій точці кінцеву похідну. Похідна функції в точці x_0 може не існувати або існувати й бути обмеженою. *Функція є диференційованою в точці тоді й тільки тоді, коли її похідна в цій точці існує і кінцева.*

Якщо функція f(x) диференційована в точці x_0, *то вона в цій точці неперервна*. Неперервність функції є необхідною, але не достатньою вимогою її диференційованості.

Зміст похідної

Зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 стає зрозумілим через кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої в цій точці (рис. 6.12):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\beta \to \varphi} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi.$$

Якщо же крива графіку функції, що визначає залежність переміщення матеріальної точки s від часу t, то величина $s'(t_0)$ – миттєва швидкість руху в момент часу t_0. Тобто зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 – швидкість зміни функції y точці x_0

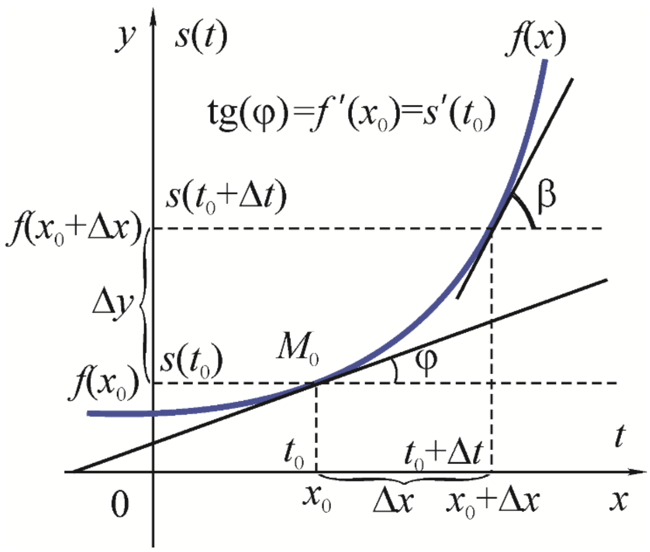


Рис. 6.12. Ілюстрація геометричного і механічного змісту похідної в точці

Правила диференціювання

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційованні. Тоді, справедливі співвідношення:

1) $C' = 0$, де $C = const$ – похідна від сталої дорівнює нулю;

2) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$ – стала виноситься за знак диференціювання;

3) $(u + v)' = u' + v'$ – похідна від суми двох функцій;

4) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ – похідна від добутку двох функцій;

5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, v \neq 0$ – похідна від відношення двох функцій;

6) $u'\big(v(x)\big) = u'(v) \cdot v'(x)$ – похідна складної функції;

7) $\left(u^{v(x)}(x)\right)' = v(x) \cdot u^{v(x)-1}(x) \cdot u'(x) + u^{v(x)}(x) \cdot \ln u(x) \cdot v'(x)$.

Похідні елементарних функцій:

1) $(x^a)' = ax^{a-1}$ – похідна степеневих функцій;

2) $(a^x)' = a^x \ln a$, $\quad (e^x)' = e^x$ – похідна показникових функцій;

3) $\log'_a x = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, $\quad \ln' x = \dfrac{1}{x}$ – похідна логарифмічних функцій;

4) $\sin' x = \cos x$ – похідна синуса;

5) $\cos' x = -\sin x$ – похідна косинуса;

6) $\arcsin' x = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ – похідна арксинуса;

7) $\arccos' x = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ – похідна арккосинуса;

8) $\mathrm{tg}' x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ – похідна тангенса;

9) $\mathrm{ctg}' x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ – похідна котангенса;

10) $\mathrm{arctg}' x = \dfrac{1}{1 + x^2}$ – похідна арктангенса;

11) $\mathrm{arcctg}' x = -\dfrac{1}{1 + x^2}$ – похідна арккотангенса;

12) $\mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x$ – похідна синуса гіперболічного;

13) $\mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$ – похідна косинуса гіперболічного;

14) $\mathrm{th}' x = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$ – похідна тангенса гіперболічного;

15) $\mathrm{cth}' x = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$ – похідна котангенса гіперболічного;

16) $\Theta'(x) = \delta(x)$ – похідна функції Хевисайда.

Диференціал функції

Нехай задана функція $y = f(x)$. Відомо, що її приріст в деякій точці x_0, викликаний збільшенням аргументу на Δx, може бути обчислено за формулою $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Чи завжди зручно користуватися нею? Чи можна приріст функції перетворити так, щоб виділити складові, які більшою чи меншою мірою відображали б його структуру? Попередні міркування дозволяють дати таку оцінку. Із означення похідної маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Якщо деяка функція має кінцеву границю, то по необхідній і достатній умові існування границі вона може бути представлена у вигляді:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x_0, \Delta x),$$

де $\alpha(x_0, \Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x_0, \Delta x) = 0$.

Отже, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)\Delta x$ – приріст функції складається з двох доданків. Перший з них можна знайти, обчисливши $f'(x_0)$ і Δx. Другий – $\alpha(x_0, \Delta x)$ знайти важче, так як згадана вище теорема зовсім не вказує спосіб відшукання нескінченно малою функції $\alpha(x_0, \Delta x)$. У разі потреби її можна знайти як різницю між приростом цієї функції і першим доданком $f'(x_0)\Delta x$.

Означення диференціала функції

Диференціалом функції $f(x)$ називається лінійна частина приросту функції, щодо збільшення змінної, при прямування останньої до нуля: $\Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x)\Delta x$.

Використовувані символи границі функції тут прийнято записувати в іншій формі. Замість $\Delta x \to 0$ використовують символ dx, що позначає приріст змінної, що прямує до нуля. Замість Δy (приріст функції), щоб підкреслити, що береться тільки його лінійна відносно dx частина використовують символ dy – символ диференціала.

Диференціал (від лат. *differentia* – різність, відмінність)

Таким чином, *диференціал функції* $f(x)$ – це $df = f'(x)dx$.

Так як диференціал функції визначається похідною функцією, то всі властивості похідних функцій (або правила диференціювання), поширюються і на диференціал функції. Тому, нижче наводяться тільки основні властивості диференціала без коментарів.

Властивості диференціала функції:

1) $d\big(Cu(x)\big) = Cdu(x), C - const;$

2) $d\big(u(x) + v(x)\big) = du(x) + dv(x);$

3) $d\big(u(x)v(x)\big) = v(x)du(x) + u(x)dv(x);$

4) $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}.$

Зміст диференціала функції

Розглянемо геометричний і фізичний зміст диференціала функції. Нехай $f(x)$ – функція, що диференціюється.

З рисунку 6.13 випливає, що диференціал означає приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x_0, викликане збільшенням аргументу на Δx $dy = f'(x_0)dx = \operatorname{tg}\varphi \cdot \Delta x$, де φ – кут, який утворює дотична до кривої $y = f(x)$ в точці x_0.

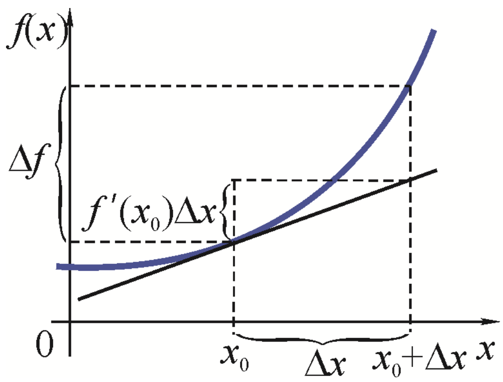


Рис. 6.13. Ілюстрація диференціала функції

Наприклад, якщо задана переміщення $s(t)$ матеріальної точки від часу t, то величина Δs – приріст переміщення за час Δt в припущенні, що, починаючи з моменту часу t_0, матеріальна точка рухається рівномірно зі швидкістю $v = s'(t_0)$. Отже, диференціал $s(t)$ в момент часу t_0 – це лінійна частина приросту переміщення за час нескінченно малий інтервал часу dt: $ds = s'(t_0)dt$.

Похідні й диференціали вищих порядків

Операція диференціювання може бути зроблена повторно, якщо похідна функції є диференційованою функцією. Тобто друга похідна для функції $y = f(x)$ розглядається як похідна від її першої похідної:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = (y'\,)'.$$

Процес диференціювання може проводитися і далі, якщо в результаті диференціювання виходять функції, що мають похідні. Таким чином, поняття похідної довільного n-го порядку задається рекурентно. Якщо функція $f(x)$ диференційована в x_0, то похідна першого порядку визначається співвідношенням $f^{(1)}(x_0) \equiv f^{'}(x_0)$.

Нехай тепер похідна n-го порядку визначена в деякого околу точки x_0 і є диференційованою. Тоді похідна $n + 1$-го порядку визначається рекурентною формулою:

$$f^{(n+1)}(x_0) \equiv \left(f^{(n)}(x_0)\right)'.$$

Способи позначання.

Залежно від цілей, області застосування і використовуваного математичного апарату застосовують різні способи запису похідних вищих порядків. Так, похідна n-го порядку може бути записана наступними способами.

1. Спосіб Лагранжа $f^{(n)}(x)$, при цьому для малих n часто використовують штрихи і римські цифри:

$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0) = f^{I}(x_0)$;

$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = f^{II}(x_0)$;

$f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0) = f^{III}(x_0)$ і так далі.

Такий запис зручний своєю стислістю і широко поширено, однак штрихами дозволяється позначати не вище третьої похідної.

2. Спосіб Лейбніца зручний наочний запис відношення нескінченно малих (тільки у випадку, якщо x – незалежна змінна, в іншому випадку позначення вірно лише для похідної першого порядку):

$$\frac{d^nf}{dx^n}.$$

3. Спосіб Ньютона, який часто використовується в теоретичній механіці для позначання похідної за часом функції координати (для просторової похідної частіше використовують запис Лагранжа або Лейбниця). Порядок похідної позначається числом крапок над функцією, наприклад: $\dot{x}(t_0)$ – похідна першого порядку по t при $t = t_0$, або $\ddot{x}(t_0)$ – друга похідна по змінній t в точці $t = t_0$.
4. Спосіб Ейлера, в основу якого покладено використання диференційного оператора, є зручним в питаннях, які пов'язані з функціональним аналізом:

$$D^n f(x_0) \text{ або іноді } \partial^n f(x_0).$$

Диференціал вищих порядків

Диференціалом порядку n, де $n > 1$ від функції $f(x)$ в деякій точці називається диференціал в цій точці від диференціала порядку $(n-1)$:

$$d^n f = d(d^{n-1} f) = f^{(n)} dx^n$$

Диференціювання функцій декількох змінних

При вивченні різних явищ навколишнього світу часто доводиться стикатися з одночасним впливом більш ніж двох змінних величин. Наприклад, при вивченні процесу поширення тепла в будь-якому неоднорідному тілі потрібно досліджувати величину температури в різних точках тіла в різні моменти часу. Положення точки у тривимірному просторі в декартовій системі координат визначається трьома числами. Тому фактично в зазначеному процесі треба вивчати спільний вплив п'яти змінних величин: трьох координат точки, часу і температури.

Можна простежити аналогії між функціями однієї та декількох змінних, що дозволяє вважати функції багатьох змінних узагальненням випадку однієї змінної.

Означення n-мірної точки

Всяка множина E, що складається з деяких впорядкованих систем $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ дійсних чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається n-мірною множиною точок, а його елементи – точками цієї множини (n-мірними точками).

При $n = 2$, отримуємо пари (x, y), а при $n = 3$ – трійки чисел (x, y, z), які можна розглядати як точку координатної площині або координатного простору. Що множину точок можна задати за допомогою рівнянь або нерівностей, які виконуються для координат точок цієї множини і тільки для них.

Означення функції n-змінних.

Нехай задана деяка не порожня множина D точок простору R_n.

Якщо кожній точці $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ множини D поставлено у відповідність з будь-якого закону деяке дійсне число u, то говорять, що на множині D задана *скалярна функція від змінних* $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, яку позначають:

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Частинна похідна.

Нехай задана функція $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка визначена в області D. Візьмемо якусь точку $A(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ цієї області та дамо змінній x_i приріст Δx_i. Залишимо значення інших аргументів незмінними, тобто перейдемо від точки $A(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$ до точки $A(x_1, x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n)$. Тоді функція отримає частинний приріст по змінній x_i $\Delta_{x_i} f = f(x_1,\ x_2, \ldots, x_i + \Delta x_i, \ldots, x_n) - f(x_1,\ x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$. Складемо відношення приросту функції по змінній x_i до приросту самої змінної $\Delta_{x_i} f / \Delta x_i$. Це відношення для даної точки можна розглядати як певну функцію аргументу Δx_i. Може статися, що ця функція має границю при $\Delta x_i \to 0$, тобто що $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \Delta_{x_i} f / \Delta x_i$ існує.

Частинною похідною функції $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по змінній x_i називається кінцева границя

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}.$$

Спосіб позначення частинної похідної

$$f'_{x_i} \text{ або } \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Диференціювання складених, параметричних та неявних функцій

Нехай задана функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n змінних, кожна із яких в свою чергу є функцією незалежних m змінних $x_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$. Тоді функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є *складеною функцією* n *змінних з* m *проміжними змінними*.

Теорема. Нехай функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована в точці $X_0 \in G_n$, а функції $x_i(t_1, t_2, \dots, t_m)$. диференційовані в точці $T_0 \in D_m(f)$. Тоді складена функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ диференційована в точці $T_0 \in D_m(f)$ причому частинна похідна функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) по змінній t_j визначається формулою:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

Повна похідна

Нехай задана функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка визначена в деякій області D і кожна із змінних в свою чергу залежить від параметра t – $x_i(t)$, $i = 1, 2, .., n$. Тоді функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є функцією однієї змінної t. Похідна функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по змінній t називається *повною похідною* і знаходиться за формулою:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Диференціювання параметричних функцій

В фізиці, хімії, економіці та соціології часто зустрічається параметричний спосіб завдання рівняння, що описує криву на площині чи в просторі. Саму ж лінію можна розглядати як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, координати x та y якої є функціями допоміжної змінної t, v, s (часу, швидкості, відстані і так далі.). Допоміжну змінну називають *параметром*, а рівняння функції – *параметричним*.

Таким чином, якщо $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ визначені при $t \in (a, b)$ та існує обернена функція $t = \theta(x)$ до $x = \varphi(t)$, то функція $y = \psi(\theta(x))$ задана параметрично.

Наприклад, крива на площині визначається двома рівняннями з одним параметром t $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$, в трьохвимірному просторі – трьома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $z = \zeta(t)$, а поверхня трьома рівняннями та двома параметрами u і v $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$

Формулу диференціювання параметричних функцій в загальному випадку записати без роз'яснювань складно. Тому розглянемо деякі частинні, більш прості випадки залежності змінних від одного параметру t.

1. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично на площині $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t). \end{cases}$ Похідна заданої функції $y = f(x)$ першого порядку знаходиться за правилом:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$$

2. Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$

Частинні похідні $z = f(x, y)$ першого порядку визначаються наступним чином:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z_t'}{x_t'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z_t'}{y_t'}$$

Тобто для функції $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ або $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, яка задана параметрично через параметр t всі частинні похідні знаходяться за правилом:

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \frac{\partial x_n}{\partial t} \Big/ \frac{\partial x_i}{\partial t}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Диференціювання неявних функцій

Нехай функція $F(x, y)$ визначена на деякій множині змінних x, y і нехай на будь-якої множині значень x існує така функція $y = f(x)$, яка, будучи підставлена замість y в рівняння звертає його на цій множині в тотожність відносно x. Тоді кажуть, що на даній множині функція задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.

Не всяке рівняння такого виду може бути неявною функцією. Виникає питання, в яких випадках такого роду вираз задає неявну функцію. Відповідь на нього дає наступна теорема.

Теорема про існування неявної функції, яка диференційована.

Нехай рівняння $F(x, y) = 0$ задовольняє таким умовам:

1) визначена і має неперервні частинні похідні F'_x, F'_y в деякому прямокутнику $x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b$;

2) в точці (x_0, y_0) приймає нульове значення, причому частинні похідні не дорівнюють нулю в даній точці.

Тоді рівняння $F(x, y) = 0$ в деякому околу $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 *визначає неявну функцію однієї змінної* $y = f(x)$, таку що $y_0 = f(x_0)$. Ця функція в названому околу точки x_0 має неперервну похідну, причому

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Розглянемо рівняння $F(x, y, z) = 0$. Якщо для кожної пари значень незалежних змінних з будь-якої області на площині існує тільки одне значення z, яке задовольняє вказаному рівнянню, то говорять, що таке рівняння *визначає неявну функцію двох змінних* $z = f(x, y)$.

Можна сформулювати аналогічну теорему для визначення умов існування такої неявної функції, *частинні похідні якої знаходяться за формулами:*

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Аналогічним чином можна визначити неявні функції від більшого числа змінних.

Повний диференціал функції

Повний диференціал функції n-змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначається наступним співвідношенням

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i.$$

Тобто *повний диференціал функції n-змінних* $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ є сумою всіх *частинних диференціалів*:

$$df = \sum_{i=1}^{n} df_i, \qquad \text{де } df_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i \text{ – частинний диференціал.}$$

Частинні похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ в деякій області визначення D має частинну похідну по одній із змінних. Тоді цю похідну можна розглядати як функцію тих же змінних, визначену в області D. Може трапитися так, що отримана функція має в деякій області визначення частинну похідну по тій же або по іншій змінній. Отримані таким чином частинні похідні називаються *частинними похідними другого порядку*. У загальному випадку диференціювання можна повторювати кілька разів, в результаті отримуємо *частинні похідні вищих порядків*. Частинні похідні вищих порядків, які були знайдені за різними змінними називають з*мішаними частинними похідними*.

Наприклад, функція двох змінних $f(x,y)$ має дві частинні похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$. Якщо продиференціювати кожну із отриманих похідних, то отримаємо чотири частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ або } f''_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ або } f''_{yx};$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ або } f''_{yy}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ або } f''_{xy}.$$

Причому змішані частинні похідні рівні між собою

Теорема Шварца.

Якщо в деякому околі точки та в самій точці функція має похідні першого порядку і змішані частинні похідні другого порядку, які неперервні в самій точці, то змішані похідні другого в цій точці рівні між собою.

Теорема має загальний характер на випадок будь-якого числа змінних і змішаних похідних будь-якого порядку

Теорема. Змішані частинні похідні будь-якого порядку за умови їх неперервності не залежать від порядку диференціювання.

Повний диференціали вищих порядків

Повним диференціалом другого порядку від функції $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називається диференціал від повного диференціала $d^2u = d(du)$.

Можна показати, що для диференціала другого порядку справедлива формула:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \text{ або } d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy\right)^2 f.$$

Аналогічним чином визначається диференціал порядку m функції n змінних. Символічний загальний вигляд такого диференціалу наступний:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n\right)^m f.$$

Для складених функцій диференціали порядку вище першого не мають незмінної форми і вирази для них більш складні, ніж отримані раніше формули.

Приклади розв'язання задач на диференціальне числення

Нехай задана функція $y = f(x)$. Знайти похідну y'.

1. $y = \ln x$. $y' = \ln' x = \dfrac{1}{x}.$

2. $y = \sin x$. $y' = \sin' x = \cos x$.

3. $y = 0{,}5$. $y' = 0{,}5' = 0$.

4. $y = 5 \cdot \sin x$. $y' = (5 \cdot \sin x)' = 5\sin' x = 5 \cdot \cos x$. $y' = 5 \cdot \cos x$.

5. $y = \ln x + \sin x$. $y' = (\ln x + \sin x)' = \ln' x + \sin' x = \dfrac{1}{x} + \cos x$.

$$y' = \frac{1}{x} + \cos x.$$

6. $y = \ln x \cdot \sin x$.

$$y' = (\ln x \cdot \sin x)' = \ln' x \cdot \sin x + \ln x \cdot \sin' x = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x.$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \sin x + \ln x \cdot \cos x.$$

7. $y = \dfrac{\ln x}{\sin x}.$

$$y' = \left(\frac{\ln x}{\sin x}\right)' = \frac{\ln' x \cdot \sin x - \ln x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sin x - \ln x \cdot \cos x}{\sin^2 x}.$$

$$y' = \frac{\sin x - x \ln x \cdot \cos x}{x \sin^2 x}.$$

8. $y = \ln(\sin x)$.

$$y' = \ln'(\sin x) = \frac{1}{\sin x} \cdot \sin' x = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x.$$

$$y' = \operatorname{ctg} x.$$

9. $y = \sin(\ln x)$.

$$y' = \sin'(\ln x) = \cos(\ln x) \cdot \ln' x = \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x}.$$

$$y' = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

10. $y = \sin^{\ln(x)}(x)$.

$$y' = \left(\sin^{\ln(x)}(x)\right)' = \ln(x) \cdot \sin^{\ln(x)-1}(x) \cdot \sin' x + \sin^{\ln(x)}(x) =$$

$$= \ln(\sin(\,x)) \cdot \ln' x = \ln(x) \cdot \sin^{\ln(x)-1}(x) \cdot \cos(x) + \sin^{\ln(x)}(x) \cdot \ln(\sin(\,x)) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \ln(x) \cdot \sin^{\ln(x)-1}(x) \cdot \cos(x) + \sin^{\ln(x)}(x) \cdot \ln(\sin(\,x)) \cdot \frac{1}{x}$$

11. Знайти всі частинні похідні першого порядку функції

$$f(x, y) = 3x^2 - 4x\sqrt{y^3} + \frac{1}{y^2} + 6.$$

Для зручності напишемо функцію інакше:

$$f(x, y) = 3x^2 - 4xy^{\frac{3}{2}} + y^{-2} + 6.$$

Частинна похідна функції по змінній x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(3x^2 - 4xy^{3/2} + y^{-2} + 6\right)_x' = 6x - 4y^{\frac{3}{2}}.$$

Так як усі змінні окрім x при диференціюванні розглядаються сталими величинами, то похідні від y^{-2} і 6 будуть дорівнювати нулю. В другому доданку сталий коефіцієнт $4y^{3/2}$ виноситься за знак похідної. При знаходженні частинної похідної функції по змінній y вже x фіксується і розглядається сталою величиною. Тому до неї застосовуються усі правила диференціювання сталих:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(3x^2 - 4xy^{\frac{3}{2}} + y^{-2} + 6\right)_y' = -6xy^{\frac{1}{2}} - 2y^{-3}.$$

12. Знайти повну похідну першого порядку функції $f(x, y, t) = \frac{x}{y} e^{-t}$, якщо $x = 2 \cdot \sin(3t)$ і $y = \sqrt{t}$.

Повна похідна визначається формулою:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(\frac{x}{y} e^{-t}\right)'_t = -\frac{x}{y} e^{-t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{x}{y} e^{-t}\right)'_x = \frac{1}{y} e^{-t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{x}{y} e^{-t}\right)'_y = -\frac{x}{y^2} e^{-t};$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = (2\sin(3t))' = 6\cos(3t);$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\sqrt{t}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{t}.}$$

Таким чином,

$$\frac{df}{dt} = -\frac{x}{y} e^{-t} + \frac{1}{y} e^{-t} 6\cos(3t) - \frac{x}{y^2} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} = \left(\frac{6\cos(3t)}{y} - \frac{x}{y} - \frac{x}{2y^2\sqrt{t}}\right) e^{-t}.$$

13. Знайти похідну функції $y = f(x)$ – еліпсу з півосями 5 і 2, якщо вона задана параметрично: $\begin{cases} x = 5\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}.$

Похідна визначається виразом:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}.$$

$$\frac{dy}{dt} = (2\sin t)' = 2\cos t;$$

$$\frac{dx}{dt} = (5\cos t)' = -5\sin t.$$

Відповідно,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\cos t}{-5\sin t} = -\frac{2}{5}\operatorname{ctg}(t).$$

14. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$, якщо вона задана параметрично: $x = 5\cos t\,; y = 2\sin t\,; z = e^{-2t}$.

Похідні визначаються формулами:

$$z'_x = \frac{z'_t}{x'_t}\ , \quad z'_y = \frac{z'_t}{y'_t}\ .$$

$$z' = (e^{-2t})' = -2e^{-2t};$$

$$y' = (2\sin t)' = 2\cos t\,;$$

$$x' = (5\cos t)' = -5\sin t.$$

Відповідно,

$$z'_x = \frac{2e^{-2t}}{5\sin t}\ , \ z'_y = -\frac{2e^{-2t}}{5\cos t}\ .$$

15. Знайти похідну функції $y = f(x)$ – гіперболи, якщо вона задана неявно:

$$3x^2 - 4y^2 = 1.$$

Похідна неявної функції визначається формулою $y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$, де $F(x, y) = 3x^2 - 4y^2 - 1$.

Знайдемо всі частинні похідні функції $F(x, y)$:

$$F'_x(x, y) = (3x^2 - 4y^2 - 1)'_x = 6x;$$

$$F'_y(x, y) = (3x^2 - 4y^2 - 1)'_y = -8y.$$

Таким чином,

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{6x}{-8y} = -\frac{3x}{4y}\ .$$

16. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$ – еліпсоїду, якщо вона задана неявно: $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 = 1$.

Частинні похідні неявної функції визначаються формулами

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \ \text{ і } \ z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}\ , \ \text{де } \ F(x, y, z) = 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 1.$$

Знайдемо всі частинні похідні функції $F(x, y, z)$:

$$F'_x(x, y, z) = (3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 1)'_x = 6x;$$

$$F'_y(x, y, z) = (3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 1)'_y = 8y;$$

$$F'_z(x,y,z) = (3x^2 + 4y^2 + 5z^2 - 1)'_z = 10z.$$

Таким чином,

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{6x}{10z} = -\frac{3x}{5z}\ ,$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{8y}{10z} = -\frac{4y}{5z}\ .$$

Задачі на диференціювання

В задачах 6.59 – 6.114 знайти диференціал функції $y = f(x)$

6.59. $y = 3\arcsin x$

6.60. $y = 2 + \arccos x$

6.61. $y = x^{2/3}$

6.62. $y = 3^x$

6.63. $y = \ln x$

6.64. $y = 5\,\mathrm{arctg}\,x$

6.65. $y = \sqrt{x^3}$

6.66. $y = 3x^{-2}$

6.67. $y = x + e^x$

6.68. $y = \log_3 x$

6.69. $y = \lg x$

6.70. $y = 3\,\mathrm{sh}\,x$

6.71. $y = 3 + \mathrm{ch}\,x$

6.72. $y = \frac{1}{x}$

6.73. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

6.74. $y = \mathrm{th}\,x$

6.75. $y = x^2\,\mathrm{tg}\,x$

6.76. $y = \sin x + 3$

6.77. $y = \cos x + x$

6.78. $y = x\,\mathrm{ctg}\,x$

6.79. $y = \arcsin\sqrt{x}$

6.80. $y = \arccos\sqrt[3]{x}$

6.81. $y = (x+3)^{2/3}$

6.82. $y = 3^{\sin x}$

6.83. $y = \ln(x^2 - 2x + 1)$

6.84. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x}$

6.85. $y = \sqrt{\sin^3 x}$

6.86. $y = \frac{1}{\cos^2 x}$

6.87. $y = \frac{1}{\sqrt{\ln x}}$

6.88. $y = e^{-x^2}$

6.89. $y = \log_3(x+3)$

6.90. $y = \lg(x^2 - 1)$

6.91. $y = x^4 \cdot \mathrm{sh}\,x$

6.92. $y = x \cdot \mathrm{ch}^4(x)$

6.93. $y = x \cdot \mathrm{th}\,x$

6.94. $y = \mathrm{tg}\,x^2$

6.95. $y = \sin^2(x^3 - 1)$

6.96. $y = \sqrt{\cos x + x}$

6.97. $y = \sqrt{\cos x}$

6.98. $y = \ln(\sin x)$

6.99. $y = \sin(\ln x)$

6.100. $y = \mathrm{arctg}\,e^x$

6.101. $y = \mathrm{arctg}\sqrt{x^3}$

6.102. $y = \mathrm{tg}\,e^{-x}$

6.103. $y = \ln(x^3 \sin x)$

6.104. $y = \sin x \cdot \ln(\sin x)$

6.105. $y = 3^x + x^3 + 3$

6.106. $y = 3^{\sin x} + \sin^3 x$

6.107. $y = \sin\left(x^{-\frac{2}{3}} + \ln x\right)$ 6.108. $y = x^x$ 6.109. $y = \cos^x x$

6.110. $y = \sqrt[x]{x}$ 6.111. $y = x^{\ln x}$ 6.112. $y = \ln^x x$

6.113. $y = x^{\cos x}$ 6.114. $y = \mathrm{tg}^x x$

В задачах 6.115 – 6.120 знайти похідну другого порядку.

6.115. $y = \mathrm{tg}\, x$ 6.116. $y = \ln x$ 6.117. $y = \arcsin x$

6.118. $y = \mathrm{arctg}\, x$ 6.119. $y = x \cdot e^{-x}$ 6.120. $y = x^2 \cdot \sin x$

В задачах 6.121 – 6.126 з точністю до однієї сотої обчислити похідну в точці x_0

6.121. $y = \ln(x^2 + 1)\,, x_0 = 6$ 6.122. $y = \ln(\sin x)\,, x_0 = \frac{\pi}{4}$

6.123. $y = \arcsin x\,, x_0 = 0{,}6$ 6.124. $2y = \mathrm{arctg}\, x\,, x_0 = 2$

6.125. $y = x \cdot e^{-x}, x_0 = 1{,}5$ 6.126. $y = x^2 \cdot \sin x\;, x_0 = \frac{\pi}{6}$

В задачах 6.127 – 6.144 знайти повний диференціал функції $z = f(x, y)$.

6.127. $z = x^{-y} + x^{\ln 2}$ 6.128. $z = \mathrm{arctg}\frac{x}{y}$

6.129. $z = \sqrt[3]{\cos(x^2 - y^2)}$ 6.130. $z = x \cdot \exp(-xy^2)$

6.131. $z = \frac{\sin x}{\sin y}$ 6.132. $z = e^{-3x} \cdot \sin(2y)$

6.133. $z = x^3 + x^2y + xy^2 + 3$ 6.134. $z = e^{-x} \cdot \mathrm{ch}\sqrt{y}$

6.135. $z = \sin^x y$ 6.136. $z = \sqrt[y]{\mathrm{arctg}\, x}$

6.137. $z = \frac{1}{\sqrt[4]{x+y^2}}$ 6.138. $z = \ln(\sin(x - y))$

6.139. $z = \arcsin\sqrt{x^2 - y^2}$ 6.140. $z = \sqrt[y]{x^3}$

6.141. $z = \sin^2(x + y)$ 6.142. $z = \sqrt{x} + 2\sqrt[3]{y^2} - xy^3$

6.143. $z = \frac{xy}{x-y}$ 6.144. $z = x \cdot \mathrm{tg}\, y$

В задачах 6.145 – 6.156 знайти похідні другого порядку $\frac{d^2y}{dx^2}$.

6.145. $y^2 = 8x - y$

6.146. $y = x + arctg\ y$

6.147. $y^2 = 25x - 4y$

6.148. $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$

6.149. $3x + \sin y = 5y$

6.150. $\operatorname{tg} y = 3x + 5y$

6.151. $\begin{cases} x = (2t+3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$

6.152. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

6.153. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln t \end{cases}$

6.154. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

6.155. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

6.156. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

Контрольні питання

1. Що таке похідна функції?
2. У чому полягає зміст похідної функції?
3. Якими загальноприйнятими способами можна позначати похідну функції?
4. Як позначається диференціал функції?
5. За допомогою, якої формули можна знайти диференціал функції?
6. Чому дорівнює похідна від суми функцій?
7. Чому дорівнює похідна від множення двох функцій?
8. Чому дорівнює похідна від відношення двох функцій?
9. Чому дорівнює похідна складної функції?
10. Що таке похідна від функції n-го порядку?
11. Що таке диференціал функції n-го порядку?
12. Якими способами можна позначити похідну від функції n-го порядку?
13. Нехай знаходиться частинна похідна функції f по змінній x_i. Яким чином необхідно поводитися з іншими змінними?
14. Скільки частинних похідних першого порядку має функція $f(x_1, x_2, x_3)$?
15. Як можна позначати частинні похідні
16. Що таке повний диференціал функції?
17. Як позначаються частинні похідні вище першого порядку?
18. Теорема Шварца?

6.5. Застосування диференціального числення

Дослідження функції

Зростання і спадання функції

Дуже важливу інформацію про поведінку функції надають проміжки зростання та спадання. Їх знаходження є частиною процесу дослідження функції та побудови графіка, які потрібні для оптимізації будь-якого процесу.

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a, b), якщо при зростанні аргументу x в цьому інтервалі відповідні значення функції $f(x)$ збільшуються, тобто $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нестрога нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$, то функція $f(x)$ називається *не спадаючою* на інтервалі (a, b).

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається *спадаючою* в інтервалі (a, b), якщо при зростанні аргументу x на цьому інтервалі відповідні значення функції $f(x)$ зменшуються, тобто $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нестрога нерівність $f(x_2) \leq f(x_1)$, то функція $f(x)$ називається *не зростаючою* в інтервалі (a, b).

Зауваження: якщо функція визначена і неперервна на кінцях інтервалу зростання або спадання (a, b), тобто при $x = a$ і $x = b$, то ці точки включаються в проміжок зростання або спадання. Це не суперечить означенням зростаючої та спадаючої функції на проміжку X.

Зростання і спадання функції є окремим випадком монотонності функції.

Означення 3. Монотонна функція – це функція, приріст якої не змінює знак, тобто або завжди невід’ємне, або завжди недодатне. Якщо приріст не дорівнює нулю, то функція називається *строго монотонною*.

Теорема 1. Критерій монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, в інтервалі (a, b) функція $f(x)$:

Не зростає на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли функція $f(x)$ має в усіх точках цього інтервалу недодатну похідну $f'(x) \leq 0$;

Не спадає на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли функція $f(x)$ має в усіх точках цього інтервалу невід'ємну похідну $f'(x) \geq 0$.

Теорема 2. Достатня умова строгої монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, якщо для будь-якого x з інтервалу (a, b):

$f'(x) > 0$, то $f(x)$ *строго зростає.*

$f'(x) < 0$, то $f(x)$ *строго спадає.*

Опуклість і угнутість функції

Означення. Функція $y = f(x)$, що визначена і неперервна на інтервалі (a, b) називається *опуклою* в інтервалі (a, b), якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з інтервалу (a, b) і будь-якого числа $t = 0 \dots 1$ виконується нерівність Йєнсена:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ при } x_1 \neq x_2$$

Якщо функція *угнута*, то знак нерівності змінюється на протилежний:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ при } x_1 \neq x_2$$

Якщо ці нерівності є строгими для всіх $t \in (0, 1)$, то функція називається *строго опуклою* (*угнутою*).

Іноді опуклу функцію називають опуклою вниз, а увігнуту – опуклою вгору.

Геометрична інтерпретація: З нерівностей, зазначених в означеннях випливає, що графік опуклою функції ніде не лежить нижче дотичній, проведеної до кривої. Відповідно для увігнутої функції графік не лежить над дотичної.

Умови опуклості й увігнутості функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має другу похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, в інтервалі (a, b) функція $f(x)$:

Опукла в інтервалі (a, b), тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \geq 0$;

Угнута в інтервалі (a, b), тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \leq 0$.

Екстремуми функції

Означення 1. Екстремум (*extremum* – крайній) максимальне або мінімальне значення функції на заданій множині. Точка, в якій досягається екстремум, називається точкою екстремуму. Відповідно, якщо досягається мінімум – точка екстремуму називається точкою мінімуму, а якщо максимум – точкою максимуму. В математичному аналізі виділяють також поняття локальний екстремум, відповідно мінімум та максимум.

Означення 2. Точка x_0 називається *точкою мінімуму функції* $f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

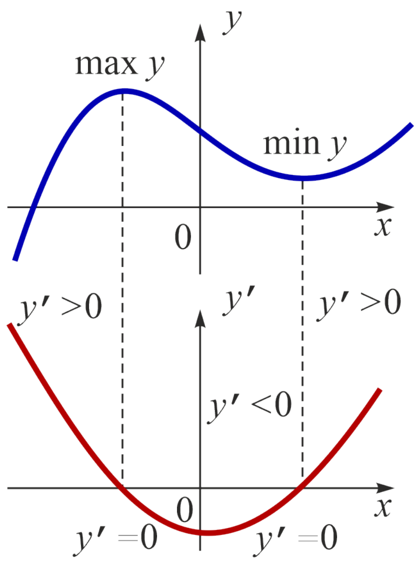


Рис. 6.14. Ілюстрація максимуму і мінімуму функції, якщо $y' = 0$.

Означення 3. Точка x_0 називається *точкою максимуму функції* $f(x)$, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$.

Теорема 1. Необхідна умова екстремуму

Для того щоб функція $f(x)$ мала екстремум в $x = x_0$, в якій функція визначена необхідно, щоб $f'(x_0) = 0$ (рисунок 6.14) або $f'(x_0)$ не існує (рисунок 6.15).

Точки, де $f'(x_0) = 0$ називаються *стаціонарними*, а де $f'(x_0)$ не існує – *критичними.*

Теорема 2. Достатня умова екстремуму

1. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі, що містить стаціонарні або критичну точку x_0, і має похідні у всіх точках цього проміжку, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо при переході в напрямку осі Ox через стаціонарну або критичну точку похідна $f'(x)$ змінює знак:

- З «плюса» на «мінус», то в цій точці функція має *максимум*;
- З «мінуса» на «плюс», то в цій точці функція має *мінімум*;
- Якщо зміни знаку похідної $f'(x)$ не відбувається, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

2. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі, що містить критичну точку x_0, і має похідні у всіх точках цього проміжку, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо

- $f''(x_0) < 0$, то в цій точці функція має *максимум*;
- $f''(x_0) > 0$, то в цій точці функція має *мінімум*.

Точки перегину кривої функції

Означення. Нехай функція $f(x)$ диференційована в деякому околу точці x_0. Функція $f(x)$ має точку перегину x_0, якщо в цій точці змінюється напрям опуклості (опуклість змінюється на увігнутість)

Геометрична інтерпретація. Якщо функція $f(x)$ має точку перегину в x_0, то графік функції $f(x)$ в цій точці «перегинається» через дотичну до нього в цій точці, тобто в деякому околу точки x_0 крива при $x < x_0$ і при $x > x_0$ лежить по різні сторони від дотичній.

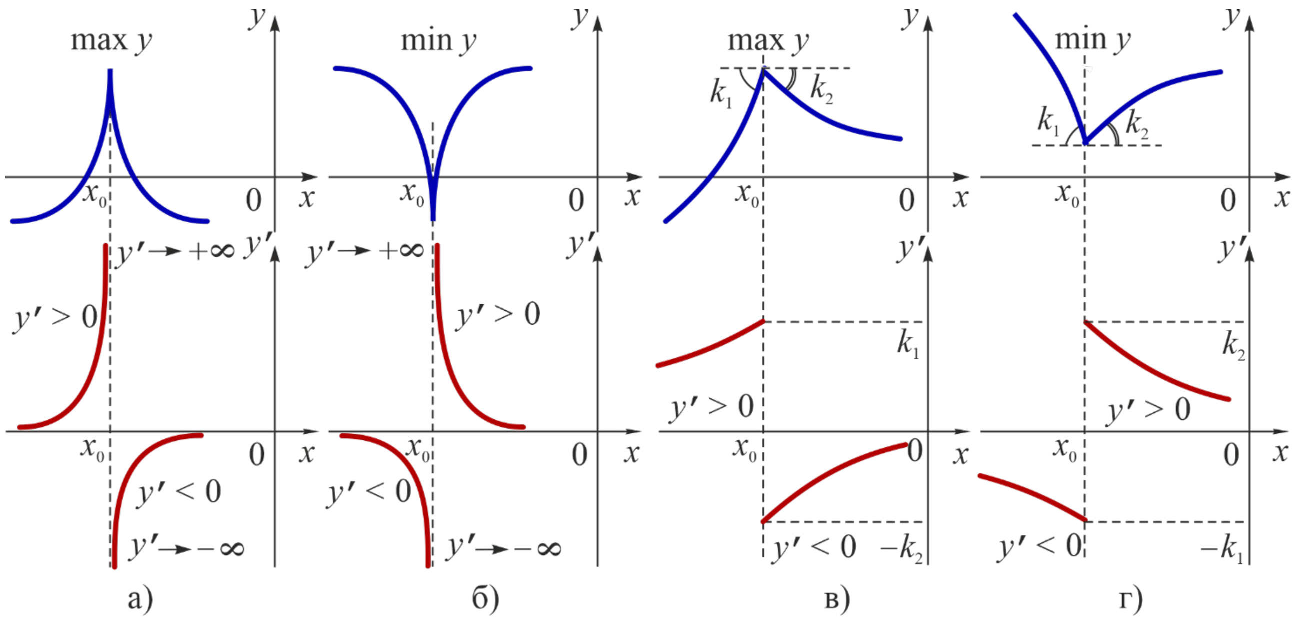


Рис. 6.15. Ілюстрація максимуму і мінімуму функції, якщо y' не існує

Загальна умова. Нехай функція $f(x)$, яка диференційована в деякому околу точці x_0. Функція $f(x)$ має в точці x_0 точку перегину тоді і тільки тоді, коли похідна функції $f'(x_0)$ має в точці x_0 локальний екстремум

Необхідна умова. Якщо функція $f(x)$, двічі диференційована в околі точці x_0 має в ній точку перегину, то $f''(x_0) = 0$ (рис. 6.16 а, б) або не існує (рис. 6.16в)

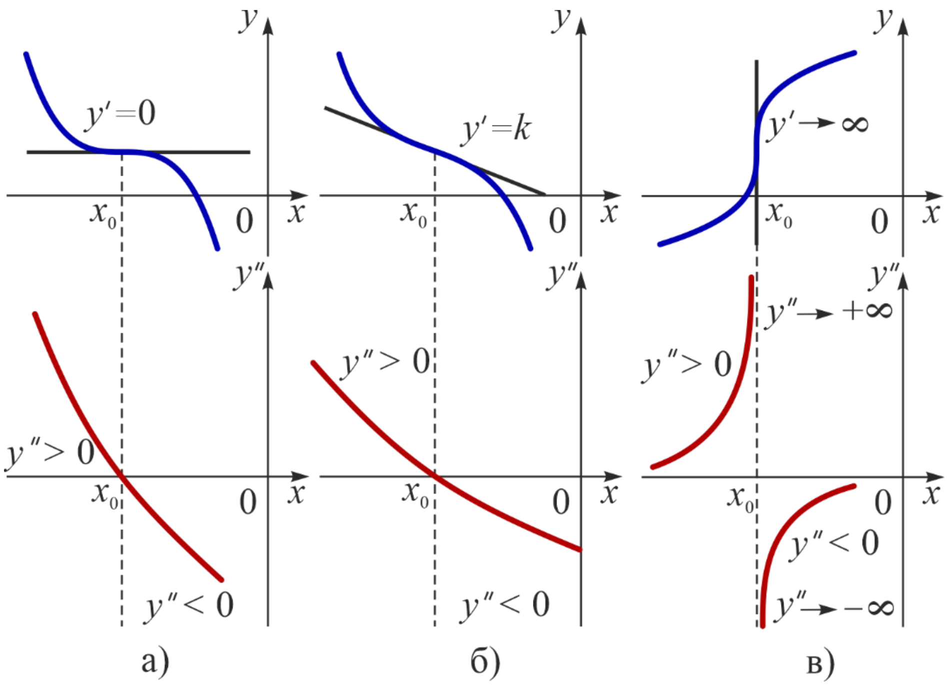


Рис. 6.16. Ілюстрація точок перегину функції

Достатні умови.

Умова 1. Якщо функція $f(x)$, двічі диференційована в околі точці x_0 і має $f''(x_0) = 0$ або $f''(x)$ не існує і в x_0, $f''(x)$ змінює свій знак, то x_0 – точка перегину.

Умова 2. Якщо функція $f(x)$ в околі точці x_0 k разів диференційована причому k – не парно, $k \geq 3$ і $f^{(i)}(x_0) \ = \ 0$ при $i = 2, 3, \dots, k-1$, а $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегину.

Асимптоти функції

Асимптота (від грецької Ασΰμπτωτος – неспівпадаючий, недотична) кривої з нескінченною гілкою – пряма, яка має таку властивість, що відстань від точки кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки на нескінченність.

Види асимптот.

Вертикальна асимптота – пряма $x = a$ при умові існування границі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

При визначенні вертикальної асимптоти шукають не одну границю, а дві однобічних (ліву і праву) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Це робиться з метою визначити, як функція поводиться з наближенням до вертикальної асимптоти з різних боків. При цьому треба звертати увагу на знак нескінченності.

Горизонтальна асимптота – пряма $y = a$ при умові існування границі $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.

Похила асимптота – пряма $y = kx + b$ при умові існування границь $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ і $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$.

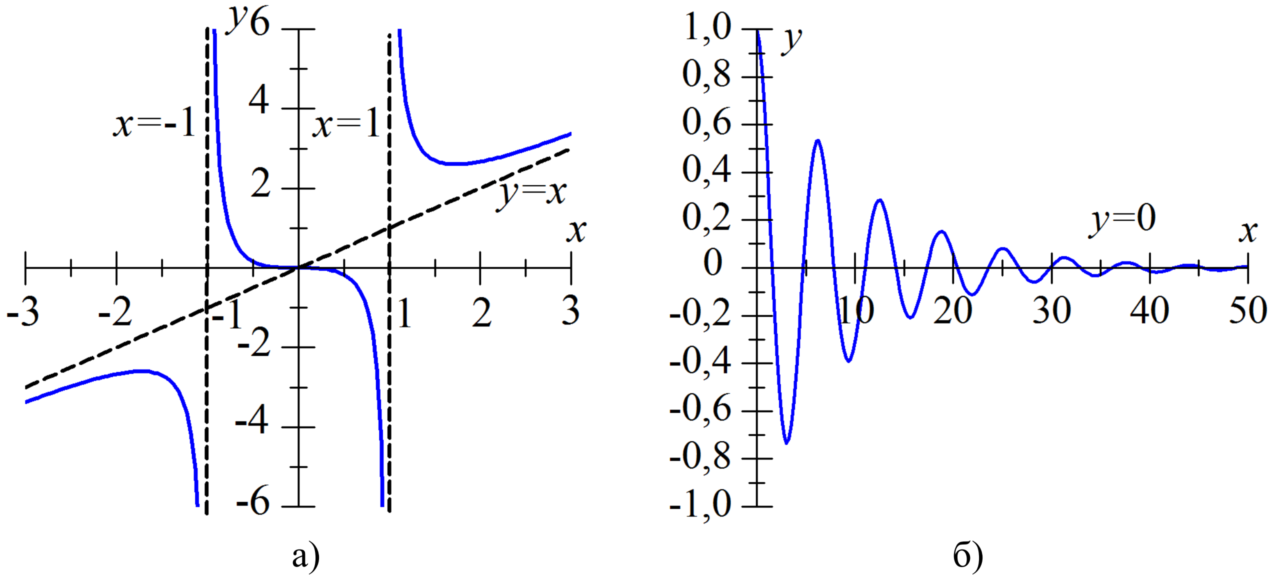


Рис. 6.17. Приклади асимптот: а) дві вертикальні асимптоти $x = \pm 1$ і похила асимптота функції $y = \frac{x^3}{x^2-1}$; б) горизонтальна асимптота $y = 0$ функції $y = e^{-0,1x}\cos x$.

Зауваження 1. Функція може мати не більше двох похилих (горизонтальних) асимптот.

Зауваження 2. Якщо хоча б одна з двох згаданих вище границь не існує (або дорівнює ∞), то похилої асимптоти не існує.

Зауваження 3. Горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої при $k = 0$

Функція має або тільки одну похилу асимптоту, або одну вертикальну асимптоту, або одну похилу і одну вертикальну, або дві похилих, або дві вертикальних, або ж зовсім не має асимптот.

Екстремум функцій декількох змінних

Нехай функція декількох змінних $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області і $M_0(x_{01}, x_{02},\ldots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області.

Означення 1. Точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо для всіх точок M з деякого околу точки M_0 виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Максимуми і мінімуми об'єднують в загальне поняття екстремум. Для функцій декількох змінних відрізняють *локальний і умовний екстремуми*. Слово локальний підкреслює, що мова йде про екстремумі функції в досить малому околу розглянутої точки.

Означення 2. Нехай функція декількох змінних $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області. Точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області і має місце рівняння зв'язку – $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \dots, m$. Точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ називається *точкою умовного екстремуму* функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ відносно рівнянь зв'язку, якщо вона є точкою звичайного екстремуму $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Необхідна умова екстремуму функції декількох змінних

Якщо функція задана і диференційована в області D та має екстремум в будь-якій її точці $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, то всі частинні похідні першого порядку даної функції в цій точці (якщо вони існують) дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = 0, i = 1,2,\dots,n \Leftrightarrow df(M_0) = 0$$

Наслідок. Необхідну умову екстремуму можна сформулювати в наступному вигляді: якщо в деякій точці функція має екстремум, то повний диференціал цієї функції, обчислений у зазначеній точці, дорівнює нулю.

Зауваження. Функція може мати екстремум і в тих точках, в яких принаймні одна з частинних похідних не існує.

Означення 3. Точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$, в якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, називається *стаціонарною точкою.*

Приклад 1. Функція $z = x \cdot y$ (гіперболічний параболоїд) має стаціонарну точку $M_0(0, 0, 0)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0 \ \text{ і } \ \frac{\partial z}{\partial y} = x = 0.$$

Однак екстремуму в цій точці немає, оскільки в довільному околі точки M_0 функція $z = x \cdot y$ приймає як додатні, так і від'ємні значення, і значить, значення функції у цій точці не є ні найбільшим, ні найменшим значенням у жодному околі точки (рис. 6.18). Така точка називається сідловою.

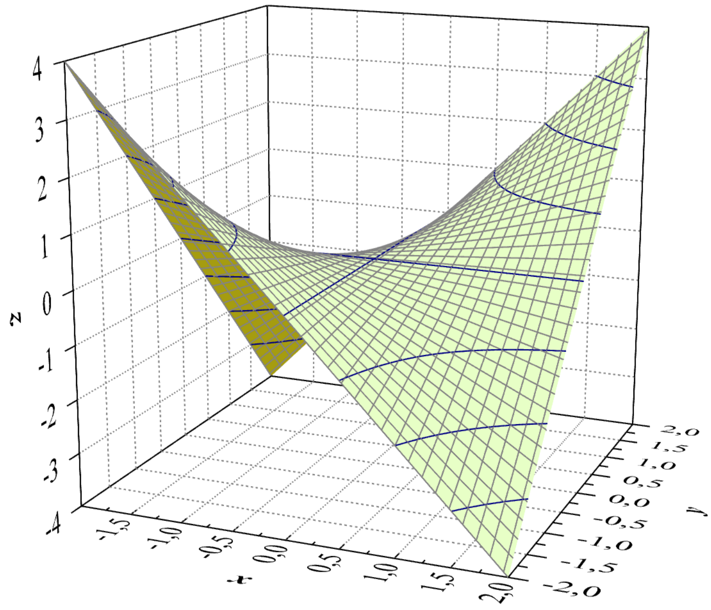


Рис. 6.18. Поверхня гіперболічного параболоїда $z = x \cdot y$

Геометричний зміст екстремуму функції двох змінних.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці M_0 і має в цій точці екстремум, то дотична площина до поверхні

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

в стаціонарній точці набирає такого вигляду: $z = z_0$. Це означає, що дотична площина паралельна площині xOy незалежних змінних x і y

Якщо M_0 є точка екстремуму, то дотична площина у деякому околі точки дотику не перетинає поверхню, а лежить над нею (у випадку максимуму), або під нею (у випадку мінімуму). Якщо ж стаціонарна точка M_0 не є точкою екстремуму, то дотична площина в околі точки дотику може перетинати поверхню.

Означення 4. Точки, в яких функція недиференційована називаються *критичними точками.*

Зауваження. Достатня умова екстремуму функції застосовує термін визначник матриці Гессе та квадратична форма. Матриця, її визначник та квадратична форма детально розглядаються в алгебрі. Цей розділ математики розглянуто в першій частині посібника. Достатню умову екстремуму функцій буде дано в спрощеному вигляді.

