МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний біотехнологічний університет
ФАКУЛЬТЕТ МЕХАТРОНІКИ ТА ІНЖИНІРИНГУ

Кафедра фізики і математики

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

(ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА)

Основи теорії та методика розв'язування задач
з варіантами індивідуальних завдань

Для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти
денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей

Затверджено
Рішенням Вченої ради факультету
мехатроніки та інженіренгу ДБТУ
Протокол № 2 від 19.10.2023 р.

Харків
2023

УДК 512.64(076.2)
Л-59

Схвалено
на засіданні кафедри фізики і математики
Протокол № 2 від 10.10.2023 р.

Аналітична геометрія (пряма та площина): основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец. / О.І. Завгородній, О.В. Соловиченко Д.А. Левкін, Т.О. Сичова; Держ. біотехнол. ун-т.– Харків: ДБТУ, 2023. – 66 с.

У навчальному посібнику викладена аналітична геометрія з розділу "пряма та площина". Для самостійної роботи і придбання практичних навичок розв'язку задач наведена необхідна теоретична інформація, а в кожному розділі показана достатня кількість розібраних прикладів. Для більш глибокого розуміння матеріалу разом з прикладами дається значна кількість ілюстрацій графічного характеру, показана комп'ютерна технологія розв'язування задач засобами «Mathcad».

Розрахована на студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей.

Рецензенти:

А. О. Пак, доктор техн. наук, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету

О. А. Макаров, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Відповідальний за випуск О. І. Завгородній, д-р техн. наук., проф.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Сьогодні інженерна освіта в багатьох галузях народного господарства не уявляється без вивчення аналітичної геометрії. Становлення основних понять цієї науки даються майбутнім інженерам ще в школі. Але шкільна програма не включає багатьох специфічних видів рівнянь прямої і площини, які є вкрай необхідними для майбутніх інженерів. Чимало задач фізики, механіки, техніки вирішено на основі аналітичної геометрії і в тому числі – розділу "пряма і площина". Тому оволодіння методами вказаного розділу, уміння застосовувати їх в теоретичних і прикладних дослідженнях є досить важливим, а відповідна тематика міститься в тих розділах вищої математики, які є обов'язковими для вивчення студентами закладів вищої освіти технічних спеціальностей.

Метою посібника є надання студентам достатньо широкої інформації з обраного розділу аналітичної геометрії, прививання навичок у виборі рівнянь при розв'язуванні різних класів геометричних задач на пряму і площину, уміння перетворювати рівняння з одного виду в інший та раціонально застосувати їх при розв'язуванні відповідних задач.

Перший розділ присвячено площині. Розглянуто рівняння площини в нормальному, загальному вигляді, рівняння площини у відрізках, рівняння площини, що проходить через три задані точки та супутні їм завдання. Знайшли місце такі питання, як пучок і в'язка площин.

У другому розділі розглянуто канонічні і параметричні рівняння прямої, рівняння прямої, що проходить через дві задані точки та рівняння прямої у вигляді перетину двох площин. Приводиться методика перетворення одного виду рівняння в інший. Висвітлена задача знаходження відстані від точки до прямої.

Третій розділ присвячено взаємному розміщенню прямих і площин. Детально розкриті питання про кут між вказаними об'єктами, умови їх паралельності та перпендикулярності. Достатня увага приділена перетину прямої з площиною.

В четвертому розділі наведено довідкові дані по темі "пряма на площині". Поряд з інформацією, взятою з шкільної програми, розглянуто різноманітні рівняння прямих і питання про їх взаємне розміщення, як наслідок матеріалу, який вивчається у попередніх розділах.

Для кращого сприйняття матеріалу до кожного розділу додається достатня кількість прикладів та графічного матеріалу. З метою поліпшення ефективності роботи над індивідуальними завданнями та більш глибокого оволодіння студентами сучасних комп'ютерних технологій, наведено приклад виконання завдань в середовищі «Mathcad» з коментарями про використані в ньому засоби.

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики і буде корисним для студентів денної і заочної форм навчання.

I. ПЛОЩИНА

В цьому посібнику вивчаються пряма та площина. Спочатку (перший і другий розділи) розглядаються площина і пряма у просторі, а вслід за цим – пряма на площині (третій розділ). Таке розміщення матеріалу зручне тим, що більшість рівнянь прямої на площині можна встановити, як наслідок відповідних рівнянь площини, чи прямої у просторі. Це зменшує об'єм посібника, при одній і тій же кількості інформації, а отже, зменшує час на освоєння матеріалу і спрощує його сприйняття.

1.1. Нормальне рівняння площини. Відстань від точки до площини. Відхилення точки від площини

Нехай задана деяка площина Q, для якої відома відстань $OD = p$ до початку координат та одиничний вектор $\vec{n}$ $(|\vec{n}| = 1)$, який лежить на відрізку $OD: \vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (рис.1). Очевидно, що величини $\vec{n}$ і p однозначно визначають цю площину.