Достатні умови існування екстремуму функції декількох змінних

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ визначена, неперервна має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в околі стаціонарної точки $M_0(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$. Тоді, якщо квадратична форма

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=j-1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j.$$

тобто другий диференціал функції f в точці M_0 виявляється:

Додатновизначеною квадратичною формою, тобто більше 0 при будь яких значеннях змінних, то точка M_0 є точкою *строгого мінімуму*;

Від'ємновизначеною квадратичною формою, тобто менше 0 при будь яких значеннях змінних, то точка M_0 є точкою *строгого максимуму*;

Невизначеною квадратичною формою, то в точці M_0 *немає екстремуму*.

Для функції двох змінних цей критерій приймає наступний вигляд.

Достатня умова екстремуму функції двох змінних $z = f(x, y)$:

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$ та

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2.$$

Тоді, якщо:

$\Delta > 0$ і $\dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} > 0,$ то точка M_0 є точкою *строгого мінімуму*;

$\Delta > 0$ і $\dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} < 0,$ то точка M_0 є точкою *строгого максимуму*;

$\Delta < 0,$ то точка M_0 *не є екстремумом*;

$\Delta = 0,$ то питання про екстремум є невизначеним.

В останньому випадку треба проводити додаткові дослідження знаку $d^2 f(M_0)$.

Умовний екстремум функції відносно рівняння зв'язку

Нехай функція декількох змінних $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області, точка $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області і має місце рівняння зв'язку – $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m.$

Принцип множників Лагранжа. Для знаходження локального екстремуму шукають локальний екстремум *функції Лагранжа*:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Умовний екстремум співпадає з локальним екстремумом функції Лагранжа.

Похибки непрямих вимірювань

У науковій літературі існує декілька близьких за значенням термінів – точність, похибка, помилка. У сучасній літературі використовують більше термін *помилка* (в англомовній літературі – *error*). Питанню точності або помилок приділяється дуже велика увага. Тут розглянуто лише невелика грань загальної проблеми.

У більшості експериментів використовують непрямі вимірювання. Величину f (відгук), що досліджують, обчислюють за результатами прямих вимірювань інших фізичних величин (факторів), наприклад, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, з якими вона пов'язана заздалегідь встановленим функціональним математичним співвідношенням. Помилки прямих вимірювань Δx_i – вважаються відомими.

Існують чотири джерела помилок результату:

1. Помилки математичної моделі, які пов'язані з її невідповідністю до реальності, так як абсолютна істина недосяжна. Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то, які б методи ми не застосовували для розрахунку, всі результати будуть недостатньо надійними, а в деяких випадках і зовсім неправильними.

2. Помилки вихідних даних, прийнятих для розрахунку. Це невиправна помилка, але цю помилку можливо і необхідно оцінити для вибору алгоритму розрахунку і точності обчислень. Помилки експерименту умовно ділять на систематичні, випадкові і грубі, а ідентифікація таких помилок можлива при статистичному аналізу результатів експерименту.

3. Помилки методу засновані на дискретному характері будь-якого числового алгоритму. Це значить, що замість точного розв'язку вихідної задачі метод знаходить розв'язок іншої задачі, близького в якомусь сенсі до шуканого. Помилки методу – основна характеристика будь-якого числового алгоритму. Помилка методу повинна бути в 2-5 разів менше помилки, яку неможна усунути.

4. Помилка округлення пов'язана з використанням чисел з кінцевою точністю подання.

У всіх випадках математична точність розв'язання повинна бути в 2-4 рази вищою, ніж очікувана фізична точність моделі. Більш висока математична точність, як і нижча, будуть неадекватні даної моделі.

Точність – ступінь наближення істинного значення параметра до його номінального значення.

Помилка – невідповідність між об'єктом, прийнятим за еталон, і об'єктом, що досліджується.

Похибка – оцінка відхилення виміряного (обчислюваного) значення параметра від її істинного значення. Похибка є характеристикою точності.

Виділяють *абсолютну і відносну похибку*.

Абсолютною похибкою наближеного значення x називається модуль різниці між числом x і його точним значенням a: $\Delta_a = |x - a|$

Якщо число a невідоме, то абсолютну похибку обчислити не можливо. В цьому випадку використовується *гранична абсолютна похибка* – таке додатне число Δ, що $x - \Delta \leq \ a \leq x + \Delta$. Останню нерівність записують так $a = x \pm \Delta$.

Відносною похибкою δ_a наближеного значення *x* називається відношення абсолютної похибки Δ_a цього значення до модуля точного значення a: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|}$

Якщо точне значення a невідоме, то використовують *граничну відносну похибку* – таке додатне число δ, що $\delta_a \le \delta$.

Для обчислення відносних похибок часто використовуються наближені формули $\delta \approx \frac{\Delta}{|x|}$.

Непрямі вимірювання

Нехай функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ декількох змінних визначена в деякій замкнутій області і A внутрішня точка цієї області. Похибки прямих вимірювань кожної координати $\Delta x_i, i = 1,2, \dots, n$ цієї точки вважаються відомими.

Тоді, *гранична абсолютна похибка обчислюється* за формулою:

$$\Delta f(A) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_A \right| \Delta x_i.$$

Використовуючи цю формулу можна отримати загальну формулу для *граничної відносної похибки*:

$$\delta(A) = \frac{\Delta f(A)}{f(A)} = \frac{1}{f(A)} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_A \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln f}{\partial x_i}\bigg|_A \right| \Delta x_i$$

Апроксимація функції. Формула Тейлора.

При розв’язуванні багатьох практичних і теоретичних задач використовують заміну або апроксимацію однієї функції іншою функцією, яка є близькою в певному розумінні до функції.

Апроксимація (approximare – наближати) – наближене вираження одних математичних об'єктів іншими, простішими.

В цьому підрозділі розглядається апроксимація неперервних функцій степеневими многочленами. Слід зауважити, що існує багато інших методів апроксимації, екстраполяції та інтерполяції функції.

Диференціювання дозволяє наближено обчислювати значення функцій за допомогою полінома степеневих функцій, який називають формулою Тейлора і її частинний випадок – формула Маклорена. Формула Тейлора названа на честь англійського математика Брука Тейлора, хоча вона була відома задовго до публікацій Тейлора – його використовували ще в XVII столітті Грегорі, а також Ньютон.

Формула Тейлора використовується при доказі великого числа теорем в диференціальному численні і показує поведінку функції в околі деякої точки.

Формула Тейлора функції однієї змінної

Нехай функція $f(x)$ диференційована n+1 раз в інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ ($R > 0$). Тоді для всіх $x \in (x_0 - \alpha;\ x_0 + \alpha)$ має місце формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x)$$

де $r_n(x)$ – залишковий член, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$ – факторіал $(0! = 1)$.

Залишковий член визначає точність формули і записується різними способами. Можна запропонувати:

Форму Лагранжа $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x-\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1;$

Форму Коші $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x-\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n(x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1$

Чим ближче x знаходиться до x_0 тим точніше виходить результат обчислення значення функції.

Якщо $x_0 = 0$, то отримуємо формулу Маклорена.

Розкладання елементарних функцій за допомоги формули Маклорена можна знайти в підрозділі 9.2

Обчислення границь функції. Правило Бернуллі – Лопіталя

Правило Бернуллі-Лопіталя – метод знаходження границь функцій, для невизначеності виду 0/0 і ∞/∞ складається з двох теорем, які сформулюємо разом. Нехай

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ або

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty, \ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$, тоді

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Дотична і нормаль

Дотична до кривої в даній точці – пряма лінією, яка «просто торкається» кривої в цій точці. Її можна визначити, як пряму, що проходить через пару нескінченно близьких точок на кривій.

Нормаль до кривої в даній точці – це пряма, яка перпендикулярна дотичної.

Дотична і нормаль до плоскої лінії

Нехай лінія на площині xOy задана неперервною функцією $y = f(x)$, і $M(x_0, y_0)$ – точка на цієї лінії.

Рівняння дотичної до лінії в точці $M(x_0; y_0)$:

$$y_\tau - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Рівняння нормалі до лінії в точці $M(x_0; y_0)$:

$$y_n - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \text{якщо } f'(x_0) \neq 0;$$

$$f'(x_0) = 0, \text{якщо } \; x_n = x_0$$

Дотична і нормаль до просторової лінії

Розглянемо регулярну лінію, заданою параметрично $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, $t_1 \leq t \leq t_2$. Нехай умова $\dot{\boldsymbol{r}}(t) \neq 0$ виконується в будь-якій точці проміжку $t_1 \leq t \leq t_2$. Також нехай точка $M(x_0, y_0, z_0)$ належіть кривої при значенні параметра t_0. Тобто $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0), t_1 \leq t_0 \leq t_2$.

Вектор $\dot{\boldsymbol{r}}(t)$ має напрямок дотичної до кривої, тому *рівняння дотичної* до кривої в точці $M(x_0, y_0, z_0)$ має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z_0}{\dot{z}(t_0)}.$$

Нормаллю до просторової кривої називається перпендикуляр до дотичної, що проведений через точку дотику. Очевидно, у фіксованій точці кривої можна побудувати безліч нормалей. Всі вони заповнюють площину, що проходить через точку дотику перпендикулярно до дотичної і називається *нормальною площиною.*

Рівняння нормальної площини кривої в точці $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) + \dot{z}(t_0)(z - z_0) = 0$$

Дотична і нормаль до поверхні

Нехай поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і $M(x_0, y_0, z_0)$ точка на цієї поверхні. Також нехай існують частинні похідні F в точці M.

Рівняння нормалі до поверхні в точці $M(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M} = \frac{z - z_0}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M}.$$

Рівняння дотичної площини до поверхні в точці $M(x_0; y_0; z_0)$:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_M (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_M (z - z_0) = 0.$$

Нормальний вектор до поверхні:

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}^T.$$

Особлива точка поверхні – це точка в якій $F = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \frac{\partial F}{\partial z} = 0$. В такій точці нема дотичної та нормалі до поверхні.

Кривизна плоскої кривої

Інтуїтивно зрозуміло, що кривизна – це величина, на яку крива відхиляється від прямої лінії або поверхня відхиляється від площини. Для прямої кривизна дорівнює нулю. Для кривих канонічним прикладом є коло з радіусом R, кривизна якого дорівнює $1/R$.

Якщо позначити $\alpha(M)$ – кут між додатним напрямком осі Ox і дотичною в точці M, то кривизна K кривої в точці M:

$$K = \lim_{N \to M} \frac{\alpha(N) - \alpha(M)}{\left|\widetilde{MN}\right|},$$

де $\left|\widetilde{MN}\right|$ – довжина дуги кривої між точками M і N. Для плоскої кривої, яка задана на площині xOy неперервною функцією $y = f(x)$ або параметрично $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$:

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}.$$

Приклади на застосування диференціального числення

Задача 1

Дослідити функцію $y = 2x^4 - x^2 + 1$ на екстремум і точки перегину.

Розв'язання

Для того, щоб дослідити функцію на екстремум прирівняємо першу похідну до нуля:

$$y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 0.$$

Отримаємо такі корені рівняння: $x_1 = 0$ і $x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$.

Точок, в яких y' не існує, немає.

Перша похідна функції $y' < 0$ в проміжках $x \in (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$ та $y' > 0$ в проміжках $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Функція y має мінімум при $x = -\frac{1}{2}$ і $x = \frac{1}{2}$. Відповідно, $\min y\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$, $\min y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$. Максимум функція має при $x = 0$: $\max y(0) = 1$.

Для того щоб знайти точку перегину треба знайдемо похідну другого порядку y'' та прирівняємо її нулю:

$$y'' = 24x^2 - 2 = 2(12x^2 - 1);$$

$$2(12x^2 - 1) = 0;$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

В цих точках друга похідна функція змінює свій знак. В інтервалах $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; +\infty\right)$ $y'' > 0$, а в $x \in \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ $y'' < 0$. Тому точки перегину є $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Таким чином, точки з координатами $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{67}{72}\right)$ і $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{67}{72}\right)$– точки перегину кривої.

Відповідь: Точки з координатами $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right)$ і $\left(\frac{1}{2}; \frac{7}{8}\right)$ – точки мінімуму; точка з координатами $(0; 1)$ – точка максимуму; точки з координатами $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{67}{72}\right)$ і $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}; \frac{67}{72}\right)$ – точки перегину кривої.

Задача 2

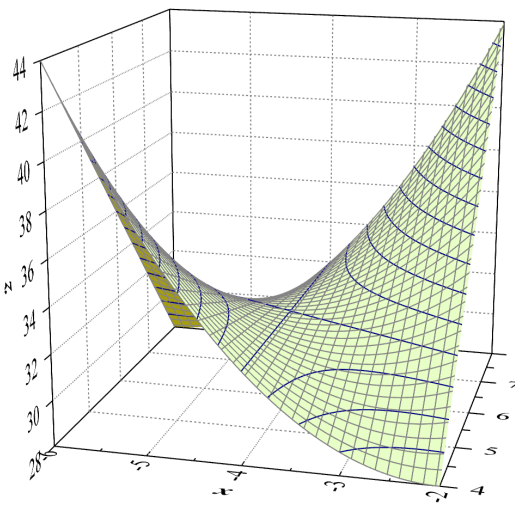
Знайти екстремум функції двох змінних: $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні від заданої функції:

$$z'_x = 2x + 2y - 4;$$

$$z'_y = 2x + 8.$$



Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_x = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x = -8 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = 6. \end{cases}$$

Таким чином, стаціонарною точкою буде точка з координатами $x = -4$ та $y = 6$. Щоб з'ясувати чи буде стаціонарна точка екстремумом перевіримо достатню умову екстремуму. Для цього спочатку знайдемо похідні другого порядку в стаціонарній точці:

$$z''_{xx} = 2, \quad z''_{yy} = 0, \quad z''_{xy} = 2.$$

Обчислимо визначник Гессе:

$$\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0.$$

Так як $\Delta < 0$, то стаціонарна точка не є екстремумом. Отже, функція $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ немає екстремумів.

Відповідь: Функція z немає екстремумів.

Задача 3

Дослідити на екстремум функцію $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні:

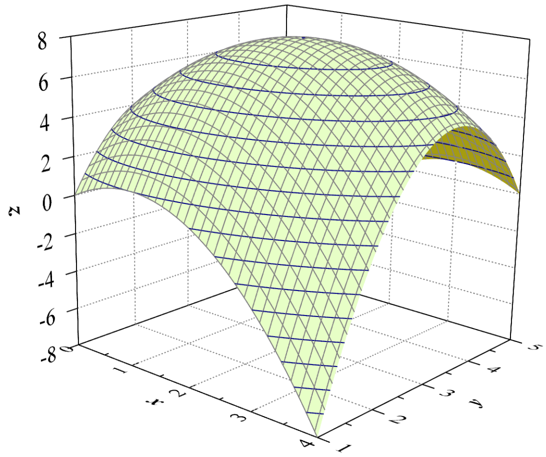
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10.$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 4y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3. \end{cases}$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:



$$z''_{xx} = -2, \qquad z''_{xy} = 1, \qquad z''_{yy} = -4.$$

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам у будь-який точці. Обчислимо визначник Гессе:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0.$$

Так як $\Delta > 0$ і $z''_{xx} = -2 < 0$, то точка відповідає умові максимуму. Обчислимо значення функції:

$$z(2; 3) = 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8.$$

Відповідь: Таким чином, в точці $M(2;\ 3;\ 8)$ функція z має максимум.

Задача 4

Знайти асимптоти кривої, що задана рівнянням $y = \frac{2x}{x-1}$.

Розв'язання.

Знайдемо похили та горизонтальні асимптоти $y_a = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(x-1)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) \ = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{(x-1)} = 2.$$

Таким чином, крива має горизонтальну асимптоту $y_a = 2$.

Щоб знайти вертикальну асимптоту, обчислимо границю в точці, в якої знаменник функції дорівнює 0, тобто при $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{(x-1)} = \infty.$$

Границя функції в точці прямує до нескінченності. Точка $x = 1$ є точкою нескінченного розриву. Таким чином, $x_a = 1$ – вертикальна асимптота.

Відповідь: функція має дві асимптоти, а саме $x_a = 1$ – вертикальна асимптота та $y_a = 2$ – горизонтальна асимптота.

Задача 5

Використовуючи правило Лопіталя, знайти: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$.

Розв'язання

Чисельник і знаменник функції при $x = 2$ дорівнюють нулю. Тобто маємо невизначеність 0/0, для якої можна використовувати правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = \lim_{x\to 2}\frac{(8-2x^2)'}{(x^2+4x-12)'} = \lim_{x\to 2}\frac{-4x}{2x+4} = \frac{-4\cdot 2}{2\cdot 2+4} = \frac{-8}{8} = -1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = -1$.

Задача 6

Знайти максимальну абсолютну і відносну похибку роботи, здійсненою струмом силою $I = 10{,}23 \pm 0{,}015$ А, який пройшов через опір $r = 11{,}68 \pm 0{,}01$ Ом за час $t = 405{,}2 \pm 0{,}1$ с. Робота визначається, як $A = I^2 \cdot r \cdot t$.

Розв'язання

Максимальна абсолютна похибка:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial I}\right|\Delta I + \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right|\Delta r + \left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\Delta t = 2Irt\Delta I + I^2 t\Delta r + I^2 r\Delta t;$$

$$\Delta A = 2\cdot 10{,}23\cdot 11{,}68\cdot 405{,}2\cdot 0{,}015 + 10{,}23^2\cdot 405{,}2\cdot 0{,}01 +$$
$$+10{,}23^2\cdot 11{,}68\cdot 0{,}1 = 199{,}8 \text{ Дж}.$$

Максимальна відносна похибка:

$$\varepsilon = \frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta t}{t};$$

$$\varepsilon = 2\frac{0{,}015}{10{,}23} + \frac{0{,}01}{11{,}68} + \frac{0{,}1}{405{,}2} = 0{,}0041.$$

Відповідь: $\Delta A = 199{,}8$ Дж – максимальна абсолютна похибка; $\varepsilon = 0{,}4\%$ – максимальна відносна похибка.

Задача 7

За допомогою формули Маклорена обчислити число e з точністю до 0,001.

Розв'язання

Щоб знайти експоненту треба обчислити функцію

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ при } x = 1.$$

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2 + \frac{360 + 120 + 30 + 6}{720} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2 + 0{,}7166\ldots + 0{,}01388\ldots$$

$$= 2{,}718055 \ldots$$

Знайдемо залишковий член за формою Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x + \theta(x - x_0)\big)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Нехай $\theta = 0{,}5$. Необхідно обчислити R при $n = 6, x = 1$ і $x0 = 0$.

$$R_6(1) = \frac{f^{(7)}(1{,}5)}{7!} = \frac{e^{1{,}5}}{5040} = 8{,}89 \cdot 10^{-4} < 0{,}001.$$

Відповідь: Таким чином, *e* ≈ 2,718. Це значення можна порівняти з більш точним значенням *e* ≈ 2,7182818284590452

Задача 8

Обчислити $\ln 0{,}9$ використав три перших додатка формули Маклорена.

Розв'язання

$$\ln 0{,}9 = \ln(1 - 0{,}1);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n};$$

$$\ln(1 - x) = \ln(1 + (-x)) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n};$$

$$\ln 0{,}9 = \ln(1 - 0{,}1) = -10^{-1} - \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-3}}{3} - \ldots \approx -0{,}1053(3).$$

Відповідь: $\ln 0{,}9 \approx -0{,}1053(3)$. Це значення можна порівняти з більш точним значенням $\ln 0{,}9 \approx -0{,}1053605156$.

Задачі на застосування диференціального числення

Визначити: а) екстремум; б) точки перегину.

6.157. $y = 2 + x - x^2$.

6.158. $y = \frac{e^x}{x}$.

6.159. $y = xe^x$.

6.160. $y = \frac{(8-x)(x-2)}{x^2}$.

6.161. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

6.162. $y = 16\frac{4-x^2}{x}$.

6.163. $y = 2x^3 - 3x^2$.

6.164. $y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7$.

6.165. $y = \frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

6.166. $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 64}$.

6.167. $y = (\ln(x^4 + 4x^3 + 30))^{-1}$.

6.168. $y = -x^2\sqrt{x^4 + 2}$.

6.169. $y = \frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x - 7}$.

6.170. $y = \frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.

6.171. $y = \frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.

6.172. $y = x - \ln(1 + x)$.

6.173. $y = x - \ln(1 + x^2)$.

6.174. $y = (x - 5)^2(x + 1)^{2/3}$.

6.175. $y = \frac{\ln x}{x}$.

6.176. $y = x + \frac{1}{x}$.

6.177. $y = xe^{-x^2/2}$.

6.178. $y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$.

6.179. $y = x \ln x$.

6.180. $y = x - \operatorname{atctg} 2x$.

6.181. $y = \sqrt[3]{x^2} - 1$.

6.182. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

6.183. $y = 2\sin x + \cos 2x\,, x \in (0, \pi)$

6.184. $y = \sin 2x - x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

6.185. $y = \sqrt{1 - \cos x}$

6.186. $y = x^2 + 4x + 5$

6.187. $y = x + \ln(\cos x)$

6.188. $y = x + \cos 2x\,, x \in (0, \pi)$

6.189. $y = \frac{1}{1+x^2}$

6.190. $y = \frac{4\sqrt{x}}{x+2}$

6.191. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x}$

6.192. $y = \frac{3-x^2}{x+2}$

6.193. $y = x^3(x + 2)^2$

6.194. $y = x^{2/3} + (x - 2)^{2/3}$

6.195. $y = x + 2\sqrt{-x}$

6.196. $y = x^2(1 - x)$

Визначити екстремум функції двох змінних.

6.197. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20.$

6.198. $z = 2xy - 4x - 2y.$

6.199. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$

6.200. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1.$

6.201. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2.$

6.202. $z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$

6.203. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1.$

6.204. $z = e^{x/2}(x + y^2).$

6.205. $z = x^2 + y^2 - 2x - 4\sqrt{xy} - 2y + 8.$

6.206. $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$

6.207. $z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8.$

6.208. $z = x^3y^2(12 - x - y).$

6.209. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

6.210. $z = xy\ln(x^2 + y^2).$

6.211. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}\ \ (x > 0, y > 0, z > 0).$

6.212. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

6.213. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z.$

6.214. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2.$

6.215. $z = x + y$ при $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2}.$

6.216. $z = xy$ при $x^2 + y^2 = 2.$

6.217. $z = xy$ при $x + y = 1.$

6.218. $z = x^2 + 12xy + 2y^2$ при $4x^2 + y^2 = 25.$

6.219. $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

6.220. $u = xyz$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0.$

6.221. $u = xy + yz$ при $x^2 + y^2 = 2, y + z = 2\ (x > 0, y > 0, z > 0).$

6.222. $u = xy^2z^3$ при $x + 2y + 3z = 1\ \ (x > 0, y > 0, z > 0).$

Знайти асимптоти.

6.223. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

6.224. $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$.

6.225. $y = \frac{8x}{9-x^2}$.

6.226. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

6.227. $y = \frac{x^2}{x+1}$

6.228. $y = \frac{x^2}{x^2+1}$

6.229. $y = \frac{x^2-x-1}{x}$

6.230. $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

6.231. $y = \frac{1-4x}{1+2x}$

6.232. $y = \frac{4x-x^3}{x^2+4}$

6.233. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x$

6.234. $y = \mathrm{arctg}\frac{x}{a-x}$

6.235. $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

6.236. $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}$

6.237. $y = x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

6.238. $y = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2$

6.239. $y = \frac{x^4+1}{3x}$

6.240. $y = \frac{x^3+x^2-2}{x+1}$

Обчислити границі функцій з допомогою правила Лопіталя.

6.241. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\mathrm{ctg}\,x}$.

6.242. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \frac{1-\sin x}{\pi/2-x}$.

6.243. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-7^x}{x}$.

6.244. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x-\mathrm{arctg}\,x}{x^3}$.

6.245. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{\sin x}$

6.246. $\lim\limits_{x\to a} \frac{x-a}{x^n-a^n}$

6.247. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \cdot e^{-x}$

6.248. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$

6.249. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{\sin x}$

6.250. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$

6.251. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x\sin x} - \frac{1}{x^2}\right)$

6.252. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{1-2\sin x}{\cos 3x}$

6.253. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x^3}$

6.254. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \frac{1-\mathrm{tg}\,x}{\cos 2x}$

6.255. $\lim\limits_{x\to 0} x^x$

6.256. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)}$

Знайти максимальну абсолютну і відносну похибку.

6.257. $z = \sqrt{x + y^2}$ при $x = 2 \pm 0{,}01$, $y = 5 \pm 0{,}01$.

6.258. $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $x = 3 \pm 0{,}01$, $y = 4 \pm 0{,}02$.

6.259. $z = e^{xy}$ при $x = 1 \pm 0{,}05$, $y = 1 \pm 0{,}01$.

6.260. $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ при $x = 2 \pm 0{,}05$, $y = 4 \pm 0{,}05$.

6.261. $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$ при $x = 2 \pm 0{,}01$, $y = 1 \pm 0{,}03$.

Знайти кривизну ліній.

6.262. $xy = 4$ в точці $(2, 2)$.

6.263. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в вершинах.

6.264. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в початку координат

6.265. $y^2 = 8x$ в точці $(9/8\,, 3)$.

6.266. $y = \ln x$ в точці $(1, 0)$.

6.267. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$ в початку координат.

6.268. $y = \sin x$ в екстремумах.

6.269. $x = 3t^2, y = 3t - t^3$ при $t = 1$.

6.270. $x = a\cos^3 t\,, y = a\sin^3 t$ при $t = t_0$.

6.271. $x = a(\cos t + t\sin t), y = a(\sin t - t\cos t)$ при $t = \pi/2$.

6.272. $x = 2a\cos t - a\cos 2t\,,\ y = 2a\sin t - a\sin 2t$ в будь якій точці.

6.273. $\rho = a^{\varphi}$ при $\rho = 1, \varphi = 0$.

6.274. $\rho = a \cdot \varphi$ в будь якій точці.

Знайти рівняння дотичної площини й нормалі.

6.275. $z = x^2 + 2y^2$ в точці $(1;\ 1; 3)$.

6.276. $z^2 = xy$ в точці $(x_0;\ y_0; z_0)$.

6.277. $xyz = a^3$ в точці $(x_0;\ y_0; z_0)$.

6.278. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ в точці $(x_0;\ y_0; z_0)$ і $(a; b; c)$.

6.279. $z = x^2 + y^2$ в точці $M(1;\ 2; 5)$.

6.280. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ в точці $M(3;\ 4; 12)$.

6.281. $z = \mathrm{arctg}\frac{y}{x}$ в точці $M\left(1;\ 1; \frac{\pi}{4}\right)$.

6.282. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ в точці $M(x_0;\ y_0; z_0)$.

6.283. $z = y = \ln\frac{x}{z}$ в точці $M(1;\ 1; 1)$.

6.284. $2^{x/z} + 2^{y/z} = 8$ в точці $M(2;\ 2; 1)$.

6.285. $x = a\cos\psi\cos\varphi$, $y = b\cos\psi\sin\varphi$, $z = c\sin\psi$ в точці $M(\varphi_0; \psi_0)$.

6.286. $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = r\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ в точці $M(\varphi_0; r_0)$.

6.287. $x = u\cos v, y = u\sin v, z = av$ в точці $M(u_0; v_0)$.

Знайти рівняння дотичної прямої та нормальної площини.

6.288. $x = a\cos\alpha\cos t, y = a\sin\alpha\cos t$ в точці t_0.

6.289. $x = a\sin^2 t, y = b\sin t\cos t$, $z = c\cos^2 t$ в точці $t = \frac{\pi}{4}$.

6.290. $y = x,\ z = x^2$ в точці $M(1, 1, 1)$.

6.291. $x^2 + z^2 = 10,\ y^2 + z^2 = 10$ в точці $M(1, 1, 3)$.

6.292. $x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ x + y + z = 0$ в точці $M(1, -2, 1)$.

6.293. На лінії $x = t, y = t^2,\ z = t^3$ знайти точку, дотична якої паралельна площині $x + 2y + z = 4$.

Контрольні питання

1. Необхідна умова існування екстремуму функції однієї змінної?
2. Достатні умови існування екстремуму функції однієї змінної?
3. Що таке точка перегину? Необхідна і достатні умови точки перегину?
4. Необхідна і достатня умова екстремуму функції багатьох змінних?
5. Що таке умовний екстремум? Як знайти умовний екстремум функції?
6. Що таке асимптота функції? Як знайти асимптоти?
7. В чому полягає правила Лопіталя-Бернуллі?
8. Що називається похибкою? Які види похибок Ви знаєте та як їх знайти?
9. Запишіть формулу Тейлора і її частинний випадок формулу Маклорена.
10. Що таке кривизна? Як її знайти?
11. Дотична і нормальна площина, дотична і нормальна пряма?

6.6. Елементи векторного аналізу.

Векторний аналіз – розділ математики, що поширює методи математичного аналізу на вектори у двох або більше вимірах.

Об'єктами векторного аналізу є векторні та скалярні поля.

Векторні поля – це відображення, яке кожній точці розглянутого простору ставить у відповідність вектор на початку в цій точці. Тобто векторне поле відображає однин векторний простір в інший або векторне поле є векторна функція на векторному просторі $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_i.$$

Скалярні поля – це відображення, яке кожній точці багатовимірного простору ставить у відповідність деяке число (скаляр). Тобто скалярне поле відображає векторний простір у скалярний простір або поле і є скалярною функцією n-вимірного простору $u(\boldsymbol{X}) = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$.

Криволінійні ортогональні координати

В евклідовому просторі крім прямокутної системи координат широко застосовуються криволінійні системи. Оскільки формули, що мають відношення до довжини і кутам, в криволінійних координатах часто виглядають значно простішими, ніж у прямокутних. Серед ортогональних криволінійних систем координат найбільш поширеними є полярна система координат на площині, циліндрична й сферична системи координат для тривимірного простору. Але є багато інших. Наприклад, еліптичні й гіперболічні системи координат.

Система криволінійних координат ставить у відповідність кожній точці простору впорядковану трійку дійсних чисел q_1, q_2, q_3.

Нехай зв’язок між координатами різних систем координат задано функціями $q_1 = f_1(x, y, z)$, $q_2 = f_2(x, y, z), q_3 = f_3(x, y, z)$. Для того, щоб функції q_1, q_2, q_3 були координатами простору, необхідне існування оберненого відображення $x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3)$, $y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3)$, $z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$. Між прямокутними декартовими координатами $x,\ y,\ z$ і криволінійними координатами $q_1,\ q_2,\ q_3$ існує взаємно однозначна відповідність.

Візьмемо довільну точку $M(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. Зафіксуємо q_2, q_3, змінюватимемо q_1. Тоді радіус-вектор $\boldsymbol{r} = (q_1 \quad q_2^0 \quad q_3^0)^T$ опише q_1-координатну лінію. Аналогічно можна отримати інші координатні лінії. Вектор $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ буде дотичним до q_i-координатної лінії. Отже, у кожній точці простору можна побудувати трійку векторів $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \boldsymbol{e}_i$ що лінійно незалежні. Вектора $\boldsymbol{e}_i$ є дотичним до q_i-координатної лінії. Їх можна прийняти за вектори базису, який змінюватиметься від точки до точки, тобто одержуємо поле базисів. Нумерація координат вибирається так, щоб базисні вектори $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ утворювали праву трійку вектор.

Таким чином, у кожній точці простору, заданій радіус-вектором $\boldsymbol{r} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3)^T$), існує пов'язаний із криволінійною системою координат базис, що називають локальним, вектори якого $\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$ $(i = 1{,}2{,}3)$ є дотичними до q_i-координатних ліній, що проходять через точку з координатами $(q_1, q_2\,, q_3)$.

Візьмемо довільну точку $M(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$. Зафіксуємо q_3, змінюватимемо q_1 і q_2. Тоді радіус-вектор $\boldsymbol{r} = (q_1 \quad q_2 \quad q_3^0)^T$ опише q_3-координатну поверхню. Аналогічно можна отримати q_1і q_2-координатні поверхні.

Координатні поверхні, що відповідають різним значенням однієї і тієї самої координати q_1, не перетинаються. Дві координатні поверхні, що відповідають різним координатам q_i, q_j, перетинаються по координатній лінії, що відповідає третій координаті q_k, тобто, розв'язавши систему двох рівнянь $q_i = const, q_j = const$, знайдемо рівняння для q_k-координатної лінії.

Криволінійні системи координат, для яких базисні вектори ортогональні ($\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = 0,$ якщо $i \neq j$) у будь-якій точці простору, називаються ортогональними криволінійними системами координат. Саме такі криволінійні системи координат мають широке застосування у прикладних задачах.

Характерною рисою ортогонального базису є те, що вектори локального та взаємного базису мають однакові напрямки, але відрізняються довжиною та фізичною розмірністю. Оскільки координати x_i та q_j можуть мати різну розмірність. Саме тому розмірність різних компонент одного й того самого вектора, розкладеного за векторами цього базису, може бути різною, що створює незручності при розв'язуванні задач. У такому випадку корисно ввести ортогональний базис із одиничних векторів $\frac{1}{H_i}\boldsymbol{e}_i$, де H_i – коефіцієнти Ламе.

Для переходу з однієї системи координат в іншу використовують коефіцієнти Ламе. *Коефіцієнти Ламе* H_i – коефіцієнти у виразах для диференціалів дуг координатних ліній. Розглянемо коефіцієнти Ламе на прикладі тривимірного простору.

Нехай q_1, q_2, q_3 – деякі криволінійні координати, які ми будемо вважати заданими гладкими функціями від x, y, z. Для того, щоб функції q_1, q_2, q_3 були координатами простору, необхідне існування оберненого відображення $x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3)$, $y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3)$, $z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3)$.

Диференціал дуги в декартових координатах має вигляд:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Напишемо диференціал дуги в криволінійних координатах:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 dq_1^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}d\vec{q}_i\right)^2 dq_2^2 + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}d\vec{q}_i\right)^2 dq_3^2.$$

Цей вираз можна переписати в наступному вигляді

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2,$$

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial q_i}\right)^2}, i = 1, 2, 3.$$

Перетворення, що здійснює перехід від декартового базису до ортонормованого локального базису криволінійної системи координат, є ортогональним, оскільки переводить ортонормований базис в ортонормований. Коефіцієнти розкладання одного базису за іншим є елементами ортогональної матриці переходу A. Знаючи її та компоненти геометричного об'єкта в одній системі координат, можна знайти компоненти цього геометричного об'єкта в іншій системі координат. Зв'язок між компонентами векторів у різних системах координат буде такий самий, як і між базисними векторами, тобто за допомогою тієї самої матриці переходу.

Таблиця 6.

Коефіцієнти Ламе й диференціал дуги в різних системах координат

Система	**Коефіцієнти Ламе**	**Диференціал дуги ds**
Полярна	$H_r = 1, H_\varphi = r$	$\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$
Циліндрична	$H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1$	$\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2}$
Сферична	$H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r\sin\theta$	$\sqrt{dr^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + r^2 d\theta^2}$

Наприклад, якщо знайдено розкладання для орта сферичної системи координат за ортами декартової системи координат $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x \sin\theta\cos\varphi + \boldsymbol{e}_y \sin\theta\sin\varphi + \boldsymbol{e}_z\cos\theta$, то аналогічний зв'язок існуватиме й між компонентами векторів: $a_r = a_x\sin\theta\cos\varphi + a_y\sin\theta\sin\varphi + a_z\cos\theta$.

Лінії векторного поля $\boldsymbol{A} = (a_1 \quad a_2 \quad a_3)^T$ у криволінійній системі координат із базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ є розв'язками системи рівнянь

$$\frac{H_1}{a_1}dq_1 = \frac{H_2}{a_2}dq_2 = \frac{H_3}{a_3}dq_3.$$

Циліндрична система координат

У циліндричній системі координат (r, φ, z) із формулами переходу $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$ визначимо зв'язок базисів $\{\boldsymbol{e}_x \ \boldsymbol{e}_y \ \boldsymbol{e}_z\}$ і $\{\boldsymbol{e}_r \ \boldsymbol{e}_\varphi \ \boldsymbol{e}_z\}$. Враховуючи, що $H_r = 1, H_\varphi = r, H_z = 1$ (таблиця 6):

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{H_r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z\right) = \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y;$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_z\right) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y;$$

$$\boldsymbol{e}_z = \frac{1}{H_z}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial z}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{e}_z\right) = z\boldsymbol{e}_z.$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}.$$

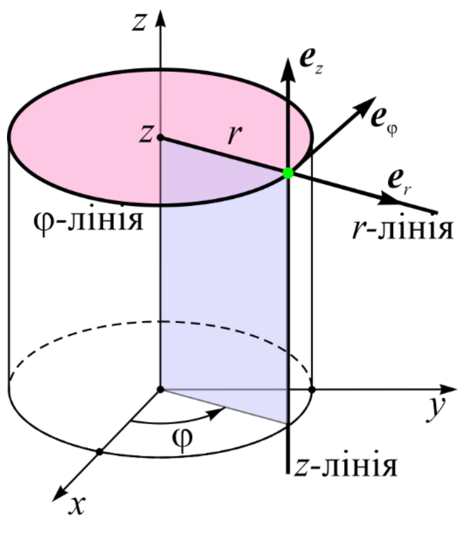
Щоб знайти базис $\{\boldsymbol{e}_x \;\; \boldsymbol{e}_y \;\; \boldsymbol{e}_z\}$ можемо знайти обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

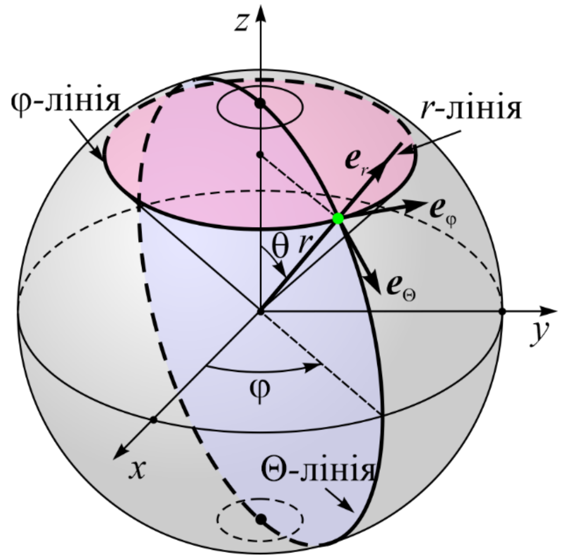
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_r \\ \boldsymbol{e}_\varphi \\ \boldsymbol{e}_z \end{pmatrix}.$$

Визначимо координатні лінії та поверхні. З обернених формул переходу маємо: $r = \sqrt{x^2 + y^2} - const$ – циліндр; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} - const$ – напівплощина, що утворює кут φ із площиною xOz та обмежена віссю Oz; $z - const$ – площина

Через кожну точку проходять три координатні лінії, які можна розглядати як результат перетину відповідних координатних поверхонь (рис. 6.19 а). Коло φ-лінія, уздовж якої φ змінюється у межах від 0 до 2π, а r і z – фіксовані. Напівпряма r – лінія, уздовж якої r змінюється у межах від 0 до $+\infty$, φ і z – фіксовані. Пряма z-лінія, уздовж якої z змінюється в межах від $-\infty$ до $+\infty$, φ і r– фіксовані.



а)



б)

Рис. 6.19. Базисні вектора, координатні лінії та поверхні циліндричної (а) і сферичної системи координат.

Сферична система координат

У сферичній системі координат (r, θ, φ) із формулами переходу $x = r\sin\theta\cos\varphi\,, y = r\sin\theta\sin\varphi\,, z = r\cos\theta$ визначити зв'язок базисів $\{\boldsymbol{e}_x \;\; \boldsymbol{e}_y \;\; \boldsymbol{e}_z\}$ і $\{\boldsymbol{e}_r \;\; \boldsymbol{e}_\theta \;\; \boldsymbol{e}_\varphi\}$. Враховуючи, що $H_r = 1, H_\theta = r, H_\varphi = r\sin\theta$ (таблиця 6):

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{H_r}\left(\frac{\partial x}{\partial r}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial r}\boldsymbol{e}_z\right) = \sin\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z;$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{H_\theta}\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_z\right) = \cos\theta\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_y;$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{1}{H_\varphi}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_z\right) = -\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y;$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\theta\\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}.$$

Щоб знайти базис $\{\boldsymbol{e}_x \;\; \boldsymbol{e}_y \;\; \boldsymbol{e}_z\}$ можемо знайти обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_x\\ \boldsymbol{e}_y\\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi\\ \cos\theta & -\sin\theta & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_r\\ \boldsymbol{e}_\varphi\\ \boldsymbol{e}_z\end{pmatrix}.$$

Визначим координатні лінії та поверхні. З обернених формул переходу маємо: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - const$ – сфера; $\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} - const$ – конічна поверхня; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} - const$ – напівплощина, що утворює кут φ від 0 до 2π із площиною xOz та обмежена віссю Oz. Через кожну точку із координатами r, θ, φ проходить три координатні лінії. Коло φ-лінія, вздовж якої φ змінюється у межах від 0 до 2π, r і θ – фіксовані. Напівпряма r-лінія, уздовж якої r змінюється у межах від 0 до $+\infty$, φ і θ – фіксовані. Напівколо θ-лінія, вздовж якої θ змінюється у межах від 0 до π, а φ і r – фіксовані.

Основні диференціальні оператори

Найбільше застосування векторний аналіз знаходить у фізиці та інженерії. У векторному аналізі широко використовують деякі нові величини такі як *потік* *і циркуляція векторного поля*, які будуть дані у розділі 7. Зараз познайомимося з двома основними операторами – *Гамільтона* (*набла*) і *Лапласа* та розглянемо їх застосування та властивості.

Термін оператор зустрічається в різних розділах математики, його точне значення залежить від розділу. В даному випадку під *оператором слід вважати відображення, що ставить у відповідність функції іншу функцію* («оператор на просторі функцій» звучить краще, ніж «функція від функції»). Наприклад, похідна функції – це оператор.

Оператор Гамільтона (оператор набла)

Векторний диференційний оператор, компоненти якого є частинними похідними по координатах називається *оператором набла* або оператором Гамільтона. Оператор набла позначається символом ∇.

Для прямокутної системи координат n-вимірного простору градієнт функції з базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ оператор набла:

$$\nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i.$$

Для тривимірного евклідового простору в прямокутній декартовій системі координат оператор набла визначається наступним чином:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт скалярної функції

Градієнт – вектор, який своїм напрямком вказує напрямок найшвидшого зростання деякої величини u, значення якої змінюється від однієї точки простору до іншої (скалярного поля), а по модулю рівний швидкості росту цієї величини в цьому напрямку. Наприклад, якщо взяти в якості u висоту поверхні землі над рівнем моря, то її градієнт в кожній точці поверхні показуватиме «напрямок самого крутого підйому», і своєю величиною характеризувати крутизну схилу.

З математичної точки зору градієнт – це похідна скалярної функції, визначеної на векторному просторі. Простір, на якому визначена функція та її градієнт, може бути як звичайним тривимірним простором, так і простором будь-якої розмірності та фізичної природи або чисто абстрактним. Термін вперше з'явився в метеорології, а в математику був введений Максвеллом в 1873 році. Позначається $grad(u)$ або через оператор набла ∇u.

Для прямокутної системи координат n-вимірного простору градієнт функції $u(\boldsymbol{X})$ за базисом $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n\}$ визначається таким чином:

$$\nabla u(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \boldsymbol{e}_i.$$

В криволінійній системі координат формула градієнта функції інша (таблиця 7). Для довільної ортогональної криволінійної системи координат:

$$\nabla u(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{H_i} \frac{\partial u}{\partial q_i} \boldsymbol{e}_i.$$

Таблиця 7.

Градієнт скалярної функції в різних системах координат

Декартова	$\nabla u(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$
Циліндрична	$\nabla u(r,\varphi,z) = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z$
Сферична	$\nabla u(r,\theta,\varphi) = \frac{\partial u}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$

Дивергенція векторної функції

Дивергенція – це лінійний диференційний оператор на векторному полі, що характеризує потік даного поля через поверхню нескінченно малого околу кожної внутрішньої точки області визначення поля. Докладніше про потік векторного поля та означення дивергенції буде у розділі 7. Оператор дивергенції, застосований до поля $\boldsymbol{F}$, позначають як $div\,\boldsymbol{F}$ або $(\nabla \cdot \boldsymbol{F})$.

В декартовій системі координат дивергенція векторного поля визначається скалярним добутком оператора набла й вектора $\boldsymbol{F}$. Дивергенція перетворює векторне поле у скаляр і визначає джерела та стоки векторного поля. Якщо у будь-якої точці M простору дивергенція векторного поля $\boldsymbol{F}$ більше нуля, то точка

M є джерелом цього поля. Якщо навпаки, $div\,\boldsymbol{F}(M) < 0$, то точка M – стік векторного поля.

Для прямокутної системи координат n-вимірного простору дивергенція векторного поля $\boldsymbol{F}$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}.$$

Для довільної ортогональної криволінійної системи координат:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{Q}) = \frac{1}{H_1 \cdot H_2 \cdots H_n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{F_i(\boldsymbol{Q})}{H_i} \cdot H_1 \cdot H_2 \cdots H_n\right).$$

Частинні випадки дивергенції векторної функції $\boldsymbol{F}$ у декартової, циліндричної та сферичної тривимірної системи координат дані у таблиці 8.

Таблиця 8.

Дивергенція векторної функції в різних системах координат

Декартова	$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Циліндрична	$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(r, \varphi, z) = \frac{1}{r}\frac{\partial r F_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$
Сферична	$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 F_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial F_\theta \sin\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

Ротор векторної функції

Ротор, або вихор – векторний диференційний оператор над векторним полем. Позначається $rot\,\boldsymbol{F}$, в англомовній літературі $curl\,\boldsymbol{F}$ або через векторний добуток вектора оператора набла й вектора $\boldsymbol{F}$: $\nabla \times \boldsymbol{F}$.

Ротор векторного поля – є вектор, проекція якого на кожний напрям $\boldsymbol{n}$ це границя відношення циркуляції векторного поля по контуру L, який є краєм плоскої площини ΔS, перпендикулярній цьому напряму, до величини цієї площини, коли розмір площини нескінченно малий і сама площина стягується в точку. Докладніше про циркуляцію та означення ротора буде у розділі 7.

Так як ротор векторного поля $\boldsymbol{F}$ визначається операцією векторного добутку вектора оператора набла та вектора $\boldsymbol{F}$, то ротор існує тільки для тривимірного та симивимірного простору.

У тривимірній декартовій системі координат ротор обчислюється так:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Для довільної ортогональної криволінійної системи координат:

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \dfrac{\vec{e}_1}{H_2 H_3} & \dfrac{\vec{e}_2}{H_1 H_3} & \dfrac{\vec{e}_3}{H_1 H_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ F_1 H_1 & F_2 H_2 & F_3 H_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial F_3 H_3}{\partial q_2} - \frac{\partial F_2 H_2}{\partial q_3}\right)\frac{\vec{e}_1}{H_2 H_3} - \left(\frac{\partial F_3 H_3}{\partial q_1} - \frac{\partial F_1 H_1}{\partial q_3}\right)\frac{\vec{e}_2}{H_1 H_3} + \left(\frac{\partial F_2 H_2}{\partial q_2} - \frac{\partial F_1 H_1}{\partial q_2}\right)\frac{\vec{e}_3}{H_1 H_2}.$$

Частинні випадки ротору векторної функції $\boldsymbol{F}$ у декартової, циліндричної та сферичної тривимірної системи координат дані у таблиці 9.

Таблиця 9.

Ротор векторної функції в різних системах координат

Декартова	$\nabla \times \boldsymbol{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$
Циліндрична	$\nabla \times \boldsymbol{F}(r, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\varphi & F_z \end{vmatrix}$
Сферична	$\nabla \cdot \boldsymbol{F}(r, \theta, \varphi) = \dfrac{1}{r^2 \sin\theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\, \vec{e}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ F_r & rF_\theta & r\sin\theta\, F_\varphi \end{vmatrix}$

З практичної точки зору ротор векторного поля характеризує здатність поля в даній точці створювати обертання. Інтерпретуючи векторне поле $\boldsymbol{F}$ як силове поле, яке примушує об'єкт розташований у точці M обертатись із кутовою швидкістю пропорційною до $rot\,\boldsymbol{F}(M)$. Ротор поля $\boldsymbol{F}$ – це вектор, який перпендикулярній площині, в якої відбувається обертання за рахунок поля $\boldsymbol{F}$.

Оператор Лапласа

Оператор Лапласа – диференціальний оператор, який діє в лінійному просторі гладких скалярних функцій $u(\boldsymbol{X})$, який ставить у відповідність функцію рівної сумі частинних похідних другого порядку за всіма змінними:

$$\Delta u(\boldsymbol{X}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Оператор Лапласа отримується при послідовній дії двох операторів на скалярну функцію $u(\boldsymbol{X})$. Спочатку знаходиться градієнт скалярної функції, а потім від отриманого вектора знаходиться дивергенція. Отже дивергенція градієнта скалярної функції еквівалентно дії оператора Лапласа. Оператор Лапласа позначається, як Δ або ∇^2, так як $\Delta = \nabla\cdot\nabla$.

Оператор Лапласа еквівалентний послідовним операціям градієнта і дивергенції: $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$. Тобто значення оператора Лапласа в точці може бути роз’яснено як густина джерел (стоків) потенціального векторного поля $\boldsymbol{F}$ в цій точці. В довільній тривимірній ортогональній криволінійній системі координат

$$\Delta u(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

Частинні випадки оператор Лапласа функції u у декартової, циліндричної та сферичної тривимірної системи координат дані у таблиці 10.

За допомогою даного оператора зручно записувати багато диференційних рівнянь другого порядку. Наприклад рівняння Лапласа, Пуассона, Шреденгера, хвильове рівняння і багато інших. У фізиці оператор Лапласа широко застосовується в електродинаміці, квантової механіки, в рівняннях фізики суцільного середовища.

Таблиця 10.

Оператор Лапласа в різних системах координат

Декартова	$\Delta u(x,y,z) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Циліндрична	$\Delta u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$
Сферична	$\Delta u = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2 \sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$

Властивості операторів диференціального числення

1. $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha\nabla u + \beta\nabla v$.
2. $\nabla\cdot(\alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{G}) = \alpha\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \beta\nabla\cdot\boldsymbol{G}$.
3. $\nabla\times(\alpha\boldsymbol{F} + \beta\boldsymbol{G}) = \alpha\nabla\times\boldsymbol{F} + \beta\nabla\times\boldsymbol{G}$.
4. $\nabla\times(u\boldsymbol{F}) = \nabla u\times\boldsymbol{F} + u\nabla\times\boldsymbol{F}$.
5. $\nabla\cdot(u\boldsymbol{F}) = \nabla u\cdot\boldsymbol{F} + u\nabla\cdot\boldsymbol{F}$.
6. $\nabla\cdot[\boldsymbol{F}\times\boldsymbol{G}] = [\nabla\times\boldsymbol{F}]\cdot\boldsymbol{G} - \boldsymbol{F}\cdot[\nabla\times\boldsymbol{G}]$.
7. $\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{F}] = \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{F}) - \Delta\boldsymbol{F}$.
8. $\nabla\cdot[\nabla\times\boldsymbol{F}] = 0$, тобто $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{F}) = 0$.
9. $\nabla\cdot\nabla u = \Delta u$, тобто $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$.
10. $[\nabla\times\nabla u] = 0$, тобто $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = 0$.

Приклади на диференціальні оператори векторного аналізу

Задача 1

Знайти величину і напрям градієнта поля $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ в тоці $A(1;1;1)$.

Розв'язання.

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} = (2x + y + 3)\vec{i} + (4y + x - 2)\vec{j} + (6z - 6)\vec{k};$$

$$\nabla u(A) = (2\cdot 1 + 1 + 3)\vec{i} + (4\cdot 1 + 1 - 2)\vec{j} + (6\cdot 1 - 6)\vec{k} = 6\vec{i} + 3\vec{j};$$

$$|\nabla u(A)| = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5};$$

$$\frac{\nabla u(A)}{|\nabla u(A)|} = \frac{6}{3\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{3}{3\sqrt{5}}\vec{j} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j} = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j}.$$

Відповідь: $\nabla u(A) = 6\vec{i} + 3\vec{j}$; $|\nabla u(A)| = 3\sqrt{5}$; $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 2

Знайти дивергенцію поля $\boldsymbol{a} = \frac{-x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ в тоці $M(3;4;5)$.

Розв'язання.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_x = \frac{-\sqrt{x^2+y^2} + x\cdot 2x/\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} = \frac{-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_y = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y\cdot 2y/\left(2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)'_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a} = \frac{-y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2-y^2+z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{3/2}};$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(M) = \frac{3^2-4^2+5(3^2+4^2)}{(3^2+4^2)^{3/2}} = \frac{-7+125}{125} = 0{,}944.$$

Відповідь: дивергенція поля $\boldsymbol{a}$ в точці M дорівнює $\nabla\cdot\boldsymbol{a}(M) = 0{,}944$.

Задача 3

Знайти ротор поля $\boldsymbol{F} = \frac{y}{\sqrt{z}}\boldsymbol{i} - \frac{x}{\sqrt{z}}\boldsymbol{j} + \sqrt{xy}\boldsymbol{k}$ в тоці $M(1;1;1)$.

Розв'язання

$$\nabla\times\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =;$$

$$= \left(\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}} - \frac{x}{2\sqrt{z^3}}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}} + \frac{y}{2\sqrt{z^3}}\right)\boldsymbol{j} + \left(-\frac{1}{\sqrt{z}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)\boldsymbol{k};$$

$$\nabla \times \boldsymbol{F}(M) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}.$$

Відповідь: ротор поля $\boldsymbol{F}$ в точці M дорівнює $\nabla \times \boldsymbol{F}(M) = -\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$.

Задачі на диференціальні оператори векторного аналізу

6.294. У параболічній системі координат (u, v, φ) із формулами переходу $x = uv\cos\varphi, y = uv\sin\varphi, z = 1/2\,(u^2 - v^2)$ визначити: а) параметри Ламе H_u, H_v, H_φ; б) прямий та обернений зв'язок базисів; в) координатні лінії і поверхні

6.295. Знайти параметри Ламе H_ξ, H_η, H_α у бісферичній (або біполярній) системі координат (ξ, η, α): $x = \frac{a \cdot \sin\eta\cos\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, y = \frac{a \cdot \sin\eta\sin\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, z = \frac{a \cdot \operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}$, де a – сталий параметр, $-\infty < \xi < +\infty, 0 \le \eta \le \pi$ та $0 \le \alpha < 2\pi$.

6.296. Знайти параметри Ламе H_ρ, H_ξ, H_η у тороїдальній системі координат (ρ, ξ, η): $x = \frac{a \cdot \operatorname{sh}\rho\cos\eta}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, y = \frac{a \cdot \operatorname{sh}\rho\sin\eta}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, z = \frac{a \cdot \sin\eta}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}$, де a – сталий параметр, $0 \le \rho < +\infty, 0 \le \eta \le 2\pi$ та $-\pi \le \xi \le \pi$.

6.297. Виразити вектори циклічного базису $\boldsymbol{e}_\pm = \boldsymbol{e}_x \pm i\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z$ через вектори базису циліндричної системи координат $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z)$.

6.298. Виразити вектори циклічного базису $\boldsymbol{e}_\pm = \boldsymbol{e}_x \pm i\boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z$ через вектори базису циліндричної системи координат $(\boldsymbol{e}_\rho, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi)$.

6.299. Перейти до циліндричної системи координат у виразі $\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$.

6.300. Перейти до циліндричної системи координат у виразі $u = \frac{2xy+x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

6.301. Перейти до циліндричної системи координат у виразі $\vec{a} = xz\vec{\imath} + yz\vec{\jmath} - z\sqrt{x^2+y^2}\vec{k}$.

6.302. Перейти до сферичної системи координат у виразі $u = \frac{2xy(z^2-x^2-y^2)}{x^2+y^2}$.

6.303. Перейти до сферичної системи координат у виразі $\vec{a} = \frac{x\vec{\jmath}-y\vec{\imath}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

6.304. Знайти величину і напрям градієнта скалярного поля $u = xy - z^2$ в точці $M(-9; 12; 10)$.

6.305. В яких точках градієнт поля $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ а) перпендикулярний осі Oz; б) паралельний осі Oz; в) дорівнює нулю?

6.306. Знайти кут між градієнтами скалярних полів $u = \frac{yz^2}{x^2}$ та $v = \frac{x^3}{2} + 6y^3 + 3\sqrt{6}z^3$ у точці $M\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

6.307. Знайти кут між градієнтами поля $u = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}$ в точках $A(1;2;2)$ і $B(-3;1;0)$.

6.308. Знайти grad $\boldsymbol{r}^2$, якщо $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

6.309. Знайти градієнт $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ $\boldsymbol{c}$ – постійний вектор.

6.310. Знайти градієнт $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z + 5$.

6.311. Знайти градієнт $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

6.312. Знайти градієнт $u(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

6.313. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r) = r^2$.

6.314. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = 2r\cos\varphi + z$.

6.315. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = 2r(z + \cos\varphi)$.

6.316. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = r\sqrt{z\cos 2\varphi}$

6.317. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = \frac{z}{\varphi}$.

6.318. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = z\varphi$

6.319. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = z^{\varphi} + \ln r$

6.320. Знайти градієнт скалярного поля в циліндричній системі координат $u(r, \varphi, z) = r^2 + 2r \cdot \cos\varphi - e^z \sin\varphi$.

6.321. Знайти градієнт та його довжину скалярного поля в сферичній системі координат $u = \frac{r}{\varphi} \cdot \sin\Theta$ в тоці $M(0; 0; \pi/2)$.

6.322. Знайти косинус кута між градієнтами поля в сферичній системі координат $u = \frac{\cos\varphi}{r^2}(1 + \sin\theta)$ в точках $A(1; \pi/2\,; \pi/6)$ і $B(1; \pi/6\,; \pi)$.

6.323. Знайти градієнт скалярного поля в сферичній системі координат $u(r, \theta, \varphi\,) = r^2 \sin\theta$

6.324. Знайти градієнт скалярного поля в сферичній системі координат $u(r, \theta, \varphi\,) = r(1 + \cos\varphi)\sin\theta$.

6.325. Знайти div $\boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.326. Знайти div $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$, де $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.327. Знайти дивергенцію векторного поля $\boldsymbol{a} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ в точці $M(1, -1, 2)$.

6.328. Знайти дивергенцію векторного поля $\boldsymbol{a} = r\boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi + z\boldsymbol{e}_z$.

6.329. Знайти дивергенцію векторного поля $\boldsymbol{a} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$.

6.330. Знайти дивергенцію векторного поля $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$, де $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.331. Знайти дивергенцію $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$, де $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{a}$ – сталий вектор.

6.332. Знайти дивергенцію $\boldsymbol{a}\ln r$, де $\boldsymbol{r}$ – радіус вектор, $\boldsymbol{a}$ – сталий вектор.

6.333. Знайти div $\left(\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)$, де $\boldsymbol{r}$ – радіус вектор, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}$ – сталі вектора.

6.334. Знайти дивергенцію векторного поля $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}) - 2\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}^2$, $\boldsymbol{a}$ – сталий вектор, $\boldsymbol{r}$ – радіус вектор.

6.335. Знайти div $\big(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})\big)$ і div $\big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{a})\big)$.

6.336. Знайти div $\left(r\boldsymbol{e}_r + z\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi + e^{\varphi}\cos z\,\boldsymbol{e}_z\right)$

6.337. Обчислити дивергенцію та ротор поля швидкостей $\boldsymbol{v}$ і поля прискорень $\boldsymbol{a}$ твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, якщо відомо, що $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\varepsilon} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})$, де $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – сталі вектори.

6.338. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{y}{x}\boldsymbol{i} + \frac{z}{y}\boldsymbol{j} + \frac{x}{z}\boldsymbol{k}$: а) в будь-якій точці $M(x, y, z)$; б) в точці $A(-1, -1, -1)$.

6.339. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{a} = yz\boldsymbol{i} + zx\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$.

6.340. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xzy^2\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k}$.

6.341. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + z(x + 2y)\boldsymbol{j} + y(x + y)\boldsymbol{k}$.

6.342. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = \frac{y}{x^2}\boldsymbol{j} - \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$.

6.343. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{y}{x^2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{x}\boldsymbol{j}$.

6.344. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = -\frac{1}{x}\boldsymbol{i} + \frac{y}{x^2}\boldsymbol{k}$.

6.345. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = yz^2\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ в точці $M(1,1,2)$.

6.346. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = yz^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ в точці $M(1,1,2)$.

6.347. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + yz^2\boldsymbol{k}$ в точці $M(1,1,2)$.

6.348. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = xyz(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$.

6.349. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} - yz\boldsymbol{j} + yz\boldsymbol{k}$.

6.350. Знайти ротор векторного поля $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} - x^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$.

6.351. Знайти $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$.

6.352. Знайти $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.353. Знайти $\operatorname{rot} r\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.354. Знайти $\operatorname{rot} r^2\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.355. Знайти $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.356. Знайти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$.

6.357. Знайти $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a} \ln r)$, $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

6.358. Знайти $\operatorname{rot}\big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r})\big)$.

6.359. Знайти $\operatorname{rot}\big(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{b})\big)$.

6.360. Знайти $\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)$.

6.361. Знайти $\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}e^{ik\cdot r}\right)$.

6.362. Обчислити, використовуючи циліндричні або сферичні координати та локальний базис $\boldsymbol{a} - const$, $\operatorname{rot} \boldsymbol{r}$.

6.363. Обчислити $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$ використовуючи циліндричні або сферичні координати та локальний базис $\boldsymbol{a} - const$.

6.364. Обчислити у сферичних координатах $\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}e^{ik\cdot r}\right)$.

6.365. Обчислити у сферичних координатах $\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{a}e^{\boldsymbol{ik}\cdot\boldsymbol{r}}\right)$.

6.366. Знайти $\operatorname{rot}\left(\sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho + \frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi - \rho z\boldsymbol{e}_z\right)$ у циліндричних координатах

6.367. Знайти $\operatorname{rot}\left(\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_\rho - \frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_\varphi - \rho^2\boldsymbol{e}_z\right)$ у циліндричних координатах

6.368. Обчислити у сферичних координатах $\operatorname{rot}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta\right)$.

6.369. Для векторного поля $\boldsymbol{a} = x^2y^2\boldsymbol{i} + y^2z^2\boldsymbol{j} + z^2x^2\boldsymbol{k}$ обчислити $\Delta\boldsymbol{a}$.

6.370. Знайти Δu, $u = \ln\frac{1}{r}$, де $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.371. Знайти Δu, $u = \frac{xy}{z}$.

6.372. Знайти оператор Лапласа функції $u = r\sin\varphi\,(1 - \cos^2\theta)$

6.373. Знайти оператор Лапласа функції $u = r^2 + z^2\sin\varphi$

6.374. Довести, що вектор $\boldsymbol{a} = e^x\boldsymbol{i} + e^y\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$ задовольняє рівнянню $\boldsymbol{a} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a} = 0$.

6.375. Довести, що вектор $\boldsymbol{a} = e^y\boldsymbol{i} + e^z\boldsymbol{j} + e^x\boldsymbol{k}$ задовольняє рівнянню $\boldsymbol{a} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = 0$.

6.376. Показати, що електричне поле $E = \frac{ke}{r^3}\boldsymbol{r}$ задовольняє рівнянню Лапласа $\Delta\boldsymbol{E} = 0$.

6.377. Розкласти наступні векторні поля на суму потенціального і соленоїдального полів $\boldsymbol{a} = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j} + (z + 1)\boldsymbol{k}$.

6.378. Розкласти наступні векторні поля на суму потенціального і соленоїдального полів $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}(x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k})$.

Контрольні питання

1. Що називається векторним і скалярним полем?
2. Визначити основні криволінійні системи координат?
3. Визначити коефіцієнти Ламе полярній, циліндричній і сферичній систем координат?

4. Визначити формули прямого і зворотного відображення Декартової в полярну циліндричну і сферичну систему координат?
5. Визначити формули диференціала дуги в Декартовій, полярній, циліндричній і сферичній системі координат?
6. Що таке потік векторного поля?
7. Що таке циркуляція векторного поля?
8. Що таке оператор набла або оператор Гамільтона?
9. Що таке градієнт скалярної функції?
10. За якою формулою можна визначити градієнт функції в Декартовій полярній, циліндричній і сферичній системі координат?
11. Що таке дивергенція векторної функції?
12. За якою формулою можна визначити дивергенція вектора в Декартовій, циліндричній і сферичній системі координат системі координат?
13. За якою формулою можна визначити дивергенція вектора в довільній ортогональній криволінійній системі координат?
14. Що таке ротор векторної функції?
15. За якою формулою можна визначити ротор вектора в Декартовій, циліндричній і сферичній системі координат?
16. За якою формулою можна визначити ротор вектора в довільній ортогональній криволінійній системі координат?
17. Що таке оператор Лапласа?
18. За якою формулою можна визначити оператор Лапласа в Декартовій, циліндричній і сферичній системі координат?
19. За якою формулою можна визначити оператор Лапласа в довільній ортогональній криволінійній системі координат?
20. Визначити основні властивості градієнта, дивергенції, ротора, оператора Лапласа?

РОЗДІЛ 7. ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

7.1. Визначений інтеграл

Бернхард Ріман формалізував поняття інтеграла, розроблене Ньютоном і Лейбніцем, як площі криволінійної трапеції (фігури, укладеної між графіком функції і віссю абсцис). Для цього він розбив криволінійну трапецію на безліч вертикальних прямокутників. Висота i-го прямокутника дорівнює значенню функції в будь-якій точці взятої всередині цього прямокутника.

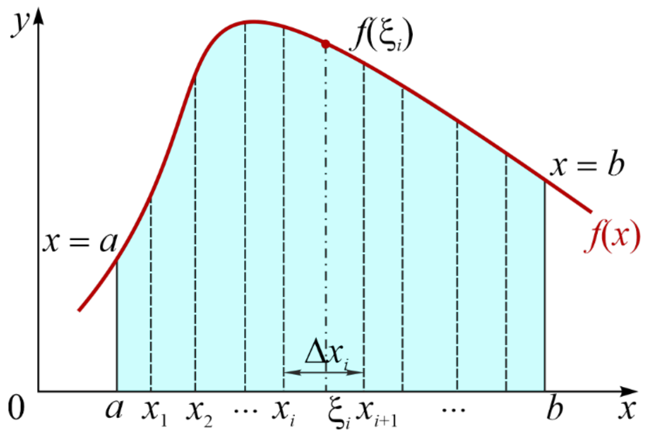


Рис. 7.1. Розбиття функції і відрізку $[a, b]$ на елементарні відрізки Δx_i

Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена обмежена функція $f(x)$. Розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$ на n елементарних відрізків. Довжина найбільшого з відрізків, називається кроком розбиття $\delta x = \max \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – довжина елементарного відрізка. Відзначимо на кожному відрізку розбиття по точці $\xi_i \in [x_i;\ x_{i+1}]$. Інтегральною сумою називається вираз

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Зрозуміло, що площа криволінійної трапеції $S \approx \sigma$.

Означення визначеного інтеграла

Якщо при прямуванні кроку розбиття до нуля інтегральна сума прямує до одного і того ж числа, незалежно від вибору $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, то це число називається інтегралом функції на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Властивості визначеного інтеграла

1. *Невиродженність*

$$\int_a^b dx = b - a$$

2. *Додатність*. Якщо інтегрована функція $f(x)$ не від'ємна, то її інтеграл на відрізку $[a, b]$ також не є від'ємним.

3. *Лінійність*. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є інтегрованими, то функція $\alpha f(x) + \beta g(x)$ теж є інтегрована, і

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

4. *Рівність нулю з однаковими границями інтегрування.*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

5. *Адитивність при розбитті відрізка*.

Нехай $a < c < b$. Функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$, тоді і тільки тоді, коли вона інтегрована на кожному з відрізків $[a, c]$ і $[c, b]$, при цьому

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. *Залежність від напрямку інтегрування*:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7. *Обчислення. Формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F'(x) = f(x)$, $F'(x)$ – первісна функції $f(x)$

8. *Середнє значення функції. Інтегральна теорема про середнє.*

Середнє значення функції – це деяке число, що знаходиться між найменшим і найбільшим її значеннями. У диференціальному та інтегральному численні є ряд «теорем про середнє», які встановлюють існування таких точок, в яких функція або її похідна отримує те чи інше середнє значення.

Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує точка c із інтервалу $[a, b]$ така, що

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$$

Внаслідок цього під середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ зазвичай розуміють величину:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

9. Якщо в проміжку $[a; b]$ виконується нерівність $f(x) \le g(x)$ та існують інтеграли $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx.$$

Вчасності, якщо $m \le f(x) \le M$ в проміжку $[a; b]$, то

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

10. Якщо існує $\int_a^b f(x)dx$, то існує $\int_a^b |f(x)|dx$ і

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$$

9. *Заміна змінної при інтегруванні*

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[\alpha; \beta]$, а функція $g(x)$ строго монотонна, має на $[a; b]$ неперервну похідну і $g(a) = \alpha$, $g(b) = \beta$, $t = g(x)$, $x = h(t)$ – обернена функція до $g(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt, \qquad \int\limits_\alpha^\beta f(t)dt = \int\limits_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(g(x))g'(x)dx.$$

10. *Інтегрування частинами*:

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x)|_a^b - \int\limits_a^b v(x)\cdot du(x).$$

7.2. Невизначений інтеграл

Попередній підрозділ не дає повну відповідь про знаходження визначеного інтегралу. Теорія визначеного інтеграла вказує, що по виду підінтегральній функції можна визначити чи буде кінцева площа криволінійної трапеції чи ні. Але не дає простого методу її знаходження. Використовувати означення визначеного інтеграла, тобто знаходити його через границю інтегральної суми – задача складна, але вирішується за допомогою комп'ютера. Аналітично обчислити інтеграл вдається в деяких окремих випадках, коли підінтегральна функція має первісну. Тоді визначений інтеграл можна знайти за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, в якій присутня первісна. Отже, виникає додаткова задача пошуку первісних функцій. З іншого боку задача розв'язання диференціальних рівнянь в аналітичному вигляді теж потребує пошук первісних функцій. Зважаючи на важливість цих задач, набір первісних функцій, що відрізняються сталим додатком отримало назву невизначеного інтеграла.

Означення невизначеного інтеграла

Нехай на відрізку [*a, b*] визначена неперервна функція $f(x)$ і $F'(x) = f(x)$ ($F(x)$ – первісна функція для функції $f(x)$), тоді *невизначений інтеграл* від функції $f(x)$ називається набір первісних, які відрізняються сталою:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{де} \quad c - const.$$

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

2. $\int (f(x) + g(x))\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int df(x) = f(x) + c$

4. $d \int f(x)dx = f(x)dx$

5. *Заміна змінної*. Нехай $\int f(x)dx = F(x) + c$ і $g(x)$ має неперервну похідну. Тоді, $\int f\big(g(x)\big)g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$, тобто

$$\int f(x)dx = \begin{Bmatrix} x = g(t), \\ dx = g'(t)dt \end{Bmatrix} = \int f(g(t))g'(t)dt$$

6. *Інтегрування за частинами*:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Невизначені інтеграли елементарних функцій

1. $\int 0dx = c.$

2. $\int dx = x + c.$

3. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c, \qquad a \neq -1.$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln x + c.$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int e^x dx = e^x + c.$

6. $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c.$

7. $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c.$

8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}(x) + c.$

9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2(x)} = -\operatorname{ctg}(x) + c.$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$ або $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + c.$

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x) + c$ або $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = -\operatorname{arcctg}(x) + c.$

12. $\int \operatorname{sh}(x)dx = \operatorname{ch}(x) + c.$

13. $\int \operatorname{ch}(x)dx = \operatorname{sh}(x) + c.$

14. $\int \sqrt{x^2+a}dx = \dfrac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+a} + x\right) + \dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}.$

Методи інтегрування

1. *Безпосереднє інтегрування*. За допомогою тотожних перетворень підінтегральної функції необхідно отримати такий вираз, коли первісна відгадується (дивись список Невизначених інтегралів деяких функцій)

2. *Метод підстановки* або метод інтегрування заміною змінної. Використовується властивість інтеграла

$$\int f(x)dx = \{x = g(t); dx = g'(t)dt\} = \int f\big(g(t)\big)g'(t)dt\,.$$

3. *Інтегрування по частинам*. Використовується формула

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)\,.$$

7.3. Невласні інтеграли

Невласний інтеграл є розширенням поняття інтеграла Рімана. При введенні поняття визначеного інтегралу Рімана, як границі інтегральної суми, припускалось, що виконуються такі умови:

- Границі інтегрування a та b є скінченими;
- Підінтегральна функція $f(x)$ на $x \in [a; b]$ неперервна або має кінцеве число точок розриву першого роду.

В цьому випадку визначений інтеграл називається *власним*. Якщо хоч одна з перерахованих вище умов не виконується, то такі інтеграли називаються *невласними*. Невласні інтеграли є узагальненням визначених інтегралів на випадок нескінчених проміжків інтегрування та необмежених функцій.

Невласний інтеграл першого роду

Нехай функція $f(x)$ неперервна в області інтегрування. *Невласним інтегралом першого роду* називається визначний інтеграл функції $f(x)$, коли хоча б одна з границь інтегрування прямує до нескінченності:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{b} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

При чому, якщо існує кінцева границя інтегралу зі змінною границею інтегрування, яка прямує до нескінченності, наприклад

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)dx,$$

то інтеграл називають *збіжним*, а саму функцію $f(x)$ інтегрованою на проміжку $[a;\ +\infty)$. Якщо така границя не існує або прямує до нескінченності, то інтеграл називають *розбіжним*. Аналогічно для інтегралів $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

Теорема 1 (ознака порівняння). Якщо на проміжку $[a;\ +\infty)$ визначені дві функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a;\ t]$, причому виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$ для будь яких $x \ge a$, тоді із збіжності невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо на проміжку $(a;\ +\infty]$ визначені дві функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a;\ t]$ і існує кінцева границя $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a;\ +\infty)$ змінює знак і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ збігається, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ також збігається. В цьому випадку невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ називають *абсолютно збіжним*.

Теорема 4. Якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то збігатися буде невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} cf(x)dx$, де c – стала.

Теорема 5. Якщо невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються, то збігатися буде невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}(f(x) + g(x))dx$.

Зауваження. Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів першого роду $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Невласний інтеграл другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \leq x < b$, а в точці b вона або невизначена, або має розрив другого роду. Тому говорити про інтеграл як про границю інтегральної суми неможна, тому що функція $f(x)$ не є неперервною на відрізку $[a; b]$ і, внаслідок цього, границя інтегральної суми, в класичному розумінні, не може існувати. Теж саме можна говорить у випадку, коли функція невизначена або має розрив другого роду в точці a або точках a і b, або в деякій точці c із проміжку $[a;\ b]$.

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна в області інтегрування $[a;\ b]$ за винятком будь якої точки c із цього проміжку. Тоді інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *невласним інтегралом другого роду*.

При чому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Тоді, якщо існує кінцева границя $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right)$ або сума відповідних лівосторонніх і правосторонніх границь

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c-0} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c+0} \int_t^b f(x)dx,$$

то невласний інтеграл другого роду називають *збіжним*, а саму функцію $f(x)$ *інтегрованою* на відрізку $[a;\ b]$. Якщо ця границя є нескінченно великою або зовсім не існує, то інтеграл називають *розбіжним*.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a;\ b]$ за виключенням скінченого числа точок $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, які є внутрішніми точками відрізка і в цих точках має розриви другого роду, то інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ визначають так:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{\alpha_1} f(x)dx + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \ldots + \int_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} f(x)dx + \int_{\alpha_n}^{b} f(x)dx,$$

якщо кожен з невласних інтегралів в правій частині рівності цього виразу збігається, то і сам інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ збігається.

Якщо хоча б один з інтегралів в правій частині рівності розбігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ *розбігається.*

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду

Для визначення збіжності невласних інтегралів від функцій, які мають розриви другого роду, використовують теореми аналогічні теоремам для визначення збіжності невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1. Якщо на відрізку $[a;\ b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0 \leq f(x) \leq g(x)$ і $\int_a^b g(x)dx$ збігається, то і $\int_a^b f(x)dx$ також збігається. Якщо $\int_a^b f(x)dx$ розбігається, то $\int_a^b g(x)dx$ також розбігається.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\ b]$ є знакозмінною, має розрив другого роду в точці b і невласний інтеграл другого роду від модуля цієї функції $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається також невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Причому цей інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*.

Зауваження. Було розглянути теореми для випадку, коли функція має розрив другого роду у верхній границі інтегрування. Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів другого роду від функції з точкою розриву, яка співпадає з нижньою границею інтегрування або точка розриву находиться між нижньою і верхньою границями інтегрування.

7.4. Інтегрування деяких типів функцій

Інтегрування функцій з квадратним многочленом в знаменнику

Частинні випадки.

1. $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c.$

2. $\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + c.$

3. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c.$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{b_1}{(x-1)} + \frac{b_2}{(x+1)} = \frac{b_1(x+1)+b_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(b_1+b_2)x + b_1 - b_2}{(x-1)(x+1)};$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_2 = -\frac{1}{2} \\ b_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2}(\ln x - 1 - \ln x + 1) + c = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c.$$

4. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + c.$

5. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \ln\sqrt[2a]{\frac{x-a}{x+a}} + c.$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{b_1}{(x-a)} + \frac{b_2}{(x+a)} = \frac{b_1(x+a)+b_2(x-a)}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{(b_1+b_2)x + (b_1-b_2)a}{(x-a)(x+a)};$$

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 0 \\ b_1 - b_2 = \frac{1}{a} \end{cases};$$

$$\begin{cases} b_2 = -\frac{1}{2a} \\ b_1 = \frac{1}{2a}. \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{dx}{x+1}\right) = \ln\sqrt[2a]{\frac{x-a}{x+a}} + c.$$

Загальний випадок:

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q}$$

1. Квадратний тричлен має два дійсних кореня: $\frac{p^2}{4} - q > 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{(x - x_1)} + \frac{b}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{a(x - x_2) + b(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{(a + b)x - x_2 a - x_1 b}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Сталі коефіцієнти знаходяться із розв’язання системи рівнянь:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -x_2 a - x_1 b = 1 \end{cases};$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x_1 - x_2};$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x_2 - x_1};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = a \int \frac{dx}{(x - x_1)} + b \int \frac{dx}{(x - x_2)} =$$

$$= a \ln(x - x_1) + b \ln(x - x_2) + c = \ln((x - x_1)^a (x - x_2)^b) + c.$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \ln[(x - x_1)^a (x - x_2)^b] + c.$$

2. Квадратний тричлен має один дійсний корінь: $\frac{p^2}{4} - q = 0$.

$$x_0 = -\frac{p}{2};$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{x - x_0} + c = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + c.$$

3. Квадратний тричлен має комплексно спряжені корні: $\frac{p^2}{4} - q < 0$

В цьому випадку квадратний тричлен перетворюємо наступним чином:

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) =$$

$$= (x - x_0)^2 + a^2.$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_0)^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + c.$$

Інтегрування раціональних функцій

Раціональна функція – це функція вигляду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – поліноми, відповідно n і m степені.

Для інтегрування таких функцій рекомендується наступна послідовність.

1. *Перетворення неправильної раціональної дробі.*

Якщо дріб неправильна. Ступінь чисельника $P_n(x)$ неменше ступеня знаменника $Q_m(x)$ тобто $n \geq m$, то виділяють цілу частину дробі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}.$$

де $\frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$ – правильний раціональний дріб.

2. *Розклад знаменника.*

Розкласти знаменник $Q(x)$ на множення одночленів та (або) нескоротних квадратичних виразів:

$$Q(x) = (x - a)^{\alpha} \cdots (x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\mu} \cdots (x^2 + rx + s)^{\nu},$$

де квадратичні функції є нескоротними, тобто не мають дійсних коренів, показник степені є ступень вродженості коренів.

3. *Розклад раціональної дроби на суму простіших дробив.*

Напишемо раціональну функцію в наступному вигляді:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{\alpha}}{(x - a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x - a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x - a)} +$$

$$+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_1}{(x-b)}+$$

$$+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)}+$$

$$+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+px+q)^\nu}+\frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{(x^2+px+q)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}.$$

Загальне число невизначених коефіцієнтів A_i , B_i , K_i , L_i , M_i , N_i , ... повинно дорівнювати степеню знаменника $Q(x)$. Помножимо обидві частини отриманого рівняння на знаменник $Q(x)$ і прирівняємо коефіцієнти при доданках з однаковими степенями x. В результаті отримаємо систему лінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів A_i , B_i , K_i , L_i , M_i , N_i, ... Дана система завжди має єдиний розв'язок. Описаний алгоритм являє собою метод *невизначених коефіцієнтів*.

4. *Інтегрування найпростіших раціональних дробив.*

Найпростіші дроби, що отримані при розкладанні довільній правильної раціональної дробі, інтегруються за допомогою наступних шести формул.

$$\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c=\ln|x-a|^A+c.$$

$$\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c.$$

У дробі з квадратичним знаменником спочатку необхідно виділити повний квадрат:

$$\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{At+B'}{(t^2+s^2)^k}dx,$$

де $t=x+\frac{p}{2}$, $B'=B-A\frac{p}{2}$.

Потім використовуються такі формули:

$$\int\frac{tdt}{t^2+s^2}=\frac{1}{2}\ln|t^2+s^2|+c=\ln\sqrt{t^2+s^2}+c;$$

$$\int\frac{tdt}{(t^2+s^2)^k}=\frac{1}{2(1-k)(t^2+s^2)^{k-1}}+c;$$

$$\int\frac{dt}{t^2+s^2}=\frac{1}{s}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{s}\right)+c.$$

Залишається інтеграл $\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^k}$,

який може бути знайдено за k кроків за допомогою формули редукції:

$$\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^k} = \frac{t}{2s^2(k-1)(t^2+s^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2s^2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^{k-1}}.$$

Таким чином, в загальному вигляді маємо:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{xdx}{x^2+px+q} + B\int \frac{dx}{x^2+px+q};$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+px+q} = \int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx -$$

$$-\frac{p}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right| - \frac{p}{2}\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c.$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+px+q)^k} = \int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dx =$$

$$= \int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dx - \frac{p}{2}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k} =$$

$$= \frac{1}{2(1-k)\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^{k-1}} - \frac{p}{2}\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right) + c.$$

Інтегрування ірраціональних функцій

Нехай $R(x,y)$ раціональна функція своїх аргументів x та y. Тобто над x та y здійснюються тільки арифметичні операції.

1. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$, де a, b, c, d – сталі числа, m – натуральне число, $ad - bc \neq 0$, $R(x, y)$ – раціональна функція.

Функцію $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ називають дробно-лінійно ірраціональною.

Заміна $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ приводить до раціоналізації функції:

$$x = \frac{b - d \cdot t^m}{ct^m - a}, \quad dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt;$$

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) dx = \int R\left(\frac{b - d \cdot t^m}{ct^m - a}, t\right) \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2} dt = \int R(t)\, dt.$$

Приклад 1.

$$\int \frac{1}{(x-1)^2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx = \left\{t^3 = \frac{x+1}{x-1}; x = \frac{t^3+1}{t^3-1}; dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2} dt\right\} =$$

$$-\frac{6}{4} \int (t^3 - 1)^2 \frac{t^2}{(t^3-1)^2} t dt = -\frac{3}{2} \int t^3\, dt = -\frac{3}{2} \frac{t^4}{4} + c = -\frac{3}{8} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4/3} + c$$

Приклад 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3}} = \begin{cases} t = \sqrt[6]{x}; x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt \end{cases} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2 + t^3} =$$

$$6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{1+t} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\, ln|1 + t| + c =$$

$$= 2\sqrt[6]{x}^3 - 3\sqrt[6]{x}^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6\, ln\left|1 + \sqrt[6]{x}\right| + c.$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$, де a, b, c – сталі числа.

2.1. Якщо $ax^2 + bx + c$ має два дійсних кореня x_1 і x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ і

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R\left(x, (x - x_1)\sqrt{a\frac{x - x_2}{x - x_1}}\right) = R_1\left(x, \sqrt{\frac{x - x_2}{x - x_1}}\right)$$

Таким чином, задача зводиться до попередньої.

2.2. Якщо $ax^2 + bx + c$ має один дійсний корінь x_1, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ і

$$R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) = R\left(x, \sqrt{a}(x - x_1)\right).$$

Тобто отримуємо раціональну функцію.

2.3. Якщо $ax^2 + bx + c$ не має дійсних коренів. Тоді раціоналізація інтегралу можна достигнуть за допомогою підстановки Ейлеру:

$t = \sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a}$;

$ax^2 + bx + c = t^2 - 2x\sqrt{a} + ax^2$, тобто $x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}$ і

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b}\sqrt{a}$ – раціональна функція.

$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dt = \int R_1(t)\, dt.$

Приклад 3.

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left\{t = \sqrt{x^2 + a^2} + x; x = \frac{t^2 - a^2}{2t}; dt = \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt\right\} =$$

$$\int \frac{t^2 + a^2}{2t} \frac{t^2 + a^2}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \left(t + \frac{2a^2}{t} + \frac{a^4}{t^3}\right) dt = \frac{t^2}{8} + \frac{2a^2}{4} \ln|t| - \frac{a^4}{8t^2} + c =$$

$$\frac{a^2}{2} \ln\left|\sqrt{x^2 + a^2} + x\right| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + c$$

Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтегрування виразів $R(\cos x, \sin x)$.

1. Універсальна тригонометрична підстановка.

Раціоналізація $R(\cos x, \sin x)$ завжди досягається підстановкою:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi;$$

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{2t}{1 + t^2};$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}{1 + \operatorname{tg}^2 x/2} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2};$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t; \qquad dx = \frac{2dt}{1 + t^2}.$$

Тому,

$$\int R(\cos x, \sin x)dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

Приклад 1.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}\right\} = \int \frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} =$$

$$= \ln|t| + c = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c.$$

2. Частинні випадки інтегрування тригонометричних функцій

Нехай $R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)}, u = \cos x, v = \sin x$, де P і Q – многочлени.

2.1. Якщо один з многочленів P або Q є парним по v, а другий – непарний по v, то заміна $t = \cos x$ раціоналізує інтеграл.

2.2. Якщо один з многочленів P або Q є парним по u, а другий – непарний по u, то заміна $t = \sin x$ раціоналізує інтеграл

Тобто інтеграли $\int \cos^{2n+1} x \cdot R(\sin x) \cdot dx$ або $\int \sin^{2n+1} x \cdot R(\cos x) \cdot dx$ знаходяться за наступним алгоритмом.

Від тригонометричній функції, що знаходиться в непарній степені відокремлюється один множник і переноситься під знак диференціалу. Далі використовуючи основну тригонометричну тотожність отримуємо інтеграл від раціональній функції.

Приклад 2.

$$\int \cos^{2n+1} x \cdot \sin^r x \cdot dx = \int \cos^{2n} x \cdot \sin^r x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= \int (1-\sin^2 x)^n \cdot \sin^r x \cdot d(\sin x) = \int (1-t^2)^n \cdot t^r \cdot dt.$$

Приклад 3.

$$\int \cos^n x \cdot \sin^{2r+1} x \cdot dx = \int \cos^n x \cdot \sin^{2r} x \cdot \sin x \cdot dx$$

$$= -\int \cos^n x \cdot (1-\cos^2 x)^r \cdot d(\cos x) = -\int t^n \cdot (1-t^2)^r \cdot dt.$$

Для інтегралу $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^{2r+1}(x)dx$ все одно для якої функції $\cos x$ або $\sin x$ можна провести відповідний алгоритм дій.

Приклад 4.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}d(\cos x) =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^4}dt = \int (t^{-2}-t^{-4})\,dt = -\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}+c = \frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+c.$$

2.3. Для $R(\sin^{2r} x\,; \cos^{2r} x)$ використовується формули зменшення показника степені:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \quad \text{і} \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Таким чином, отримуємо інтеграл з тригонометричними функціями в непарній ступені.

Приклад 5.

$$\int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \cos 4x \cdot dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c.$$

2.4. Якщо аргументи тригонометричних функцій відрізняються, то для знаходження інтегралів від таких тригонометричних функцій широко застосовуються різні тригонометричні формули:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)];$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a-b)+\cos(a+b)];$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a-b)+\sin(a+b)].$$

За допомогою цих формул легко знайти інтеграли $\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx$, $\int \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx$ та $\int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx$.

7.5. Кратні інтеграли

Кратні інтеграли є узагальненням звичайного інтеграла при збільшенні розмірності простору від одновимірного випадку до n-вимірного.

Інтегралом n-го порядку від скалярної функції $f(\boldsymbol{X})$, що залежіть від n-вимірного вектору $\boldsymbol{X}$ по n-мірному об'єму D є границя інтегральної суми:

$$\int_D f(\boldsymbol{X})d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\boldsymbol{X}_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

Частинними випадками кратних інтегралів є звичайні інтеграли по Ріману (одновимірний випадок), подвійні й потрійні інтеграли.

Визначений інтеграл (n = 1).

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta x_i$$

Подвійний інтеграл (n = 2).

Нехай на площині D, що обмежена замкненою лінією L, яка не має самоперетинів, існує неперервна $f(x,y)$. Розглянемо розбиття області D на площадки $\Delta\sigma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (рис. 7.2). Тоді границя інтегральної суми називається подвійним інтегралом по площині D:

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\Delta\sigma_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i.$$

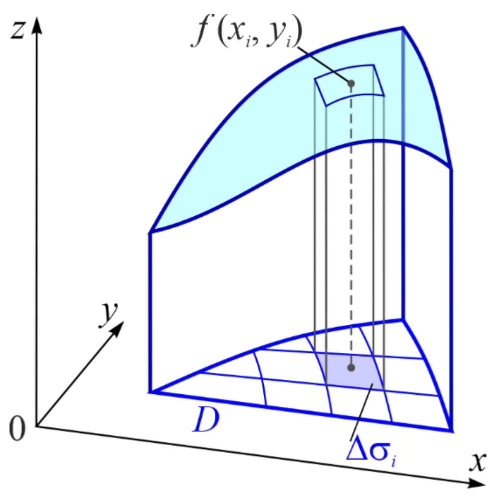


Рис. 7.2. Розбиття функції двох змінних на елементарні площі $\Delta\sigma_i$

Подвійний інтеграл по двомірної області D в частинному випадку $f(x,y) = 1$ дорівнює площі області D, а в загальному випадку – об'єму фігури обмеженої знизу площиною $X0Y$, зверху функцією $f(x,y)$ та з боків областю D.

Потрійний інтеграл (n = 3).

Нехай в тривимірній області D, що обмежена замкненою поверхнею S, що не має самоперетинів, існує неперервна функція $f(x,y,z)$. Розглянемо розбіття області D на об'єми ΔV_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Тоді границя інтегральної суми називається потрійним інтегралом по об'єму V:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \lim_{\Delta V_{\max}\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i\,.$$

Потрійний інтеграл по тривимірній області D в частинному випадку $f(x,y,z) = 1$ дорівнює об'єму цієї області, а в загальному випадку – об'єму фігури, яка обмежена в чотирьохвимірному просторі областю D та функцією $f(x,y,z)$.

Отже, для кратного інтегралу характерна тотожність означення й змісту. Для n-вимірного простору інтеграл від одиниці є розмір області інтегрування: $\int_D dX = \mu(D)$. В одномірному випадку – це довжина інтервалу інтегрування, в двохмірному – площа області інтегрування, що обмежена замкнутою лінією на площині $X0Y$, а в трьохмірному – об'єм області, що замкненою поверхнею S.

Обчислення кратних інтегралів.

Для обчислення кратних інтегралів використовують можливість послідовного інтегрування за різними змінним. Наприклад, подвійний інтеграл можна представити як звичайний одновимірний інтеграл, у якого підінтегральна функцією є інтеграл по іншій змінної (рис. 7.3):

$$\iint_D f(x,y)\cdot d\sigma = \iint_D f(x,y)\cdot dx\cdot dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy.$$

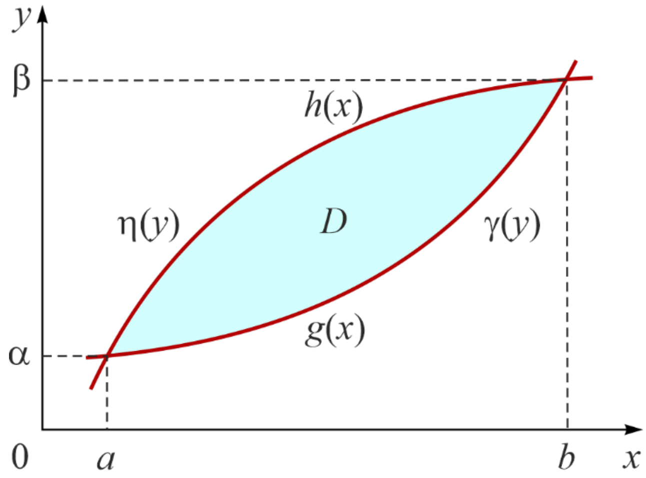


Рис. 7.3. Область інтегрування D, яка обмежена лінією двох функцій $g(x)$ і $h(x)$ або відповідними їм оберненими функціями $\eta(y), \gamma(y)$.

Тут треба спочатку знайти інтеграл по змінній y, а потім по x. Послідовність інтегрування може бути якою завгодно:

$$\iint_D f(x,y)\cdot d\sigma = \int_\alpha^\beta dy \int_{\eta(y)}^{\gamma(y)} f(x,y)dx.$$

Для потрійного інтегралу, відповідно, маємо:

$$\iiint_D f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} dy \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)dz$$

Отже, послідовне інтегрування n-кратного інтегралу:

$$\int_D f(\boldsymbol{X})d\sigma = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2(x_1)}^{b_1(x_1)} dx_2 \dots \int_{a_n(x_1,\dots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\dots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\dots,x_n)dx_n.$$

Властивості кратних інтегралів

1. Лінійність по функції:

$$\int_V \big(\alpha f(\boldsymbol{X}) + \beta g(\boldsymbol{X})\big)d\sigma = \alpha \int_V f(\boldsymbol{X})d\sigma + \beta \int_V g(\boldsymbol{X})d\sigma.$$

2. Адитивність по області інтегрування:

$$\int_V f(\boldsymbol{X})d\sigma = \int_{V_1} f(\boldsymbol{X})d\sigma + \int_{V_2} f(\boldsymbol{X})d\sigma, \qquad \text{де } V_1 \cup V_2 = V.$$

3. Монотонність по функції. Нехай $f(\boldsymbol{X}) \le g(\boldsymbol{X})$ в області D. Тоді,

$$\int\limits_V f(\boldsymbol{X})d\sigma \le \int\limits_V g(\boldsymbol{X})d\sigma$$

4. Нерівність трикутника:

$$\left|\int\limits_V f(\boldsymbol{X})d\sigma\right| \le \int\limits_V |f(\boldsymbol{X})|d\sigma$$

5. Інтегральна теорема про середнє:

$$\int\limits_V f(\boldsymbol{X})d\sigma = f(\boldsymbol{Y})\mu(V)$$

6. Зведення кратного інтеграла до повторних.

$$\int\limits_V f(\boldsymbol{X})d\sigma = \int\limits_{\varphi_1}^{\psi_1} dx_1 \int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_3(x_1,x_2)}^{\psi_3(x_1,x_2)} dx_3 \cdots \int\limits_{\varphi_3(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})}^{\psi_3(x_1,x_2,\dots,x_{n-1})} f(x_1,\dots x_n)dx_n$$

7. Заміна змінної в кратному інтегралі.

Нехай $\begin{cases} t_1 = \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ t_2 = \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ t_n = \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$. Тоді

$$\int\limits_G f(\boldsymbol{T})d\tau = \int\limits_V f(\boldsymbol{X})\frac{D(\boldsymbol{T})}{D(\boldsymbol{X})}\,d\sigma,$$

де $\dfrac{D(\boldsymbol{T})}{D(\boldsymbol{X})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$ – визначник Якобі (Якобіан).

Перехід від Декартової системи координат до циліндричної:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz,$$

$$\text{де } \begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

Перехід від Декартової системи координат до сферичної:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r,\varphi,\theta)r^2\sin\theta\,drd\varphi d\theta$$

$$\text{де } \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

7.6. Лінійні інтеграли

Лінійний або криволінійний, або контурний інтеграл – інтеграл, який обчислюється вздовж заданої лінії на площині або в просторі. Твердження в цьому підрозділі наведені для тривимірного простору, але можуть бути узагальнені на простір довільної розмірності.

Розрізняють лінійні інтеграли першого і другого роду (типу).

Лінійні інтеграли першого типу

Нехай C крива, що сполучує точки A і B, а $f(\boldsymbol{X})$ – обмежена скалярна функція. Розіб'ємо криву C точками на дуги $L_{i-1}L_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Виберемо на кожній з дуг L_iL_{i+1}, точку M_i і складемо суму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, де Δl_i – довжина дуги $L_{i-1}L_i$ (рис. 7.4). Якщо границя $\lim\limits_{\max\Delta l_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$ існує, то її називають лінійним інтегралом 1-го типу:

$$\int\limits_C f(\boldsymbol{X})\cdot dl = \lim_{\Delta l_{\max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i$$

За своїм змістом лінійний інтеграл 1-го типу дорівнює площі поверхні, обмеженої лінією інтегрування C, підінтегральною функцією $f(\boldsymbol{X})$ та границями інтегрування, які задаються точками A до B. В частинному випадку, коли підінтегральна функція $f(x,y,z) = 1$ лінійний інтеграл увздовж лінії C від точки A до B, дорівнює довжині цієї лінії від точки A до B.

З означення випливає, що величина лінійного інтеграла 1-го типу не залежить від обраного напрямку обходу кривої

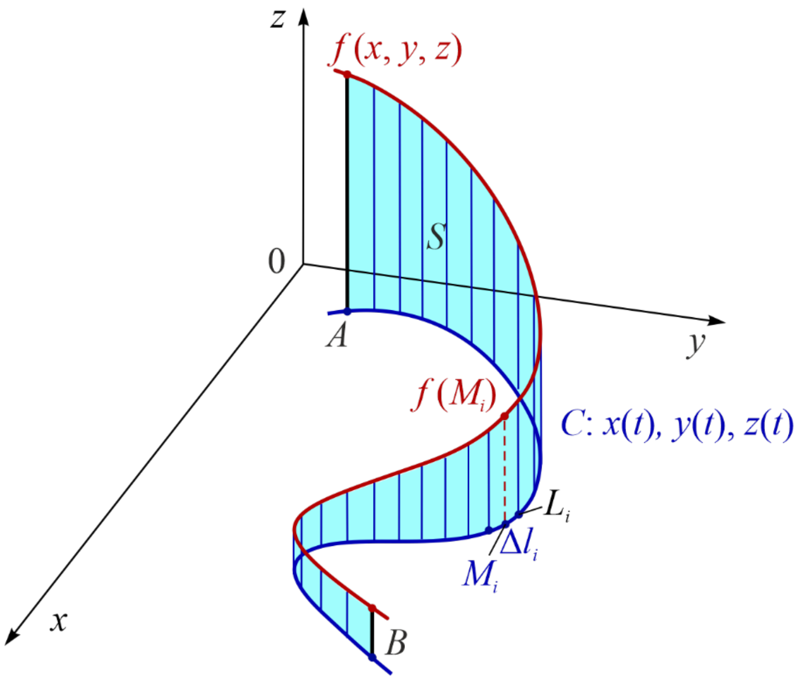


Рис. 7.4. Розбиття функції $f(x, y, z)$ на елементарні дуги довжиною Δl_i уздовж лінії $C: x(t), y(t), z(t)$ між точками A і B.

Властивості криволінійних інтегралів 1-го типу

1. *Лінійність по функції*:

$$\int\limits_{C} (\alpha f(\boldsymbol{X}) + \beta g(\boldsymbol{X}))dl = \alpha \int\limits_{C} f(\boldsymbol{X})dl + \beta \int\limits_{C} g(\boldsymbol{X})dl.$$

2. *Адитивність по області інтегрування*

Нехай крива C_1 починається в точці A і закінчується в точці B, а крива C_2 починається в точці B і закінчується в точці D. Тоді їх сполученням називатиметься крива $C_1 \cup C_2$, яка проходить від A до B уздовж кривої C_1 і потім від B до D уздовж кривої C_2. Для лінійних інтегралів справедливо наступне співвідношення:

$$\int\limits_{C_1 \cup C_2} f(\boldsymbol{X})dl \int\limits_{C_1} f(\boldsymbol{X})dl + \int\limits_{C_2} f(\boldsymbol{X})dl.$$

3. *Монотонність по функції*. Нехай $f(\boldsymbol{X}) \leq g(\boldsymbol{X})$ на кривій C. Тоді,

$$\int_C f(\boldsymbol{X})dl \leq \int_C g(\boldsymbol{X})dl.$$

4. *Інтегральна теорема про середнє.*

Для неперервної функції $f(\boldsymbol{X})$ уздовж кривої C

$$\int_C f(\boldsymbol{X})dl = f(\boldsymbol{Y})|l|,$$

де $\int_C dl = |l|$ – довжина кривої C.

5. Зміна напрямку обходу кривої інтегрування не впливає на знак інтеграла

$$\int_{\breve{AB}} f(\boldsymbol{X})dl = \int_{\breve{BA}} f(\boldsymbol{X})dl.$$

6. Лінійний інтеграл першого роду не залежить від параметризації та орієнтації кривої.

Обчислення лінійних інтегралів 1-го типу

1. Якщо гладка крива C задана параметрично $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ і скалярна функція $f(x,y,z)$ неперервна на кривій C, то

$$\int_C f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt$$

2. Якщо C є гладкою кривою в площині XOY, заданої рівнянням $y(x)$, $a \leq x \leq b$, то

$$\int_C f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1 + (y'(x))^2}dx$$

Якщо C є гладкою кривою в площині XOY, заданої рівнянням $x(y)$, $\alpha \leq y \leq \beta$, то

$$\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(y),y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}dy$$

У полярних координатах інтеграл $\int_C f(x,y)dl$ виражається формулою

$$\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sqrt{r^2 + \left(r'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$$

де крива C задана в полярних координатах функцією $r(\varphi)$

Лінійні інтеграли другого типу

На відміну від лінійного інтеграла 1-го типу, підінтегральною функцією в лінійному інтегралі 2-го типу служить векторна функція векторного аргументу $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{i} + Q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{j} + R(\boldsymbol{X})\boldsymbol{k}$.

Нехай $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ – обмежена векторна функція на гладкій кривій C і $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{X})$ – дотичній одиничний вектор до кривої C в точці $M(\boldsymbol{X})$, напрямок якого збігається з обраним напрямом обходу кривої. Лінійним інтегралом 2-го типу від скалярного добутку $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{X})$ називають границю інтегральної суми:

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{X}) \cdot dl = \lim_{\Delta l_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot \boldsymbol{\tau}(M_i) \cdot \Delta l_i.$$

Спосіб позначення.

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{X}) \cdot dl \equiv \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} \equiv \int_C P(\boldsymbol{X})dx + Q(\boldsymbol{X})dy + R(\boldsymbol{X})dz.$$

Зауваження.

З означення випливає, що лінійний інтеграл 2-го типу залежить від обраного напрямку обходу кривої. Зміна знаку відбувається через те, що при зміні напрямку дотичного вектору на протилежний, змінюється знак скалярного добутку в означенні лінійного інтеграла 2-го типу.

Пояснимо фізичний зміст лінійного інтеграла 2-го типу на прикладі обчислення роботи, що здійснюється часткою в силовому полі. Нехай є силове поле, що діє на рухому частинку. Повна робота по переміщенню частинки уздовж гладкою орієнтованої кривої C, яка сполучує точки A і B є лінійний інтеграл 2-го типу.

Властивості лінійних інтегралів 2-го типу

1. *Лінійність по функції.*

$$\int_C (\alpha F(\boldsymbol{X}) + \beta \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})) \cdot d\boldsymbol{l} = \alpha \int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} + \beta \int_C \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

2. *Адитивність по області інтегрування.*

Нехай крива C_1 починається в точці A і закінчується в точці B, а крива C_2 починається в точці B і закінчується в точці D. Тоді їх сполученням називатиметься крива $C_1 \cup C_2$, яка проходить від A до B уздовж кривої C_1 і потім від B до D уздовж кривої C_2. Для лінійних інтегралів 2-го типу справедливо наступне співвідношення:

$$\int_{C_1 \cup C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

3. *Зміна напрямку обходу кривої інтегрування змінює знак інтегралу*

$$\int_{\breve{AB}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_{\breve{BA}} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

4. *Незалежність лінійних інтегралів від шляху інтегрування.*

Нехай $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ обмежена векторна функція на гладкій кривій C в інтервалі між точками на цій лінії A і B. Нехай також функції P, Q, R та їх частинні похідні є неперервними функціями. Тоді, лінійний інтеграл 2-го типу по лінії C від точки A до B не залежіть від вибору лінії C тоді і тільки тоді, коли існує функція $U(x, y, z)$, яку називають потенціалом поля $\boldsymbol{F}$ така, що

$$\boldsymbol{F} = \nabla U: \quad P = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Обчислення лінійних інтегралів 2-го типу

1. Нехай $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{i} + Q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{j} + R(\boldsymbol{X})\boldsymbol{k}$, $d\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i}dx + \boldsymbol{j}dy + \boldsymbol{k}dz$, C – гладка параметрична крива $\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j} + z(t)\boldsymbol{k},\ \alpha \le t \le \beta$, тоді

$$\int_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_\alpha^\beta \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{X}(t)\big) \cdot \boldsymbol{r}'(t)dt =$$

$$= \int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_\alpha^\beta [Px'(t) + Qy'(t) + Rz'(t)]dt.$$

Лінійний інтеграл по замкнутому контуру

Якщо початкова та кінцева точка інтегрування в лінійному інтегралі збігаються і при цьому загальна довжина кривої інтегрування відмінна від нуля, то говорять про лінійний інтеграл по замкнутому контуру.

Спосіб позначення.

$$\oint_C f(X)dl \quad \text{і} \quad \oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Інтеграл 1-го типу не залежіть від напрямку обходу.

Інтеграл 2-го типу залежіть від напрямку обходу. Напрямок обходу вважається додатним, якщо обхід по кривій C ведеться проти годинникової стрілки.

Якщо для векторної підінтегральної функції $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ виконується умова незалежності від шляху інтегрування, тобто існує потенціал $U(x, y, z)$ поля $\boldsymbol{F}$: $\boldsymbol{F} = \nabla\, U(x, y, z)$, то

$$\oint_C \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = 0.$$

7.7. Поверхневі інтеграли

Подвійний інтеграл у підрозділу 7.2 визначається на площині $X0Y$. Можна задати якусь поверхню і обчислювати інтегральну суму не на площині $X0Y$, а на цієї поверхні. Так само було зроблено в означенні лінійного інтегралу, коли функція розглядалася уздовж кривої.

Поверхневі інтеграли першого типу

Нехай скалярна функція $f(\boldsymbol{X})$ визначена і обмежена на гладкій поверхні S. Розіб'ємо поверхню на кінцеву кількість елементарних поверхонь S_i з площами Δs_i, $i = 1,2 \dots, n$. Виберемо у кожній із поверхонь S_i довільну точку $M_i \in S_i$. Тоді, якщо існує границя інтегральної суми, то її називають поверхневим інтегралом першого типу по поверхні S:

$$\iint_S f(\boldsymbol{X}) ds = \lim_{\Delta s_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i) \Delta s_i.$$

Для випадку, коли підінтегральна функція дорівнює 1, поверхневий інтеграл 1-го типу дорівнює площі поверхні S.

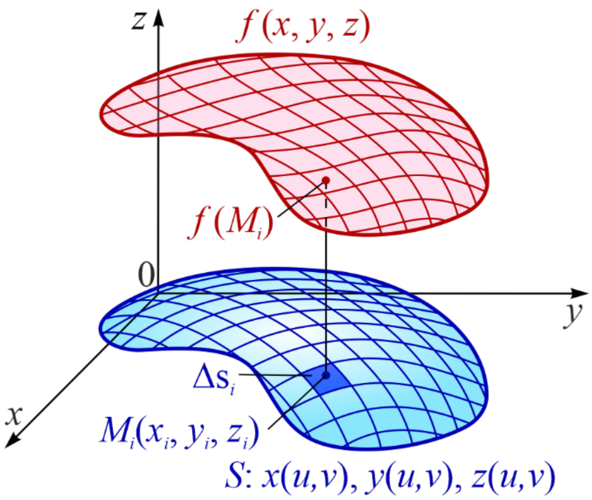


Рис. 7.5. Розбиття функції $f(x, y, z)$ на елементарні площини Δs_i на поверхні $S: x(u, v), y(u, v), z(u, v)$.

Обчислення поверхневих інтегралів 1-го типу

Поверхневий інтеграл можна привести до подвійного інтегралу. Нехай поверхня S, по якій проводиться інтегрування задана параметрично рівняннями $\boldsymbol{r}(u, v)$: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$. Причому, параметри u і v пробігають область T. Тоді,

$$\iint_S f(\boldsymbol{X}) ds = \iint_T f(\boldsymbol{r}(u, v)) \left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| du dv\,;$$

$$\left| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2};$$

$$g_{11} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \quad g_{12} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}.$$

Якщо поверхня задана явно рівнянням $z = z(x, y)$. Причому (x, y) пробігають область T – проєкцію області S на площину $X0Y$, то

$$\iint\limits_S f(x, y, z)ds = \iint\limits_T f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Поверхневі інтеграли другого типу

Поверхневі інтеграли 2-го типу мають у фізичних додатках значну роль, так як вони обчислюють потоки векторних полів. Для визначення поверхневого інтегралу 2-го типу принципову роль мають сторони поверхні. Необхідно відмітити домовленості про вибір додатної сторони поверхні. Для кожній внутрішній точці, яка не належіть межі, гладкій поверхні можна вказати два напрямку, що перпендикулярні поверхні.

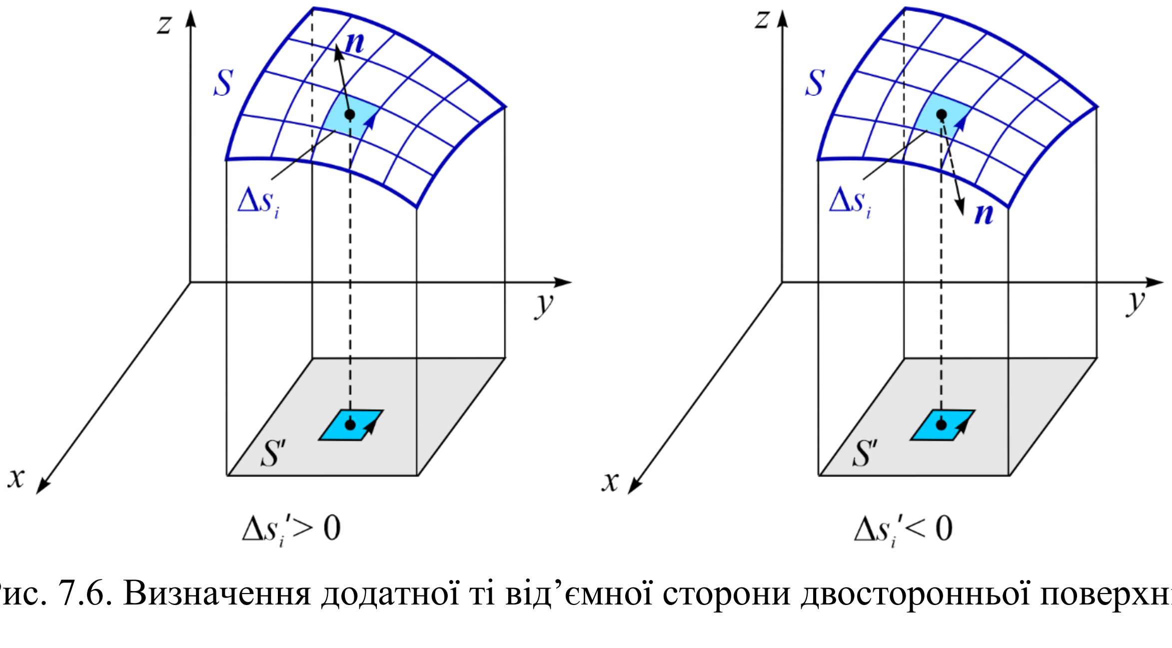


Рис. 7.6. Визначення додатної ті від’ємної сторони двосторонньої поверхні.

В будь-якій такій точці можна побудувати нормальний одиничний вектор $\boldsymbol{n}$ до поверхні. Напрямок вектора $\boldsymbol{n}$ задає одну або іншу сторону поверхні. Щоб відрізнити ці сторони додатково до вектора $\boldsymbol{n}$ на поверхні проводять замкнуту криву. Обхід замкнутої кривої на поверхні є узгодженим або додатним з вибраною стороною поверхні, якщо з кінця вектора $\boldsymbol{n}$ такий обхід відбувається проти годинникової стрілки.

Нехай задана двостороння поверхня S і вибрана одна з її сторін, $\boldsymbol{n}(M)$, $M \in S$ – нормаль до вибраної сторони. Нехай задана обмежена векторна функція $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. Тоді, інтеграл від скалярного добутку векторної функції і нормалі $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})$ називається поверхневим інтегралом 2-го типу.

$$\iint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X}) \cdot ds.$$

Інакше поверхневим інтегралом 2-го типу називається границя інтегральної суми скалярного добутку $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{X})$ помноженої на проєкцію $\Delta s_i{}'$ площини елементарної області Δs_i:

$$\iint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) d\boldsymbol{s} = \lim_{\Delta s_{\max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}(M_i) \cdot \boldsymbol{n}(M_i) \cdot \Delta s_i{}'.$$

Знак $\Delta s_i{}'$ додатний, якщо межа проєкції $\Delta s_i{}'$ обходиться в додатному напрямку. В противному випадку знак $\Delta s_i{}'$ від'ємний.

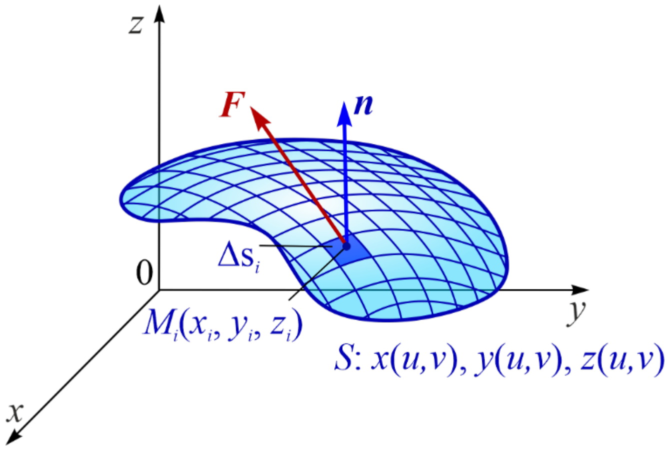


Рис. 7.7. Розбиття поверхні $S\colon x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ на елементарні площини Δs_i з одиничним нормальним вектором $\boldsymbol{n}$ та векторною функцією $\boldsymbol{F}$ в точці M_i

Нехай $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{i} + Q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{j} + R(\boldsymbol{X})\boldsymbol{k}$ – обмежена векторна функція в декартовій системі координат на гладкій поверхні S і $d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma)ds$ або $d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{i}dydz + \boldsymbol{j}dxdz + \boldsymbol{k}dxdy$, тоді

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Обчислення поверхневих інтегралів 2-го типу

1. Нехай поверхня S задана явно неперервною функцією $z = z(x, y)$, яка взаємно-однозначно проєцирується на область S'_{xy} і $\boldsymbol{F} = R\boldsymbol{k}$. Тоді поверхневий інтеграл по тій стороні S, для якої кут між нормалью і віссю OZ є гострим обчислюється за формулою зі знаком плюс, а якщо кут тупий за формулою зі знаком мінус:

$$\iint_S R(x, y, z)dxdy = \pm \iint_{S'_{xy}} R(x, y, z(x, y))dxdy.$$

Аналогічно отримуємо для поверхні S заданою явно неперервними функціями $x = x(y, z)$ і $y = y(x, z)$, відповідно для $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i}$ і $\boldsymbol{F} = Q\boldsymbol{j}$:

$$\iint_S P(x, y, z)dydz = \pm \iint_{S'_{yz}} P(x(y, z), y, z)dydz\,;$$

$$\iint_S Q(x, y, z)dxdz = \pm \iint_{S'_{xz}} Q(x, y(x, z), z)dxdz.$$

Отже, в загальному випадку $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \pm \iint_{S'_{yz}} Pdydz \pm \iint_{S'_{xz}} Qdxdz \pm \iint_{S'_{xy}} Rdxdy,$$

де $S'_{yz}, S'_{xz}, S'_{xy}$ – проєкції площини S на три відповідні координатні площини. Тут знак плюс або мінус вибирається в залежності від того гострий або тупий кут має вектор нормалі з ортом декартової системи координат, що перпендикулярний відповідній координатній площини.

2. Нехай поверхня S задана параметрично $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$: $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v), \{u, v\} \in S'$, а функція $\boldsymbol{F}$ неперервна на поверхні S Тоді,

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint_S (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n})ds = \iint_{S'} \left(\boldsymbol{F} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right),$$

де $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}$ і $\boldsymbol{n}$ утворюють праву трійку векторів для правої системи координат.

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{S'} \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) dudv,$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

3. Нехай поверхня S задана явно неперервною функцією $z = z(x,y)$, яка взаємно-однозначно проєцирується на область S'_{xy} і $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$. Тоді,

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \iint\limits_{S'_{xy}} \left(\mp P\frac{\partial z}{\partial x} \mp Q\frac{\partial z}{\partial y} \pm R\right) dxdy,$$

Поверхневі інтеграли по замкнутої поверхні.

Якщо поверхонь інтегрування є замкнутою, то інтеграл по такій поверхні називається поверхневим інтегралом по замкнутої поверхні:

$$\oiint\limits_S f(x,y,z)ds \quad \text{і} \quad \oiint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

В загальному випадку інтеграли по замкнутої поверхні не дорівнює нулю.

Нехай $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{i} + Q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{j} + R(\boldsymbol{X})\boldsymbol{k}$ – обмежена векторна функція в декартовій системі координат на гладкій поверхні S. Нехай також функції P, Q, R та їх похідні $\partial P/\partial x$, $\partial Q/\partial y$, $\partial R/\partial z$ – неперервні. Тоді, поверхневий інтеграл 2-го типу від векторної функції $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ по будь-якій замкнутої поверхні S дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

7.8. Елементи векторного аналізу

Характеристики полів.

Дамо додаткові означення до тих, що були дані у підрозділу 6.6 і, що характеризують скалярні й векторні поля.

Поверхня рівня скалярного поля.

Поверхнею рівня скалярного поля зі скаляром $u(\boldsymbol{X})$ називається поверхня, що задається рівнянням $u(\boldsymbol{X}) - const$.

Векторна лінія векторного поля.

Векторною лінією векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ називається кожна крива $\boldsymbol{r}(t)$, така, що вектор дотичної до неї в кожній точці $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ збігається з напрямком вектора поля $\widehat{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})/|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})|$.

Очевидно, що векторною лінією векторного поля з вектором $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ є кожна крива $\boldsymbol{r}(t)$, що задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = 0.$$

В базовій системі $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ тривимірного простору рівняння ліній векторного поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) = P(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_1 + Q(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_2 + R(\boldsymbol{X})\boldsymbol{e}_3$ визначається системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{P(\boldsymbol{X})} = \frac{dx_2}{Q(\boldsymbol{X})} = \frac{dx_3}{R(\boldsymbol{X})}.$$

Векторною трубкою векторного поля називається така поверхня, що генерується векторними лініями векторного поля, та існує така скінченна плоска фігура (плоский переріз векторної трубки), що через кожну точку граничного контуру фігури проходить векторна лінія поля та кожна векторна лінія, що лежить на цій поверхні перетинає контур.

Циркуляція векторного поля.

Циркуляцією векторного поля вздовж замкненого контуру L називається інтеграл вектора поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ вздовж орієнтованого контуру (замкненої кривої) L:

$$C_F \equiv \oint_L \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l}.$$

Потік векторного поля.

Потоком векторного поля через однозв'язну кусково-гладку, орієнтовану поверхню S називається поверхневий інтеграл першого роду від нормальної проєкції вектора поля по поверхні S або поверхневий інтеграл другого роду від вектора поля:

$$\Phi_F \equiv \iint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{s} \equiv \iint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot \boldsymbol{n} \cdot ds = \iint_S (P dx_2 dx_3 + Q dx_1 dx_3 + R dx_1 dx_2).$$

Типи полів

Потенціальне векторне поле.

Потенціальне векторне поле $\boldsymbol{F}_p$ – це поле, яке утворюється завдяки градієнту скалярного поля. Тобто векторне поле має скалярний потенціал $u(\boldsymbol{X})$ такий, що

$$\boldsymbol{F}_p(\boldsymbol{X}) = \nabla u(\boldsymbol{X}).$$

Відповідно до властивостей градієнта скалярного поля його ротор дорівнює нулю:

$$\nabla \times \boldsymbol{F}_p = \operatorname{rot}\left(\operatorname{grad} u(\boldsymbol{X})\right) = 0.$$

Отже, потенціальне векторне поле – це поле ротор якого дорівнює нулю.

Скалярна функція $u(\boldsymbol{X})$, називається потенціалом векторного поля $\boldsymbol{F}_p(\boldsymbol{X})$

Для потенціального поля характерно, що його циркуляція завжди дорівнює нулю і не залежить від форми контуру:

$$C_{F_p} = \oint_L \boldsymbol{F}_p(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

Соленоїдальне векторне поле.

Соленоїдальне поле $\boldsymbol{F}_s$ – це поле, яке утворюється завдяки ротору іншого векторного поля $\boldsymbol{U}$, яке називають векторним потенціалом:

$$\boldsymbol{F}_s = \nabla \times \boldsymbol{U}.$$

Так як дивергенція ротора поля завжди дорівнює нулю, то соленоїдальне поле – це поле, дивергенція якого дорівнює нулю:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F}_s = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \boldsymbol{U}) = 0.$$

Враховуючи, що дивергенція векторного поля визначає джерела і стоки цього поля, то можна стверджувати, що соленоїдальне поле не має точкових джерел і стоків.

Для соленоїдального поля характерно, що його потік через замкнуту поверхню завжди дорівнює нулю і не залежіть від форми поверхні:

$$\Phi_{F_s} = \oiint\limits_{S} \boldsymbol{F}_s(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

Гармонічне або Лапласове поле.

Гармонічне векторне поле $\boldsymbol{F}_h$ – векторне поле, яке в усіх точках є одночасно потенціальним і соленоїдальним, тобто виконуються умови:

$$\begin{cases} \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}_h) = 0 \\ \mathrm{div}(\boldsymbol{F}_h) = 0. \end{cases}$$

З першої умови випливає існування скалярної функції $u(\boldsymbol{X})$, що $\boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{X}) = \nabla u(\boldsymbol{X})$. З другої умови, шо $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_h(\boldsymbol{X}) = \Delta u(\boldsymbol{X}) = 0$, де Δ – оператор Лапласа. Отже, в гармонічному полі маємо:

$$\Delta u(\boldsymbol{X}) = 0.$$

Це рівняння називається рівнянням Лапласа, а його розв'язки – гармонічними функціями або гармонічними потенціалами.

Гармонічне поле ще означають як потенціальне, потенціалом якого є гармонічна функція. Прикладами гармонічних функцій є $u = ax + by + cz$, $u = xyz$, $u = 1/\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

Інтегральні теореми векторного аналізу

Теорема Гельмгольца (основна теорема векторного аналізу)

Будь-яке векторне поле, що задано в усьому просторі, що зменшується до нуля на нескінченності зі своїми дивергенцією і ротором може бути єдиним чином представлено у вигляді суми потенціального і соленоїддального полів:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_p + \boldsymbol{F}_s = \mathrm{grad}\, u + \mathrm{rot}\, \boldsymbol{U}.$$

Теорема Остроградського – Гауса.

Потік векторного поля $\boldsymbol{F}$ через замкнуту поверхню S дорівнює потрійному інтегралу по об'єму V, що охоплює поверхня S, від дивергенції цього поля:

$$\Phi_F = \oiint_S \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{s} = \iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{F}\, dV.$$

Використовуючи формулу Остроградського, можна довести, що дивергенція векторного поля є його інваріантом і не залежить від вибору системи координат.

Теорема Стокса (формула Кельвіна – Стокса).

Нехай S є гладкою поверхнею, що обмежена гладкою кривої L. Тоді для будь якої векторної функції $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$, яка має неперервні похідні справедливе наступне ствердження. Циркуляція векторного поля $\boldsymbol{F}$ вздовж замкнутого контуру L дорівнює подвійному інтегралу по поверхні S, що обмежена кривою L, від ротора цього поля:

$$C_F = \oint_L \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Таким чином, потік ротора векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхню S дорівнює циркуляції поля $\boldsymbol{F}$ по границі L цієї поверхні.

Теорема Стокса дає можливість довести інваріантність ротора векторного поля, тобто його незалежність від вибору системи координат.

Формула Гріна.

Формула Гріна є частинним випадком формули Кельвіна – Стокса для двомірного випадку. Нехай S є гладкою площиною на площині $X0Y$, що обмежена гладкою кривою L. Тоді для будь якої векторної функції $\boldsymbol{F}(P, Q)$, яка має неперервні похідні справедлива наступна формула:

$$\oint_L (P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \cdot ds.$$

Зауваження. Формули Остроградського – Гауса, Кельвіна – Стокса і Ньютона – Лейбниця є частинними випадками більш загальної теореми, яка дійсна для n-вимірного простору. Загальна теорема більш складна для формулювання, ніж попередні теореми. Нехай на орієнтованому різномаітті M розмірності n задані орієнтовне p-вимірне підмножина σ і диференціальна форма ω ступеня $p-1$ $(1 \leq p \leq n)$. Тоді якщо границя підмножини $\partial\sigma$ додатно орієнтована, то

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega.$$

Приклади розв'язання задач на інтегральне числення

Безпосереднє інтегрування

1. $$\int \frac{x^3+2x-\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int \left(x+\frac{2}{x}-x^{-3/2}+x^{-2}\right)dx = \int xdx + 2\int \frac{dx}{x} -$$

$$-\int x^{-\frac{3}{2}}dx + \int x^{-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln x + 2x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x} + c.$$

2. $$\int_1^3 (x-4)^2\,dx = \int_1^3 (x^2-8x+16)\,dx = \int_1^3 x^2\,dx - 8\int_1^3 x\,dx + 16\int_1^3 dx =$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 - 8\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + 16x|_0^3 = \frac{1}{3}(27-1) - 4(9-1) + 16(3-1) = \frac{26}{3}.$$

3. $$\int_0^{\pi/6} \cos x \cdot dx = \sin x|_0^{\frac{\pi}{6}} = \sin\frac{\pi}{6} - \sin 0 = 0{,}5 - 0 = 0{,}5.$$

4. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int_0^{\pi/4} dx = \mathrm{tg}\, x|_0^{\pi/4} - x|_0^{\frac{\pi}{4}} = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\, 0 - \frac{\pi}{4} + 0 = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

5. $$\int \cos(\ln x)\, d\ln x = \sin(\ln x) + c.$$

6. $\int \sqrt{\sin x} \cdot \cos x \cdot dx = \int \sqrt{\sin x} \cdot d(\sin x) = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x.$

7. $\int \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot dx = \int \frac{2}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot dx = \frac{1}{2}\int \sin x \cdot dx = -\frac{1}{2}\cos x + c.$

8. $$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + c$$

Метод підстановки

1. $\int \frac{dx}{(5x-3)^3} = \begin{Bmatrix} t = 5x-3 \\ dt = 5dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{5 \cdot (-2)} + c = -\frac{1}{10}(5x-3)^{-2} + c.$

2. $\int \sin^7 x \cos x \, dx = \begin{Bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x \, dx \end{Bmatrix} = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + c = \frac{\sin^8 x}{8} + c.$

3. $\int \frac{x^2}{4x^3+1} dx = \begin{Bmatrix} t = 4x^3+1 \\ dt = 12x^2 dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{12}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{12}\ln t + c = \frac{1}{12}\ln(4x^3+1) + c.$

4. $$\int \frac{7}{\cos^2(3x-2)} dx = \begin{Bmatrix} t = 3x-2 \\ dt = 3dx \end{Bmatrix} = \frac{7}{3}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{7}{3}\operatorname{tg} x + c =$$
$$= \frac{7}{3}\operatorname{tg}(3x-2) + c.$$

5. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \begin{Bmatrix} t = 2\sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{Bmatrix} = \int e^t \, dt = e^t + c = e^{2\sqrt{x}} + c.$

6. $$\int \operatorname{ctg}(5x+1) \, dx = \int \frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)} dx = \begin{Bmatrix} t = \sin(5x+1) \\ dt = 5\cos(5x+1) \, dx \end{Bmatrix} =$$
$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln t + c = \frac{1}{5}\ln|\sin(5x+1)| + c.$$

$$7. \int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \left\{ \begin{matrix} t = 1+\ln x\,, dt = \dfrac{dx}{x}, \\ \alpha = 1+\ln 1 = 1, \beta = 1+\ln e^3 = 4 \end{matrix} \right\} = \int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}\Big|_1^4 =$$

$$= 2(\sqrt{4}-\sqrt{1}) = 2(2-1) = 2.$$

$$8. \int\limits_0^1 \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}dx + \int\limits_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \left\{ \begin{matrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ \alpha = 1, \beta = 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t^2} = \arctan x|_0^1 - \frac{1}{2t}\Big|_1^2 =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{1}{4} = \frac{\pi+1}{4}.$$

$$9. \int\limits_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x\, dx = 2\int\limits_0^{\pi/2} \cos^6 x \sin 2x\, dx = \left\{ \begin{matrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx, \\ \alpha = \cos 0\,, \beta = \cos \pi/2 \end{matrix} \right\}$$

$$= -\int_1^0 t^6 d\,t = -t^7|_1^0 = -(0-1) = 1.$$

$$10. \int\limits_1^e \frac{dx}{x(\ln^2 x+1)} = \left\{ \begin{matrix} t = \ln x, dt = \dfrac{dx}{x} \\ \alpha = \ln 1, \beta = \ln e \end{matrix} \right\} = \int\limits_0^1 \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t|_0^1 =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Інтегрування по частинам

$$1. \int x \operatorname{arctg} x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = arctg(x), du = \dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv = xdx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{x^2+1}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}(x - \operatorname{arctg} x) + c.$$

2. $\int \ln x\, dx = \begin{cases} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, v = x \end{cases} =$

$$= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

3. $\int x^2 e^{-x} dx = \begin{cases} u = x^2, du = 2xdx \\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{x} \end{cases} = -x^2 e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx =$

$$= \begin{cases} u = x; du = dx \\ dv = e^{-x}dx; v = -e^{x} \end{cases} = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) =$$

$$= -x^2e^{-x} + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) + c.$$

4. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \begin{cases} u = x, du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}, v = \operatorname{tg} x \end{cases} = x\operatorname{tg} x|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \operatorname{tg} x\, dx =$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) - \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx == \begin{cases} t = \cos x, dt = -\sin x\, dx \\ \alpha = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}, \beta = \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$= \frac{2\pi}{3}\sqrt{3} + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

5. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx = \begin{cases} u = \operatorname{arctg}\sqrt{x}, du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ dv = dx, v = x \end{cases} =$

$$= x\operatorname{arctg}\sqrt{x}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} = \operatorname{arctg} 1 - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x} =$$

$$= \begin{cases} t = \sqrt{x}, x = t^2 \\ dx = 2tdt, \alpha = 0, \beta = 1 \end{cases} = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \frac{t^2dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 dt + \int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} - t|_0^1 + \operatorname{arctg} t|_0^1 = \frac{\pi}{4} - 1 + \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Невласні інтеграли

1. Знайти $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ в залежності від λ .

Перший випадок $\lambda \neq 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{t\to+\infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\bigg|_1^t = \frac{1}{1-\lambda}\lim_{t\to+\infty}\left(t^{1-\lambda}-1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda-1}, \lambda > 1 \\ +\infty, \lambda < 1. \end{cases}$$

Другий випадок $\lambda = 1$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t\to+\infty} \ln x|_1^t = \lim_{t\to+\infty} (\ln t - \ln 1) = +\infty.$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ збігається при $\lambda > 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \frac{1}{\lambda-1}$ і розбігається при $\lambda \leq 1$ $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = +\infty$.

2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}} dx$.

Скористаємось теоремою 1 для невласних інтегралів першого роду.

Легко побачити, що при $1 \leq x \leq +\infty$

$$\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}} > \frac{x}{\sqrt[3]{x^5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Але $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty$ (дивись попередній приклад). Отже, так як інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ є розбіжним і $\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}} > \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, то інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}} dx$ теж є розбіжним.

3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+7}}$.

Скористаємось теоремою 2 для невласних інтегралів першого роду. Так як $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+7}} = 1$ і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ є збіжним, тому що $\lambda = 3/2 > 1$ (дивись приклад 1), то невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+7}}$ також збіжний.

4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos^3 x}{x^4} dx$. Підінтегральна функція в області інтегрування змінює знак. Причому $\left|\frac{\cos^3 x}{x^4}\right| \leq \left|\frac{1}{x^4}\right|$ і невласний інтеграл

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ збігається ($\lambda = 4 > 1$). Отже, за теоремою 3 для невласних інтегралів першого роду інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^3 x}{x^4}dx$ також є збіжним.

5. Обчислити $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$.

В середині області інтегрування в точці $x = 0$ підінтегральна функція має розрив другого роду. Тобто треба обчислити невласний інтеграл другого роду.

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to -0}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x^3} + \lim_{t\to +0}\int_{t}^{1}\frac{dx}{x^3}.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3} = \lim_{t\to -0}\int_{-1}^{t}\frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{t\to -0}\frac{1}{x^2}\bigg|_{1}^{t} = \infty.$$

Інтеграл $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}$ розбігається. Отже, інтеграл $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$ розбігається:

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = \infty.$$

Зауважимо, що якщо б обчислювати даний інтеграл, не звертаючи уваги на те, що функція $\frac{1}{x^3}$ має в нулі розрив другого роду, то отримали б неправильний результат 2.

6. Обчислити $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Всередині області інтегрування в точці $x = 1$ підінтегральна функція має розрив другого роду. Тобто треба обчислити невласний інтеграл другого роду.

$$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \int_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} + \lim_{t\to 1+0}\int_{t}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{t\to 1-0}\int_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\frac{3}{2}\lim_{t\to 1-0}\sqrt[3]{(1-x)^2}\bigg|_{0}^{t} = -\frac{3}{2}(0-1) = \frac{3}{2};$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \lim_{t\to 1+0}\int_t^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = -\frac{3}{2}\lim_{t\to 1-0}\sqrt[3]{(1-x)^2}\Big|_t^2 = -\frac{3}{2}(1-0) = -\frac{3}{2}.$$

Таким чином, інтеграл збігається,

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}} = \frac{3}{2}-\frac{3}{2} = 0.$$

7. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ в залежності від λ.

Перший випадок $\lambda \neq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{d(b-x)}{(b-x)^\lambda} = -\lim_{t\to b-0}\frac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_a^t$$

$$= \lim_{t\to b-0}\left(\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{(b-t)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \begin{cases}\dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, \lambda < 1 \\ \infty, \lambda > 1\end{cases}.$$

Другий випадок $\lambda = 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{b-x} = -\lim_{t\to b-0}\ln(b-x)|_a^t = \ln(b-a) - \lim_{t\to b-0}\ln(b-t) = \infty.$$

Отже, невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ збігається при $\lambda > 1$ і розбігається при $\lambda \leq 1$.

8. Знайти площу, що утворюють криві функції $y = \frac{1}{1+x^2}$ і $x = 0$.

За означенням інтегралу площа фігури буде дорівнювати невласному інтегралу першого роду:

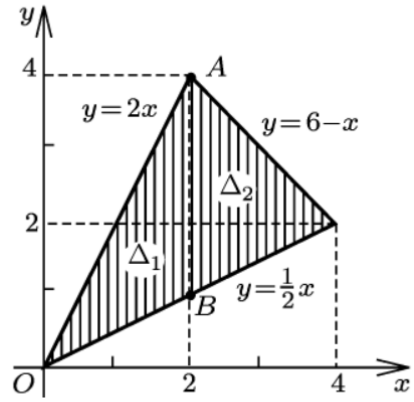
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_{-\infty}^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t - \lim_{t\to-\infty}\operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Кратні інтеграли

1. Обчислити

$$\iint_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\,ds,$$

якщо S – трикутник, обмежений прямими $x = 2y, y = 2x, x + y = 6$.



$$\iint\limits_S \frac{1}{(1+x+y)^2}ds = \iint\limits_S \frac{1}{(1+x+y)^2}\cdot dx\cdot dy =$$

$$= \iint\limits_{\Delta_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy + \iint\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy =$$

$$= I_1 + I_2.$$

$$I_1 = \iint\limits_{\Delta_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_0^2 dx \int\limits_{x/2}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\cdot dy = \int\limits_0^2 \left(-\frac{dx}{1+x+y}\right)\Big|_{x/2}^{2x}$$

$$= \int\limits_0^2 \left(-\frac{dx}{1+3x} + \frac{dx}{1+3\,x/2}\right) = -\frac{1}{3}\ln 7 + \frac{2}{3}\ln 4.$$

$$I_2 = \iint\limits_{\Delta_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \int\limits_2^4 dx \int\limits_{x/2}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}\cdot dy =$$

$$= \int\limits_2^4 \left(-\frac{dx}{1+x+y}\right)\Big|_{x/2}^{6-x} = \int\limits_2^4 \left(-\frac{dx}{7} + \frac{dx}{1+3\,x/2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{7} + \frac{2}{3}(\ln 7 - \ln 4).$$

Отже,

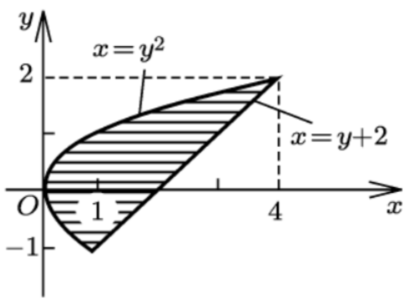
$$\iint\limits_S \frac{1}{(1+x+y)^2}ds = I_1 + I_2 = \frac{1}{3}\ln 7 - \frac{2}{7}.$$

2. Обчислити

$$\iint\limits_S y^2 ds,$$

якщо множина S, обмежена лініями $x = y^2, y = 2x,\ y = x - 2$.

$$\iint\limits_S y^2 ds = \iint\limits_S y^2 dxdy = \int\limits_{-1}^{2} dy \int\limits_{y^2}^{y+2} y^2 dx == \int\limits_{-1}^{2} y^2(y+2-y^2)dy = \frac{63}{20}.$$



Отже,

$$\iint\limits_S y^2 ds = \frac{63}{20}.$$

3. Обчислити

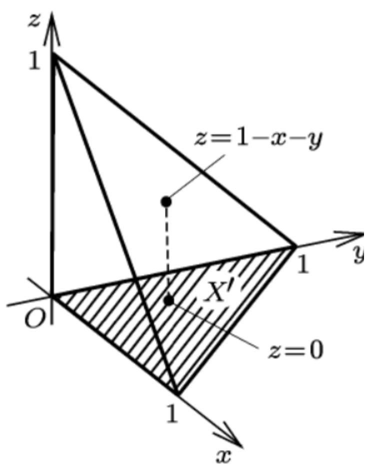
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\, dy.$$

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 \sqrt[4]{1-y^2}\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y \sqrt[4]{1-y^2}\, dx = \int\limits_0^1 \sqrt[4]{1-y^2} y dy = \frac{2}{5}.$$

4. Обчислити

$$\iiint\limits_V (x+y+z)dV,$$

де множина V обмежена площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$.



$$\iiint\limits_V (x+y+z)dV = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \frac{1}{2}(x+y+z)^2\Big|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-(x+y)^2)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(y - \frac{1}{3}(x+y)^3\right)\Big|_0^{1-x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1 - x - \frac{1}{3}(1-x^3)\right)dx = \frac{1}{8}.$$

5. Обчислити

$$\iiint\limits_V y dV,$$

де множина V обмежена $|x| \le 0,\ 0 \le z \le 1,\ x^2+y^2+z^2 \le 4$.

$$\iiint\limits_V y dV = \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_z^{\sqrt{4-x^2-z^2}} y dy =$$

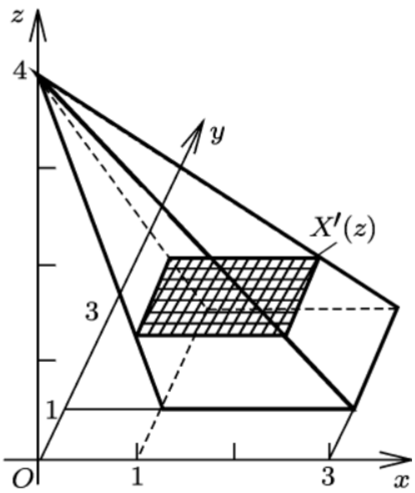
$$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} \frac{1}{2} y^2 \Big|_z^{\sqrt{4-x^2-z^2}} dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dz \int\limits_{-z}^{z} (4 - x^2 - 2z^2) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left((4 - 2z^2)x - \frac{1}{3}x^3 \right)\Big|_{-z}^{z} dz = \int\limits_0^1 \left(4z - \frac{7}{3}z^3 \right) dz = \frac{17}{12}.$$

5. Обчислити

$$I = \iiint\limits_V \frac{dV}{(x+y+z)^3},$$

де множина V обмежена площинами $4x + 3z = 12$, $4x + z = 4$, $4y + 3z = 12$, $4y + z = 4$, $z = 0$.



$$I = \int\limits_0^4 dz \int\limits_{X'(z)} \frac{dxdy}{(x+y+z)^3} =$$

$$= \int\limits_0^4 dz \int\limits_{1-z/4}^{3-3z/4} dx \int\limits_{1-z/4}^{3-3z/4} \frac{dy}{(x+y+z)^3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^4 dz \int\limits_{1-z/4}^{3-3z/4} \Big(\frac{1}{(x+3+z/4)^2}$$

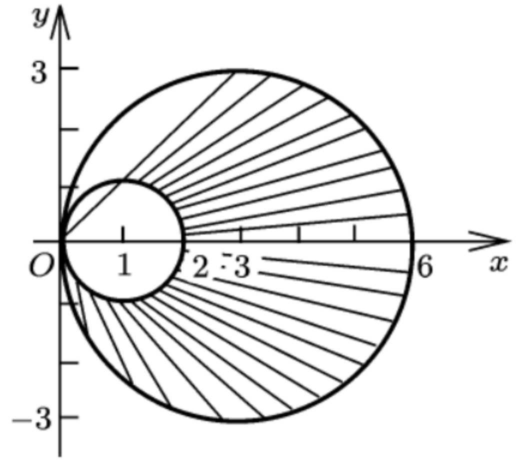
$$- \frac{1}{(x+3+z/4)^2} \Big) dx =$$

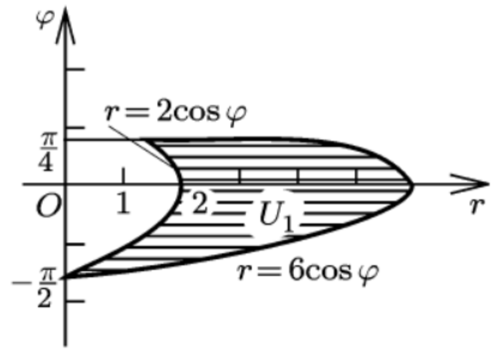
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^4 \left(\frac{1}{6 - z/2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2 + z/2} \right) dz = \ln 3 - 1.$$

6. Обчислити

$$I = \int\limits_X x dx dy\,, \;\; X = \{2x \le x^2 + y^2 \le 6x, y \le x\}.$$

Множина не являється елементарним відносно осей. Перехід до повторного інтегралу в декартових координатах потребує розбиття на декілька елементарних множин. Введення полярних координат спрощує вид області, а само $U = \{-\pi/2 \le \varphi \le \pi/4\,,\ 2\cos\varphi \le r \le 6\cos\varphi\}$.





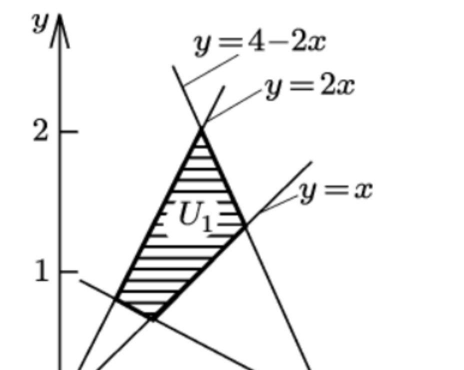
$$I = \int\limits_X x dxdy = \int\limits_U r^2\cos\varphi\, dr\, d\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos\varphi\, d\varphi \int\limits_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} r^2 dr$$

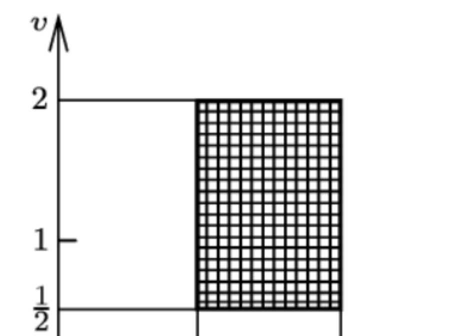
$$= \frac{208}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^4\varphi\, d\varphi = \frac{13}{6}(9\pi + 8).$$

7. Обчислити

$$I = \int\limits_X \frac{1}{y} dxdy\,,\ X = \left\{y = x, \quad y = 2x, \quad y = 1 - \frac{x}{2}, \quad y = 4 - 2x\right\}.$$

Рівняння ліній, що обмежує чотирикутник, напишемо у вигляді$y/x = 1$, $y/x = 2,\ y/(2-x) = 1/2\,,\ y/(2-x) = 2$. Замінимо змінні за формулами $u = y/x\,,\ v = y/(2-x)$. Тоді, образом області інтегрування буде прямокутник.





$$x = \frac{2v}{u+v}, \qquad y = \frac{2uv}{u+v},\ J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = -\frac{4uv}{(u+v)^3}, \qquad |J| = \frac{4uv}{(u+v)^3}.$$

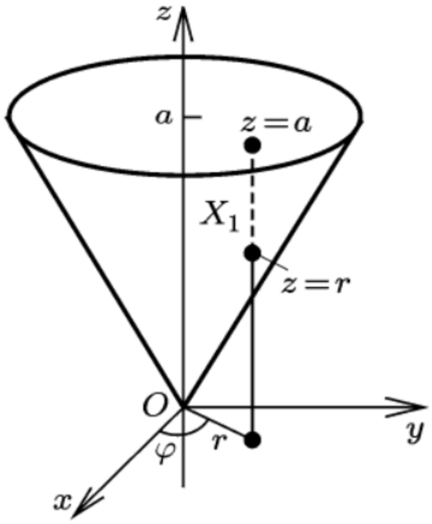
$$I=\int\limits_U \frac{u+v}{2uv}\cdot\frac{4uv}{(u+v)^3}dudv = 2\int\limits_{1/2}^{2} dv\int\limits_{1}^{2}\frac{du}{(u+v)^2} = 2\int\limits_{1/2}^{2}\left(\frac{1}{1+v}-\frac{1}{2+v}\right)dv$$

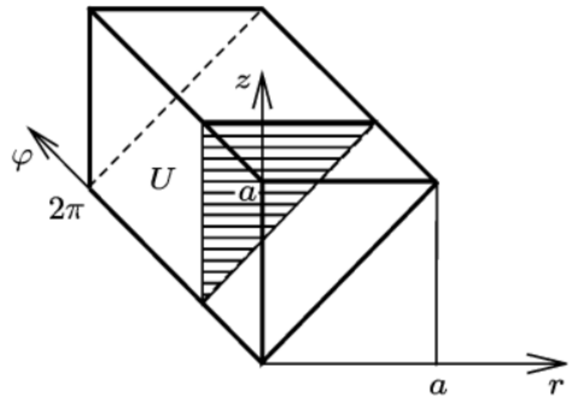
$$= 2\ln 5/4.$$

8. Обчислити

$$I=\int\limits_X \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz\,,\ \ X=\left\{\sqrt{x^2+y^2}\le z\le a\right\}.$$

Перейдем в циліндричну систему координат $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi\,, z=z, U=\{0\le\varphi\le 2\pi,\ 0\le r\le z\le a\}$ – призма.





$$I=\int\limits_U \frac{r^2}{\sqrt{r^2+z^2}}rdrd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{a} dz\int\limits_0^{z}\frac{r^3dr}{\sqrt{r^2+z^2}} = 2\pi\int\limits_0^{a}\frac{2-\sqrt{2}}{3}z^3dz =$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(2-\sqrt{2}\right)a^4.$$

9. Обчислити

$$I=\int\limits_X dxdydz\,,\ \ X=\{(x^2+y^2+z^2)^2\le 4xyz,\qquad x\ge 0,\qquad y\ge 0\,\}.$$

Перейдем в сферичну систему координат $x=r\cos\varphi\cos\psi,\ \ y=r\sin\varphi\cos\psi\,, z=r\sin\psi\,, r\ge 0, 0\le\varphi\le 2\pi, -\pi/2\le\psi\le\pi/2\ \ U$. Підстановка у заданих нерівностях дає

$$\begin{cases} r^4\le 4r^3\cos\varphi\sin\varphi\cos^2\psi\sin\psi \\ r\cos\varphi\cos\psi\ge 0,\ \ r\sin\varphi\cos\psi\ge 0. \end{cases}$$

Так як $r \geq 0, \cos\psi \geq 0$, то

$$\begin{cases} r \leq 2\sin 2\varphi \cos^2\psi \sin\psi \\ \cos\varphi \geq 0, \quad \sin\varphi \geq 0. \end{cases}$$

З другої та третьої нерівності знаходимо, що $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Перша нерівність має розв'язання тільки тоді, коли $\sin\psi \geq 0$, тобто $0 \leq \psi \leq \pi/2$. Відповідно, $U = \{0 \leq r \leq 2\sin 2\varphi \cos^2\psi \sin\psi,\ 0 \leq \varphi \leq \pi/2,\ 0 \leq \psi \leq \pi/2\}$.

$$I = \int_U r^2 \cos\psi \, dr d\varphi d\psi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\psi \, d\psi \int_0^{2\sin 2\varphi \cos^2\psi \sin\psi} r^2 dr$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \, d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^7\psi \sin^3\psi \, d\psi.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 2\varphi \, d\varphi = \begin{Bmatrix} \cos 2\varphi = t \\ dt = -2\sin 2\varphi \, d\varphi \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\int_1^{-1} (1 - t^2)dt = \frac{2}{3}.$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^7\psi \sin^3\psi \, d\psi = \begin{Bmatrix} \cos\psi = s \\ ds = -\sin\psi \, d\psi \end{Bmatrix} = \int_0^1 s^7(1 - s^2) \, ds = \frac{1}{40}.$$

$$I = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{40} = \frac{2}{45}.$$

Лінійні інтеграли

1. Обчислити лінійний інтеграл

$$I = \int_L (x + y)dl,$$

де L – межа трикутника з вершинами $O(0;\ 0), A(1; 0), B(1; 1)$.

Нехай – лінійні інтеграли I_1, I_2, I_3 по відрізкам AB, BO, OA, відповідно

$$I = \int_{\breve{AB}} (x + y)dl + \int_{\breve{BO}} (x + y)dl + \int_{\breve{OA}} (x + y)dl.$$

Так як відрізок AB задається рівнянням $x = 1, 0 \leq y \leq 1$, то

$$I_1 = \int\limits_{\breve{AB}} (x+y)dl = \int\limits_0^1 (y+1)\sqrt{1+x'(y)}dy = \int\limits_0^1 (y+1)dy = \frac{3}{2}.$$

Відрізок BO задається рівнянням $y = x, 0 \le x \le 1,$ то

$$I_2 = \int\limits_{\breve{BO}} (x+y)dl = \int\limits_0^1 (x+x)\sqrt{1+y'(x)}dx = 2\sqrt{2}\int\limits_0^1 xdx = \sqrt{2}.$$

Відрізок OA задається рівнянням $y = 0, 0 \le x \le 1,$ то

$$I_3 = \int\limits_{\breve{OA}} (x+y)dl = \int\limits_0^1 (x+0)\sqrt{1+y'(x)}dx = \int\limits_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{3}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}.$$

2. Обчислити лінійний інтеграл

$$I = \int\limits_L (ydx + xdy),$$

де L – крива з початком в точці з початком $O(0;\ 0)$ і кінцем в $A(1;1)$ по параболі $y = x^2$.

$$I = \int\limits_L (ydx + xdy) = \int\limits_0^1 (x^2dx + x \cdot 2xdx) = \int\limits_0^1 3x^2dx = 1.$$

3. Обчислити

$$I = \int\limits_L (x^2ydx - xy^2dy)$$

за допомоги формули Гріна де L – коло $x^2 + y^2 = R^2$ проти годинникової стрілки.

$$P = x^2y, \qquad Q = -xy^2, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -y^2.$$

Враховуючи формулу Гріна $\int_L\ (Pdx + Qdy) = \iint_S\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ маємо

$$I=\int\limits_L(x^2ydx-xy^2dy)=-\iint\limits_S(x^2+y^2)\,dxdy=-\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r^3=-\frac{\pi R^4}{2}.$$

4. Знайти площу фігури, обмеженої астроїдою $x=a\cos^3 t\,, y=a\sin^3 t\,,$ $0\le t\le 2\pi$

$$S=\iint\limits_G dxdy=\frac{1}{2}\int\limits_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\big(x(t)y'(t)-y(t)x'(t)\big)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}(\cos^2 t\sin^2 t+\sin^2 t\cos^2 t)dt=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t\,dt=$$

$$=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3\pi a^2}{8}.$$

Поверхні інтеграли

1. Обчислити інтеграл

$$I=\iint\limits_D\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

якщо D – циліндрична поверхня $x=r\cos u$, $y=r\sin u$, $z=v$, $0\le u\le 2\pi$, $0\le v\le H$.

$$\iint\limits_D f(x,y,z)ds=\iint\limits_S f(u,v)\sqrt{EG-F^2}dudv,$$

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=r^2,\qquad D=\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=1,$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=0.$$

$$\iint\limits_S\frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int\limits_0^{2\pi}du\int\limits_0^H\frac{rdv}{\sqrt{r^2+v^2}}=2\pi r\int\limits_0^H\frac{dv}{\sqrt{r^2+v^2}}=$$

$$=2\pi r\ln\frac{H+\sqrt{r^2+H^2}}{r}.$$

2. Обчислити інтеграл

$$I = \iint\limits_{D} z^2 ds,$$

якщо D – повна поверхня конуса $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$.

Нехай D_1 – бічна поверхня конуса, D_2 – його основа. Тоді

$$I = \iint\limits_{D_1} z^2 ds_1 + \iint\limits_{D_2} z^2 ds_2.$$

На бічної поверхні конуса

$$\iint\limits_{D} f ds = \iint\limits_{S} f\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy.$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

$$\iint\limits_{D_1} z^2 ds_1 = \sqrt{2} \iint\limits_{x^2+y^2 \le 4} (x^2 + y^2) dxdy = \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{H} r^3 dr = 8\sqrt{2}\pi.$$

На основі конуса $z = 2$. Тому, підінтегральна функція дорівнює 4.

$$\iint\limits_{D_2} z^2 ds_2 = 4 \iint\limits_{D_2} dxdy = 4 \cdot \pi \cdot 2^2 = 16\pi.$$

Отже, $I = 8\sqrt{2}\pi + 16\pi = 8\pi\big(2 + \sqrt{2}\big)$.

3. Обчислити інтеграл

$$I = \iint\limits_{D} z dxdy,$$

якщо D – нижня сторона конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2,\ 0 < z \le H$.

$$\iint\limits_{D} z dxdy = -\iint\limits_{x^2+y^2 \le H^2} \sqrt{x^2 + y^2} dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{H} r^2 dr = -\frac{2}{3}\pi H^3.$$

Задачі на інтегральне числення

Обчислити інтеграли.

7.1. $\int_1^2 x dx.$

7.2. $\int_{-2}^2 dx.$

7.3. $\int_4^9 \sqrt{x} dx.$

7.4. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

7.5. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}.$

7.6. $\int_1^2 \frac{dx}{x}.$

7.7. $\int_0^{\pi/3} \sin x\, dx.$

7.8. $\int_0^{\pi/6} \cos x\, dx.$

7.9. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

7.10. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$

7.11. $\int_0^2 e^x dx.$

7.12. $\int_0^1 (x-2) dx.$

7.13. $\int_1^{-2} x^2 dx.$

7.14. $\int_0^{\pi/4} \cos^{-2} x\, dx.$

7.15. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx.$

7.16. $\int_1^2 x^{-2} dx.$

7.17. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^{-2} x\, dx$

7.18. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

7.19. $\int_{-4}^4 \frac{dx}{2}.$

7.20. $\int_{99}^{99} e^{\sqrt{x}} dx.$

7.21. $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$

7.22. $\int_1^3 x^3 dx$

7.23. $\int_0^1 2^x dx$

7.24. $\int_0^4 x^{3/2} dx$

Знайти інтеграли заміною змінною.

7.25. $\int \sin(3x+1)\, dx.$

7.26. $\int \sqrt[5]{(2x-1)^2} dx.$

7.27. $\int e^{-6x} dx.$

7.28. $\int (2x-3)^6 dx.$

7.29. $\int 2^{-7x}\, dx.$

7.30. $\int (3x+5)^7 dx.$

7.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}.$

7.32. $\int \frac{dx}{5x-1}.$

7.33. $\int \cos^{-2} 4x\, dx.$

7.34. $\int e^{-6x+2}\, dx.$

7.35. $\int \frac{dx}{2x+5}.$

7.36. $\int 3^{4x+1} dx.$

7.37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}.$

7.38. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

7.39. $\int 2^{-3x}\, dx.$

7.40. $\int \sqrt[3]{(2-3x)^5} dx.$

7.41. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}.$

7.42. $\int \sin 5x\, dx.$

7.43. $\int \frac{x dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

7.44. $\int \frac{dx}{25x^2-1}$

7.45. $\int x^{-1/2} 3^{\sqrt{x}} dx$

7.46. $\int \cos^4 x\, dx$

7.47. $\int \frac{x dx}{\sqrt{25x^2-9}}$

7.48. $\int \sin x\, e^{-\cos x} dx$

Обчислити інтеграли використовував метод заміни змінної.

7.49. $\int_0^{1/3} e^{-3x} dx.$

7.50. $\int_0^{\pi/3} \sin 3x\, dx.$

7.51. $\int_0^{\pi/9} \cos 3x\, dx.$

7.52. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx.$ 7.53. $\int_1^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx.$ 7.54. $\int_0^{\pi/12} \frac{1}{\cos^2 3x}dx.$

7.55. $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx.$ 7.56. $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos x\, dx.$ 7.57. $\int_0^2 e^x(e^{-x}+1)dx.$

7.58. $\int_0^{\pi/4} \mathrm{tg}^2\, x\, dx.$ 7.59. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}dx.$ 7.60. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx.$

7.61. $\int_0^{\pi/3} \mathrm{tg}\, x\, dx.$ 7.62. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx.$ 7.63. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\, dx.$

7.64. $\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{1-x^2}.$ 7.65. $\int_2^3 \frac{x^3-x^2+1}{x-1}dx.$ 7.66. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx.$

7.67. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx.$ 7.68. $\int_0^{\pi/2} \sin x\, e^{-\cos x}dx.$ 7.69. $\int_0^{\pi/6} \cos x\, e^{\sin x}dx.$

7.70. $\int_{\pi/12}^{\pi/6} \sin^{-2} 3x\, dx.$ 7.71. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\, dx.$ 7.72. $\int_0^{1/2} \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

Обчислити інтеграли за формулою інтегрування частинами.

7.73. $\int_0^{\pi/3} x \sin x\, dx.$ 7.74. $\int_0^{\pi/6} x \cos x\, dx.$ 7.75. $\int_1^e \ln x\, dx.$

7.76. $\int_1^2 x \ln x\, dx.$ 7.77. $\int_0^1 x^2 e^x dx\,.$ 7.78. $\int_1^e x 2^x dx.$

7.79. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x)\, dx$ 7.80. $\int_1^e \ln^2 x\, dx$ 7.81. $\int_0^1 \mathrm{arctg}\, x\, dx.$

7.82. $\int_0^1 \arccos x\, dx.$ 7.83. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{xdx}{\sin^2 x}.$ 7.84. $\int_0^1 xe^{-x}dx.$

7.85. $\int_1^{10} \lg x\, dx$ 7.86. $\int_0^1 x\, \mathrm{arctg}\, x\, dx.$ 7.87. $\int_0^{\pi} \frac{xdx}{\cos^2 x/4}$

Обчислити невласні інтеграли.

7.88. $\int_{-\infty}^4 \frac{dx}{4+x^2}.$ 7.89. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}.$ 7.90. $\int_1^3 \frac{xdx}{x^2-1}.$

7.91. $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$ 7.92. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 7.93. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

7.94. $\int_{0,5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}.$ 7.95. $\int_4^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ 7.96. $\int_1^{\infty} e^{-x}dx.$

7.97. $\int_0^{\pi/2} \mathrm{tg}\, x\, dx.$ 7.98. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx.$ 7.99. $\int_e^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3 x}}.$

7.100. $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 7.101. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}.$ 7.102. $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

7.103. $\int_0^{\infty} x \sin x\, dx.$ 7.104. $\int_0^1 \ln x\, dx.$ 7.105. $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

Визначити середнє значення функцій в інтервалі.

7.106. $f(x) = x^2$ на $[0;\ 1]$.

7.107. $f(x) = \sqrt{x}$ на $[0;\ 100]$.

7.108. $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ на $[0;\ 2\pi]$.

7.109. Сила струму в ланцюгу змінюється по закону $i = i_0 \sin 2\pi t/T$, де i_0 – амплітуда, T – період коливань, t – час. Знайти середнє значення за період коливань квадрата сили струму.

7.110. Через провідник тече струм $i = i_0 e^{-\lambda t}$. Який сумарний заряд пройде через провідник за час від 0 до t_0

7.111. Знайти середню потужність, яка виділиться на опорі $R = 100$ Ом за період коливання $T = 0{,}02$ та напруженні $u(t) = 311 \cdot \cos 100\pi t$, якщо миттєва потужність дорівнює $P = u^2/R$.

7.112. Нехай сила змінюється з відстанню x за законом $F = 100x$. Яку роботу потрібно виконати проти сили F, щоб змінити положення даної точки з 0 до 10.

7.113. Швидкість кровотоку з часом змінюється за законом $v = 3 + 0{,}2t + 1{,}5\sin 2\pi t$. З точністю одна сота знайти середню швидкість за інтервал часу від 0 до 10.

7.114. З точністю одна сота знайти масу речовини, яку було введено пацієнту за проміжок часу від 0 до 3, якщо швидкість введення змінювалася за законом $v = 10e^{-0{,}2t}$.

7.115. Знайти об'єм виготовленої – продукції за 6 годин, якщо продуктивність праці задається функцією $f(t) =- t^2 + 10t$ одиниць за годину.

Знайти площу фігури, що обмежують лінії.

7.116. $y = x^2;\ y = 6 - x;\ y = 0.$

7.117. $y = x - 2;\ \frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1;\ y = 0.$

7.118. $y = x^2 + 3x + 2;\ y = 5x + 2.$

7.119. $y = -2x^2 + 12x;\ y = 0.$

7.120. $x^2 - y^2 = 9; x = -5; x = 5.$

7.121. $y = -x^2 + 6x;\ y = 0.$

7.122. $y = -x^2 - 6x - 5; y + x + 5 = 0$

7.123. $y = \frac{2}{1+x^2};\ x = -2; x = 2.$

7.124. $y = x^2;\ xy = 8;\ x = 6.$

7.125. $y = 4x - x^2; y\ = 0.$

7.126. $x = y^2; y = x^2.$

7.127. $y = -x^2 + 8x; y = x^2 - 4x + 2.$

Знайти інтеграли від раціональних функцій.

7.128. $\int \frac{dx}{x^2-25}$

7.129. $\int \frac{dx}{x^2+9}$

7.130. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$

7.131. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13}$

7.132. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}.$

7.133. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx.$

7.134. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$

7.135. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2} dx$

7.136. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

7.137. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}$

7.138. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

7.139. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

7.140. $\int \sin^2 3x\, dx.$

7.141. $\int (1 + 2\cos x)^2 dx.$

7.142. $\int (1 - \sin 2x)^2 dx.$

7.143. $\int \cos^4 x\, dx.$

7.144. $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$

7.145. $\int \sin^4 x \cos^4 x\, dx.$

7.146. $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$

7.147. $\int \sin^5 x\, dx.$

7.148. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$

7.149. $\int \sin^3 x \cos^3 x\, dx.$

7.150. $\int \cos^7 x\, dx$

7.151. $\int (1 + 2\cos x)^3 dx.$

7.152. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx.$

7.153. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx.$

7.154. $\int \frac{dx}{\sin 2x.}$

7.155. $\int \frac{dx}{\sin x.}$

7.156. $\int \frac{dx}{\cos x.}$

7.157. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x} dx.$

7.158. $\int \frac{dx}{\sin x - \cos x.}$

7.159. $\int \mathrm{tg}^3 x\, dx.$

7.160. $\int \mathrm{ctg}^3 x\, dx.$

7.161. $\int \sin 3x \cos 5x\, dx.$

7.162. $\int \cos mx \cos nx\, dx.$

7.163. $\int \sin 3x \sin 5x\, dx.$

7.164. $\int \sin mx \sin nx\, dx.$

7.165. $\int \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx.$

7.166. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

7.167. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$

7.168. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}.$

7.169. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

7.170. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}.$

7.171. $\int \sqrt{4-x^2}\, dx.$

7.172. $\int x^2\sqrt{4-x^2}\, dx.$

7.173. $\int x^2/\sqrt{4-x^2}\, dx.$

Обчислити подвійні інтеграли по прямокутним областям D.

7.174. $\iint_D xydxdy, 0 \le x \le 1, 0 \le x \le 2.$

7.175. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2} dxdy, 0 \le x \le 1, 0 \le x \le 1.$

7.176. $\iint_D x \sin(x+y)\, dxdy,\ 0 \le x \le \pi, 0 \le x \le \pi/2.$

7.177. $\iint_D x^2 y \cos xy^2\, dxdy, 0 \le x \le \pi/2, 0 \le x \le 2.$

7.178. $\iint_D\ e^{x-y} dxdy,\ \ x = -1, x = 1, y = x, y = 2x.$

7.179. $\iint_D\ (x \sin y + y \cos x) dxdy,\ D = [0;\ \pi/2] \times [0;\ \pi/2].$

7.180. $\iint_D\ \frac{y}{x} dxdy,\ D = \{0 < x,\ x^3 \le y \le x^2\}.$

7.181. $\iint_D\ x^2y^2 dxdy,\ \ x = y^2, x = 1.$

7.182. $\iint_D\ xy^2 dxdy,\ D = \{x^2 + y^2 \le a^2,\ x \ge 0\}.$

7.183. $\iint_D\ (x+2y) dxdy,\ \ y = x, y = 2x, x = 2, x = 3.$

Обчислити інтеграли.

7.184. $\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{x}} dy$

7.185. $\int_2^4 dx \int_x^{2x} \frac{y}{x} dy$

7.186. $\int_1^2 dy \int_0^{\ln y} e^x dx$

7.187. $\int_1^2 dx \int_{1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy$

7.188. $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 dz$

7.189. $\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c (x+y+z) dz$

7.190. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y xyzdz$

7.191. $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^3zdz$

7.192. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y = 0{,}5x - 2$ між точками $A(0, -2)$ і $B(4, 0)$.

7.193. $\int_L xydl$, де L – контур прямокутника з вершинами $A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2)$.

7.194. $\int_L ydl$, де L – парабола $y^2 = 2px$ прямокутника з вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2)$.

7.195. $\int_L \sqrt{2y}dl$, де L – перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(t - \cos t)$.

7.196. $\int_L \frac{z^2}{x^2+y^2} dl$, L – перший виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$.

7.197. $\int_L \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dl$, де L – перший виток гвинтової конічної лінії $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = t$

7.198. $\int_L xdy$, де L – контур трикутника, сторони якого складаються осями координат і прямою $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ в додатному напрямку.

7.199. $\int_{(0,\ 0)}^{(1,\ 1)} 2xydx + x^2dy$ вздовж лініq: 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^4$, 4) $y^2 = x$.

7.200. $\oint_L ydx + xdy$, де L – еліпс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в додатному напрямку.

7.201. $\int_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y+2z}}$ вздовж прямої.

7.202. $\int_L yzdx + zxdy + xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at/2\pi$, від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = a$.

7.203. $\int_L xdx + ydy + (x + y + 1)dz$, де L – відрізок прямої від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

7.204. $\int_L \frac{x^2dy+y^2dz}{x^{5/3}+y^{5/3}}$, де L – четверть астроїди $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$ від точки $(r,\ 0)$ до точки $(0, r)$.

7.205. Знайти та намалювати лінії рівня скалярних полів: 1) $u = 4x^2 + y^2$; 2) $u = x^2 - y^2$; 3) $u = y^2 - x$.

7.206. Знайти поверхні рівня скалярних полів: 1) $u = xy$; 2) $u = \sqrt{9 - x^2 - 3y^2}$; 3) $u = x^2 + y^2 - 4z^2$; 4) $u = (x^2 + y^2)/z$.

7.207. Знайти поверхні рівня скалярного поля $u = e^{x^2+y^2}$.

7.208.Знайти поверхні рівня скалярного поля $u = \frac{z}{x^2+y^2}$. Виділити поверхню рівня, що проходить через точку $M_0(1, 2, 2)$.

7.209. Знайти поверхні рівня функції $u = \ln\frac{1+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{1-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

7.210.Знайти поверхні рівня функції: 1) $u = 5^{2x+3y-z}$; 2) $u = \mathrm{tg}(x^2 + y^2 - 2z^2)$.

7.211.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$, $a, b, c - const$.

7.212.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$, $\omega - const$.

7.213.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} + h\boldsymbol{k}$, $\omega, h - const$.

7.214.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = (y + z)\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} - x\boldsymbol{k}$.

7.215.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = (z - y)\boldsymbol{i} + (x - z)\boldsymbol{j} + (y - x)\boldsymbol{k}$.

7.216.Знайти векторні лінії поля $\boldsymbol{F} = x(y^2 - z^2)\boldsymbol{i} - y(z^2 + x^2)\boldsymbol{j} + z(x^2 + y^2)\boldsymbol{k}$.

7.217.Знайти лінії векторного поля $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_r + \varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ у циліндричній системі координат.

7.218. Знайти лінії векторного поля $\boldsymbol{a} = \frac{2\alpha\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\alpha}{r^2}\boldsymbol{e}_\theta$ $\alpha - const$ у сферичній системі координат.

7.219. Знайти лінії векторного поля $\boldsymbol{a} = r^2\boldsymbol{e}_r + 2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$ у сферичній системі координат.

7.220. Знайти лінії векторного поля $\boldsymbol{E} = \frac{e}{r^3}\boldsymbol{r}$.

7.221. Знайти потік і циркуляцію сталого вектора $\boldsymbol{a}$ вздовж будь-якої замкнутої кривої L.

7.222. Знайти потік і циркуляцію векторного поля $a\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ вздовж будь-якої замкнутої кривої L.

7.223. Знайти потік і циркуляцію векторного поля $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ вздовж будь-якої замкнутої кривої L.

7.224. Знайти потік і циркуляцію векторного поля $\boldsymbol{F} = (x^3 - y)\boldsymbol{i} + (y^3 + x)\boldsymbol{j}$ вздовж кола радіусом R з центром в початку координат.

7.225. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$: 1) через бічну поверхню конуса; 2) через його основу.

7.226. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{i}yz + \boldsymbol{j}xz + \boldsymbol{k}xy$: 1) через бічну поверхню циліндра $x^2 + y^2 \leq a$ $(0 \leq z \leq h)$; 2) через повну поверхню циліндра.

7.227. Знайти потік векторного поля Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{i}x + \boldsymbol{j}y + \boldsymbol{k}z$ через померхніть $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ $(0 \leq z \leq 1)$.

7.228. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ через додатний октант сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

7.229. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ через додатний октант сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

7.230. Знайти потік векторного поля $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ через повну поверхню піраміди, яка обмежена площинами $x = 0,\ y = 0, z = 0, x + y + z = a$ $(a > 0)$.

7.231. Знайти циркуляцію радіус-вектора вздовж одного ґвинта ґвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$.

7.232. Знайти роботу поля $\boldsymbol{F} = \frac{1}{y}\boldsymbol{i} + \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{1}{x}\boldsymbol{k}$ вздовж прямої відрізка, що сполучує точки $M(1,1,1)$ і $N(2,4,8)$.

7.233. Знайти роботу поля $\boldsymbol{F} = e^{y-z}\boldsymbol{i} + e^{z-x}\boldsymbol{j} + e^{x-y}\boldsymbol{k}$ вздовж прямої відрізка, що сполучує точки $O(0,0,0)$ і $N(1,3,5)$.

7.234. Знайти циркуляцію поля $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ $(c - const)$ вздовж кола: 1) $x^2 + y^2 = 1, z = 0$; 2) $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

7.235. Показати, що поле потенційне $\boldsymbol{F} = yz(2x + y + z)\boldsymbol{i} + xz(x + 2y + z)\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\boldsymbol{k}$ і знайти потенціал поля.

7.236. Знайти потенціал гравітаційного поля $\boldsymbol{F} = -\frac{m}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$.

Контрольні питання

1. Що таке визначений інтеграл?
2. Властивості визначеного інтегралу.
3. Обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона-Лейбніца.
4. Сформулюйте інтегральну теорему про середнє?
5. Що таке невизначений інтеграл?

6. Властивості невизначеного інтегралу.
7. Невизначені інтеграли простіших елементарних функцій.
8. Формула інтегрування частинами.
9. Інтегрування раціональних функцій.
10. Інтегрування тригонометричних функцій.
11. Інтегрування ірраціональних функцій.
12. Що таке невласний інтеграл І-го та ІІ-го роду?
13. Умови збіжності невласних інтегралів.
14. Як обчислювати невласні інтеграли?
15. Що таке подвійний і потрійний інтеграл?
16. Заміна змінної в кратних інтегралах.
17. Перехід від кратного інтеграла до повторних.
18. Що таке лінійний інтеграл І-го та ІІ-го роду?
19. Властивості лінійних інтегралів І-го та ІІ-го роду.
20. Як обчислювати лінійні інтеграли І-го та ІІ-го роду?
21. Лінійні інтеграли І-го та ІІ-го роду по замкнутому контуру.
22. Що таке поверхневий інтеграл І-го та ІІ-го роду?
23. Як обчислювати поверхневі інтеграли І-го та ІІ-го роду?
24. Типи полів: потенціальне, соліноїдальне, гармонічне.
25. Основна теорема векторного аналізу (теорема Гельмгольца).
26. Циркуляція векторного поля.
27. Потік векторного поля.
28. Поверхня рівня скалярного поля.
29. Векторна лінія векторного поля.
30. Теорема Остроградського – Гауса.
31. Теорема Стокса і формули Кельвіна – Стокса і Гріна

РОЗДІЛ 8. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

8.1. Основні означення

Диференціальні рівняння широко використовуються для опису, моделювання та дослідження фізичних, хімічних, біологічних та економічних процесів. Нижче будуть розглянуті диференціальні рівняння та їх розв'язання, які найчастіше зустрічаються.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідні невідомої функції (або декількох невідомих функцій). Замість похідних можуть входити диференціали: $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої з похідних, які входять до цього рівняння.

Якщо невідомі функції залежать від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо від декількох, то – *в частинних похідних*.

Приклад диференціального рівняння:

Звичайне:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} - k\frac{dx}{dt} = F(x,t)$$

В частинних похідних:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 S}{\partial t^2}$$

Розв'язок диференціального рівняння. Функція $y = f(x)$ є розв'язком диференціального рівняння, якщо рівняння обертається в тотожність для всіх $x \in (a, b)$ після підстановки цієї функції та її похідних у рівняння.

Типи розв'язків

Загальний розв'язок – це нескінченний набір функцій, які відрізняються сталими та які задовольняють рівняння.

Частинний розв'язок – загальний розв'язок при будь-якому наборі конкретних значень невідомих сталих.

Особливий розв'язок – розв'язок, в якому порушується одиничність розв'язку задачі Коші для цього рівняння в будь-якої точці. Особливий розв'язок не описується загальним інтегралом. Тому, воно не виводиться із загального розв'язку ні при якому значенні невідомої сталої.

Будь-яке диференціальне рівняння має безліч розв'язків, які можуть бути записані у вигляді: $f(x, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, де $c_1, c_2, \ldots, c_n$ – довільні сталі, n – порядок диференціального рівняння.

Сукупність всіх частинних розв'язків утворює загальний розв'язок.

При розв'язанні практичних задач найчастіше цікавляться частинним розв'язком, який задовольняє початковим або крайовим умовам.

Задача Коші (задача з початковими умовами) – задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння порядку r сумісно з r початковими умовами для функції та її $(r-1)$ перших похідних $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1, \ldots,$ $y^{r-1}(x_0) = y_{r-1}$.

Крайова задача – задача знаходження часткового розв'язку, який задовольняє *r* умовам на кінцях відрізків $x_0 \le x \le x_i$, де $i = 1, 2, \ldots, r-1$

Крайова задача:

$$\begin{cases} y(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_0 \\ y(x_1, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y(x_{r-1}, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_{r-1} \end{cases}$$

Задача Коші:

$$\begin{cases} y(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_0 \\ y'(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(r-1)}(x_0, c_1, c_2, \ldots, c_r) = y_{r-1} \end{cases}$$

Теорема про одиничність розв'язку задачі Коші

Якщо права частина рівняння $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ та похідні $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ неперервні в розглянутій області G, то для будь-якій точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1})$ з G на деякому інтервалі $(x_0 - h, x_0 + h)$ існує розв'язок $y(x)$ рівняння і він є єдиним, який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$.

Крайова задача також має одиничний розв'язок.

Графік розв'язку диференціального рівняння називають *інтегральною кривою диференціального рівняння.*

Процедуру розв'язання диференціального рівняння іноді називають *інтегруванням диференціального рівняння.*

8.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Рівнянням з відокремлюваними змінними

Означення 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які перетворюються до рівняння вигляду $f(y) \cdot y' = g(x)$ називаються *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Означення 2. Нехай дано рівняння виду $f_1(x,y)dy - f_2(x,y)dx$. Якщо функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ мають такі властивості, що $f_1(x,y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$ та $f_2(x,y) = X_2(x) \cdot Y_2(y)$ причому функції X_1, X_2, Y_1, Y_2 – неперервні, то рівняння є *рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними.*

Для рівняння першого порядку задача Коші та крайова задача співпадають:

$$\begin{cases} f(y)y' = g(x) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Метод розв’язування.

Нехай дано диференціальне рівняння $f(y) \cdot y' = g(x)$. Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними зводиться до вигляду $f(y)dy = g(x)dx$, якщо рівняння помножити на dx. Тобто маємо рівність диференціалів невідомих функцій $F(y)$ і $G(x)$, де $dF(y) = f(y)dy$ і $dG(x) = g(x)dx$.

Із властивостей диференціалів функцій випливає, що з точністю до невідомої сталої дорівнюють і самі функції: $F(y) = G(x) + c$.

Щоб отримати функції $F(y)$ та $G(x)$ потрібно проінтегрувати праву і ліву частки рівняння. Тому процес розв’язання диференціального рівняння іноді називають інтегруванням.

Таким чином, маємо *рівняння в інтегральній формі*

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx.$$

Первісні функції $F(y)$ та $G(x)$ функцій $f(y)$·та $g(x)$ можуть існувати або не існувати. Якщо первісні функції не існують, то наведена формула все одно є розв’язком диференціального рівняння.

Тоді розв'язок задачі Коші записується через інтеграли зі змінними верхніми границями:

$$\int_{y_0}^{y} f(y)dy = \int_{x_0}^{x} g(x)dx.$$

Якщо первісні функції $F(y)$ та $G(x)$ існують, то інтегрування рівняння зводяться до виразів:

$F(y) = G(x) + c$ – неявний загальний розв'язок.

або $F(y) - F(y_0) = G(x) - G(x_0)$ – неявний частинний розв'язок, що задовольняє початкової умові (розв'язок задачі Коші).

Якщо вдається, то можна знайти розв'язок в явному вигляді: $y = \Phi(x)$

Розв'язати задачу Коші можна із загального розв'язку шляхом підстановки початкової умови у знайдений розв'язок:

$$F(y_0) = G(x_0) + c;$$

$$c = F(y_0) - G(x_0);$$

$$F(y) = G(x) + F(y_0) - G(x_0).$$

Однорідні рівняння

Означення 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які зводяться до рівняння виду $y' = f(x,y)$, де $f(x,y)$ – однорідна функція називається *однорідним рівнянням першого порядку.*

Означення 2. Функція $f(x,y)$ називається однорідною порядку r, якщо $f(ax,ay) = a^r f(x,y)$.

Однорідну функцію також можна уявити, як $f(x,y) = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$.

Метод розв'язання.

Однорідні рівняння першого порядку можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними, відносно невідомої функції $u(x)$:

$$y(x) = u(x) \cdot x.$$

За правилами диференціювання:

$$y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x) \cdot x' = u'(x) \cdot x + u(x).$$

Таким чином, заміна $y(x) = u(x) \cdot x$ та $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$ перетворює в рівняння $u' \cdot x + u = f_1(u), x \neq 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Лінійні рівняння першого порядку

Означення. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку – це рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Лінійність – важливе поняття, яке детально розглядалося в розділі 3.

Якщо функція $q(x) = 0$, то рівняння називається *однорідним лінійним рівнянням*. У загальному випадку $q(x) \neq 0$ і рівняння називається *неоднорідним лінійним рівнянням.*

У лінійних диференціальних рівнянь першого порядку є два частинних випадки, які дозволяють розділити змінні:

1) $q(x) \equiv 0$ – *однорідне лінійне рівняння*;

2) $p(x) \equiv q(x)$.

Для цих випадків лінійне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, розв'язання яких не викликає труднощів і вже розглянуто. В загальному випадку в змінні в таких рівняннях не можуть бути відокремлені тільки перетворенням рівняння. Існує два підходи до розв'язання таких рівнянь.

Методи розв'язання

1. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих) ґрунтується на теоремі, яка стверджує, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Тому в цьому методі знаходиться спочатку загальний розв'язок однорідного рівняння $y_0 = f(x, c)$, де c – невідома стала. Потім розв'язок неоднорідного рівняння знаходять у вигляді: $y = f(x, c(x))$, де $c(x)$ – невідома функція. Невідому функцію $c(x)$ знаходять шляхом підстановки $y = f(x, c(x))$ у неоднорідне лінійне диференціальне рівняння та з наступним його розв'язанням відносно невідомої функції $c(x)$.

2. Розв'язок шукають, як добуток двох невідомих функцій:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді,

$$y'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Після підстановки y в рівняння отримуємо:

$$u'v + uv' + puv = q.$$

Можна, наприклад, згрупувати другий та третій доданок та винести за дужки загальний множник u:

$$u'v + u(v' + pv) = q.$$

Далі справедливі наступні міркування. На функції u та v накладено тільки одна вимога, щоб їх добуток був розв'язком диференціального рівняння. З цього виходить, що існує довільний вибір таких функцій.

Будемо вимагати, щоб функція v мала таку властивість: $v' + pv = 0$. Тоді отримуємо систему з двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v' + pv = 0 \\ u'v = q. \end{cases}$$

Перше диференціальне рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними відносно v. З нього знайдемо будь-який частковий розв'язок, тобто v при будь-якій невідомій сталій, яку отримуємо при інтегруванні (v – будь-яка функція, яка задовольняє першому рівнянню):

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Після підстановки $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ у друге рівняння шукаємо функція u:

$$u'v = u'e^{-\int p(x)dx} = q(x);$$

$$du = q(x)e^{-\int p(x)dx}dx;$$

$$\int du = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx;$$

$$u = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx.$$

Відповіддю буде $y(x) = u(x) \cdot v(x)$.

Рівняння в повних диференціалах

Диференціальне рівняння в повних диференціалах – це диференціальне рівняння виду

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

якщо існує неперервно-диференційовна функція $\Phi(x,y)$, яку звуть функція потенціалу, така що

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q.$$

Теорема Шварца надає нам необхідний критерій існування функції потенціалу. Якщо

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

то рівняння $Pdx + Qdy = 0$ має вигляд

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}dy = 0$$

та його розв’язок

$$\Phi(x,y) = C, \qquad C - const.$$

Отже, розв’язання рівняння $Pdx + Qdy = 0$ зводиться до розв’язку системи рівнянь, які розв’язуються послідовним інтегруванням:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = P \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = Q; \end{cases}$$

$$\Phi(x,y) = \int P(x,y)dx = u(x,y) + v(y),$$

де $u(x,y)$ – первісна функції $P(x,y)$, $v(y)$ – невідома функція. Отриману функцію $\Phi(x,y) = u(x,y) + v(y)$ підставляємо у друге рівняння і розв'язуємо його відносно невідомої функції $\mu(y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = Q;$$

$$v(y) = \int \left(Q - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy.$$

Таким чином, отримаємо розв'язок

$$\Phi(x,y) = u(x,y) + v(y) = C, \qquad C - const$$

Диференціальне рівняння $Pdx + Qdy = 0$, в якому

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

не є рівнянням в повних диференціалах. Однак в деяких випадках, його можна перетворити в рівняння у повних диференціалах завдяки його добутку на спеціальну функцію $\mu(x,y)$, яку називають інтегруючим множником.

Нехай у диференціальному рівнянні $Pdx + Qdy = 0$ $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$. Помножимо рівняння на інтегруючій множник $\mu(x,y)$ такий, що

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}.$$

Тоді, отримане рівняння буде рівнянням в повних диференціалах:

$$\mu P dx + \mu Q dy = d\Phi, \quad \Phi(x,y) = C, \qquad C - const.$$

Інтегруючий множник $\mu(x,y)$ можна знайти в таких двох випадках.

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = S(x).$$

Тоді,

$$\ln \mu = \int S(x)dx.$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = T(y),$$

Тоді,

$$\ln \mu = \int T(y)dx.$$

Рівняння, що зводяться до однорідних або лінійних рівнянь

Окрім розглянутих найпростіших диференціальних рівнянь існують більш складні рівняння першого порядку, які за допомогою заміни змінної зводиться до вже розглянутих однорідних і лінійних диференціальних рівнянь.

Рівняння з раціональною функцією

Рівняння вигляду

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{Ax + By + C}\right)$$

зводиться до однорідного диференціального рівняння за допомоги заміни змінних.

1. Якщо $aB - bA \neq 0$, заміною $t = x - x_0$ і $u = y - y_0$, де x_0 та y_0 – єдиний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

2. Якщо $aB - bA \neq 0$, то вважають $t = x$ і $u = ay - by$.

Рівняння Бернуллі

Рівняння Бернуллі – це диференціальне рівняння вигляду

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n.$$

Таке рівняння зводиться до лінійного диференціального рівняння першого порядку замінною змінної:

$$z = y^{1-n};$$

$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x).$$

Інші диференціальні рівняння першого порядку

Рівняння Ріккаті

Диференціальне рівняння вигляду

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

називається рівнянням Ріккаті. Воно в загальному випадку не розв'язується в квадратурах (через інтеграли).

Рівняння, що розв'язуються відносно *y*'

$$F(x, y, y') = 0$$

Нехай у даній точці (x_0, y_0) рівняння $F(x_0, y_0, p) = 0$, де $p = y'$, має дійсні корені $p_1, p_2, \dots, p_n$, функція $F(x, y, p)$ та її перші частинні похідні неперервні по всім змінним у кожній точці $x = x_0, y = y_0, p = p_i$ та $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. Тоді рівняння

$F(x, y, y') = 0$ розпадається на n диференціальних рівнянь виду $y' = f_i(x, y)$, де $f_i(x_0, y_0) = p_i$. Через точку (x_0, y_0) проходять точно n інтегральних кривих.

Рівняння, що не розв'язуються відносно y'

$$F(x, y, y') = 0$$

Такі рівняння в свою чергу можна поділити на рівняння, які розв'язується відносно y і рівняння, що розв'язується відносно x.

Рівняння Лагранжа

$$a(y')x + b(y')y + c(y') = 0.$$

Рівняння Клеро

Частинний випадок рівняння Лагранжа при $a(p) + b(p)p = 0$:

$$y = y'x + f(y').$$

У зв'язку зі складнощами, які виникають при розв'язанні цих рівнянь, методи їх інтегрування ми не розглядаємо.

8.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння, які дозволяють знизити порядок

Зниження порядку в диференціальних рівняннях розглянемо на прикладі рівнянь другого порядку:

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Рівняння виду $F(x, y', y'') = 0$

У рівняннях, в яких відсутня невідома функція y можна знизити порядок заміною: $z(x) = y'(x)$. Тоді, $z'(x) = y''$. Рівняння другого порядку зводиться до системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} F(x, z, z') = 0 \\ y' = z(x) \end{cases}$$

Рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$

У рівняннях, в яких відсутня змінна x можна знизити порядок заміною: $z(y) = y'(x)$. Тоді, $y'' = z'_x(y) = z'_y(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$.

Рівняння другого порядку зводиться до системи рівнянь першого порядку:

$$\begin{cases} F(y, z, z') = 0 \\ y' = z(y) \end{cases}$$

Рівняння, однорідне відносно змінних $y, y', \ldots, y^{(n)}$

Якщо рівняння виду $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ має наступну властивість

$$F\left(x, ay, ay', ay'', \ldots, ay^{(n)}\right) = a^r F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right),$$

то порядок рівняння можна зменшити.

1. За допомоги заміни

$$z(x) = \frac{y'}{y}$$

порядок рівняння зменшується на одиницю.

2. Вводячи нові змінні t та z по формулами

$$x = e^t, \quad y = ze^{rt}$$

приходимо до рівняння, яке не містить явно t і, отже, ймовірно зниження порядку рівняння.

Рівняння в повних диференціалах

Рівняння вигляду $F(x, y, y', y'') = 0$, яке є похідною $\Phi(x, y, y') = C$.

Якщо вдається знайти таку функцію $\Phi(x, y, y')$, яка не містить іншої похідної y'' та, задовольняє рівності

$$F(x, y, y', y'') = \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x, y, y')$$

то розв'язок вихідного рівняння представляється інтегралом $\Phi(x, y, y') = C$

Лінійні рівняння вищих порядків

Лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку називається рівняння вигляду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x).$$

Якщо коефіцієнти $a_i(x), i = 1, \ldots, n$ не є функціями, а є сталими величинами, то рівняння називається *зі постійними коефіцієнтами*.

Якщо $f(x) \equiv 0$, тобто права частина рівняння дорівнює 0, то рівняння називається *однорідним*. В загальному випадку при $f(x) \neq 0$ і рівняння називається *неоднорідним.*

Обмежимось випадком лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами. Загальний розв'язок $y(x)$ таких рівнянь дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння $y_0(x)$ і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння $\tilde{y}(x)$:

$$y = y_0 + \tilde{y}.$$

Розглянемо метод розв'язання лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами на прикладі рівняння другого порядку. Розв'язання рівнянь більш високого порядку нічим не відрізняються від рівнянь другого порядку. Як вже було позначено спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y_0'' + py_0' + qy_0 = 0.$$

Розв'язання ґрунтується на теоремі, яка стверджує, що загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку є лінійною комбінацією будь-яких двох лінійно незалежних частинних розв'язків:

$$y_0 = C_1\tilde{y}_1 + C_2\tilde{y}_2$$

Частинні розв'язки $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2$ шукають у класі експоненціальних функцій:

$$y_0 = e^{\lambda x}.$$

Підставляючи $e^{\lambda x}$ замість y_0 в диференціальне рівняння $y_0'' + py_0' + qy_0 = 0$ отримаємо наступне алгебраїчне рівняння:

$$(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то розв'язання рівняння можливе тільки при

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0.$$

Це рівняння називається *характеристичним*. Отже, маючі корені характеристичного рівняння λ_1, λ_2 загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Якщо корені λ_1 і λ_2 виявляться виродженими $\lambda_1 = \lambda_2$, то розв'язок диференціального рівняння набуває вигляд:

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

При розв'язанні характеристичного рівняння $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ його корені можуть виявитися дійсними або комплексно спряженими. Якщо корені характеристичного рівняння є комплексно спряженими числами

$$\lambda = \lambda_0 \pm \mu \cdot i,$$

то розв'язок диференціального рівняння можна записати через експоненціальні функції комплексного змінного:

$$y_0 = e^{\lambda_0 x}\left(C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}\right).$$

Використовуючи формулу Ейлера можна також перетворити експоненти в уявній степені $e^{\pm i\mu x}$ на суму синусу і косинусу аргументу μx:

$$y_0 = e^{\lambda_0 x}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x).$$

Таким чином, можна виділити такі три випадки:

1. Характеристичне рівняння має два дійсних кореня $\lambda_1,\ \lambda_2$. Це має місце, коли дискримінант характеристичне рівняння більше нуля $p^2 - 4q > 0$. Тоді,

$$y_0 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Характеристичне рівняння має вироджений корінь λ_1. Це має місце, коли дискримінант характеристичне рівняння дорівнює нулю $p^2 - 4q = 0$. Тоді,

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda_1 x}.$$

3. Характеристичне рівняння має комплексно спряжені корені $\lambda = \lambda_0 \pm \mu i$. Це має місце, коли дискримінант характеристичне рівняння менше нуля $p^2 - 4q < 0$. Тоді,

$$y_0 = e^{\lambda_0 x}\left(C_1 e^{i\mu x} + C_2 e^{-i\mu x}\right) \text{ або}$$

$$y_0 = e^{\lambda_0 x}(C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x).$$

Лінійне неоднорідне рівняння з постійними коефіцієнтами

Отже, першу частину y_0 розв'язку неоднорідного рівняння $y = y_0 + \tilde{y}$ знайдено. Знайдем частинний розв'язок лінійних неоднорідного рівняння $\tilde{y}$. Для цього використовується два різних метода. Метод невизначних коефіцієнтів – це частинний випадок функції $f(x)$. Метод варіації довільних сталих – універсальний метод, який можна використовувати при будь-якій функції $f(x)$

Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів застосовується в тому випадку, коли функція $f(x)$ є квазімногочленом:

$$f(x) = e^{\sigma x}\, P_n(x),$$

де $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ – многочлен n – го порядку. При розв'язанні рівняння методом невизначених коефіцієнтів частинні розв'язки цього рівняння $\tilde{y}$ шукають у такому самому вигляді, що $f(x)$:

$$\tilde{y} = x^s e^{\sigma x} Q_n(x),$$

де $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$ – многочлен того самого порядку, що й $P_n(x)$, коефіцієнти якого $b_i, i = 1, 2, \ldots, n$ не визначені й є дійсними.

Показник ступеня s визначається тим чи співпадає σ з коренем характеристичного рівняння, чи ні.

Якщо σ не є коренем характеристичного рівняння, то число $s = 0$.

Якщо σ співпадає з коренем характеристичного рівняння, то число s дорівнює кратності кореня цього характеристичного рівняння. Для диференціального рівняння другого порядку $s = 1$, якщо $\lambda_1 = \sigma$ або $\lambda_2 = \sigma$ і $s = 2$, якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \sigma$.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$, потрібно спочатку розв'язок $\tilde{y} = x^s e^{\sigma x} Q_n(x)$ підставити у диференціальне рівняння, а потім прирівняти коефіцієнти подібних доданків лівої і правої частин отриманої рівності. З отриманої системи алгебраїчних рівнянь отримують всі невизначені коефіцієнти.

У випадку, коли права частина рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{\tau x}(P_n(x)\sin\omega x + R_m(x)\cos\omega x),$$

де $P_n(x)$ та $R_m(x)$ – многочлени n-го та m-го степеня, відповідно. Тоді частинний розв'язок шукають у вигляді

$y(x) = x^s e^{\alpha x}(R_l(x)\sin\beta x + Q_l(x)\cos\beta x)$я

$$\tilde{y} = x^s e^{\tau x}(G_l(x)\sin\omega x + H_l(x)\cos\omega x),$$

де число s визначається таким чином: якщо комплексне число $\tau \pm i\omega$ є коренем характеристичного рівняння, то число s дорівнює кратності цього комплексного числа, якщо ж комплексне число $\tau \pm i\omega$ не є коренем характеристичного рівняння, то число $s = 0$; $l = \max\{n, m\}$, $G_l(x)$ та $H_l(x)$– многочлени l-го порядку з невизначеними сталими коефіцієнтами.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа)

Метод варіації довільної сталої використовується для довільної неперервної функції $f(x)$. Суть цього методу полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x).$$

В диференціальному рівнянні, що ми розв'язуємо y_1 та y_2 – частинні розв'язки відповідного однорідного диференціального рівняння другого порядку. Невідомі функції $C_1(x)$ і $C_2(x)$ шукають з системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases}$$

Системо рівнянь відносно $C'_1(x)$ і $C'_2(x)$ можна розв'язати, наприклад, методом Крамера:

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_1(x), \qquad C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx\,;$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_2(x), \qquad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx.$$

Приклади розв'язання задач по диференціальним рівнянням

Задача 1

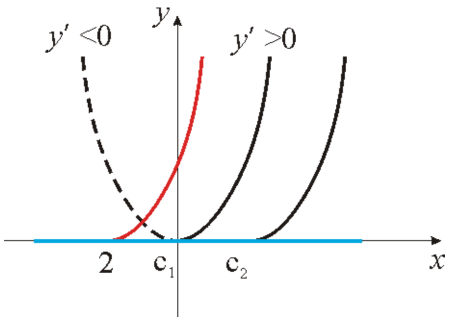
Розв'язати рівняння $y' = 2\sqrt{y}$.

Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними. С початку треба поділити праву та ліву частки рівняння на $\sqrt{y}$. Замість y' використаємо форму запису похідної Лейбниця $\frac{dy}{dx}$:

$$y' = 2\sqrt{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y};$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx; y \neq 0.$$



Далі ми можемо інтегрувати рівняння:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx;$$

$$\sqrt{y} = x + c > 0; x > -c;$$

$$y = (x + c)^2, y \neq 0, x \geq -c.$$

Відповідь: $y = (x + c)^2, y \neq 0, x \geq -c$ – загальний розв'язок рівняння; особливий розв'язок $y = 0$ було загублено при діленні рівняння на $\sqrt{y}$.

Задача 2

Розв'язати рівняння $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(1) = 5 \end{cases}$

Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними та початковими умовами. Розв'яжемо спочатку диференціальне рівняння. Перенесемо вільний член рівняння y в праву частину, а потім поділимо на x та y

$$xy' = y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, x \neq 0;$$

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x}, x \neq 0, y \neq 0.$$

Тут замість y' застосована форма запису похідної Лейбниця $\frac{dy}{dx}$. Помножив праву та ліву частки рівняння на dx. Отримуємо рівняння в якому змінні відокремлені:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Далі знайдемо інтеграли від правої та лівої частин рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, x \neq 0, y \neq 0;$$

$$\ln y = \ln x + \ln c = \ln cx\,, x \neq 0, y \neq 0.$$

Розв'язав логарифмічне рівняння $\ln y = \ln cx$ отримуємо загальний розв'язок рівняння у вигляді $y = cx$.

Тепер знайдемо невідому сталу, яка задовольнить початковій умові. Для цього підставимо початкову умову в знайдений загальний розв'язок:

$$5 = c \cdot 1.$$

Таким чином, отримали невідому сталу $c = 5$, яка задовольняє початковій умові.

Відповідь: $y = 5x$ – розв'язок задачі Коші.

Задача 3

Розв'язати рівняння $x^2 \cos y\, dy - \sqrt{x} dx = 0$.

Рівняння першого порядку відокремлюваними змінними.

$$x^2 \cos y\, dy - \sqrt{x} dx = 0;$$

$$\cos y\, dy = \frac{\sqrt{x} dx}{x^2}, \qquad x \neq 0;$$

$$\cos y\, dy = x^{-3/4} dx, \qquad x \neq 0;$$

$$\int \cos y\, dy = \int x^{-3/4} dx\,, \qquad x \neq 0;$$

$$\sin y = 4x^{1/4} + c, \qquad x \neq 0;$$

$$y = \arcsin\left(4x^{1/4} + c\right).$$

Відповідь: $y = \arcsin\left(4x^{1/4} + c\right)$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Задача 4

Розв'язати рівняння $y' + y\sin x = 0$.

Рівняння першого порядку відокремлюваними змінними.

Відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{dx} = -y\sin x \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\sin x\, dx.$$

Звідси,

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x\, dx \Rightarrow \ln y = \cos x + \ln C,$$

$$y = Ce^{\cos x}.$$

Відповідь: $y = Ce^{\cos x}$.

Задача 5

Розв'язати рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Рівняння однорідне першого порядку. Зробимо заміну:

$$u = \frac{y}{x}, x \neq 0;$$

$$y = u \cdot x,\ y' = u'x + u.$$

$$2xyy' = x^2 + y^2$$

$$2\frac{y}{x}y' = 1 + \frac{y^2}{x^2};$$

$$2u(u'x + u) = 1 + u^2;$$

$$2uu'x + 2u^2 = 1 + u^2;$$

$$2uu'x = 1 - u^2;$$

$$\frac{2udu}{u^2 - 1} = -\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{2udu}{u^2 - 1} = -\int \frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{2udu}{u^2 - 1} = \begin{Bmatrix} t = u^2 - 1 \\ dt = 2udu \end{Bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln t + c = \ln(u^2 - 1) + c;$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c;$$

$$\ln(u^2 - 1) = -\ln x + \ln C = \ln \frac{C}{x};$$

$$u^2 - 1 = \frac{C}{x};$$

$$u^2 = \frac{c}{x} + 1;$$

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x} + 1;$$

$$y^2 = cx + x^2$$

Відповідь: $y^2 = cx + x^2$.

Задача 6

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + 3y = x^2$.

Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо шукати y у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y = uv, \qquad y' = u'v + uv'.$$

Підставляємо $y = uv$ у рівняння $y' + \frac{3}{x}y = x$:

$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = x;$$

$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = x;$$

$$\begin{cases} v' + \frac{3}{x}v = 0 \\ u'v = x. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння $v' + \frac{3}{x}v = 0$. Це однорідне лінійне рівняння першого порядку. Воно дозволяє відокремлювати змінні:

$$v' + \frac{3}{x}v = 0;$$

$$\frac{dv}{v} = -3\frac{dx}{x};$$

$$\int \frac{dv}{v} = -3\int \frac{dx}{x};$$

$$\ln v = -3\ln x = \ln x^{-3} \Longrightarrow v = x^{-3}.$$

Знаючі функцію $v = x^{-3}$ підставляємо її в друге рівняння і шукаємо функцію u:

$$u' \cdot x^{-3} = x;$$
$$du = x^{-4}dx;$$
$$\int du = \int x^{-4}dx\,;$$
$$u = \frac{x^5}{5} + C.$$

Таким чином,

$$y = uv = \left(\frac{x^5}{5} + C\right) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}.$$

Відповідь: $y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}$.

Задача 7

Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = (2x-1)e^{-x}$.

Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо використовувати метод Лагранжа. Розв'яжемо однорідне рівняння $y_0' + 2xy_0 = 0$. Однорідне лінійне диференціальне рівняння дозволяє відокремлювати змінні:

$$\frac{dy_0}{y_0} = -2xdx;$$
$$\int \frac{dy_0}{y_0} = -2\int xdx\,;$$
$$\ln y_0 = -x^2 + \ln C\,;$$
$$\ln\frac{y_0}{C} = -x^2;$$
$$y_0 = Ce^{-x^2}.$$

Тепер будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді розв'язку однорідного рівняння. Тільки замінимо невідому сталу C невідомою функцією $C(x)$. Підставимо $y = C(x)e^{-x^2}$ у неоднорідне диференціальне рівняння, враховуючі, що $y' = \left(C(x)e^{-x^2}\right)' = C'e^{-x^2} - 2Cxe^{-x^2}$:

$$C'e^{-x^2} - 2Cxe^{-x^2} + 2Cxe^{-x^2} = (2x-1)e^{x^2-x};$$
$$C'e^{-x^2} = (2x-1)e^{-x};$$
$$\frac{dC}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x};$$
$$dC = (2x-1)e^{x^2-x}dx;$$
$$\int dC = \int (2x-1)e^{x^2-x}dx.$$

Знайдем окремо інтеграл праворуч заміною змінної:

$$\int (2x-1)e^{x^2-x}dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 - x; \\ dt = (2x-1)dx \end{Bmatrix} = \int e^t dt = e^t + C_1 = e^{x^2-x} + C_1.$$

Отже, повертаючись до рівняння отримаємо невідому функцію $C(x)$:

$$C(x) = e^{x^2-x} + c_0.$$

Таким чином, розв'язок неоднорідного диференціального рівняння є:

$$y = C(x)e^{-x^2} = \left(e^{x^2-x} + C_1\right)e^{-x^2} = e^{-x} + C_1e^{-x^2}.$$

Відповідь: $y = e^{-x} + C_1e^{-x^2}$.

Задача 8

Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Для його розв'язання спочатку розв'язується характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0;$$
$$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-3} = \left[\begin{matrix} 1 \\ 3. \end{matrix}\right.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного лінійного диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1e^{1x} + C_2e^{3x}.$$

Відповідь: $y = C_1e^{1x} + C_2e^{3x}$.

Задача 9

Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку.

Складаємо характеристичне рівняння і розв'яжемо його:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0;$$

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{9-9} = 3.$$

Отже, корені характеристичного рівняння виявилися виродженими. Тоді розв'язок диференціального рівняння приймає вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{3x}.$$

Відповідь: $y = (C_1 + C_2 x)\, e^{3x}$.

Задача 10

Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ має комплексні корені $\lambda_1 = 1 - i$ та $\lambda_2 = 1 + i$. Значить, загальний розв'язок диференціального рівняння є

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Відповідь: $y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Задача 11

Розв'язати рівняння $\frac{y''}{\sqrt{y'}} = \cos x$.

Це рівняння другого порядку, яке дозволяє зменшити свій порядок. Так як в рівняння не входить функція y в явному вигляді, то зменшити порядок рівняння можна за допомоги наступної заміни змінної.

$$z(x) = y'(x) \Longrightarrow z'(x) = y''.$$

Тоді, після підстановки $z(x) = y'(x)$ у рівняння маємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{z'}{\sqrt{z}} = \cos x \\ y' = z. \end{cases}$$

Розв'яжемо перше рівняння відносно функції $z(x)$:

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \cos x\, dx;$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \cos x\, dx\,;$$

$$2\sqrt{z} = \sin x + C_1;$$

$$4z = \sin^2 x + 2C_1 \sin x + C_1^2.$$

Зняючи функцію $z(x)$ розв'яжемо тепер друге рівняння відносно y:

$$\frac{dy}{dx} = z = \frac{1}{4}(\sin^2 x + 2C_1 \sin x + C_1^2);$$

$$dy = \frac{1}{4}(\sin^2 x + 2C_1 \sin x + C_1^2)dx;$$

$$\int dy = \frac{1}{4}\int (\sin^2 x + 2C_1 \sin x + C_1^2)dx.$$

Після інтегрування маємо:

$$\int \sin^2 x\,dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4} + C;$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right) - \frac{C_1}{2}\cos x + C_1^2 x + C_2.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}\right) - \frac{C_1}{2}\cos x + C_1^2 x + C_2$

Задача 12

Розв'язати рівняння $2\sqrt{y}y'' - y' = 0$.

Це рівняння другого порядку, яке дозволяє зменшити свій порядок. Так як в рівняння не входить змінна x в явному вигляді, то зменшити порядок рівняння можна за допомоги наступної заміни змінної

$$z(y) = y'(x) \Longrightarrow y'' = z'_x(y) = z'_y(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y).$$

Підставимо знайдені y' та y'' у диференціальне рівняння і розв'яжемо його відносно функції $z(y)$:

$$2\sqrt{y}zz' - z = 0;$$

$$2\sqrt{y}zz' = z;$$

$$2\sqrt{y}z' = 1;$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}};$$

$$dz = \frac{dy}{2\sqrt{y}};$$

$$\int dz = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

$$z = \sqrt{y} + C_1.$$

Зняючи функцію $z(y)$ розв'яжемо тепер рівняння $z(y) = y'(x)$ відносно y:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} + C_1;$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y} + C_1} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y} + C_1} = \int dx.$$

Знайдем інтеграл ліворуч окремо.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y} + c_1} = \begin{Bmatrix} t = \sqrt{y}, t^2 = y, \\ dy = 2tdt. \end{Bmatrix} = 2\int \frac{tdt}{t + C_1} = 2\int \frac{(t + C_1 - C_1)dt}{t + C_1} =$$

$$= 2\left(\int dt - c_1 \int \frac{dt}{t + c_1}\right) = 2(t - C_1 \ln(t + C_1)) + C_2 =$$

$$= 2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + C_1\right)\right) + C_2.$$

Отже, повертаючись до рівняння отримаємо:

$$2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + C_1\right)\right) = x + C_2.$$

Відповідь: $2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + C_1\right)\right) = x + C_2.$

Задача 13

Знайти розв'язок $y'' + y = 0,\ y(0) = -4,\ y'(0) = 1.$

Знаходимо загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow \lambda = \pm i.$$

Отже,

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Тепер знайдемо невідомі сталі C_1, C_2 так що розв'язок задовольняв початковим даним. Знайдем похідну загального розв'язку y' і в отримані вирази y та y' підставимо початкові умови:

$$y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x\,;$$

$$\begin{cases} y(0) = C_1 = -4 \\ y'(0) = C_2 = 1. \end{cases}$$

Отже, розв’язок задачі з початковими умовами є частинний розв’язок

$$y = -4\cos x + \sin x.$$

Відповідь: $y = -4\cos x + \sin x$.

Задача 14

Знайти частинний розв’язок $y'' + 4y' = 0,\ y(0) = -6,\ y'(0) = -1.$

Знаходимо загальний розв’язок лінійного однорідного диференціального рівняння:

$$\lambda^2 + 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda + 4) = 0 \implies \lambda = \left[\begin{matrix} 0 \\ -4 \end{matrix}\right..$$

Отже,

$$y = C_1 + C_2 e^{-4x}.$$

Отже, $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$.

Знайдемо похідну знайденої функції y: $y' = -4C_2 e^{-4x}$.

Після підставки початкових умов отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = -6 \\ y'(0) = -4C_2 e^0 = -4C_2 = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_2 = 1/4 \\ C_1 = -6 - 1/4 = -25/4. \end{cases}$$

Таким чином,

$$y = -\frac{25}{4} + \frac{1}{4} e^{-4x}.$$

Відповідь: $y = -\frac{25}{4} + \frac{1}{4} e^{-4x}$.

Задача 15

Знайти частинний розв’язок $y'' + 6y' + 8y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = -5.$

Знаходимо загальний розв’язок диференціального рівняння:

$$y'' + 6y' + 8y = 0;$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2} = \left[\begin{matrix} -4 \\ -2. \end{matrix}\right.$$

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x}$$

Знайдемо похідну знайденої функції y: $y' = -4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x}$

Після підставки початкових умов отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = -4C_1 - 2C_2 = -5. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 4C_2 - 2C_2 = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2C_2 = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 = 2.5 \\ C_2 = -2.5. \end{cases}$$

Таким чином,

$$y = 2{,}5e^{-4x} - 2{,}5e^{-2x}.$$

Відповідь: $y = 2{,}5e^{-4x} - 2{,}5e^{-2x}$.

Задача 16

Знайти загальний розв'язок $y'' - 5y' + 6y = 2\sin x - 3\sin 3x - 15\cos x$.

Знаходимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y_0'' - 5y_0' + 6y_0 = 0;$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0;$$

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left[\begin{matrix} 2 \\ 3. \end{matrix}\right.$$

$$y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Знаходимо частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння у такому ж вигляді, що вільна функція:

$$\tilde{y} = a\sin x + b\cos x + d\sin 3x + c\cos 3x$$

Знайдемо похідні функції $\tilde{y}$ першого і другого порядку і підставимо їх разом з $\tilde{y}$ у неоднорідне рівняння:

$$\tilde{y}' = a\cos x - b\sin x + 3d\cos 3x - 3c\sin 3x\,;$$

$$\tilde{y}'' = -a\sin x - b\cos x - 9d\sin 3x - 9c\cos 3x\,;$$

$$-a\sin x - b\cos x - 9d\sin 3x - 9c\cos 3x +$$

$$-5a\cos x + 5b\sin x - 15d\cos 3x + 15c\sin 3x +$$

$$+6a\sin x + 6b\cos x + 6d\sin 3x + 6c\cos 3x = 2\sin x - \sin 3x - 15\cos x\,;$$

$$(5a + 5b)\sin x + (-5a + 5b)\cos x + (-3d + 15c)\sin 3x + (-15d - 3c)\cos 3x$$
$$= 2\sin x - 3\sin 3x - 15\cos x$$

Після підставки початкових умов отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} 5a + 5b = 2 \\ -5a + 5b = 0 \\ -3d + 15c = -3 \\ -15d - 3c = -15. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}2 \\ d - 5c = 1 \\ 5d + c = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}2 \\ d - 5c = 1 \\ 26d = 26. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 0{,}2 \\ b = 0{,}2 \\ d = 1 \\ c = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{y} = 0{,}2\sin x + 0{,}2\cos x + \sin 3x$$

$$y = y_0 + \tilde{y} = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 0{,}2\sin x + 0{,}2\cos x + \sin 3x.$$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 4C_2 - 2C_2 = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2C_2 = -5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1 = 2.5 \\ C_2 = -2.5. \end{cases}$$

Таким чином, $y = 2{,}5e^{-4x} - 2{,}5e^{-2x}$.

Відповідь: $y = 2{,}5e^{-4x} - 2{,}5e^{-2x}$.

Задача 17

Знайти загальний розв'язок $y'' - 2y' + y = e^{2x}/\sqrt{4-x^2}$.

Знаходимо загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$y_0'' - 2y_0' + y_0 = 0;$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1;$$

$$y_0 = C_1 e^x + C_2 x e^x = C_1 y_1 + C_2 y_2.$$

Знаходимо розв'язок неоднорідного диференціального рівняння методом варіації невідомих сталих. Шукаємо розв'язок неоднорідного диференціального рівняння в такому ж вигляді, що розв'язок однорідного рівняння, але заміняємо невідомі стали C_1, C_2 невідомими функціями $C_1(x), C_2(x)$:

$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Знайдемо похідні функції y першого і другого порядку і підставимо їх разом з y у неоднорідне рівняння. В результаті отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f, \end{cases}$$

де $y_1 = e^x, y_2 = xe^x, y_1' = e^x, y_2' = (1+x)e^x,\ \ f = e^{2x}/\sqrt{4-x^2}$.

Розв'яжемо систему рівнянь відносно $C_1'(x)$ і $C_2'(x)$ методом Крамера:

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}e^{2x}}{(1+x)e^{2x} - xe^{2x}} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$C_1(x) = \int \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\sqrt{t} + C = -\sqrt{4-x^2} + C;$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}e^{2x}}{(1+x)e^{2x} - xe^{2x}} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$C_2(x) = \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{2} + C.$$

Відповідь: $y = \left(-\sqrt{4-x^2} + C_1\right)e^x + \left(\arcsin\frac{x}{2} + C_2\right)xe^x$.

Задачі на розв'язання диференціальних рівнянь

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними.

8.1. $y' = -x^2 + 4.$

8.2. $y' = -\frac{y}{1+x}.$

8.3. $y' = y.$

8.4. $xyy' = 1 - x^2.$

8.5. $yy' = \frac{1-2x}{y}.$

8.6. $x^3 y' + y = 7, \quad y(0) = 5.$

8.7. $2\sqrt{x}y' = y, y(4) = 1.$

8.8. $x^2 y' + y^2 = 0, y(-1) = 1$

8.9. $dr + r\,\mathrm{tg}(\varphi)d\varphi = 0, r(\pi) = 2.$

8.10. $y' = 2\sqrt{y}\ln x, y(e) = 1.$

Знайти розв'язок однорідних диференціальних рівнянь.

8.11. $y' = \frac{y^2}{x^2} - 2.$

8.12. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

8.13. $xdy - ydx = ydy.$

8.14. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}.$

8.15. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$

8.16. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$.

8.17. $xy' = y - x.$

8.18. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0.$

8.19. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2} - \frac{y}{x}, \quad y(1) = -1$

8.20. $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, \quad y(-1) = 1.$

8.21. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}, y(1) = 0.$

8.22. $xy' = y\left[1 + \ln\frac{y}{x}\right], y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$

Знайти розв'язок лінійних диференціальних рівнянь.

8.23. $y' + 2y = 4x.$

8.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2}.$

8.25. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

8.26. $y' + \frac{x}{a^2+x^2}y = 1.$

8.27. $y' + y = cos(x).$

8.28. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \sec x, y(0) = 0.$

8.29. $xy' + y - e^x = 0, y(a) = b.$

8.30. $xy' - \frac{y}{x+1} = x, y(0) = 0.$

8.31. $y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x, y(0) = 1.$

8.32. $y' = 3x^2 y + x^5 + x^2, y(0) = 1.$

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь Бернуллі.

8.33. $xy' + y = -xy^2.$

8.34. $y' - xy = -y^3 e^{-x^2}.$

8.35. $x^2 y' = y^2 + xy.$

8.36. $y' + xy = xy^3.$

8.37. $3y^2 y' + y^3 = x + 1, y(-1) = 1.$

8.38. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = 1.$

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь в повних диференціалах.

8.39. $(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0.$

8.40. $\frac{xdy}{x^2+y^2} = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx.$

8.41. $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0.$

8.42. $yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy = 0.$

8.43. $(x^2 + y)dx - xdy = 0.$

8.44. $y(1 + xy)dx - xdy = 0.$

8.45. $(x^2 + 2x + y^2)dx + 2ydy = 0.$

8.46. $y^2dx + (yx - 1)dy = 0.$

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь вищих порядків

8.47. $y'' = x + \sin x.$

8.48. $y'' = \operatorname{arctg} x.$

8.49. $y'' = \ln x.$

8.50. $xy'' = y'.$

8.51. $y'' = y' + x.$

8.52. $y'' = \frac{y'}{x} + x.$

8.53. $yy'' = (y')^2.$

8.54. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2.$

8.55. $y'' = 2yy'.$

8.56. $y''' = \frac{6}{x^3}, y(1) = 2, y'(1) = 1, y''(1) = 1.$

8.57. $y'' = 4\cos 2x\,, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

8.58. $y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$

8.59. $y''x\ln x = y', y(e) = 2, y'(e) = 3.$

8.60. $y'' + 2x(y')^2, y(1) = 0, y'(1) = 0.$

8.61. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1, y(\pi/2) = 0, y'(\pi/2) = 0.$

8.62. $yy'' + (y')^2 = 0, y(0) = 2, y'(0) = 1.$

8.63. $y^3y'' = 1, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

8.64. $2yy'' = 1 + (y')^2, y(0) = 1, y'(0) = 2.$

Знайти розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

8.65. $y'' + y' - 2y = 0.$

8.66. $y'' - 9y = 0.$

8.67. $y'' - 4y' = 0.$

8.68. $y'' - 2y' - y = 0.$

8.69. $3y'' - 2y' - 8y = 0.$

8.70. $y'' + y = 0.$

8.71. $y'' + 6y' + 13y = 0.$

8.72. $4y'' - 8y' + 5y = 0.$

8.73. $y'' - 2y' + y = 0.$

8.74. $4\ddot{x}_{tt} - 20\dot{x}_t + 25x = 0.$

8.75. $2y'' + y' + 2\sin^2(15^\circ)\cos^2(15^\circ)\, y = 0.$

8.76. $y'' + 4y' + 4y = 0.$

8.77. $y'' + 2y' + 1 = 0.$

8.78. $y'' - 13y' + 12y = 0.$

8.79. $y'' + 4y = 0.$

8.80. $y'' - 4y' + 3y = 0, y(0) = 6, y'(0) = 10.$

8.81. $y'' + 4y' + 29y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 15.$

8.82. $4y'' + 4y' + y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 0.$

8.83. $\ddot{S}_{tt} + 2\dot{S}_t + 2S = 0, S(0) = 1, \dot{S}(0) = 1.$

8.84. $y'' - y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$

8.85. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(1) = 3, \quad y'(1) = 0.$

Знайти розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

8.86. $y'' + y' - 2y = 6x^2.$

8.87. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x.$

8.88. $y'' + 2y' + y = e^x.$

8.89. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

8.90. $2y'' + a^2 y = e^x$.

8.91. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

8.92. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

8.93. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.

8.94. $y'' + y = \frac{1}{\cos^2 x}$.

8.95. $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

8.96. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

8.97. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -5{,}5$.

8.98. $y'' - y' = 2(1 - x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

8.99. $y'' + y + \sin 2x = 0$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 1$.

8.100. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3{,}2$.

Контрольні питання

1. Дайте означення диференціального рівняння і його розв’язків.
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Які диференціальні рівняння називаються рівняннями першого порядку?
4. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними? Як розв’язати такі рівняння?
5. Як можна розв’язати однорідне диференціальне рівняння першого порядку?.
6. Як можна розв’язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
7. Які диференціальні рівняння другого порядку дозволяють знизити порядок? Наведіть методи розв’язання таких рівнянь.
8. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами? Наведіть типи розв’язків таких рівнянь.

РОЗДІЛ 9. РЯДИ

9.1. Числові ряди

Основні означення і поняття

Нехай $\{a_n : n \in N\}$ – числова послідовність, тоді нескінченна сума елементів a_n цієї числової послідовності називається *числовим рядом*:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Числа $a_1, a_2, \ldots$ називають *членами ряду*, a_n, – *загальним членом ряду*

Сума перших n членів рядів *називається n-ю частинною сумою числового ряду*:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Нехай $\{a_n : n \in N\}$ – числова послідовність, тоді послідовність $\{S_n : n \in N\}$:

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

називають *послідовністю частинних сум.*

Числовий ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Причому число S називається *сумою числового ряду.*

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або є нескінченність, то ряд називають *розбіжним.*

Члени ряду можуть бути додатними або від'ємними. Якщо в знаках членів ряду відсутня якась послідовність, то ряд називається *знакозмінним*.

Якщо знак членів ряду не змінюється, то ряд називається *знакосталим*. Якщо усі члени ряду додатні $a_n > 0$, то – *знакододатним*, а якщо $a_n \geq 0$, то *знаконевід'ємним.*

Якщо знак членів ряду послідовно змінюється на протилежний, то ряд називається *знакопочережним*:

$$-a_1 + a_2 - \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n.$$

Необхідна і достатня умова збіжності числового ряду

Для того щоб послідовність була збіжною необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальною.

Означення фундаментальності: для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для будь-якого $n > N$ і для кожного $p > 0$ $(p \in N)$, виконується $\left|S_{n+p} - S_n\right| < \varepsilon$.

Ця умова є необхідною й достатньою умовою збіжності ряду, якщо під S_n розуміти послідовність часткових сум цього ряду.

Критерій збіжності рядів Коші

Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ був збіжним, необхідно й достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував номер $N(\varepsilon)$ такий, що для будь-якого $n > N$ і для кожного $p > 0$ $(p \in N)$ було виконане $\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon$.

Зауважимо, що критерій Коші не дуже зручний у застосуванні. Однак існує дуже проста необхідна умова збіжності ряду.

Необхідна умова збіжності ряду

Якщо наступна необхідна умова збіжності ряду виконується, то ряд може бути або збіжним, або розбіжним. Однак, якщо ця умова не виконується, то ряд є розбіжним.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Достатні ознаки збіжності числового ряду

Ознаки порівняння

Нехай маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що для усіх n, починаючи з деякого номера k, виконується нерівність $a_n \le b_n$. Тоді:

- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Гранична ознака порівняння

Нехай маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо $0 < \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, то ряди одночасно або збіжні, або розбіжні.

Ознака Д'аламбера

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Тоді:

- якщо $0 \leq q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;
- якщо $q = 1$, то ознака не дає відповідь (потрібно застосувати іншу ознаку).

Радикальна ознака Коші

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, існує границя

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Тоді:

- якщо $0 \leq q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;
- якщо $q = 1$, то ознака не дає відповідь (потрібно застосувати іншу ознаку).

Інтегральна ознака Коші

Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні та не зростають: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$. Припустимо, що на проміжку $[1, +\infty)$ визначена додатна не зростаюча функція $f(x)$ така, що $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n, \dots$ Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$збігаються або розбігаються одночасно.

Ознака Лейбниця (збіжність знакопочережний рядів)

Знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ – збіжний, якщо $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Абсолютна збіжність

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається абсолютно*, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Умовна збіжність

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається умовно*, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ – розбігається, але $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$збігається.

Основні властивості числових рядів

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, де λ – стала, також збіжний і його сума дорівнює λS.

Теорема 2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$є збіжними і мають суми відповідно S_a і S_b, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ і суми їх дорівнюють $S_a \pm S_b$.

Теорема 3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним (розбіжним) тоді і лише тоді, коли збіжним (розбіжним) є його n-й залишок.

Гармонічний і геометричний ряди

Геометричний ряд

Ряд, що складений з елементів геометричної прогресії називається *геометричним рядом*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n ,$$

де число q – знаменник геометричної прогресії, a – стала.

Геометрична прогресія – послідовність чисел, перший член якої не дорівнює нулю, а відношення будь-якого елемента послідовності до попереднього є сталим числом, що називається *знаменником прогресії* :

$|q| < 1$ – геометричний ряд збігається і сума ряду $S = \frac{a}{1-q}$;

$|q| \geq 1$ – геометричний ряд розбігається.

Гармонічний ряд

Ряд вигляду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$ називається *гармонічним рядом*.

Числовий ряд вигляду $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ називається *узагальненим гармонічним рядом або рядом Діріхле*:

$|\alpha|>1$ – ряд збігається;

$|\alpha|\le 1$ – ряд розбігається.

Приклади розв'язання задач

Задача 1.

Дослідити на збіжність ряди:1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання

1. Оскільки $\frac{1}{n\cdot 2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ є збіжним, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$ за ознакою порівняння також є збіжним.

2. Оскільки $\ln x<x$ при $x>0$, то $\ln(n+1)<n+1$ і $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ є розбіжним (це гармонічний ряд з вилученим першим членом), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ за ознакою порівняння також є розбіжним.

Задача 2.

Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+2}$.

Розв'язання.

1. Застосуємо граничну ознаку порівняння. Нехай

$$a_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n},\quad b_n=\frac{1}{n}.$$

Тоді,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}(\pi/2n)}{1/n}=\begin{Bmatrix}t=\frac{1}{n}, \\ n\to\infty, t\to 0\end{Bmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\pi t/2)}{t}=\frac{\pi}{2}\neq 0.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний (це гармонічний ряд), тому розбіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2n}$.

2. Застосуємо граничну ознаку порівняння. Позначимо

$$a_n = \frac{2n+1}{n^3+2}, \qquad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжним, оскільки це ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda}}$ при $\lambda = 2 > 1$.

Знайдемо границю:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)/(n^3+2)}{1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n^2}{n^3+2} = 2 \neq 0.$$

За граничною ознакою порівняння з збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$.

Задача 3.

Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання.

Після перевірки на необхідну умову збіжності ряду застосуємо ознаку Д'Аламбера, якщо за необхідною умовою ряд може збігатися.

1. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^3)'''}{(3^n)'''} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{3^n \ln^3 3} = 0.$$

Необхідна умова збіжності ряду виконується. Перевіряємо достатню умову

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 3^n}{n^3 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

2. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 2 \cdots 5 \cdot 6 \cdots (n-1)\cdot n}{5\cdot 5 \cdots 5 \cdot 5} = \infty.$$

Границя загального члену ряду на нескінченності не дорівнює нулю. Таким чином, необхідна умова збіжності ряду не виконується і ряд є розбіжним.

3. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\cdot n \cdots n}{1\cdot 2 \cdots 5 \cdot 6 \cdots (n-1)\cdot n} = \infty.$$

Границя загального члену ряду на нескінченності не дорівнює нулю. Таким чином, необхідна умова збіжності ряду не виконується і ряд є розбіжним.

Задача 4.

Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Розв'язання.

Після перевірки на необхідну умову збіжності ряду застосуємо радикальну ознаку Коші, якщо за необхідною умовою ряд може збігатися.

1. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2+3/n}{1+2/n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} 2^{2n} \to \infty.$$

Границя загального члену ряду на нескінченності не дорівнює нулю. Таким чином, необхідна умова збіжності ряду не виконується і ряд є розбіжним.

2. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sin^n\frac{\pi}{n} = 0.$$

При $n\to\infty$ аргумент функції синус прямує до 0, $\sin^n \pi/n$ теж прямує до 0. Так як необхідна умова збіжності ряду виконується, то перевіряємо достатню умову за радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\frac{\pi}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n} = \sin 0 = 0 < 1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд є збіжним.

Задача 5.

Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$.

Розв'язання.

Спочатку перевіримо ряди на необхідну умову збіжності. Якщо за необхідною умовою ряд може збігатися, то для подальшої перевірки застосуємо інтегральну ознаку Коші.

1. Перевіряємо необхідну умові збіжності ряду:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+5} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+5/n} = 0.$$

Необхідна умова збіжності ряду виконується. Візьмемо функцію, яка збігається з числовою послідовністю всіх $x = n, n = 1, 2, \ldots$:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2 + 5}, \qquad x \in [1; +\infty),$$

Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{2x}{x^2 + 5} dx = \lim_{t \to +\infty} \ln(x^2 + 5)|_1^t = +\infty.$$

Цей інтеграл є розбіжним. Отже розбіжним і ряд.

2. Дослідимо на збіжність ряд Діріхле.

Замість числової послідовності $1/n^\alpha$ розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \qquad x \in [1; +\infty).$$

Обчислимо відповідний невласний інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \frac{1}{1 - \alpha} \lim_{t \to +\infty} x^{1-\alpha}|_1^t = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ +\infty, & \alpha < 1. \end{cases}$$

Отже, ряд Діріхле збігається при $\alpha > 1$ і при $\alpha < 1$ розбігається.

При $\alpha = 1$ інтеграл набуває вигляду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x} = \lim_{t \to +\infty} \ln x|_1^t \to +\infty.$$

Отже, при $\alpha = 1$ ряд Діріхле є розбіжним. Таким чином, цей ряд збігається при $\alpha > 1$ і є розбіжним при $\alpha \le 1$.

Задача 6.

Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2}$.

Розв'язання.

Даний ряд є знакозмінним, оскільки знаки його членів залежать від знаку виразу $\cos n\alpha, n = 1, 2, \ldots$ Необхідна умова збіжності ряду виконується. Оскільки функція $\cos n\alpha, n = 1, 2, \ldots$ є обмеженою $-1 \le \cos n\alpha \le 1$, то

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos n\alpha}{n^2} = 0.$$

За ознакою Лейбниця для знакочережних рядів бачимо, що кожний наступний член ряду більший попереднього:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{n-1} \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \cdots$$

Таким чином, умова збіжності знакопочережних рядів за ознакою Лейбніца виконується. Ряд збігається.

Визначимо, чи збігається цей ряд абсолютно або умовно. Складемо ряд з модулів членів заданого ряду. Отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right|$.

Оскільки,$|\cos n\alpha| \leq 1$, то $\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ є збіжним. Це ряд Діріхле при $\alpha = 2 > 1$. Тоді за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos n\alpha}{n^2}\right|$ теж є збіжним. Так як збігається ряд складений з членів рядів взятих за абсолютним значенням, то ряд збігається абсолютно.

Задача 7.

Знайти суму ряду $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$.

Розв'язання.

Розкладемо дріб на суму двох дробів:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+2} = \frac{an + 2a + bn}{n(n+2)} = \frac{(a+b)n + 2a}{n(n+2)};$$

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2a = 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} b = -1/2 \\ a = 1/2 \end{cases}.$$

Розглянемо нескінченну суму простих дробів:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Можна бачити, що в нескінченної сумі присутні протилежні доданки:

$$S = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}.$$

Таким чином,

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

Задача 8.

Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+7^n}{14^n}$.

Розв'язання.

Розкладемо дріб на суму двох дробів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{14^n} + \frac{7^n}{14^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{1}{2^n}\right).$$

Враховуючі теорему 2 для збіжних рядів можемо представити отриманий ряд, як суму двох рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 2.$$

Кожен з двох рядів є геометричним рядом зі знаменниками $q = 1/7$ і $q = 1/2$. Сума геометричної прогресії обчислюється за формулою:

$$S = \frac{a}{1-q}, \quad a = 1.$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} = \frac{1}{1-1/7} = \frac{7}{6}; \qquad 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-1/2} = 2;$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7^n} + \frac{1}{2^n}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - 2 = \frac{7}{6} + 2 - 2 = \frac{7}{6}.$$

Таким чином,

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 7^n}{14^n} = \frac{7}{6}.$$

9.2. ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Основні означення і поняття

Ряд, членами якого є функції, визначені на деякій числовій множині D, називається *функціональним рядом*: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$.

Якщо взяти число $x_0 \in D$ і у функціональному ряді покласти $x = x_0$, то отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x_0)$. Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо він збіжний, то точку x_0 називають *точкою збіжності функціонального ряду*, якщо є розбіжним, то x_0 – *точка розбіжності функціонального ряду*. Множину всіх точок збіжності функціонального ряду називають його *областю збіжності*.

Частинна сума функціонального ряду є функція від x і визначається за аналогією з частинною сумою числового ряду:

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x).$$

У кожній точці x що належить області збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$, існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

яку називають *сумою функціонального ряду*:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x).$$

Відомо, що сума кінцевого числа неперервних функцій є неперервною. Крім того, суму кінцевого числа доданків можна почленно диференціювати та інтегрувати. Проте ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій, тобто для функціональних рядів, але вони зберігаються для рівномірно збіжних функціональних рядів.

Функціональний ряд називають *рівномірно збіжним* на множині D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число N, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x) < \varepsilon|$.

Рівномірна збіжність функціонального ряду означає, що його суму $S(x)$ на множині D можна наближено, з наперед заданою точністю замінити однією й тією ж самою частинною сумою $S_n(x)$ незалежно від значення $x \in D$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають важливі властивості, основні з яких сформулюємо тут без доведення.

Властивості рівномірно збіжних рядів

1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функцією, неперервною на цьому проміжку.

2. Якщо на відрізку $[a;\ b]$ функціональний ряд рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на цьому відрізку, то його можна почленно інтегрувати у межах від α до β, де $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} u_n(x) dx$$

3. Якщо функціональний ряд збіжний на відрізку $[a;\ b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n{}'$, то заданий ряд можна почленно диференціювати:

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}$$

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність використовують наступну достатню умову рівномірної збіжності.

Теорема Вейєрштрасса

Функціональний ряд є абсолютно та рівномірно збіжним на відрізку $[a;\ b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такий, що

$$|u_n(x)| \le a_n.$$

Степеневі ряди

Степеневим рядом називають ряд виду:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ – *коефіцієнти степеневого ряду* та x_0 – *центр степеневого ряду*.

Властивості степеневих рядів

1. *Теорема Абеля*. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_1$, то він є абсолютно збігається для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x| < |x_1|$, а якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_2$, то він розбігається для всіх x, що задовольняють нерівності $|x| > |x_2|$.

2. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при деяких $x \neq 0$ збігається, а при інших x розбігається, то існує і тільки одне, додатне число R таке, що степеневий ряд при $|x| < R$ збігається абсолютно, а при $|x| > R|$ розбігається. При $x = \pm R$ ряд може як збігатися, так і розбігатися. Число $R > 0$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, а інтервал $(-R; R)$ – *інтервалом збіжності степеневого ряду*.

Радіус збіжності R степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ визначаємо за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|;$$

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}}.$$

Питання про збіжність степеневого ряду при $x = \pm R$ вирішується для кожного ряду окремо.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ визначається за тими ж формулами. Інтервал збіжності такого ряду знаходять з нерівності $||x - x_0| < R$, тобто цей інтервал має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$

3. Якщо степеневий ряд збігається при $x = \pm R$ (необов'язково абсолютно), то він збігається абсолютно та рівномірно в інтервалі $[-r; r]$, який цілком міститься у інтервалі збіжності $(-R; R)$.

Якщо степеневий ряд розбігається при $x = \pm R$, то степеневий ряд на $(-R; R)$ не може збігатися рівномірно.

4. Сума степеневого ряду для всіх значень x із інтервалу збіжності $(-R;\ R)$ є неперервною функцією.

5. Степеневий ряд можна почленно диференціювати та інтегрувати в інтервалі збіжності $(-R;\ R)$. Зокрема, степеневий ряд, який отримуємо при диференціюванні або інтегруванні даного ряду має такий же інтервал збіжності.

6. Якщо $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ і $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то для будь-якого x з інтервалу збіжності обох степеневих рядів можна побудувати збіжні ряди:

$$f(x) \pm g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n;$$

$$f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} a_m \cdot b_{n-m}\right)x^n.$$

Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні довільного порядку, то функцію можна розвинути в околі точки x_0 у степеневий ряд, який називають *рядом Тейлора*:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Тут під похідною нульового порядку розуміють саму функцію.

Частинним випадком ряду Тейлора є *ряд Маклорена*, для якого $x_0=0$.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Властивості розвинутих рядів у степеневий ряд

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ в інтервалі $(x_0-R; x_0+R)$ можна розвинути у степеневий ряд за степенями $(x-x_0)$, то це розвинення є єдиним і воно є рядом Тейлора для цієї функції.

Теорема 2. Для того, що ряд Тейлора збігався у проміжку $(x_0 - R; x_0 + R)$ до функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора $R_n(x)$ прямував до нуля при $n \to \infty$ при будь-якому x з інтервалу $(x_0 - R; x_0 + R)$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ у інтервалі $(x_0 - R; x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$, таке, що $\left|f^{(n)}(x)\right| < M$ при будь-якому x з інтервалу $(x_0 - R; x_0 + R)$, то цю функцію можна розвинути у ряд Тейлора.

Ряди Маклорена деяких елементарних функцій

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \text{ для } |x| < 1$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \text{ для } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{4^n n!^2 \,(2n+1)} \text{ для } |x| < 1.$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{4^n n!^2 \,(2n+1)} \text{ для } |x| < 1.$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \text{ для } |x| < 1.$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^3 \quad \text{для } |x| < 1.$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n)n!^2\, 4^n} x^n \ \text{для } |x| < 1.$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ \text{для } |x| < 1.$$

Застосування степеневих рядів

Обчислення значення функції.

Розглянемо наближене обчислення значень функцій за допомогою степеневих рядів. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути у степеневий ряд у інтервалі $(-R;\ R)$ і при цьому $x_0 \in (-R;\ R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене значення – частинній сумі. Похибка такого наближення $|f(x_0) - S_n(x)|$ дорівнює абсолютній величині залишкового члена ряду: $|f(x_0) - S_n(x)| = |r_n(x_0)|$.

Якщо ряд для $f(x_0)$ є знакопочережним, то за ознакою Лейбніца $|r_n(x_0)| < |u_{n+1}(x_0)|$. Для довільних рядів величину похибки оцінюють наступним чином:

$$|r_n(x_0)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |u_k(x_0)| \le \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S,$$

де $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – збіжний числовий ряд з додатними членами, сума якого наперед відома. Наприклад, це сума нескінченно спадної геометричної прогресії, для якої $a_1 \ge |u_{n+1}(x_0)|, a_2 \ge |u_{n+2}(x_0)|, \ldots$

Обчислення інтегралів.

Розглянемо застосування степеневих рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, причому первісна підінтегральної функції не виражається скінченним числом елементарних функцій, або ж інтеграл складний для обчислення. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд, що рівномірно збігається на відрізку інтегрування $[a;\ b]$, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатися властивістю про почленне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як при обчисленні значень функцій.

Розв'язання диференціальних рівнянь.

Степеневі ряди широко використовуються для розв'язання диференціальних рівнянь з початковими умовами. Коефіцієнти степеневої функції $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ знаходять з алгебраїчних рівнянь, які отримують при підстановки степеневого ряду в диференціальне рівняння.

Ряд Фур'є

У природі та техніці розповсюджені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називають *періодичними*. Прикладами таких процесів є коливання. Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. Прикладом такої функції є функція, яка описує просте гармонічне коливання: $x(t) = a\sin(\omega t + \varphi_0)$, де a – амплітуда коливання, ω – його циклічна частота, φ_0 – початкова фаза. Періодом функції є час, за який відбувається одне повне коливання: $T = 2\pi/\omega$. Функцію $x(t)$ називають *простою гармонікою*. Просту гармоніку можна представити також у вигляді лінійної комбінації тригонометричних функцій: $x(t) = a\sin\omega t + b\cos\omega t$.

Коливання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають *складними гармонічними коливаннями*. Графік такого коливання може значно відрізнятися від графіків простих гармонік, що його утворюють.

Далі розглянемо задачу представлення довільного періодичного процесу за допомогою суми простих гармонік. У багатьох випадках для цього доведеться використовувати нескінченну кількість простих гармонік.

Тригонометричний ряд

Тригонометричний ряд – це ряд виду:

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Дійсні числа $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, ...$ – коефіцієнти тригонометричного ряду.

Ряд Фур'є

Припустимо, що такий тригонометричний ряд на відрізку $[-\pi; \pi]$ рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Проінтегрувавши почленно цей ряд по відрізку $[-\pi; \pi]$, отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\, dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\, dx \right).$$

Оскільки $\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin nx\, dx = 0$, то $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_0\pi$ і

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Вирази для коефіцієнтів a_n знайдемо, якщо помножимо обидві частини рівності на $\cos kx$ і проінтегруємо отриманий ряд почленно по відрізку $[-\pi; \pi]$. Враховуючи, що $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx\, dx = 0, k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos kx\, dx = 0$ отримуємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\, dx = a_n\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx.$$

Аналогічно, помноживши рівність на$\sin kx$ і проінтегрувавши почленно по відрізку $[-\pi; \pi]$, знайдемо формулу для обчислення коефіцієнтів b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Нехай $f(x)$ – інтегрована функція на відрізку $[-\pi;\pi]$. Числа $a_0, a_n, b_n, n = 1, 2, \ldots$, що визначаються знайденими формулами називають *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$. Сам тригонометричний ряд, коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають *рядом Фур'є* цієї функції і позначають:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теорем.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ можна представити на відрізку $[-\pi;\pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду, то цей тригонометричний ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Теорема 2. Достатня умова розвинення функції через її ряд Фур'є. Нехай періодична функція $f(x)$ з періодом 2π є кусково-монотонна та обмежена на відрізку $[-\pi;\pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі. Сума цього ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ у всіх точках її неперервності. Якщо x_0 – точка розриву функції $f(x)$, то сума ряду Фур'є у точці x_0 дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ у цій точці. У точках $x = \pm\pi$ сума ряду Фур'є набуває значень: $S(-\pi) = S(\pi) = (f(-\pi + 0) + f(\pi - 0))/2$.

Зауваження. Для довільної інтегрованої 2π-періодичної функції коефіцієнти Фур'є можна обчислювати за формулами:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)dx\,, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\cos nx\, dx\,, b_n = \frac{1}{\pi}\int_{a}^{a+2\pi} f(x)\sin nx\, dx.$$

На відміну від розвинення функції у степеневий ряд, для чого потрібна її диференційованість довільне число разів, для розвинення функції у ряд Фур'є у цьому немає потреби. Тут достатньо лише, щоб ця функція була неперервною або мала на відрізку довжиною у період скінченну кількість точок розриву першого роду. Отже, клас функцій, які можна представити рядом Фур'є, є значно ширшими, ніж клас функцій, які можна подати у вигляді ряду Тейлора.

Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути у ряд Фур'є, то частинні суми цього ряду, які називають *тригонометричними многочленами*, дають можливість знайти наближення цієї функції. Похибка цієї формули зменшується з збільшенням числа n, проте її оцінка є набагато складнішою, ніж оцінка похибки наближення функції за допомогою ряду Тейлора.

Розвинення функцій у ряд Фур'є в проміжку $[-l,\ l]$.

Функція $f(x)$ називається такою, що задовольняє *умовам Діріхле* на відрізкі $[a;b]$, якщо вона на цьому відрізку:

Має кінцеве число розривів, причому всі вони першого роду;

Має кінцеве число екстремумів;

Для всіх $x \in (a;b)$ $\quad f(x) = \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$

Функція $f(x)$, яка задовольняє умовам Діріхле на відрізку $[-l;l]$, може бути визначена у всіх точках цього відрізка рядом Фур'є:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right);$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Якщо $f(-x) = f(x)$ тобто функція $f(x)$ парна, то $b_n = 0$ і

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}.$$

Якщо $f(-x) = -f(x)$ тобто функція $f(x)$ непарна, то $a_n = 0$ і

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Якщо функцію $f(x)$, яку можна розвинути на відрізку $[-l;l]$ в ряд Фур'є, продовжити з періодом $2l$, додатково вимагаючи, щоб $f(l) = \frac{f(l-0)+f(l+0)}{2}$, то вона буде визначатися таким же рядом Фур'є і на своєму продовженні.

Розвинення функцій у ряд Фур'є в проміжку $[0,\ l]$.

Функцію, задану на відрізку $[0;l]$, зручно розкладати за косинусами або синусами в залежності як її довизначити.

1. Довизначимо функцію $f(x)$, задану на відрізку $[0,l]$, на інтервал $(-l,0)$ парним чином, тобто $f(-x)=f(x)$ для $x\in(-l,0)$. Тоді функцію $f(x)$ на проміжку $(-l,l)$ можна вважати парною та її ряд Фур'є містить тільки косинуси.

2. Довизначимо функцію $f(x)$, задану на відрізку $[0,l]$, на інтервал $(-l,0)$ непарним чином, тобто $f(-x)=-f(x)$ для $x\in(-l,0)$. Тоді функцію $f(x)$ на проміжку $(-l,l)$ можна вважати непарною та її ряд Фур'є містить тільки косинуси синуси.

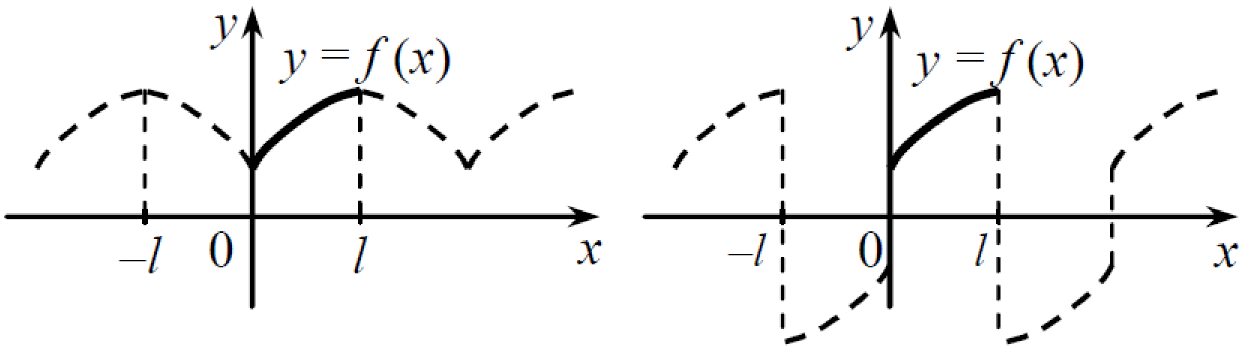


Рис. 9.1. Ілюстрація довизначення функції парним і непарним чином

Комплексна форма ряду Фур'є.

За формулою Ейлера існує зв'язок між експоненціальною і тригонометричними функціями:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x.$$

Відповідно розвинення функції $f(x)$ у тригонометричний ряд можна замінити розвиненням цієї функції у ряд експоненціальних функцій.

Функція $f(x)$, яка задовольняє умовам Діріхле на відрізку $[-l;l]$, може бути визначена у всіх точках цього відрізка рядом Фур'є в :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\exp\left\{i\frac{n\pi x}{l}\right\};$$

$$c_n=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)\exp\left\{-i\frac{n\pi x}{l}\right\}dx.$$

Між коефіцієнтами $a_n, b_n, c_n,\ n=1,2,\ldots$ існує зв'язок:

$$c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}.$$

Інтеграл Фур'є

Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегрована на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, тобто $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ збігається та задовольняє умовам Діріхле на будь-якому кінцевому відрізку, то вона може бути представлена інтегралом

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt.$$

Зважаючи на парність функції $\cos\omega(x-t)$ цю формулу зручно записувати у вигляді:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega(x-t)\,dt = \int\limits_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\,, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt$$

Перетворення Фур'є в комплексній формі

Нехай задана функція $f(t)$ абсолютно інтегрована на проміжку $(-\infty;\ +\infty)$, тобто, то інтеграл

$$F(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$$

називається перетворенням Фур'є. Функція $F(\omega)$ називається образом або спектром функції $f(t)$.

Обернене перетворення Фур'є:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega.$$

Перетворення і аналіз Фур'є широко застосовуються в спектральному аналізі для отримання частотного спектра неперіодичної функції і представлення її через суму гармонічних коливань. Отже аналіз Фур'є досліджує яким чином загальні математичні функції можуть бути представлені або апроксимовані через суму більш простих тригонометричних функцій.

Приклади розв'язання задач

Задача 1

Обчислити з точністю до 10^{-4} значення $\sin 36°$.

Розв'язання. Використаємо ряд Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in (-\infty; +\infty).$$

Підставляємо $x = 36° = \frac{\pi}{5}$:

$$\sin\frac{\pi}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n+1}}{(2n+1)!\ \cdot 5^{2n+1}}.$$

Це знакопочережний ряд, тому

$$\left|r_n\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| < \left|u_{n+1}\left(\frac{\pi}{5}\right)\right| = \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)!\ \cdot 5^{2n+3}} < 10^{-4}$$

Нерівність виконується вже при $n = 2$, $|r_2(\pi/5)| < 7{,}67 \cdot 10^{-6}$, тому для досягнення заданої точності достатньо взяти суму $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$:

$$\sin\frac{\pi}{5} \approx \frac{\pi}{5} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 5^3} + \frac{\pi^5}{120 \cdot 5^5} \approx 0{,}5878$$

Задача 2

Обчислити з точністю до 0,001 число e.

Розв'язання. Застосуємо розвинення функції e^x у ряд Маклорена:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

Підставивши у степеневий ряд $x = 1$, отримуємо числовий:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося у тому, що нерівність

$$\frac{1}{n \cdot n!} < 0{,}001$$

виконується при $n \geq 6$. Тому для досягнення заданої точності 0,001 достатньо взяти частинну суму ряду $S_6 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2{,}718$$

Задача 3

Обчислити з точністю до 0,002 інтеграл $\int_0^{1,2} \exp\{-x^2\}\, dx$.

Розв'язання. Первісна підінтегральної функції не виражається скінченним числом елементарних функцій, тому для обчислення заданого інтегралу представимо $\exp\{-x^2\}$ у вигляді степеневого ряду, для чого використаємо:

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \qquad t \in (-\infty; +\infty)$$

Підставивши у степеневий ряд $t = -x^2$, отримаємо:

$$\exp\{-x^2\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \qquad x \in (-\infty; +\infty)$$

Інтегруємо цей ряд почленно у межах від 0 до 1,2:

$$\int_0^{1,2} \exp\{-x^2\}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{1,2} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\Bigg|_0^{1,2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1{,}2^{2n+1}}{(2n+1)n!}.$$

Отримали збіжний знакопочережний ряд. Знайдемо кількість членів цього ряду, які потрібно скласти, щоб отримати суму ряду з точністю до 0,002. За ознакою Лейбніца

$$|r_n| < |u_{n+1}| = \frac{1{,}2^{2n+2}}{(2n+2)(n+1)!} < 0{,}002$$

Послідовно підставляючи у нерівність різні значення n, отримуємо, що ця нерівність виконується при $n = 4, |r_4| < |u_5| = 1{,}03 \cdot 10^{-3}$. Отже, для досягнення заданої точності достатньо взяти частинну суму $S_4 = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4$:

$$\int_0^{1{,}2} \exp\{-x^2\}\,dx \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 1{,}2^{2n+1}}{(2n+1)n!} \approx 1 - \frac{1{,}2^3}{3} + \frac{1{,}2^5}{5 \cdot 2!} - \frac{1{,}2^7}{7 \cdot 3!} + \frac{1{,}2^9}{9 \cdot 4!} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}57600 + 0{,}24883 - 0{,}08531 + 0{,}02389 \approx 0{,}6114.$$

Задача 4

Знайти у вигляді степеневого ряду розв'язання рівняння $y'' + xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Розв'язання. Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \cdots$$

Усі похідні невідомої функції $y^{(n)}(0)$ знайдемо з диференціального рівняння послідовно його диференціюючи й підставивши відомі похідні:

$y(0) = 1;$

$y'(0) = 0;$

$y'' + xy = 0 \Rightarrow y''(0) = -0 \cdot y(0) = -0 \cdot 1 \Rightarrow y''(0) = 0;$

$y''' + xy' + y = 0 \Rightarrow y'''(0) = 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y'''(0) = -1;$

$y^{(4)} + xy^{(2)} + 2y^{(1)} = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y^{(4)}(0) = 0;$

$y^{(5)} + xy^{(3)} + 3y^{(2)} = 0 \Rightarrow y^{(5)}(0) + 0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow y^{(5)}(0) = 0;$

$y^{(6)} + xy^{(4)} + 4y^{(3)} = 0 \Rightarrow y^{(6)}(0) + 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow y^{(6)}(0) = 4;$

$y^{(n)} + xy^{(n-2)} + (n-2)y^{(n-3)} = 0 \Rightarrow y^{(n)} + 0 \cdot y^{(n-2)} + (n-2)y^{(n-3)} = 0 \Rightarrow$

$$y^{(n)} = (2-n)y^{(n-3)}.$$

Підставимо найдені похідні в ряд Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \cdots =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{4}{6!} x^6 - \frac{28}{9!} x^9 + \cdots$$

Задача 5

Розкласти функцію $f(x) = x$ в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi; \pi]$.

Розв'язання.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right);$$

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow a_n = 0, n = 0,1,2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx\right] =$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{2}{n}(-1)^n.$$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}, -\pi < x < \pi.$$

Задача 6

Розкласти функцію $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ в ряд Фур'є на відрізку $[0; 2\pi]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right);$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)dx, a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{4\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi}\left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{2} - 0\right) = 0.$$

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\,dx = \frac{1}{2\pi n}\left[(\pi - x)\sin nx|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\sin nx\,dx\right] = 0.$$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\,dx = \frac{1}{2\pi n}\left[-(\pi - x)\cos nx|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos nx\,dx\right] = \frac{1}{n}.$$

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \qquad 0 < x < 2\pi.$$

Задача 7

Розкласти функцію $f(x) = x^2$ в ряд Фур'є на відрізку $[0;\pi]$.

Розв'язання.

Продовжимо функцію $f(x)$ непарним способом на проміжок $[-\pi, 0)$, а потім продовжимо періодично з періодом 2π на всю числову пряму. На відрізку $[-\pi, \pi]$ функція непарна, і тому $a_0 = a_n = 0$. Коефіцієнти знаходимо за формулою:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}((-1)^n - 1).$$

Отже,

$$x^2 = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n - 1)\frac{\sin nx}{n^3}, \qquad 0 < x < \pi.$$

Задача 8

Написати інтеграл Ф'урє $f(x) = \begin{cases} 1, x \in [0,1] \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$ і $f(-x) = -f(x)$

Розв'язання.

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty} [a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]d\omega$$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\omega x\,dx\,, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dx$$

Так як $f(-x) = -f(x)$, то $a(\omega) = 0$ і

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(x)\sin\omega x\,dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\sin\omega t\,dt = \frac{2}{\pi\omega}(1 - \cos\omega).$$

Отже,

$$f(x) = \int_{0}^{+\infty}\frac{2}{\pi\omega}(1 - \cos\omega)\sin\omega x\,d\omega.$$

Задачі на ряди

Знайти часткову суму n перших членів ряду та знайти суму ряду.

9.1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\cdots$

9.2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)}+\dots$

9.3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}+\cdots$

9.4. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\cdots$

9.5. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}+\cdots$

9.6. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\cdots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\cdots$

Знайти суму ряду

9.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

9.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$

9.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$

9.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$

9.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$

9.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду

9.13. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots$

9.14. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$

9.15. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\cdots$

9.16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки порівняння

9.17. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\cdots$

9.18. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\cdots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\cdots$

9.19. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\cdots$

9.20. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\cdots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\cdots$

9.21. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n+1}{(n+2)\cdot n}+\cdots$

9.22. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\cdots+\frac{1+n}{1+n^2}$.

Довести збіжність рядів за допомогою ознаки Д'аламбера

9.23. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots+\frac{1}{(2n+1)!}+\cdots$

9.24. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$

9.25. $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}+\cdots+n\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+1}}+\cdots$

9.26. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\cdots+\frac{2\cdot5\cdots(3n-1)}{1\cdot5\cdots(4n-3)}+\cdots$

9.27. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{n^2}{3^n}+\cdots$

9.28. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot3}{3\cdot6}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3\cdot6\cdot n!}+\cdots$

9.29. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}+\cdots$

9.30. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot3}{2\cdot4}+\cdots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$

Дослідити на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші

9.31. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2n+1}\right)^n.$

9.32. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\cdots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\cdots$

9.33. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^n}{(n+1)^n}.$

9.34. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}.$

9.35. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^{2n}}\right)^n.$

9.36. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n}.$

Дослідити на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші

9.37. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln n}+\cdots$

9.38. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\cdots$

9.39. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}.$

9.40. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}.$

9.41. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}.$

9.42. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2.$

9.43. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2}.$

9.44. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}.$

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

9.45. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot3^n}.$

9.46. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}.$

9.47. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}.$

9.48. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n+5}.$

9.49. $1-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots$

9.50. $1-\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}+\cdots$

9.51. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\cdots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\cdots$

9.52. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$

Визначити інтервал збіжності степеневих рядів

9.53. $10x+100x^2+\cdots+10^n x^n+\cdots$

9.54. $x-\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\cdots$

9.55. $x+\frac{x^2}{20}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot10^{n-1}}+\cdots$

9.56. $1+x+\cdots+n!\,x^n+\cdots$

9.57. $1+2x^2+\cdots+2^{n-1}x^{2(n-1)}+\cdots$

9.58. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$.

9.59. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$.

9.60. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$.

9.61. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}$.

9.62. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$.

9.63. $x+4x^2+\cdots+2^nx^n+\cdots$

9.64. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln(n+1)}{n+1}x^n$.

Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)$ та вказати область збіжності отриманого ряду

9.65. $f(x)=\cos 3x$.

9.66. $f(x)=x^3\operatorname{arctg}x$.

9.67. $f(x)=\sin x^2$.

9.68. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$.

9.69. $f(x)=\cos(x-a)$

9.70. $f(x)=\sin^2 x$.

9.71. $f(x)=xe^x$.

9.72. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x}}$.

9.73. $f(x)=5^x$.

9.74. $f(x)=\frac{2}{1-3x^2}$.

9.75. $f(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$.

9.76. $f(x)=\frac{x^2}{1+x}$.

9.77. $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$.

9.78. $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$.

9.79. $f(x)=\ln(1-x+x^2)$.

9.80. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі точки x_0 та вказати область збіжності отриманого ряду

9.81. $f(x)=\frac{1}{x}, x_0=-2$.

9.82. $f(x)=\frac{1}{x+2}, x_0=-2$.

9.83. $f(x)=\frac{1}{2x+5}, x_0=3$.

9.84. $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}, x_0=1$.

9.85. $f(x)=\ln(5x+3), x_0=2/5$.

9.86. $f(x)=\sqrt{x^3}, x_0=1$.

Знайти перші п'ять членів ряду Маклорена функцій $f(x)$

9.87. $f(x)=\ln(1+e^x)$.

9.88. $f(x)=e^{\cos x}$.

9.89. $f(x)=-\ln(\cos x)$.

9.90. $f(x)=(1+x)^x$.

Виразити у формі ряду інтеграли використовуючи розвинення підінтегральних функцій в ряд

9.91. $\int \frac{\sin x}{x} dx.$

9.92. $\int \frac{\cos x}{x} dx.$

9.93. $\int \frac{e^x}{x} dx.$

9.94. $\int \frac{e^x}{x^2} dx.$

9.95. $\int e^{-x^2} dx.$

9.96. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

9.97. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

9.98. $\int \sqrt{1+x^3} dx.$

9.99. $\int \frac{dx}{1-x^9}.$

9.100. $\int \frac{\arccos x}{x} dx$

Обчислити інтеграли за допомогою степеневих рядів з точністю до 0,001

9.101. $\int_0^1 \sin x^2 \, dx.$

9.102. $\int_{0,3}^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx.$

9.103. $\int_{0,3}^{0,5} x^2 \cos 3x \, dx.$

9.104. $\int_0^1 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} dx.$

9.105. $\int_0^{0,5} \ln(1+x^3) \, dx.$

9.106. $\int_0^{0,2} \sqrt{x} e^{-x} \, dx.$

9.107. $\int_0^{0,1} \ln(1-x) \, dx.$

9.108. $\int_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right) dx.$

9.109. $\int_0^1 \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}} dx.$

9.110. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}.$

9.111. $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} \, dx.$

9.112. $\int_0^1 e^{-x^2/2} \, dx.$

Розв’язати диференціальне рівняння за допомогою степеневих рядів

9.113. $y' = xy + e^y, \; y(0) = 0.$

9.114. $y' = x^2 - y^2, \; y(0) = 0{,}5.$

9.115. $y' = 2\cos x - xy^2, \; y(0) = 1.$

9.116. $y' = e^{3x} + 2xy^2, \; y(0) = 1.$

9.117. $y' = x^2 + xy + y^2, \; y(0) = 0{,}5.$

9.118. $y' = 2\sin x + xy, \; y(0) = 0.$

9.119. $y' = xy + \ln(x+y), \; y(1) = 0.$

9.120. $y'' = 2yy', \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

9.121. $y''' = y'' + (y')^2 + y^3 + x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; y''(0) = 0{,}5.$

9.122. $y''' = ye^x - xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1.$

9.123. $y'' = xyy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$

9.124. $4x^2y'' + y = 0, y_1 = 1, y_1' = 0{,}5.$

9.125. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x}, y(1) = 1, y'(1) = 0.$

9.126. $y'' = e^y \sin y',\ y_\pi = 1,\ y_\pi' = \frac{\pi}{2}.$

Розкласти функцію в ряд Фур'є в заданому інтервалі

9.127. $f(x) = -1$ в інтервалі $(-\pi, 0)$ та $f(x) = 1$ в інтервалі$(0, \pi)$.

9.128. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0, \pi)$.

9.129. $f(x) = x^2$ в інтервалі 1) $(-\pi, \pi)$ та 2) $(0, \pi)$.

9.130. $f(x) = x^3$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

9.131. $f(x) = |x|$ в інтервалі $(-l, l)$.

9.132. $f(x) = e^x$ в інтервалі $(-l, l)$.

9.133. $f(x) = \operatorname{sh} ax$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

9.134. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x - 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

9.135. $f(x) = \begin{cases} 3, & -\pi \le x < 0 \\ -1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$

9.136. $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$

Представити функцію $f(x)$ інтегралом Фур'є

9.137. $f(x) = e^{-\beta x}$ при $x \ge 0$ і $f(-x) = f(x)$.

9.138. $f(x) = e^{-|x|}$.

9.139. $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3] \\ 0, & x \notin [0, 3] \end{cases}$, $f(-x) = -f(x)$

9.140. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1,1] \end{cases}$

9.141. $f(x) = \begin{cases} -2, & x \in [-2, 2] \\ 0, & x \notin [-2, 2] \end{cases}$.

9.142. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$, $f(-x) = f(x)$.

Контрольні питання

1. Що таке числовий ряд?
2. Означення збіжності та сума числового ряду.
3. Що можна сказати про збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$?
4. Необхідна умова збіжності ряду. Критерій Коші збіжності числового ряду.
5. Критерій збіжності ряду з невід'ємних чисел.
6. Перша і друга ознака порівняння збіжності ряду.
7. Радіальна ознака Коші.
8. Ознака Д'Аламбера.
9. Інтегральна ознака збіжності ряду.
10. Абсолютна та умовна збіжність числового ряду.
11. Ознака Лейбніца.
12. Що таке функціональний ряд та його сума.
13. Рівномірна збіжність функціональних рядів.
14. Властивості рівномірно збіжних рядів: неперервність суми, почленне інтегрування та диференціювання.
15. Степеневі ряди: означення, область збіжності.
16. Теорема Абеля про абсолютну збіжність. Радіус збіжності.
17. Рівномірна збіжність степеневого ряду. Інтегрування та диференціювання
18. степеневого ряду.
19. Ряди Тейлора і Маклорена.
20. Ряд Маклорена елементарних функцій.
21. Сформулюйте означення тригонометричного ряду Фур'є.
22. Коефіцієнти Фур'є періодичної функції $f(x)$ з періодом 2π функції.
23. Сформулюйте достатні умови подання функції $f(x)$ через її ряд Фур'є.
24. Комплексна форма ряду Фур'є та комплексні коефіцієнти ряду Фур'є.
25. Коефіцієнти Фур'є для парних і непарних функцій.
26. Коефіцієнти Фур'є та ряд Фур'є періодичної $2l$-періодичних функцій
27. Інтеграл Фур'є
28. Перетворення Фур'є

ВІДПОВІДІ

Розділ 1. Матриці

	а)	б)	в)	г)
1.1.	$-1+i$	2	$2i$	-1
1.2.	$4-3i$	$-5+i$	$14+23i$	$-1{,}04+0{,}28i$
1.3.	$-5-5i$	$1-3i$	$4i$	$0{,}5$
1.4.	$-1+3i$	$2+2i$	-2	$-i$
1.5.	$14+16i$	$2+13i$	$-6+58i$	$2{,}16+0{,}88i$
1.6.	$-5i$	$3-4i$	$-5+i$	$0{,}5+2{,}5i$
1.7.	6	$5-i$	$8+4i$	$2-4i$
1.8.	$-3+6i$	$3+4i$	$-6-2i$	$0{,}25-0{,}75i$
1.9.	$20+17i$	$-1+14i$	$9+95i$	$1{,}29+1{,}02i$
1.10.	$1-i$	1	$1-i$	$-1+i$

1.11. $z=\exp\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}=\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}=i.$

1.12. $z=3\exp\{\pi i\}=3(\cos\pi+i\cdot\sin\pi)=-3.$

1.13. $z=2\exp\left\{-\frac{\pi}{4}i\right\}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$

1.14. $z=\sqrt{2}\exp\left\{-\frac{\pi}{4}i\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)=1-i.$

1.15. $z=\sqrt{2}\exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right).$

1.16. $z=2\exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\}=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$

1.17. $z=\sqrt{2}\exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\}=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right).$

1.18. $z=2\exp\left\{-\frac{\pi}{3}i\right\}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{\pi}{3}\right).$

1.19. $z=3\exp\left\{\frac{\pi}{2}i\right\}=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right).$

1.20. $z=2\exp\{0i\}=2(\cos 0+i\cdot\sin 0).$

1.21. $k=0;\quad e^{-\pi i/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i;\quad k=1;\quad e^{\pi i/2}=i;\quad k=2;\ e^{7\pi i/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

1.22. $k=0;\ \ 2\exp\left\{\frac{\pi}{4}i\right\}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ \ k=1;\ \ 2\exp\left\{\frac{3\pi}{4}i\right\}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ \ k=2;$
$2\exp\left\{\frac{5\pi}{4}i\right\}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i;\ k=3;\ 2\exp\left\{\frac{7\pi}{4}i\right\}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$

1.23. $k=0, \sqrt{2}\exp\left\{-\frac{\pi}{8}i\right\};\ k=1, \sqrt{2}\exp\left\{\frac{7\pi}{8}i\right\}.$

1.24. $k=0, \sqrt[3]{2}\exp\left\{-\frac{\pi}{12}i\right\}; k=1, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{7\pi}{12}i\right\};\ k=2, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{15\pi}{12}i\right\}.$

1.25. $k=0, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{3\pi}{12}i\right\};\ k=1, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{11\pi}{12}i\right\}; k=2, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{19\pi}{12}i\right\}.$

1.26. $k=0, \sqrt{2}\exp\left\{\frac{\pi}{8}i\right\}; k=1, \sqrt{2}\exp\left\{\frac{9\pi}{8}i\right\}.$

1.27. $k=0, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{\pi}{12}i\right\}; k=1, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{9\pi}{12}i\right\}; k=2, \sqrt[3]{2}\exp\left\{\frac{17\pi}{12}i\right\}.$

1.28. $k=0, \sqrt{2}\exp\left\{-\frac{\pi}{6}i\right\}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i; k=1, \sqrt{2}\exp\left\{\frac{5\pi}{6}i\right\}=-\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i.$

1.29. $k=0,\ 2e^{\pi i/8}; k=1,\ 2e^{5\pi i/8}; k=2,\ 2e^{9\pi i/8}; k=3,\ \ 2e^{13\pi i/8}.$

1.30. $k=0,\ 2;\ \ k=1,\ 2e^{\pi i/2}=2i;\ \ k=2,\ -2;\ \ k=3,\ \ 2e^{3\pi i/2}=-2i.$

1.31. $e^{-\pi i/2}=-i.$ **1.32.** $54\sqrt{2}e^{\pi i/4}=54\sqrt{2}(1+i).$ **1.33.** $64e^{\pi i/2}=64i.$

1.34. $4e^{\pi i}=-4.$ **1.35.** $4\sqrt{2}e^{-\pi i/4}=4\sqrt{2}(1-i).$ **1.36.** $64e^{3\pi i/2}=-64i.$

1.37. $2\sqrt{2}e^{3\pi i/4}=2\sqrt{2}(-1+i).$**1.38.** $8e^{\pi i}=-8.$ **1.39.** $27e^{3\pi i/2}=-27i.$

1.40. $8e^{\pi i/2}=8i.$ **1.41.** $z=1\pm 2i.$ **1.42.** $z_1=3, z_2=3e^{2\pi i/3}, z_3=3e^{4\pi i/3}.$

1.43. $z=-1\pm 3i.$ **1.44.** $z_1=2e^{\frac{\pi i}{4}}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ z_2=2e^{\frac{3\pi i}{4}}=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i;\ z_3=2e^{\frac{5\pi i}{4}}=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i; z_4=2e^{\frac{7\pi i}{4}}=\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$ **1.45.** $z=-2\pm i.$ **1.46.** $z_1=e^{\frac{\pi i}{4}}, z_2=e^{\frac{5\pi i}{4}}.$ **1.47.** $z=2\pm 2i.$ **1.48.** $z=\ln 0{,}2+i(0{,}93+2\pi k), k=0,\pm1,\pm2,\dots$ **1.49.** $z=1{,}5\pm 2{,}5i.$ **1.50.** $z=\ln 2+i\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ **1.51.** $i\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$

1.52. $\ln 4+i\left(\frac{11\pi}{6}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ **1.53.** $i\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ **1.54.** $\frac{\ln 2}{2}+i\left(\frac{7\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ **1.55.** $\frac{\ln 2}{2}+i\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$ **1.56.** $\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$

1.57. $\frac{\ln 2}{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$ **1.58.** $\ln 2+i\left(\frac{5\pi}{3}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}.$ **1.59.** $\ln 5+i(0{,}2\pi+2\pi k), k\in\mathbb{Z}.$ **1.60.** $\ln 2+i(\pi+2\pi k), k\in\mathbb{Z}.$ **1.61.** Однакова розмірність.

1.62. $A, C.$ **1.63.** **а)** B; **б)** D; **в)** C; **г)** A.

1.64. а) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \\ 12 & -11 & -1 \end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \\ 1 & 22 & 2 \end{pmatrix}$. **1.65.** Так як $a_{ij}=a_{ji}$ і $b_{ij}=b_{ji}$, то $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}=a_{ji}+b_{ji}=c_{ji}$.

1.66. а) $X=\begin{pmatrix}3&-13\\-2&0\\3&-19\end{pmatrix}$; **б)** $X=\begin{pmatrix}-2&1/3\\1/3&-4\end{pmatrix}$. **1.67. а)** 0; **б)** $\begin{pmatrix}4\\-11\\-16\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}-3&-8&21\\3&-8&-19\end{pmatrix}$; **г)** $\begin{pmatrix}1&4&3\\5&9&5\end{pmatrix}$. **1.68. а)** (-1); **б)** $\begin{pmatrix}8&-12&0\\6&-9&0\\2&-3&0\end{pmatrix}$.

1.69. а) Ширина A дорівнює висоті B; **б)** Висота A дорівнює ширині B; **в)** Ширина A дорівнює висоті B і висота A дорівнює ширині B.

1.70. а) Не існує; б) $8\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$; в) $(8\quad 16)$. **1.71.** $AC=\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$. $AB=\begin{pmatrix}-1&-4&6\\42&45&80\end{pmatrix}$.

1.72. $m=9, n=1$. **1.73.** $m=7, n=6$. **1.74. а)** Ні; **б)** Да; **в)** Да; **г)** Ні; **д)** Ні .

1.75. а) $\begin{pmatrix}0&-1\\39&5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}11\\8\\30\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}-1\\-8\\-1\end{pmatrix}$. **1.76.** $\begin{pmatrix}39&-14&-1\\48&-8&38\\37&22&149\\112&-32&32\end{pmatrix}$.

1.77. $\begin{pmatrix}-5&-10\\15&10\end{pmatrix}$. **1.78. а)** $2^{n-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; **в)** $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

1.79. $f(A)=\begin{pmatrix}0&-2\\4&4\end{pmatrix}$.

1.80. При підстановки матриці A в багаточлен отримуємо нульову матрицю.

1.81. а) $\begin{pmatrix}-5&-3\\2&-6\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0&2&3\\4&0&9\\0&0&1\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}\cos n\alpha&-\sin\alpha\\\sin n\alpha&\cos n\alpha\end{pmatrix}$ г) $\begin{pmatrix}a^n&na^{n-1}\\0&a^n\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1&na\\0&1\end{pmatrix}$. **1.82.** $A=\begin{pmatrix}1&-1&5\\4&0&1\end{pmatrix}$. **1.83. а)** $\begin{pmatrix}-4&-4&7\\10&2&-3\end{pmatrix}$; **б)** $\begin{pmatrix}8&1&7\\-6&3&-1\end{pmatrix}$.

1.84. $B=\begin{pmatrix}4&-2&2\\5&3&-2\\-5&8&0\end{pmatrix}$. **1.85.** $BA=\begin{pmatrix}3&-5&0\\2&4&6\end{pmatrix}$.

1.86. а) 34; **б)** -15; **в)** 0. **1.87. а)** 5/3; **б)** -1 і 4; **в)** $\pm 2i$. **1.88. а)** 55; **б)** -31; **в)** 18.

1.89. а) -3; **б)** 0 і 3; **в)** не при якому α.

1.90. а) 0; **б)** 0; **в)** 0; **г)** -42047.

1.91. а) 50; **б)** 3; **в)** 300; **г)** 110.

1.92. а) $\begin{pmatrix}5&-2\\3&-1\end{pmatrix}$; **б)** $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}4&-3\\1&-2\end{pmatrix}$; **в)** не існує; **г)** $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}4&-3\\5&0\end{pmatrix}$.

1.93. а) $\frac{1}{15}\begin{pmatrix}2&-4&2\\-3&-1&4\\8&12&-6\end{pmatrix}$; **б)** не існує; **в)** $\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$; **г)** $\frac{1}{48}\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&0&5\\-1&2&3\end{pmatrix}$

1.94. а) $\frac{1}{278}\begin{pmatrix} 37 & 60 \\ -38 & 6 \\ 55 & -16 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{22}\begin{pmatrix} 11 & -3 \\ 0 & -2 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{210}\begin{pmatrix} 20 & 21 \\ 0 & 42 \\ 40 & -21 \\ 10 & 42 \end{pmatrix}$ г) $\frac{1}{42}\begin{pmatrix} -20 & -6 \\ 4 & -3 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$

1.95. а) $\frac{1}{69}\begin{pmatrix} -29 & 2 & 11 \\ 7 & -10 & 14 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{269}\begin{pmatrix} 39 & 52 & -50 \\ 29 & -51 & 18 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{121}\begin{pmatrix} 0 & -55 & 33 \\ 0 & 22 & 11 \end{pmatrix}$;

г) $\frac{1}{133}\begin{pmatrix} -12 & -8 & 39 \\ 26 & -27 & -18 \end{pmatrix}$; д) $\frac{1}{136}\begin{pmatrix} -26 & 12 & 42 \\ 42 & 12 & -26 \end{pmatrix}$

Розділ 2. Матричні рівняння

2.1. $\lambda \neq 1$. **2.2.** $\lambda \neq -2$ і $\lambda \neq 2$. **2.3.** $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -3$; $\lambda \neq 3$. **2.4.** $\lambda \neq -3$. **2.5.** $\lambda \neq -5$ і $\lambda \neq 2$. **2.6.** Будь яке. **2.7.** (2; –1). **2.8.** (–3; 2). **2.9.** (1; –3). **2.10.** (5; –4). **2.11.** (3; 1; 1). **2.12.** (1; 2; –2). **2.13.** (2; –2; 3). **2.14.** (3; 4; 5). **2.15.** (2; –2; 3). **2.16.** система несумісна. **2.17.** (1; 2; –1). **2.18.** (3; 2; 1). **2.19.** (8/7; –1/7;–3/7). **2.20.** (3; –1; 2).

2.21. $x_1 = 14 - 3x_2$, $x_3 = 7 - 3x_2$ – загальний розв'язок, (14; 0; 7), (0; 14/3; –7), (7; 7/3; 0) – базисні розв'язки.

2.22. $x_1 = 3$, $x_2 = 2 - x_3$ – загальний і (3; 2; 0) – базисний розв'язки.

2.23. $x_1 = 2 + 3x_3 - x_4$, $x_2 = -2 + 3x_4$ – загальний розв'язок, (2; –2; 0; 0), (0; 0; –4/9; 2/3), (0; 4; 0; 2), (0; –2; –2/3; 0), (4/3; 0; 0; 2/3) – базисні розв'язки.

2.24. $x_1 = 4 + x_3 - 2x_4$, $x_2 = 12 - 2x_3 - x_4$ – загальний розв'язок, (4; 12; 0; 0), (10; 0; 6; 0), (0; 10; 0; 2), (0; 0; 4; 4), (0; 20; –4; 0), (20; 0; 0; 12) – базисні розв'язки.

2.25. $x_1 = -12 + x_2 + 4x_3$, $x_4 = 36 - 2x_2 - 9x_3$ – загальний розв'язок, (0; 12; 0; 12), (6; 18; 0; 0), (4; 0; 4; 0), (0; 0; 3; 9), (0; –36; 12; 0), (–12; 0; 0; 36) – базисні.

2.26. $x_1 = 2 - 2x_3 - x_4$, $x_2 = -2 + 10x_3 + 3x_4$ – загальний розв'язок, (0; 4; 0; 2), (2; –2; 0; 0), (4/3; 0; 0; 2/3), (0; 0; –4/9; 2/3), (0; –2; –2/3; 0) – базисні розв'язки.

2.27. $x_1 = 1 + 0{,}8x_3 + 0{,}2x_4$, $x_2 = 2 + 0{,}4x_3 + 0{,}6x_4$ – загальний розв'язок, (1; 2; 0; 0), (–3; 0; –5; 0), (1/3; 0; 0; –10/3), (0; 3/2; –5/4; 0), (0; –1; 0; –5), (0; 0; –1/2; –3) – базисні розв'язки.

2.28. $x_2 = 5 - 5x_1$, $x_3 = 3$ – загальний розв'язок, $(0;\ 5;\ 3)$, $(1;\ 0;\ 3)$ – базисні.

2.29. $x_1 = -\frac{3}{5} + \frac{7x_3}{5}$, $x_2 = \frac{14}{5} - \frac{x_3}{5}$ – загальний розв'язок, $(-2;\ 3;\ -1)$.

2.30. $x_1 = -2{,}5 + 2x_4$, $x_2 = 3{,}5 + x_3 - 4x_4$, $X = (-2{,}5 \quad 4{,}5 \quad 1 \quad 0)^T$.

2.31. $x_1 = 0{,}5 + 1{,}5x_2 - \frac{x_4}{16}$, $x_3 = -\frac{11x_4}{8}$ – загальний розв'язок, $(1;\ 1;\ -22;\ 16)$.

2.32. $x_1 = 1, x_2 = -1 - x_4, x_3 = 2$ – загальний розв’язок, $(1;\ -2;\ 2;\ 1)$.

2.33. $x_1 = \frac{2}{3} - \frac{2x_3}{3} + x_4, x_2 = \frac{4}{3} + \frac{5x_3}{3} - 2x_4$ – загальний розв’язок, $(0; 3; 1;\ 0)$

2.34. $x_1 = -\frac{15}{4} - 2x_2 - \frac{x_5}{2},\ x_3 = -\frac{3}{4} + \frac{x_5}{2},\ x_4 = -5 + x_5$ – загальний розв’язок, $(5;\ 0{,}5;\ 0{,}25;\ -3;\ 2)$. **2.35.** **а)** $x_3 = 1 + x_1 - x_2,\ x_4 = 2 - x_1 - x_2$; **б)** $x_2 = 4 + 2x_1 - x_3, x_4 = 56 + 13x_1 - 8x_3$; **в)** $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{3x_2}{2} + \frac{x_3}{22}, x_4 = -\frac{8x_3}{11}$; **г)** $x_1 = 1, x_3 = 2,\ x_4 = -1 - x_2$. **2.36.** **а)** $\vec{x}^1 = (-9\ \ 14\ 1\ 0)^T$ і $\vec{x}^2 = (22\ -15\ \ 0\ 1)^T$; **б)** $\vec{x}^1 = \left(-\frac{1}{3}\ 0\ \frac{5}{6}\ 1\right)^T$; **в)** $\vec{x}^1 = (2\ 1\ 0\ 0)^T$ і $\vec{x}^2 = \left(\frac{2}{7}, 0, -\frac{5}{7}, 1\right)$; **г)** $\vec{x}^1 = \left(\frac{3}{7}\ \frac{18}{7}\ \frac{16}{7} 1\right)^T$; **д)** $\vec{x}^1 = (-1 - 1\ 1\ 1\ 1)^T$; **е)** $\vec{x}^1 = \left(-\frac{1}{3}\ -\frac{3}{2}\ 1\ \ 0\ \ 0\right)^T$.

2.37. **а)** Система має тільки нульовий розв’язок. Фундаментальної системи розв’язань не існує; **б)** $x_4 = -\frac{9}{11}x_1 + \frac{3}{11}x_2 - \frac{10}{11}x_3, x_5 = -\frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 + \frac{4}{11}x_3$ – загальний розв’язок. Фундаментальна система розв’язків:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{x}^1$	1	0	0	–9/11	–3/11
$\vec{x}^2$	0	1	0	3/11	1/11
$\vec{x}^3$	0	0	1	–10/11	4/11

в) Система має тільки нульовий розв’язок. Фундаментальної системи розв’язків не існує; **г)** $x_1 = x_4 - x_5,\ x_2 = x_4 - x_6,\ x_3 = x_4, x_5 = -\frac{3}{11}x_1 + \frac{1}{11}x_2 + \frac{4}{11}x_3$ – загальний розв’язок. Фундаментальна система розв’язків:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\vec{x}^1$	1	1	1	1	0	0
$\vec{x}^2$	–1	0	0	0	1	0
$\vec{x}^3$	0	–1	0	0	0	1

д) $x_1 = 8x_3 - 7x_4,\ x_2 = -6x_3 + 5x_4$ – загальний розв’язок. Фундаментальна система розв’язків:

	x_1	x_2	x_3	x_4
$\vec{x}^1$	8	–6	1	0
$\vec{x}^2$	–7	5	0	1

е) $x_1 = -3x_3 - 5x_5, x_2 = 2x_3 + 3x_5; x_4 = 0$. Фундаментальна система розв’язків

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\vec{x}^1$	–3	2	1	0	0
$\vec{x}^2$	–5	3	0	0	1

2.38. Строки матриці A не утворюють, строки матриці B утворюють.
$\boldsymbol{X} = (-1/3, 0, 5/6, 1)$; **в)** $\boldsymbol{X}^1 = (2, 1, 0, 0)$ і $\boldsymbol{X}^2 = (2/7, 0, -5/7, 1)$; **г)** $\boldsymbol{X} = (3/7, 18/7, 16/7, 1)$; **д)** $\boldsymbol{X} = (-1, -1, 1, 1, 1)$; **е)** $\boldsymbol{X} = (-1/3, -3/2, 1, 0, 0)$.

2.39. Власні числа матриці $\lambda_1 = -3$ і $\lambda_2 = 3$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = -3$: $\mathbf{X}_1 = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha - const$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_2 = 3$: $\mathbf{X}_2 = (\alpha, \alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = x_2$).

2.40. Власні числа матриці $\lambda_1 = -3i$ і $\lambda_2 = 3i$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = -3i$: $\mathbf{X}_1 = (\alpha, -i\alpha)$, $\alpha - const$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_2 = -ix_1$). Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_2 = 3i$: $\mathbf{X}_2 = (\alpha, i\alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_2 = ix_1$).

2.41. Власні числа матриці $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 3$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 2$: $\mathbf{X}_1 = (2\alpha, -\alpha)$, $\alpha - const$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -2x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_2 = 3$: $\mathbf{X}_2 = (\alpha, -\alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -x_2$).

2.42. Власні числа матриці $\lambda_1 = 2$ і $\lambda_2 = 4$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 2$: $\mathbf{X}_1 = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha - const$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = -x_2$). Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_2 = 4$: $\mathbf{X}_2 = (\alpha, \alpha)$ (загальний розв'язок системи рівнянь $x_1 = x_2$).

2.43. Власні числа матриці $\lambda_1 = 3$ і $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 3$: $\mathbf{X}_1 = (\alpha, \alpha, \alpha)$, $\alpha - const$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$: $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_3 = (1-\alpha, 1, \alpha)$.

2.44. Власні числа матриці $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ і $\lambda_3 = 3$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 5$: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)$, α_1, $\alpha_2 - const$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{X}_3 = (-\alpha, \alpha, -\alpha)$, $\alpha - const$.

2.45. Власні числа матриці $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ і $\lambda_3 = 1$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha - const$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3 = 1$: $\mathbf{X}_3 = (0, \alpha, \alpha)$.

2.46. Власні числа матриці $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 1-\sqrt{3}$ і $\lambda_3 = 1+\sqrt{3}$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 2$: $\boldsymbol{X}_3 = (-2\alpha, \alpha, 0)^T, \alpha - const.$ Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2 = 1-\sqrt{3}$: $\boldsymbol{X}_2 = \left(-\sqrt{3}, \alpha, \alpha\right)^T$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3 = 1+\sqrt{3}$: $\boldsymbol{X}_3 = \left(\sqrt{3}, \alpha, \alpha\right)^T$.

2.47. Власні числа матриці $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$ і $\lambda_3 = 3$. Власний вектор матриці, що відповідають числу $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$: $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_2 = (0, \alpha, \alpha)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3 = 3$: $\mathbf{X}_3 = (\alpha, 0, -\alpha)$.

2.48. Власні числа матриці $\lambda_1 = 7$; $\lambda_2 = 3$ і $\lambda_3 = 5$. Власний вектор матриці, що відповідає числу $\lambda_1 = 7$: $\mathbf{X}_1 = (-\alpha, -\alpha, \alpha)$, α – *const*. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_2 = 3$: $\mathbf{X}_2 = (\alpha, -\alpha, \alpha)$. Власний вектор матриці, що відповідає числам $\lambda_3 = 5$: $\mathbf{X}_3 = (\alpha, \alpha, \alpha)$.

2.49. $\boldsymbol{X}_2$ з власним значенням 3 і $\boldsymbol{X}_3$ з власним значенням 2.

2.50. $\boldsymbol{X}_1$ з власним значенням –3. **2.51.** $\boldsymbol{X}_2$ з власним значенням 5.

2.52. а) $X = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} -6 & -46 & -44 \\ 3 & 5 & -8 \\ 9 & 13 & 38 \end{pmatrix}$, б) $X = \frac{1}{414}\begin{pmatrix} 203 & -118 & 862 \\ -8 & 178 & -346 \\ -55 & -70 & -50 \end{pmatrix}$,

в) $X = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}3 & -0{,}1 \\ -2 & 0 & -7 \\ 1{,}2 & 0{,}9 & -0{,}3 \end{pmatrix}$, г) $X = \begin{pmatrix} 1{,}4 & 1{,}6 & 0{,}4 \\ -0{,}6 & -1{,}4 & -0{,}6 \end{pmatrix}$,

д) $X = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}5 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -0{,}5 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, е) $X = \dfrac{1}{446}\begin{pmatrix} -16 & 76 & -18 & -138 \\ 15 & -127 & -11 & 213 \\ 123 & 29 & 445 & 141 \end{pmatrix}$.

2.53. а) $X = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$; б) $X = \frac{1}{194}\begin{pmatrix} 124 & 64 & 92 \\ 81 & -2 & -15 \\ -181 & 38 & 91 \\ 81 & -2 & -15 \end{pmatrix}$;

в) $X = \frac{1}{54}\begin{pmatrix} 228 & 12 & -48 \\ 86 & 59 & -29 \end{pmatrix}$; г) $X = \frac{1}{59}\begin{pmatrix} 38 & 29 & 55 \\ -34 & 2 & 16 \\ 99 & 15 & 2 \end{pmatrix}$;

д) $X = \frac{1}{42}\begin{pmatrix} 122 & 20 & -54 \\ 67 & 106 & -93 \\ -43 & 26 & -3 \\ 310 & 88 & -162 \end{pmatrix}$; е) $X = \frac{1}{145}\begin{pmatrix} 7620 & -3600 & -6510 \\ 3134 & -380 & -1852 \end{pmatrix}$.

2.54. а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 8 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; д) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2.55. а) $Q = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, y_1 = 2x_1 + 2x_2 + x_3, y_2 = 2x_2 + x_3, y_3 = x_3$;

б) $Q = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, y_1 = x_1 + 2x_2, y_2 = x_2 - x_3, y_3 = \sqrt{2}x_3$;

в) $Q = y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2, y_1 = x_1 + x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_1 - x_3$;

г) $Q = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2, y_1 = x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_2, y_3 = x_2 + x_3$;

д) $Q = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, y_1 = x_1 + x_2 + x_3, y_2 = x_2 + x_3, y_3 = x_3$;

е) $Q = y_1^2 - y_2^2, y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, y_2 = x_3, y_3 = 0$.

2.56. а) додатно визначена; б) не визначена; в) не визначена;

г) від’ємно визначена; д) додатно визначена; е) додатно визначена.

Розділ 3. Вектори

3.1. $\overrightarrow{AB} = (-2 \;\; 2 - 1)^T$. **3.2.** $\overrightarrow{AB} = (-3 \;\; 0 \;\; 4)^T$. **3.3.** $\overrightarrow{AB} = (-6 \;\; -8)^T$. **3.4.** $\overrightarrow{AB} = (5 \;\; 2 \; -6 \;\; 2)^T$. **3.5.** $\overrightarrow{AB} = (1 \;\; 3 \;\; 7 \;\; 8 \;\; 3)^T$. **3.6.** $\overrightarrow{AB} = (1 \;\; \pi/2 \;\; \pi/3)^T$.

3.7. Лінійно залежна. **3.8.** Лінійно незалежна. **3.9.** Лінійно незалежна. **3.10.** Лінійно незалежна. **3.11.** $r = 4$. **3.12.** $r = 2$. **3.13.** $r = 3$. **3.14.** $r = 2$. **3.15.** $r = 3$. **3.16.** $r = 2$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.17.** $r = 2$ $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$. **3.18.** $r = 2$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$, $(\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_4)$, $(\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.19.** $r = 4$, $(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3,\boldsymbol{X}_4)$. **3.20.** $\boldsymbol{X}_F = (1; 3; 1)$. **3.21.** $\boldsymbol{X}_F = (5; -28; -26)$. **3.22.** $\boldsymbol{X}_F = (-3.5; -6; 0.5)$. **3.23.** $5\sqrt{2}$. **3.24.** 5. **3.25.** 3. **3.26.** 12. **3.27.** 7. **3.28.** 9. **3.29.** 27. **3.30.** 10,05 **3.31.** 15,78. **3.32.** 21,02. **3.33.** 6,4. **3.34.** 12,73. **3.35.** 10. **3.36.** 6. **3.37.** 0. **3.38.** 6. **3.39.** $4\sqrt{2}$. **3.40.** $6\sqrt{3}$. **3.41.** 5. **3.42.** –17. **3.43.** 10. **3.44.** –13. **3.45.** 9. **3.46.** 12. **3.47.** π (180°). **3.48.** 0. **3.49.** π/2 (90°). **3.50.** 3π/4 (135°). **3.51.** 1,24 рад (70,89°). **3.52.** 1,82 рад (104,52°). **3.53.** $3/\sqrt{2}$. **3.54.** –21. **3.55.** 0. **3.56.** 5. **3.57.** –6. **3.58.** 0. **3.59.** (–25, –20, 5). **3.60.** 11. **3.61.** –28. **3.62.** 35. **3.63.** 0. **3.64.** 19,8. **3.65.** 3 **3.66.** 8,66. **3.67.** 3,5. **3.68.** 3. **3.69.** (2; 5; –4). **3.70.** (7; 17; 1). **3.71.** (0; 0; 0). **3.72.** (15; –1; –5). **3.73.** (2; 5; –4). **3.74.** (12; 12; 4). **3.75.** –768. **3.76.** 296. **3.77.** –136. **3.78.** 187. **3.79.** –473. **3.80.** 1992.

3.81. 4851. **3.82.** 13844,5. **3.83.** 4882,5. **3.84.** 14011. **3.85.** 33562,2. **3.86.** 22680. **3.87.** 910. **3.88.** 19. **3.89.** 174. **3.90.** 69,5. **3.91.** 153,5. **3.92.** 52,5. **3.93.** 5,14. **3.94.** –2. **3.95.** 1,73. **3.96.** –0,(2). **3.97.** 0,75. **3.98.** 0. **3.99.** $x = 36$, $y = -2$. **3.100.** $x = -1{,}5$, $y = 5{,}25$. **3.101** $x = 0{,}1875$, $y = -1{,}6$. **3.102.** $x = 13{,}3(3), y = -0{,}208(3)$. **3.103.** $x = -9y$. **3.104.** $x = 1{,}6$, $y = -1$. **3.105.** $x = -3{,}2$. **3.106.** $x = 35{,}6(6)$. **3.107** $x = 0{,}423$. **3.108.** $x = 0{,}1(1)$. **3.109.** $x_1 = -0{,}167$, $x_2 = 0$. **3.110.** $x_1 = -0{,}873$, $x_2 = 6{,}873$. **3.111** $V = 51$. **3.114.** $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

Розділ 4. Пряма і площина

4.1. 4. **4.2.** 5. **4.3.** 9. **4.4.** 2. **4.5.** –3. **4.6.** –0,8. **4.7** 0,2 **4.8.** –5. **4.9.** –9. **4.10.** 1. **4.11.** 0,998. **4.12.** 0,861. **4.13.** 1,889. **4.14.** 9,17. **4.15.** 8. **4.16.** (8; –2). **4.17.** –2. **4.18.** 16. **4.19.** –2. **4.20.** 0,96. **4.21.** 2,83. **4.22.** –3. **4.23.** 5,78. **4.24.** 2,5. **4.25.** –4. **4.26.** а) (17; –2; 19), б) (4; 0; –5), в) (10; 4; –3). **4.27.** а) 2; –3; 4), б) (–1; –2; 3), в) (0; 3; –4). **4.28.** $\boldsymbol{-3x + y + 23 = 0}$. **4.29.** $6/\sqrt{5}$. **4.30.** $\sqrt{17}$. **4.31.** $\sqrt{6}$. **4.32.** $2\sqrt{2}$.

Розділ 5. Лінії й поверхні другого порядку

5.1. $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 49$. **5.2.** $(x+5)^2 + (y+6)^2 = 25$. **5.3.** $x^2 + y^2 = 25$, ні, так. **5.4.** $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1$. **5.5.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **5.6.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1$. **5.7** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$.

5.8. $a = 6, b = 2\sqrt{5}, F_1(-4;\ 0), F_2(4;\ 0), \varepsilon = \frac{2}{3}$. **5.9.** $a = 2\sqrt{7}, b = 8, F_1(0;\ -6)$, $F_2(0;\ 6), \varepsilon = \frac{3}{4}$. **5.10.** $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}, F_1\left(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right), F_1\left(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0\right), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **5.11.** $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. **5.12.** $-\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. **5.13.** $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{25} = 1$. **5.14.** $a = 4, b = 3, F_1(-5;\ 0),\ F_2(5;\ 0)$, $\varepsilon = \frac{5}{4}, y = \pm\frac{3}{4}x$. **5.15.** $a = 8, b = 6, F_1(-10;\ 0), F_2(10;\ 0),\ \varepsilon = \frac{5}{4},\ y = \pm\frac{3}{4}x$.

5.16. $a = \sqrt{8}, b = 1, F_1(0; -3),\ F_2(0; 3), \varepsilon = \frac{3}{\sqrt{8}}, y = \pm\frac{x}{\sqrt{8}}$. **5.17.** $y^2 = 4x$.

5.18. $x^2 = -4y$. **5.19.** а) $y^2 = 16x$; б) $x^2 = 12y$; в) $y^2 = -6x$; г) $x^2 - 4x$.

5.20. Так. **5.21.** 0,745. **5.22.** 1. **5.23.** 1,2. **5.24.** 2,24. **5.25.** 1,9.

5.26. 1) Еліпс; 2) Окружність; 3) Дві прямі $(x+6)^2 - 4(y-4)^2 = 0$; 4) Гіпербола $-4x^2 + 9y^2 = 64$; 5) Гіпербола; 6) Точка $C(-1;\ 3)$; 7) Гіпербола $\frac{x^2}{200/147} - \frac{y^2}{200/63} = 1$; 8) Еліпс $\frac{x^2}{1/3} - \frac{y^2}{2/9} = 1$; 9) Парабола $y^2 = 0{,}16\sqrt{5}x$.

5.27. Початок канонічної системи співпадає з початком заданої системи координат. 1) Еліпс $\frac{x^2}{121}+\frac{y^2}{11}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T$;

2) Гіпербола $\frac{x^2}{8/9}-\frac{y^2}{8/9}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T$;

3) Гіпербола $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T$;

4) Еліпс $\frac{x^2}{3/2}+\frac{y^2}{1/9}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{pmatrix}^T$;

5) Парабола $y^2=\sqrt{2}x, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T$;

6) Дві паралельні прямі $y^2=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T$;.

7) Дві співпадаючи прямі $y^2=0, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{85}} & \frac{9}{\sqrt{85}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{9}{\sqrt{85}} & \frac{2}{\sqrt{85}}\end{pmatrix}^T$;

8) Дві прямі, що перетинаються $x^2-\frac{y^2}{1/8}=0, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\end{pmatrix}^T$.

5.28. 1) Еліпс $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{1/3}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^T, O'(-3,-1)$;

2) Гіпербола $\frac{x^2}{1/4}-\frac{y^2}{1}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}^T, O'(-1,-1)$;

3) Парабола $y^2=\frac{x}{5}, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}^T, O'\left(\frac{6}{25},-\frac{8}{25}\right)$;

4) Еліпс $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2/3}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, O'(-1,-1)$;

5) Гіпербола $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, O'(-1,-2)$;

6) Парабола $y^2=4\sqrt{2}x, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, O'(2,1)$;.

7) Еліпс $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{1}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & -\frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}^T, O'(3,-2)$;

8) Гіпербола $\frac{x^2}{1/9}-\frac{y^2}{1/25}=1, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}^T, O'(1,-1)$;

9) Парабола $y^2=\frac{6}{\sqrt{34}}x, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{-3}{\sqrt{34}} & \frac{-5}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{34}} & \frac{-3}{\sqrt{34}}\end{pmatrix}^T, O'\left(-\frac{11}{17},\frac{10}{17}\right)$;

10) Дві прямі $\frac{x^2}{1/9}-\frac{y^2}{1}=0, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}^T, O'\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$;

11) Дві прямі $y^2=\frac{9}{13}, \boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}}\end{pmatrix}^T, O'\left(\frac{4}{13},\frac{6}{13}\right)$;

12) Дві прямі $y^2 = 0, \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{8}{17} & \frac{15}{17} \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{15}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix}^T, \ O'\left(-\frac{15}{289}, \frac{8}{289}\right)$;

13) Дві прямі $y^2 = \frac{9}{8}, \ \boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \ O'^{\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)}$..

5.29. 1) Гіпербола; 2) еліпс; 3) гіпербола; 4) дві паралельні прямі; 5) еліпс; 6) парабола; 7) гіпербола; 8) уявний еліпс; 9) дві прямі, що перетинаються; 10) дві паралельних прямі; 11) дві уявних прямих, що перетинаються в дійсній точці (1б 1); 12) дві уявні паралельні прямі; 13) дві співпадаючих прямих

5.30. $x^2 + y^2 - ax - by = 0$. **5.31.** $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. **5.32.** $\frac{x^2+10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0$. **5.33.** $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

5.34. $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.35.** 1) Архімедові спіраль; 2) кардіоїда; 3) лемніската; 4) гіперболічна спіраль; равлик Паскаля.

5.36. 1) $r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$; 2) $r = a$; 3) $r = \frac{p}{\cos \varphi - \alpha}$; 4) $\operatorname{tg}\varphi = 1$; 5) $r = a \cdot \cos\varphi$.

5.37. 1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$; 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$; 3) $y^2 = 6x$. **5.38.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

5.39. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. **5.40.** 1) $x^2 + z^2 = y^2$; 2) $x^2 + y^2 = z^2$.

5.41. $C(1{,}5;\ -2{,}5;\ 2),\ R = 2{,}5\sqrt{2}$. **5.42.** $(3x^2 - 2z)^2 = 12(13x - z)$.

5.43. 1) Сфера з центром в точці з координатами $(0; 0; a)$ і радіусом $r = a$; 2) параболоїд обертання навколо осі; 3) циліндр; 4) гіперболічний параболоїд; 5) конус; 6) параболічний циліндр; 7) конус; 8) параболоїд обертання; 9) конус; 10) циліндр.

5.44. $\frac{x}{4} + \frac{z}{6} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{y}{2}\right), \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 3\left(1 - \frac{y}{2}\right), \frac{x}{4} + \frac{z}{6} = 1 - \frac{y}{2}, \frac{x}{4} - \frac{z}{6} = 1 + \frac{y}{2}$.

5.45. $x^2 + y^2 = az$. **5.46.** 1) гіперболічний циліндр; 2) дві паралельних площ: 3) параболічний циліндр; 4) гіперболічний циліндр; 5), 6) гіперболічний параболоїд; 7) дві площини, які перетинаються; 8) параболічний циліндр; 9) конус.

Розділ 6. Диференціальне числення

6.1. 108.

6.2. $-\pi$.

6.3. 1,25.

6.4. –7.

6.5.	25.	**6.6.**	–3.
6.7.	$-\infty$.	**6.8.**	$+\infty$.
6.9.	0.	**6.10.**	1/9.
6.11.	0,125.	**6.12.**	1/3.
6.13.	4.	**6.14.**	0,5.
6.15.	1.	**6.16.**	$+\infty$.
6.17.	0.	**6.18.**	$+\infty$.
6.19.	0.	**6.20.**	0.
6.21.	$+\infty$.	**6.22.**	0.
6.23.	$+\infty$.	**6.24.**	0,5.
6.25.	9.	**6.26.**	0.
6.27.	$+\infty$.	**6.28.**	1.
6.29.	1.	**6.30.**	$+\infty$.
6.31.	2.	**6.32.**	2.
6.33.	0.	**6.34.**	1.
6.35.	2.	**6.36.**	$+\infty$.
6.37.	$-\infty$.	**6.38.**	$-\infty$.
6.39.	$+\infty$.	**6.40.**	$-\infty$.
6.41.	0.	**6.42.**	0.
6.43.	$-0{,}25$.	**6.44.**	0.
6.45.	1,5.	**6.46.**	$+\infty$.
6.47.	0.	**6.48.**	1,5.
6.49.	4.	**6.50.**	1.
6.51.	e^{-4}.	**6.52.**	e^{-1}.
6.53.	e^{4}.	**6.54.**	9.
6.55.	1/9.	**6.56.**	2.
6.57.	0,5.	**6.58.**	-1.
6.59.	$\frac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$	**6.60.**	$\frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$

6.61. $\frac{2}{3}x^{-1/3}dx$

6.62. $3^x\ln(3)dx$

6.63. $\frac{dx}{x}$

6.64. $\frac{5dx}{1+x^2}$

6.65. $\frac{3}{2}\sqrt{x}dx$

6.66. $-\frac{6dx}{x^3}$

6.67. $e^x dx$

6.68. $\frac{dx}{x\cdot\ln 3}$

6.69. $\frac{dx}{x\cdot\ln 10}$

6.70. $3\operatorname{ch}(x)dx$

6.71. $\operatorname{sh}(x)dx$

6.72. $-\frac{dx}{x^2}$

6.73. $\frac{dx}{2\sqrt{x^3}}$

6.74. $\frac{dx}{\operatorname{ch}^2(x)}$

6.75. $\left(2x\operatorname{tg}x+\frac{x^2}{\cos^2 x}\right)dx$

6.76. $\cos(x)dx$

6.77. $(1-\sin x)dx$

6.78. $\left(\operatorname{ctg}x-\frac{x}{\sin^2 x}\right)dx$

6.79. $\frac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}$

6.80. $\frac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-x^{2/3}}}$

6.81. $\frac{2}{3}(x+3)^{-1/3}dx$

6.82. $3^{\sin(x)}\ln(3)\cos(x)\,dx$

6.83. $\frac{2x-2}{x^2-2x+1}dx$

6.84. $\frac{dx}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x^3})}$

6.85. $\frac{3}{2}\sqrt{\sin(x)}\cos(x)\,dx$

6.86. $\frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}dx$

6.87. $-\frac{dx}{2x\sqrt{\ln^3 x}}$

6.88. $-2xe^{-x^2}dx$

6.89. $\frac{dx}{(x+3)\ln 3}$

6.90. $\frac{2xdx}{(x^2-1)\ln 10}$

6.91. $(4x^3\operatorname{sh}x+x^4\operatorname{ch}x)dx$

6.92. $(\operatorname{ch}^4 x+4x\operatorname{ch}^3 x\operatorname{sh}x)dx$

6.93. $\left(\operatorname{th}x+\frac{x}{\operatorname{ch}^2 x}\right)dx$

6.94. $2x\sec^2(x^2)\,dx$

6.95. $3x^2\sin(2x^3-2)dx$

6.96. $\frac{1-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+x}}dx$

6.97. $-\frac{\sin(x)dx}{2\sqrt{\cos(x)}}$

6.98. $\operatorname{ctg}(x)\,dx$

6.99. $\frac{\cos(\ln x)}{x}dx$

6.100. $\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

6.101. $\frac{3\sqrt{x}dx}{2(1+x^3)}$

6.102. $-\frac{e^{-x}}{\cos^2 e^{-x}}dx$

6.103. $\left(\frac{3}{x}+\operatorname{ctg} x\right) dx$

6.104. $\cos(x)\,(\ln(\sin(x))+1)dx$

6.105. $(3^x \ln 3 + 3x^2)dx$

6.106. $\left(3^{\sin x}\ln 3 + 3\sin^2 x\right)\cos x\, dx$

6.107. $\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\ln x\right)dx.$

6.108. $x^x(1+\ln x)dx.$

6.109. $(\cos^x x \ln\cos x - x\cos^{x-1} x \sin x)dx.$

6.110. $\sqrt[x]{x^{1-2x}}(1-\ln x)dx.$

6.111. $2x^{\ln x - 1}\ln x\, dx.$

6.112. $(\ln^{x-1} x + \ln^x x \ln(\ln x))dx.$

6.113. $\left(\cos(x)\, x^{\cos(x)-1} - x^{\cos x}\ln(x)\sin x\right).$

6.114. $\left(\frac{x}{\cos^2 x}\operatorname{tg}^{x-1} x + \operatorname{tg}^x x \ln(\operatorname{tg} x)\right)dx.$

6.115. $2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$

6.116. $-\frac{1}{x^2}$

6.117. $\frac{xdx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

6.118. $\frac{-2xdx}{1+2x^2+x^4}$

6.119. $(x-2)e^{-x}$

6.120. $\left((2-x^2)\sin x + 4x\cos x\right)dx$

6.121. 0,32

6.122. 1,00

6.123. 1,25

6.124. 0,20

6.125. –0,11

6.126. 0,52

6.127. $\left(\ln 2\, x^{\ln 2 - 1} - yx^{-y-1}\right)dx - x^{-y}\ln x\, dy$

6.128. $\frac{ydx}{y^2+x^2}-\frac{xdy}{y^2+x^2}.$

6.129. $\frac{2\sin(x^2-y^2)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^2-y^2)}}(ydy - xdx).$

6.130. $e^{-xy^2}\left((1-xy^2)dx - 2yx^2dy\right).$

6.131. $\frac{\cos x}{\sin x}dx - \frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x}dy.$

6.132. $e^{-3x}(2\cos 2y\, dy - 3\sin 2y\, dx).$

6.133. $(3x^2+2xy+y^2)dx + (x^2+2xy)dy.$

6.134. $e^{-x}\left(1{,}5\sqrt{y}\operatorname{sh}\sqrt{y^3}\, dy - \operatorname{ch}\sqrt{y^3}\, dx\right).$

6.135. $x\sin^{x-1} y\cos y\, dy + \sin^x y \ln(\sin x)\, dx$

6.136. $\frac{\sqrt[y]{\operatorname{arctg}^{1-y}(x)}}{y(1+x^2)}dx - \frac{\sqrt[y]{\operatorname{arctg}(x)}\ln(\operatorname{arctg}(x))}{y^2}dy$

6.137. $-\frac{1}{4\sqrt[4]{(x+y^2)^5}}(dx+2ydy).$

6.138. $\operatorname{ctg}(x-y)(dx-dy).$

6.139. $\frac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2}}(xdx - ydy).$

6.140. $\frac{3}{y}\sqrt[y]{x^{3-y}}dx - \frac{3\sqrt[y]{x^3}\ln x}{y^2}dy.$

6.141. $\sin(2x+2y)(dx+dy)$

6.142. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-y^3\right)dx+\left(\frac{4}{3\sqrt[3]{y}}-3xy^2\right)dy.$

6.143. $\frac{x^2dy-y^2dx}{(x-y)^2}.$

6.144. $\operatorname{tg}(y)dx+x\sec^2(y)dy.$

6.145. $y'=\frac{8}{1+2y}.$

6.146. $y'=\frac{1}{1+y^2}.$

6.147. $y'=\frac{25}{4+2y}.$

6.148. $y'=-\frac{4+4y^2}{6+5y^2}.$

6.149. $y'=\frac{3}{5-\cos y}.$

6.150. $y'=\frac{3\cos^2 y}{1-5\cos^2 y}.$

6.151. $y'=\frac{9t^2}{2\cos t-(2t+3)\sin t}.$

6.152. $y'=-1{,}5.$

6.153. $y'=1/(3t^3).$

6.154. $y'=-2e^{6t}.$

6.155. $y'=2/(5t^{0,3}).$

6.156. $y'=-0{,}5\operatorname{tg}(2t).$

6.157. $y_{\max}(0{,}5)=2{,}25$, точок перегину нема.

6.158. $y_{\min}(1)=e$, точок перегину нема.

6.159. $y_{\min}(-1)=-\frac{1}{e},\ y_{\text{пер}}(-2)=-0{,}27.$

6.160. $y_{\min}(2)=0$, $y_{\max}(3{,}2)=0{,}5625$, $y_{\text{пер}}(4{,}8)=0{,}38(8)$.

6.161. $y_{\min}(1)=-2, y_{\max}(-2)=25, y_{\text{пер}}(-0{,}5)=11{,}5.$

6.162. Точок екстремуму нема, точок перегину нема.

6.163. $y_{\max}=0$ при $x=0$, $y_{\min}=-1$ при $x=0$, $x_{\text{пер}}=0{,}5$.

6.164. $y_{\max}=17$ при $x=-1$, $y_{\min}=-47$ при $x=3$, $x_{\text{пер}}=0{,}5$.

6.165. $y_{\max}=4$ при $x=0$, $y_{\min}=8/3$ при $x=-2$, $x_{\text{пер}}\approx-2{,}88, x_{\text{пер}}\approx -0{,}65, x_{\text{пер}}\approx 0{,}53$.

6.166. $y_{\max}=2$ при $x=0$, $y_{\min}=\sqrt[3]{4}$ при $x=2, x_{\text{пер}}=\pm 8\left(\sqrt{15}\pm 4\right)$.

6.167. $y_{\max}=(\ln 3)^{-1}$ при $x=-3$, $x_{\text{п}}\approx-3{,}2, x_{\text{п}}\approx-2{,}8, x_{\text{п}}=0, x_{\text{п}}\approx 1{,}69$.

6.168. $y_{\max}=0$ при $x=0$, $x_{\text{пер}}=\frac{1}{4}\left(4+\sqrt{2}\right)$.

6.169. $y_{\max}=0$ при $x=0$, $y_{\min}=-2/3$ при $x=1$.

6.170. $y_{\min}=2$ при $x=2/3$.

6.171. $y_{\max}=\sqrt{205}/10$ при $x=12/5$, $x_{\text{пер}}=\frac{1}{5}\left(9\pm\sqrt{91}\right)$.

6.172. $y_{\min} = 0$ при $x = 0$, точок перегину нема.

6.173. Монотонно зростає, $x_{\text{пер}} = \pm 1$.

6.174. $y_{\max} = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$ при $x = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = 0$ при $x = -1, x = 5, x_{\text{пер}} = \frac{5}{10} + \frac{9\sqrt{5}}{10}$.

6.175. $y_{\max} = 1/e$ при $x = e$.

6.176. $y_{\min} = 2$ при $x = -1, y_{\max} = -2$ при $x = 0$.

6.177. $y_{\min} = -1/\sqrt{e}$ при $x = 1, y_{\max} \approx 0{,}6$ при $x = 1$.

6.178. $y_{\min} = -1$ при $x = 1, y_{\max} = 0$ при $x = 1$.

6.179. $y_{\min} = -9$ при $x = 3, y_{\max} = 5/3$ при $x = -1$.

6.180. $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = 2$.

6.181. $y_{\min} = -1$ при $x = 0$.

6.182. $y_{\min} = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots\ y_{\max} = 1$ при $x = 0, \frac{\pi}{2},\ \pi, \frac{3\pi}{2} \ldots$

6.183. $y_{\min} = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}, y_{\max} = 1{,}5$ при $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

6.184. $y_{\min} \approx -0{,}34$ при $x = -\frac{\pi}{6}, y_{\max} \approx 0{,}34$ при $x = \frac{\pi}{6}$.

6.185. $y_{\min} = 0$ при $x = 2\pi n, y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = (2n+1)\pi$.

6.186. $y_{\min} = 1$ при $x = -2$.

6.187. $y_{\max} = \frac{\pi}{4} + 2\pi n - \frac{1}{2}\ln 2$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$.

6.188. $y_{\min} \approx 0{,}4$ при $x = \frac{5\pi}{12}, y_{\max} = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ при $x = \frac{\pi}{12}$.

6.189. $y_{\max} = 1$ при $x = 0$.

6.190. $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = 2$.

6.191. $y_{\min} = 1{,}5$ при $x = 1$.

6.192. $y_{\min} = 6$ при $x = -3, y_{\max} = 2$ при $x = -1$.

6.193. $y_{\min} = -1{,}1$ при $x = 0, y_{\max} = 0$ при $x = -2, y_{\text{пер}} = 0$ при $x = 0$.

6.194. $y_{\min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = 0, x = 2, y_{\max} = 2$ при $x = 1$

6.195. $y_{\max} = 10$ при $x = -1$.

6.196. $y_{\min} = 4$ при $x = 5, y_{\max} = -4$ при $x = 1$.

6.197. $z_{\min}(-4;\ 1) = -1$.

6.198. Точок екстремуму нема.

6.199. $z_{\max}(0;3) = 9.$

6.200. $z_{\min}(-1;1) = 0.$

6.201. $z_{\max}(4;-2) = 13.$

6.202. $z_{\max} = 12$ при $x = y = 4.$

6.203. $z_{\min} = 0$ при $x = 1, y = -\frac{1}{2}.$

6.204. $z_{\min} = -\frac{2}{e}$ при $x = -2, y = 0.$

6.205. $z_{\min} = 0$ при $x = y = 2.$

6.206. $z_{\max} = 1$ при $x = y = \pm 1$, $z_{\min} = -1$ при $x = -y = \pm 1.$

6.207. $z_{\min} = 0$ при $x = 2, y = 4.$

6.208. $z_{\max} = 6912$ при $x = 6, y = 4.$

6.209. $z_{\min} = -1$ при $x = 1, y = 1.$

6.210. $z_{\min} = -\frac{1}{2e}$ при $x = y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, z_{\max} = \frac{1}{2e}$ при $x = -y = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$

6.211. $u_{\min} = -14$ при $x = -1, y = -2, z = 3.$

6.212. $u_{\min} = -6913$ при $x = 24, y = -144, z = -1.$

6.213. $u_{\min} = 4$ при $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1.$

6.214. $z_{\min} = 2$ при $x = 1, y = 1.$

6.215. $z_{\max} = -4$ при $x = -2, y = -2$, $z_{\min} = 4$ при $x = 2, y = 2.$

6.216. $z_{\max} = 1$ при $x = y = \pm 1$, $z_{\min} = -1$ при $x = -y = \pm 1.$

6.217. $z_{\max} = \frac{1}{4}$ при $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}.$

6.218. $z_{\max} = 106\frac{1}{4}$ при $x = \pm 1\frac{1}{2}, y = \pm 4$, $z_{\min} = -50$ при $x = \pm 2, y = \mp 3$.

6.219. $u_{\min} = -3$ при $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = -\frac{2}{3}, u_{\max} = 3, x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}, z = \frac{2}{3}$

6.220. $u_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$ при $x = y = \frac{1}{\sqrt{6}}$ і $z = -\frac{2}{\sqrt{6}}$, $x = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ і $y = -\frac{2}{\sqrt{6}}.$

$y = z = \frac{1}{\sqrt{6}}$ і $x = -\frac{2}{\sqrt{6}}$. $u_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}$ при $x = y = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ і $z = \frac{2}{\sqrt{6}}$,

$x = z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ і $y = \frac{2}{\sqrt{6}}, y = z = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ і $x = \frac{2}{\sqrt{6}}.$

6.221. $u_{\max} = \frac{1}{8}$ при $x = y = z = \frac{\pi}{6}.$

6.222. $u_{\max} = (1/6)^6$ при $x = y = z = 1/6.$

6.223. $x = \pm 1, y = 0.$

6.224. $x = 0, y = x + 2.$

6.225. $x = \pm 3, y = 0.$

6.226. $x = -2, y = x - 4.$

6.227. $x = -1, y = x - 1.$

6.228. $y = 1.$

6.229. $x = 0, y = x - 1.$

6.230. $y = x.$

6.231. $x = -\frac{1}{2}, y = -2.$

6.232. $y = -x.$

6.233. $y = x \pm \pi.$

6.234. $y = -\frac{\pi}{4}.$

6.235. $y = 0.$

6.236. $y = \pm 2x.$

6.237. $x = 0, y = x.$

6.238. $x = 0, y = 1$.

6.239. $y = \frac{x^3}{3}.$

6.240. $y = x^2.$

6.241. $-1.$

6.242. 0.

6.243. $\ln\frac{3}{7}.$

6.244. $1/3.$

6.245. $\ln 2.$

6.246. $1/na^{n-1}.$

6.247. 0.

6.248. $1/2.$

6.249. $a - b.$

6.250. 4.

6.251. $1/6.$

6.252. $1/\sqrt{3}.$

6.253. $-1/3.$

6.254. 1.

6.255. 1.

6.256. $e.$

6.257. $\delta z = 0{,}01;\ \varepsilon = 0{,}2\ \%.$

6.258. $\delta z = 0{,}0008;\ \varepsilon = 0{,}16\ \%.$

6.259. $\delta z = 0{,}162;\ \varepsilon = 6\ \%.$

6.260. $\delta z = 0{,}75;\ \varepsilon = 10{,}7\%.$

6.261. $\delta z = 0{,}277;\ \varepsilon = 4{,}2\%.$

6.262. $\sqrt{2}/4.$

6.263. $a/b^2, b/a^2.$

6.264. 36.

6.265. 0,128.

6.266. $\sqrt{2}/4.$

6.267. 0.

6.268. 1.

6.269. $1/6.$

6.270. $\frac{2}{3a|\sin 2t_0|}.$

6.271. $2/\pi a.$

6.272. $\frac{3}{8a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}.$

6.273. $\frac{1}{\sqrt{1+\ln^2 a}}.$

6.274. $\frac{2+\varphi^2}{a\sqrt{(1+\varphi^2)^3}}$

6.275. $2x + 4y - z = 3; \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

6.276. $xy_0 + yx_0 = 2zz_0; 2(x - x_0) = 2(y - y_0) = z - z_0$.

6.277. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0y_0 = 3a^3$.

6.278. $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1$.

6.279. $2x + 4y - z - 5 = 0; \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}$.

6.280. $3x + 4y + 12z = 169; \quad \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}$.

6.281. $z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x - y); \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-\pi/4}{2}$.

6.282. $ax_0x + by_0y + cz_0z = 1; \quad \frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}$.

6.283. $x + y - 2z = 0; \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$.

6.284. $x + y - 4z = 0; \quad \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}$.

6.285. $\frac{x}{a}\cos\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{y}{b}\cos\psi_0\sin\varphi_0 + \frac{z}{c}\sin\psi_0 = 1;$
$\frac{x\sec\psi_0\sec\varphi_0 - a}{bc} = \frac{y\sec\psi_0\operatorname{cosec}\varphi_0 - b}{ac} = \frac{z\operatorname{cosec}\psi_0 - c}{ab}$.

6.286. $x\cos\varphi_0 + y\sin\varphi_0 - z\operatorname{tg}\alpha = 0; \quad \frac{x-r_0\cos\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{y-r_0\sin\varphi_0}{\sin\varphi_0} = \frac{z-r_0\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}$.

6.287. $ax\sin v_0 - ay\cos v_0 + u_0z = au_0v_0; \quad \frac{x-u_0\cos v_0}{a\sin v_0} = \frac{y-u_0\sin v_0}{-a\cos v_0} = \frac{z-av_0}{u_0}$.

6.288. $\frac{x-x_0}{-\cos\alpha\sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\sin\alpha\sin t_0} = \frac{z-z_0}{\cos t_0}$, $z - z_0 = (x - x_0)\cos\alpha\operatorname{tg}t_0 + (y - y_0)\sin\alpha\operatorname{tg}t_0$, де $x_0 = a\cos\alpha\cos t_0, y_0 = a\sin\alpha\cos t_0, z_0 = a\sin t_0$.

6.289. $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, y = \frac{b}{2}, ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2)$.

6.290. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $x + y + 2z = 4$.

6.291. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1}$, $3x + 3y - z = 3$.

6.292. $x + z = 2, y + 2 = 0, x - z = 0$.

6.293. $M_1(-1; 1; -1)$, $M_2\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{9}; -\frac{1}{2}\right)$.

6.294. $H_u = H_v = \sqrt{u^2 + v^2}, H_\varphi = uv$, $\boldsymbol{e}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(v\left(\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y\right) - u\boldsymbol{e}_z\right), \boldsymbol{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\left(\cos\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_y\right) - v\boldsymbol{e}_z\right), \boldsymbol{e}_u = -\sin\varphi \cdot \boldsymbol{e}_x + \cos\varphi \cdot$

$\boldsymbol{e}_y$, $\boldsymbol{e}_x = \frac{v\cdot\cos\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}\boldsymbol{e}_u + \frac{u\cdot\cos\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}\boldsymbol{e}_v - \sin\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi$, $\boldsymbol{e}_y = \frac{v\cdot\sin\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}\boldsymbol{e}_u + \frac{u\cdot\sin\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}\boldsymbol{e}_v + \cos\varphi\cdot\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_z = \frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\boldsymbol{e}_u - v\boldsymbol{e}_v)$. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} - const$ – напівплощина, що утворює кут φ із площиною xOz та обмежена віссю Oz, $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \pm z - const$ – параболоїди. Через кожну точку із кокоординатами u, v, φ проходить три координатні лінії. Коло φ-лінія, уздовж якої φ змінюється у межах від 0 до 2π, u та v – фіксовані. Дві напівпараболи, які є результатом перетину координатних поверхонь (напівплощини і відповідного параболоїда).

6.295. $H_\xi = H_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, H_\alpha = \frac{a\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}$.

6.296. $H_\rho = H_\xi = \frac{a}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, H_\eta = \frac{a\operatorname{sh}\rho}{\operatorname{ch}\rho-\cos\xi}$.

6.297. $\boldsymbol{e}_+ = e^{i\varphi}(\boldsymbol{e}_\rho + i\boldsymbol{e}_\varphi), \boldsymbol{e}_- = e^{-i\varphi}(\boldsymbol{e}_\rho - i\boldsymbol{e}_\varphi), \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_z$.

6.298. $\boldsymbol{e}_+ = e^{i\varphi}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\rho + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta) + ie^{i\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_- = e^{-i\varphi}(\sin\theta\,\boldsymbol{e}_\rho + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\theta) - ie^{-i\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi, \boldsymbol{e}_0 = \cos\theta\,\boldsymbol{e}_\rho - \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$.

6.299. $\boldsymbol{a} = \frac{r\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{e}_z}{\sqrt{r^2+z^2}}$.

6.300. $u = r\sin 2\varphi + r\cos 2\varphi$.

6.301. $\boldsymbol{a} = rz(\boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_z)$.

6.302. $u = r^2\sin 2\varphi\cos 2\theta$.

6.303. $\boldsymbol{a} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta$.

6.304. $\nabla u_M = 12\boldsymbol{i} - 9\boldsymbol{j} - 20\boldsymbol{k}; |\nabla u| = 25; \cos\alpha = \frac{12}{25}; \cos\beta = -\frac{9}{25}; \cos\gamma = -\frac{4}{5}$

6.305. а) $xy = z^2$; б) $x = y = 0, x = y = z$; в) $x = y = z$.

6.306. $\cos\varphi \approx -0{,}27$.

6.307. $\cos\varphi = -8/9$.

6.308. $\operatorname{grad} r = 2\boldsymbol{r}$.

6.309. $\boldsymbol{c}$.

6.310. $\nabla f = (2x-1)i + (2y-1)j + (2z-1)k$.

6.311. $\nabla\varphi = -\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$.

6.312. $\nabla u = -\frac{y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}$.

6.313. $\nabla u = 2r\vec{e}_r$.

6.314. $\nabla u = 2\cos\varphi \cdot \vec{e}_r - 2\sin\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + \vec{e}_z$.

6.315. $\nabla u = 2(z + \cos\varphi)\vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi + 2r\vec{e}_z$.

6.316. $\nabla u = \sqrt{z\cos 2\varphi}\,\vec{e}_r - \frac{\sqrt{z}\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\vec{e}_\varphi + \frac{r\sqrt{\cos 2\varphi}}{2\sqrt{z}}\vec{e}_z$.

6.317. $\nabla u = -\frac{z}{r\varphi^2} \cdot \vec{e}_\varphi + \frac{1}{\varphi}\vec{e}_z$.

6.318. $\nabla u = \frac{z}{r}\boldsymbol{e}_\varphi + \varphi\boldsymbol{e}_z$.

6.319. $\nabla u = \frac{1}{r}\boldsymbol{e}_r + \frac{\varphi}{r}z^{\varphi-1}\boldsymbol{e}_\varphi + z^\varphi \ln z\, \boldsymbol{e}_z$.

6.320. $\nabla u = 2(r + \cos\varphi)\boldsymbol{e}_r - \left(2 \cdot \sin\varphi + \frac{e^z}{r}\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\varphi - e^z \sin\varphi\, \boldsymbol{e}_z$.

6.321. $\nabla u = \frac{1}{\varphi}\left(\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta - \frac{1}{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$; $\nabla u(M) = \frac{2}{\pi}\left(\boldsymbol{e}_r + \boldsymbol{e}_\theta - \frac{2}{\pi}\boldsymbol{e}_\varphi\right)$; $|\nabla u(M)| = \frac{2}{\pi}\sqrt{2\pi^2 + 4}$.

6.322. $\nabla u = -\frac{2\cos\varphi}{r^3}(1 + \sin\theta)\boldsymbol{e}_r + \frac{\cos\varphi}{r^3}\cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta - \frac{\sin\varphi}{r^3}\left(\frac{1}{\sin\theta} + 1\right)\boldsymbol{e}_\varphi$; $\nabla u(A) = -2\sqrt{3}\boldsymbol{e}_r + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_\theta - \boldsymbol{e}_\varphi$; $\nabla u(B) = 3\boldsymbol{e}_r - \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_\theta - 0\boldsymbol{e}_\varphi$; $\cos\alpha = -\frac{24\sqrt{3}+3}{\sqrt{2145}} \approx -0{,}96$.

6.323. $\nabla u = 2r\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r + r\cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta$.

6.324. $\nabla u = (1 + \cos\varphi)\big(\sin\theta\, \boldsymbol{e}_r + \cos\theta\, \boldsymbol{e}_\theta + \boldsymbol{e}_\varphi\big)$.

6.325. $\operatorname{div} \boldsymbol{r} = 3$.

6.326. $\operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{2}{|\boldsymbol{r}|}$.

6.327. $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = y + z + x, \nabla \cdot \boldsymbol{a}(M) = 2$.

6.328. $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = 2 + \frac{1}{r} + 1$.

6.329. $\nabla \cdot \boldsymbol{a} = 2\frac{\sin\theta}{r} + \frac{\cos 2\theta}{r\sin\theta} + \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$.

6.330. $\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = 0$.

6.331. $\nabla \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}) = 0$.

6.332. $\nabla \cdot (\boldsymbol{a}\ln r) = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}$.

6.333. $\operatorname{div}\left(\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right) = i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{a})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$.

6.334. $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$.

6.335. $\operatorname{div}\big(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\big)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$, $\operatorname{div}\big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\big)=4\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$.

6.336. $2+\frac{z}{r}\cos\varphi-e^{\varphi}\sin z$.

6.337. $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0$, $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{\omega}^2$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}$, $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{\varepsilon}$.

6.338. а) $\nabla\times\boldsymbol{a}=-\left(\frac{\boldsymbol{i}}{y}+\frac{\boldsymbol{j}}{z}+\frac{\boldsymbol{k}}{x}\right)$; б) $\nabla\times\boldsymbol{a}(A)=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

6.339. $\nabla\times\boldsymbol{a}=0$.

6.340. $\nabla\times\boldsymbol{F}=(6xyz^2-2xy^2)\boldsymbol{i}$.

6.341. $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$.

6.342. $\nabla\times\boldsymbol{F}=-\frac{1}{x^2}\boldsymbol{j}-\frac{2y}{x^3}\boldsymbol{k}$.

6.343. $\nabla\times\boldsymbol{a}=0$.

6.344. $\nabla\times\boldsymbol{F}=\frac{1}{x^2}\boldsymbol{i}+\frac{2y}{x^3}\boldsymbol{j}$.

6.345. $\nabla\times\boldsymbol{F}=-2yz\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$, $\nabla\times\boldsymbol{F}(M)=-4\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$.

6.346. $\nabla\times\boldsymbol{F}=2yz\boldsymbol{j}+(1-z^2)\boldsymbol{k}$, $\nabla\times\boldsymbol{F}(M)=4\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

6.347. $\nabla\times\boldsymbol{F}=z^2\boldsymbol{i}$, $\nabla\times\boldsymbol{F}(M)=4\boldsymbol{i}$.

6.348. $\nabla\times\boldsymbol{F}=(xz^2-xy^2)\boldsymbol{i}-(yz^2-yx^2)\boldsymbol{j}+(zy^2-zx^2)\boldsymbol{k}$.

6.349. $\nabla\times\boldsymbol{F}=(z-y)\boldsymbol{i}-x\boldsymbol{k}$.

6.350. $\nabla\times\boldsymbol{F}=-2(x+y)\boldsymbol{k}$.

6.351. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=-2y\boldsymbol{i}+2x\boldsymbol{j}+(6x-4y)\boldsymbol{k}$.

6.352. $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$.

6.353. $\operatorname{rot}r\boldsymbol{r}=0$.

6.354. $\operatorname{rot}r^2\boldsymbol{r}=0$.

6.355. $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{r}}{r}=0$.

6.356. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$.

6.357. $\operatorname{rot}(\boldsymbol{a}\ln r)=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$.

6.358. $\operatorname{rot}\big(\boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\big)=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$.

6.359. $\operatorname{rot}\big(\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{b})\big)=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

6.360. $\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=i(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$.

6.361. $\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}e^{ikr}\right)=\frac{ikr-1}{r^3}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})e^{ikr}$.

6.362. 0.

6.363. $\operatorname{rot}\frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}}{r^3}=\frac{1}{r^3}(3a_r\boldsymbol{e}_r-\boldsymbol{a})$.

6.364. $\operatorname{rot}\left(\frac{\boldsymbol{a}}{r}e^{ik\cdot r}\right)=\frac{e^{ikr}}{r^2}(ikr-1)\left(a_\theta\boldsymbol{e}_\varphi-a_\varphi\boldsymbol{e}_\theta\right)$.

6.365. $\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right)=i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$.

6.366. $z\boldsymbol{e}_\varphi-\frac{\cos\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_z$.

6.367. $-2\rho\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{\sin\varphi}{\rho}\boldsymbol{e}_z$.

6.368. 0.

6.369. $\Delta\boldsymbol{a}=2(y^2+z^2+x^2)$.

6.370. $\Delta u=0$.

6.371. $\Delta u=\frac{2xy}{z^3}$.

6.372. $\Delta u=\frac{2\sin\varphi}{r}\left(2\cos^2\theta-\sin^2\theta+\left(1-\frac{1}{2\sin\theta}\right)(1-\cos^2\theta)\right)$.

6.373. $\Delta u=4+\left(\frac{z^2}{r^2}+2\right)\sin\varphi$.

6.374. $\operatorname{div}\boldsymbol{a}=e^x+e^y+e^z,\ \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{a}=e^x\boldsymbol{i}+e^y\boldsymbol{j}+e^z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}$.

6.375. $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=-e^z\boldsymbol{i}-e^x\boldsymbol{j}-e^y\boldsymbol{k}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=-e^y\boldsymbol{i}-e^z\boldsymbol{j}-e^x\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{a}$.

6.376. $\operatorname{div}\boldsymbol{E}=0$.

6.377. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_p+\boldsymbol{a}_s,\ \boldsymbol{a}_p=(x+y)\boldsymbol{i}+(x-y)\boldsymbol{j}, \boldsymbol{a}_s=(z+1)\boldsymbol{k}$

6.378. $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_p+\boldsymbol{a}_s,\ \boldsymbol{a}_p=\frac{1}{2}(x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}), \boldsymbol{a}_s=0$

Розділ 7. Інтегральне числення

7.1. 1,5

7.2. 4

7.3. 3,6(6)

7.4. 2

7.5. 0,375

7.6. 0,69

7.7. 0,5

7.8. 0,5

7.9. π/6

7.10. π/4

7.11. 6,39

7.12. –1,5

7.13. –3

7.14. 1

7.15. π/8

7.16. 0,5

7.17. 108,42

7.18. π/6

7.19. 4

7.20. 0

7.21. 0

7.22. 20

7.23. 0,6931

7.24. 12,8

7.25. $-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+c$

7.26. $\frac{5}{14}\sqrt[5]{(2x-1)^7}+c$

7.27. $-\frac{1}{6}e^{-6x}+c$

7.28. $\frac{1}{14}(2x-3)^7+c$

7.29. $-\frac{2^{-7x}}{7\ln 2}+c$

7.30. $\frac{1}{24}(3x+5)^8+c$

7.31. $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)+c$

7.32. $\frac{1}{5}\ln(5x-1)+c$

7.33. $0{,}25\,\mathrm{tg}(4x)+c$

7.34. $-\frac{1}{6}e^{-6x+2}+c$

7.35. $\ln\sqrt{2x+5}+c$

7.36. $\frac{1}{4\ln 3}3^{4x+1}+c$

7.37. $\frac{1}{5}\arcsin(5x)+c$

7.38. $\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c$

7.39. $-\frac{1}{3\ln 2}2^{-3x}+c$

7.40. $-0{,}125\sqrt[3]{(2-3x)^8}+c$

7.41. $-\frac{4}{9}\sqrt[4]{(1-3x)^3}+c$

7.42. $-0{,}2\cos 5x+c$

7.43. $-\sqrt{9-x^2}+c$

7.44. $\ln\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}+c$

7.45. $\frac{2}{\ln 3}3^{\sqrt{x}}+c$

7.46. $\frac{3}{8}x+\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

7.47. $0{,}04\sqrt{25x^2-9}+c$

7.48. $e^{-\cos x}+c$

7.49. 0,21.

7.50. 0,3(3).

7.51. 0,16(6).

7.52. 1.

7.53. 1,946.

7.54. 0,3(3).

7.55. 2.

7.56. 0,118.

7.57. 8,389.

7.58. 0,215.

7.59. 3.

7.60. 0,62.

7.61. 0,693

7.62. 0,785

7.63. 0,6(6)

7.64. 0,718

7.65. 7,026

7.66. 0,288

7.67. 0,386 **7.68.** 0,632
7.69. 0,649 **7.70.** 0,3(3)
7.71. 0,643 **7.72.** 0,641
7.73. 0,342 **7.74.** 0,128
7.75. 1 **7.76.** 2,097
7.77. 0,718 **7.78.** 13,388
7.79. –0,153 **7.80.** 0,718
7.81. 0,739 **7.82.** 1
7.83. 0,468 **7.84.** 0,264
7.85. 6,091 **7.86.** 0,285
7.87. 7,021 **7.88.** 1,339
7.89. ∞ **7.90.** ∞
7.91. ∞ **7.92.** 1,571
7.93. 1,571 **7.94.** ∞
7.95. ∞ **7.96.** 0,368
7.97. ∞ **7.98.** 0,5
7.99. 1,897 **7.100.** ∞
7.101. 2 **7.102.** ∞
7.103. ∞ **7.104.** -1
7.105. 1,772 **7.106.** 0,3(3)
7.107. 6,6(6) **7.108.** 10
7.109. $i_0^2/2$ **7.110.** $i_0\left(1-e^{-\lambda t_0}\right)/\lambda$
7.111. 483,6 Вт **7.112.** $5\cdot 10^3$ Дж
7.113. 4 **7.114.** 22,56
7.115. 108 од. **7.116.** 20,83(3)
7.117. 54,5 **7.118.** 1,3(3)
7.119. 72 **7.120.** ≈5,056
7.121. 36 **7.122.** 20,83(3)
7.123. ≈2,2143 **7.124.** ≈11,456

7.125. 10,6(6)

7.126. 0,3(3)

7.127. ≈60,3398

7.128. $0{,}1\ln\left|\frac{x-5}{x+5}\right|+c.$

7.129. $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+c.$

7.130. $\operatorname{arctg}(x+2)+c.$

7.131. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+c.$

7.132. $\ln\frac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+c.$

7.133. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c.$

7.134. $\ln\sqrt{\frac{x^2-2}{x^2-1}}+c.$

7.135. $\ln\left|\frac{(x-1)^3}{x+2}\right|+c.$

7.136. $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+c.$

7.137. $\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+c.$

7.138. $\frac{1}{3}\ln\frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+c.$

7.139. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{x-2}\right|-\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{2x}\right)-\frac{1}{2(x-2)}+c.$

7.140. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 6x}{12}+c.$

7.141. $3x+4\sin x+\sin 2x+c.$

7.142. $\frac{3x}{2}+\cos 2x-\frac{\sin 4x}{8}+c.$

7.143. $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{32}+c.$

7.144. $\frac{x}{8}-\frac{\sin 4x}{32}+c.$

7.145. $\frac{3x}{128}-\frac{\sin 4x}{128}+1024+c.$

7.146. $\frac{x}{16}-\frac{\sin 4x}{64}+\frac{\sin^3 2x}{48}+c.$

7.147. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+c.$

7.148. $\frac{1}{3}\sin^3 x-\frac{1}{5}\sin^5 x+c.$

7.149. $\frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+c.$

7.150. $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+c.$

7.151. $7x+14\sin x+3\sin 2x-\frac{8}{3}\sin^3 x+c.$

7.152. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+c.$

7.153. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+c.$

7.154. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+c.$

7.155. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c.$

7.156. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c.$

7.157. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]+c.$

7.158. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin(\pi/2-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin(x-\pi/4)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+c.$

7.159. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + c.$

7.160. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x| + c.$

7.161. $-\frac{1}{8}(\cos 4x + 2\cos 2x) + c.$

7.162. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) + c.$

7.163. $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + c.$

7.164. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right) + c.$

7.165. $-\frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\cos 6x + c.$

7.166. $\arcsin\frac{x}{2} + c.$

7.167. $\ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + c.$

7.168. $\ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + c.$

7.169. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}} + c.$

7.170. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}} + c.$

7.171. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4-x^2} + 4\arcsin\frac{x}{2}\right] + c.$

7.172. $2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2} + c.$

7.173. $2\arcsin\frac{x}{2} - x\frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + c$

7.174. 1

7.175. $\frac{\pi}{12}$

7.176. $\pi - 2.$

7.177. $-\frac{\pi}{16}.$

7.178. $2\operatorname{ch}1 - 2.$

7.179. $\pi^2/4.$

7.180. $1/15.$

7.181. $4/27.$

7.182. $12a^5/15.$

7.183. $76/3.$

7.184. $\frac{2}{3}a^{3/2}$

7.185. 9

7.186. 0,5.

7.187. 9/4.

7.188. 6.

7.189. $\frac{abc(a+b+c)}{2}.$

7.190. $a^6/48.$

7.191. $a^{11}/110.$

7.192. $\sqrt{5}\ln 2.$

7.193. 24.

7.194. $\frac{p^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$

7.195. $4\pi a\sqrt{a}.$

7.196. $\frac{8a\pi\sqrt{2}}{3}.$

7.197. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+2\pi^2)^{3/2} - 1\right].$

7.198. 3.

7.199. Для всіх випадків 1.

7.200. $-2\pi ab.$

7.201. $3\sqrt{3}.$

7.202. 0.

7.203. 13.

7.204. $\frac{3}{16}\pi r\sqrt[3]{r}$.

7.205. 1) $4x^2 + y^2 = c$ еліпси; 2)$x^2 - y^2 = c$ гіперболи; 3)$y^2 = c - x$ параболи

7.206. 1) $xy = c$ гіперболічні циліндри; 2) $x^2 + 3y^2 = 9 - c, c \leq 9, x^2 + 3y^2 \leq 9$ еліптичні циліндри; 3) $x^2 + y^2 - 4z^2 = c$ гіперболоїди або конус при $c = 0$; 4) $x^2 + y^2 = cz$ параболоїди обертання.

7.207. $x^2 + y^2 = \ln c\,, c > 0$ коловий циліндр

7.208. $z = c(x^2 + y^2);\ c = 0\ z = 0;\ z = 0{,}4(x^2 + y^2)$

7.209. $x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{c-1}{c+1}\right)^2\ c = e^u$ сфери.

7.210. 1) $2x + 3y - z = c$ площина 2) $x^2 + y^2 - 2z^2 = c$ гіперболоїди, конус.

7.211. Прямі, що паралельні вектору $\boldsymbol{T} = (a\ b\ c)^T$: $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$

7.212. Коло з центром в початку координат $x^2 + y^2 = r^2$

7.213. Гвинтові лінії $z = r\cos(\omega t + \alpha)\,, y = r\sin(\omega t + \alpha)\,, z = ht + z_0$

7.214. Кола, що є перетином сфер і площин: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, y - z + c = 0$

7.215. Кола, що є перетином сфер і площин: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2, x + y + z = c$

7.216. Лінії перетину $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ і гіперболічних параболоїдів $zy = cx$

7.217. Спіраль Архімеда $r = c\varphi, c - const$

7.218. Лінії перетин двох сімейств поверхонь $\varphi = C_1, r = 2\sin\theta + C_2$

7.219. $r^{-2} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right| + C_1, \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\theta = C_2$.

7.220. Промені, що виходять із точки розташування заряду

7.221. $\Phi = 0, C = 0$.

7.222. $\Phi = 2aS, C = 0$.

7.223. $\Phi = 0, C = 0$.

7.224. $\Phi = 3/2\,\pi R^4, C = 2\pi R^2$

7.225. 1) $\Phi = 0$; 2) $\Phi = \pi h^3$.

7.226. 1) $\Phi = 0$; 2) $\Phi = 0$.

7.227. $\Phi = \pi$.

7.228. $\Phi = 3\pi/8$.

7.229. $\Phi = 3\pi/16$.

7.230. $\Phi = 0$.

7.231. $C = 2\pi^2 b$

7.232. $A = 188/21$.

7.233. $3(3 + e^4 - 12e^{-2})/4$

7.234. 1) 2π; 2) 2π.

7.235. $u = 1/3$

7.236. $u = m/|\boldsymbol{r}|$

Розділ 8. Диференціальні рівняння

8.1. $y = 4x - \frac{x^3}{3} + c.$

8.2. $y = \frac{c}{1+x}, x \neq 1.$

8.3. $y = ce^x$

8.4. $x^2 + y^2 = \ln(cx^2).$

8.5. $y = \sqrt[3]{c + 3x - 3x^2}.$

8.6. $y = 7 - 2e^{-x^4/4}.$

8.7. $y = e^{\sqrt{x}-2}.$

8.8. $y = -x.$

8.9. $r = -2\cos\varphi.$

8.10. $\sqrt{y} = x\ln|x| - x + 1.$

8.11. $y - 2x = cx^2(y + x).$

8.12. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\left(c\sqrt{x^2 + y^2}\right).$

8.13. $\ln|y| + \frac{x}{y} = c.$

8.14. $x^2 + y^2 = cy.$

8.15. $y = \pm x\sqrt{2\ln|cx|}.$

8.16. $y = xe^{1+cx}.$

8.17. $y - x = c\exp\left\{\frac{x}{y-x}\right\}.$

8.18. $x^2 - y^2 = cx$

8.19. $y = -x.$

8.20. $y = \frac{2x}{1-3x^2}.$

8.21. $y = \frac{x^2-1}{2}.$

8.22. $y = xe^{-x/2}.$

8.23. $y = ce^{-2x} + 2x - 1.$

8.24. $y = e^{-x^2}\left(c + \frac{x^2}{2}\right).$

8.25. $y = cx^2e^{1/x} + x^2.$

8.26. $y = \frac{\ln c\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}{\sqrt{a^2+x^2}}.$

8.27. $y = ce^{-x} + 0{,}5(\cos x + \sin x).$

8.28. $y = \frac{x}{\cos x}.$

8.29. $y = \frac{e^x+ab-e^a}{x}.$

8.30. $y = \frac{x}{x+1}(x - 1) + \ln|x|.$

8.31. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}\left[2 + x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\right]}.$

8.32. $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}(2 + x^3).$

8.33. $y = \frac{1}{x\ln cx}.$

8.34. $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x+c}.$

8.35. $y = \frac{x}{c-\ln x}.$

8.36. $y^2 = \frac{1}{1+ce^{x^2}}.$

8.37. $y^3 = x - 2e^{1-x}, y \neq 0.$

8.38. $\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}e^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}.$

8.39. $x^4-x^2y^2+y^4=c.$

8.40. $x+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=c.$

8.41. $xe^y-y^2=c.$

8.42. $x^y=c.$

8.43. $x-y/x=c.$

8.44. $x^2+2x/y=c.$

8.45. $(x^2+y^2)e^x=c.$

8.46. $xy-\ln y=c.$

8.47. $y=\frac{x^6}{6}-\sin x+c_1x+c_2.$

8.48. $y=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\,(x^2-1)-\frac{x}{2}\ln(1+x^2)+c_1x+c_2.$

8.49. $y=\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{3}{2}\right]+c_1x+c_2.$

8.50. $y=c_1x^2+c_2.$

8.51. $y=c_1e^x+c_2-x-\frac{x^2}{2}.$

8.52. $y=\frac{x^3}{3}+c_1x^2+c_2.$

8.53. $y=c_1e^{c_2x}.$

8.54. $y\cos^2(x+c_1)=c_2.$

8.55. $y=c_1\operatorname{tg}(c_1x+c_2), c_1^2>0.$

8.56. $y=3\ln x+2x^2-6x+6.$

8.57. $y=1-\cos 2x.$

8.58. $y=-\ln|\cos x|.$

8.59. $y=3x(\ln|x|-1)+2.$

8.60. $y=e^x(x-1)-0{,}5ex^2+0{,}5e$

8.61. $y=\pi/2-\cos x-x$

8.62. $y^2=4x+4.$

8.63. $2y^2=1+(2x+1)^2.$

8.64. $4(17y-1)=(17x+8)^2.$

8.65. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}.$

8.66. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}.$

8.67. $y=c_1e^{4x}+c_2.$

8.68. $y=c_1\exp\{(1+\sqrt{2})x\}+c_1\exp\{(1-\sqrt{2})x\}.$

8.69. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-4x/3}.$

8.70. $y=c_1\cos x+c_2\sin x.$

8.71. $y=e^{-3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x).$

8.72. $y=e^x\left(c_1\cos\frac{x}{2}+c_2\sin\frac{x}{2}\right).$

8.73. $y=e^x(c_1+c_2x).$

8.74. $y=e^{2{,}5t}(c_1+c_2t).$

8.75. $y=e^{-x/4}(c_1+c_2x).$

8.76. $y=e^{-2x}(c_1+c_2x).$

8.77. $y=e^{-x}(c_1+c_2x).$

8.78. $y=c_1e^x+c_2e^{12x}.$

8.79. $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x.$

8.80. $y=4e^x+2e^{3x}.$

8.81. $y = 3e^{-2x}\sin 5x.$

8.82. $y = e^{-x/2}(2 + x).$

8.83. $S = e^{-t}(\cos t + 2\sin t).$

8.84. $y = \operatorname{sh} x.$

8.85. $y = 27^{x-1}(2 - x).$

8.86. $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1{,}5).$

8.87. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \frac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x).$

8.88. $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} - \frac{1}{4}e^{x}.$

8.89. $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x/2} + e^{x}.$

8.90. $y = c_1\cos ax + c_2\sin ax + \frac{e^x}{a^2+1}.$

8.91. $y = (c_1 + c_2x)e^{3x} + \frac{2}{9}x^2 + \frac{5}{27}x + \frac{11}{27}.$

8.92. $y = e^{x}(c_1\cos ax + c_2\sin ax) + x + 1.$

8.93. $y = \left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{3}{4}x^2 + c_1x + c_2\right)e^{-2x}.$

8.94. $y = c_1\sin x + c_2\cos x + \frac{1}{2\cos x}.$

8.95. $y = \left(c_1 - \frac{1}{2}x\right)\cos 2x + \left(c_2 + \frac{1}{4}\ln|\sin 2x|\right)\sin 2x.$

8.96. $y = c_1\cos x + c_2\sin x - \cos x\ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

8.97. $y = (1 + x)e^{-3/2} + 2e^{-5x/2}.$

8.98. $y = e^{x} + x^2.$

8.99. $y = \frac{1}{3}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin x - \cos x.$

8.100. $y = e^{x}(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84.$

Розділ 9. Ряди

9.2. $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}, S = 1.$

9.3. $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right), S = \frac{1}{2}.$

9.4. $S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right), S = \frac{1}{3}.$

9.5. $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, S = 1.$

9.6. $S_n = \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right), S = \frac{1}{8}.$

9.7. $S_n = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}, S = \frac{\pi}{4}$

9.8. $S = \frac{3}{4}$.

9.9. $S = \frac{9}{14}$.

9.10. $S = \frac{3}{4}$.

9.11. $S = 0{,}2$.

9.12. $S = 0{,}1$.

9.13. $S = \frac{1}{6}$.

9.14. Ні

9.15. Так

9.16. Так

9.17. Так

9.18. Збігається

9.19. Збігається

9.20. Збігається

9.21. Розбігається

9.22. Розбігається

9.23. Розбігається

9.24. Збігається

9.25. Збігається

9.26. Збігається

9.27. Збігається

9.28. Збігається

9.29. Збігається

9.30. Збігається

9.31. Збігається

9.32. Збігається

9.33. Збігається

9.34. Розбігається

9.35. Збігається

9.36. Збігається

9.37. Розбігається

9.38. Розбігається

9.39. Збігається

9.40. Розбігається

9.41. Збігається

9.42. Розбігається

9.43. Збігається

9.44. Розбігається

9.45. Збігається

9.46. Збігається абсолютно

9.47. Збігається умовно

9.48. Збігається умовно

9.49. Розбігається

9.50. Збігається умовно

9.51. Збігається абсолютно

9.52. Збігається абсолютно

9.53. Збігається умовно

9.54. $(-0{,}1;\ 0{,}1)$.

9.55. $(-1;\ 1]$.

9.56. $[-10;\ 10)$.

9.57. $x = 0$.

9.58. $\left(-1/\sqrt{2}\,; 1/\sqrt{2}\right)$.

9.59. $[-0{,}5;\ 0{,}5]$.

9.60. $[-1;\ 1)$.

9.61. $(-e;\ e)$.

9.62. $(-\infty; \infty)$.

9.63. $[-1;\ 1]$.

9.64. $x = 0$.

9.65. $[-1;\ 1]$.

9.66. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$.

9.67. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2n+1}, |x| \le 1$.

9.68. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, |x| < \infty$.

9.69. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!}, |x| < \infty$.

9.70. $\sin\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+4}}{(2n+1)!} + \cos\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$.

9.71. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}, |x| < \infty$.

9.72. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}, |x| < \infty$.

9.73. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!}, |x| < \infty$.

9.74. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \ln^n 5}{n!}, |x| < \infty$.

9.75. $2\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^2, |x| < 1/\sqrt{3}$.

9.76. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{n!}(-x)^{n-1}, |x| < 1$.

9.77. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}, |x| < 1$.

9.78. $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, |x| < 1$.

9.79. $\ln(1-x)(2-x) = \ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty}(1+2^{-n})\frac{x^n}{n}, |x| < 1$.

9.80. $\ln\frac{1+x^3}{1+x} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi n}{3}\cdot\frac{x^n}{n}, |x| < 1$.

9.81. $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 - \frac{225}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^{2n}, |x| < 1$.

9.82. $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}, -4 < x < 0$.

9.83. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n, -3 < x < -1$.

9.84. $\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n, -\frac{5}{2} < x < \frac{17}{2}$.

9.85. $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n, -1 < x < 3$.

9.86. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^n}{n}\left(x+\frac{2}{5}\right)^n, -\frac{7}{5} < x \le \frac{3}{5}$.

9.87. $1 + \frac{3}{2}(x-1) + \frac{3}{2^2\cdot 2!}(x-1)^2 - 3\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{(-1)^n(2i-1)}{2^{n+2}\cdot(n+2)!}(x-1)^{n+2}, |x| \le 1$.

9.88. $\ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{192} + \cdots$

9.89. $e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \cdots\right)$.

9.90. $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \cdots$

9.91. $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{5x^4}{6} - \cdots$

9.92. $c + x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} + \cdots, |x| < \infty$.

9.93. $c+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^4}{4\cdot 4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+\cdots, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

9.94. $c+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot 2!}+\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot n!}+\cdots,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

9.95. $c-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot 3!}+\frac{x^3}{3\cdot 4!}+\cdots+\frac{x^n}{n\cdot(n+1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

9.96. $c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 3!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(n-1)!}+\cdots,\ x\in(-\infty,+\infty)$.

9.97. $c+x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+\cdots,\ x\in[-1,1]$.

9.98. $c+x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\cdot\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\cdots, x\in[-1,1]$.

9.99. $c+x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-5)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\cdot\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+\cdots, x\in[-1,1]$.

9.100. $c+x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{19}}{19}+\cdots+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}+\cdots, x\in[-1,1]$.

9.101. $c+\frac{\pi}{2}\ln|x|-x-\frac{x^3}{18}-\frac{3x^5}{120}-\cdots-\frac{(2n)!\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)^2\cdot 4^2\cdot(n!)^2}-\cdots, x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

9.102. 0,310.

9.103. 2,568.

9.104. 0,018.

9.105. 0,162.

9.106. 0,015.

9.107. 0,054.

9.108. 0,098.

9.109. 0,070.

9.110. 1,027.

9.111. 0,484.

9.112. 0,508.

9.113. 0,855.

9.114. $y=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^3+\cdots$

9.115. $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}x^2-\cdots$

9.116. $y=1+2x-\frac{1}{2}x^2+\cdots$

9.117. $y=1+x+\frac{5}{2}x^2+\cdots$

9.118. $y=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}x+\frac{3}{2^3}x^3+\cdots$

9.119. $y=x^2+\frac{1}{6}x^4+\frac{11}{360}x^6+\cdots$

9.120. $y=\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{2\cdot 3}+\frac{(x-1)^4}{2\cdot 4}+\cdots$

9.121. $y=x+\frac{2}{3!}x^3+\frac{12}{5!}x^5+\cdots$

9.122. $y=1+2x+\frac{1}{4}x^2+\frac{11}{12}x^3+\frac{29}{48}x^4+\frac{25}{48}x^5+\cdots$

9.123. $y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+0\cdot x^5+\cdots$

9.124. $y=1+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}+\frac{3x^5}{5!}+\cdots$

9.125. $y=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\cdots$

9.126. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \cdots$

9.127. $y = 1 + \frac{\pi}{2}(x-\pi) + \frac{e}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{e\pi}{2\cdot 3!}(x-\pi)^3 + \frac{2e^2+e\pi-e^2\pi}{2\cdot 4!}(x-\pi)^4 \ldots$

9.128. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$

9.129. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}\sin 2nx$ або $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x.$

9.130. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$, 2) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx.$

9.131. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx.$

9.132. $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{l}x$

9.133. $\frac{e^l-e^{-l}}{2l} + l(e^l - e^{-l})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{l^2+n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{l}x + \pi(e^l - e^{-l}) \times$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{l^2+n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}x = \operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{l^2+n^2\pi^2}\left(l\cos\frac{n\pi}{l}x - \pi n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\right].$

9.134. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{a^2+n^2}\sin nx.$

9.135. $\frac{\pi-2}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{\pi-2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n}.$

9.136. $1 - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$

9.137. $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$

9.138. $f(x) = \frac{2\beta}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{\beta^2+\omega^2}d\omega.$

9.139. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\omega x}{1+\omega^2}d\omega.$

9.140. $f(x) = \frac{6}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}(1-\cos 3\omega)\sin\omega x\,d\omega.$

9.141. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin\omega\cos\omega x\,d\omega.$

9.142. $f(x) = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{\omega}\sin 2\omega\cos\omega x\,d\omega.$

9.143. $f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{2\sin\omega}{\omega} + \frac{\cos\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}\right)\cos\omega x\,d\omega$

ЛІТЕРАТУРА

1. Стороженко І. П. Вища математика: Навчальний посібник в 2 частинах. Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. – Харків: «Друкарня Мадрид», 2020. – 80 с.
2. Стороженко І. П. Вища математика: Навчальний посібник в 2 частинах. Частина ІІ. Математичний аналіз. –Харків: «Друкарня Мадрид», 2020. –156 с.
3. Стороженко І. П. Вища математика і статистика. Конспект лекцій: Навчально-методичний посібник для студентів вищих фармацевтичних навчальних закладів, які навчаються за спеціальністю «Фармація». –Х.: «Стильиздат», 2017. – 80 с..
4. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова, Л. Б. Федорова; за ред. проф. В. В. Булдигіна. – К.: «ТВіМС», 2011. – 224 с.
5. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман, под редакцией В. Т. Воднева. – Минск: «Вышэйшая школа», 1990. – 244 с.
6. Беклимешева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие / Под редакцией Д. В. Беклимешева. – М.: «Физматлит», 2001. – 496 с.
7. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра: учебник для вузов. – 4-е издание. – М.: «Наука», 1999. – 296 с.
8. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – Санкт-Петербург: «Лань», 2021. – 472 с.
9. Веселов А. П., Троицкий Е. В. Лекции по аналитической геометрии. Учебное пособие. – М.: «Центр прикладных исследований при механико-математическом ф-те. МГУ», 2002. – 160 с.
10. Федотов А. Г., Карпов Б. В. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М.: «Московский государственный институт электроники и математики», 2005. – 158 с.

11. Гриньов Б. В., Кириченко І. К. Аналітична геометрія: Підручник для вищих навчальних закладів. – Харків: «Гімназія», 2008. – 340 с.
12. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: «Наука», 1971. – 232 с.
13. H. Jerome Keisler. Elementary Calculus. An Infinitesimal Approach. Second Edition. – Wisconsin: «University of Wisconsin», 2000. – 992 p.
14. Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехов В. И., Шабунин М. И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных: Учебное пособие / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. – 2-е изд. – М.: «Физматлит», 2003. – 472 с.
15. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие для втузов. – 13-е изд. – М: «Наука», 1987. – 352 с.
16. Курбатова І. М. Диференціальна геометрія. Частина І: Метод. посіб. для студентів напряму підготовки 111 «Математика» / І. М. Курбатова. – Одеса: «Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова», 2020. – 66 с.
17. Збірник задач з векторного та тензорного числення: навч. посіб. для студентів фізичних факультетів університетів / М.Ф. Ледней, М. А. Разумова, О. В. Романенко, В. М. Хотяїнцев. – К.: «Видавничо-поліграфічний центр Київський університет», 2010. – 129 с.
18. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа. 17-е изд. – М: «Наука», 1971. – 416 с.
19. Стрелковська І. В., Поскаленко В. М. Ряди Фур'є. Інтеграл Фур'є. Навчальний посібник для фахівців в галузі зв'язку. – Одеса: «Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова», 2021. – 122 с.
20. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: «Видавництво Карп'юка», 2003. – 480 с.

Навчальне видання

СТОРОЖЕНКО Ігор Петрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Підручник

в авторській редакції

Дизайн та верстка Стороженко І. П.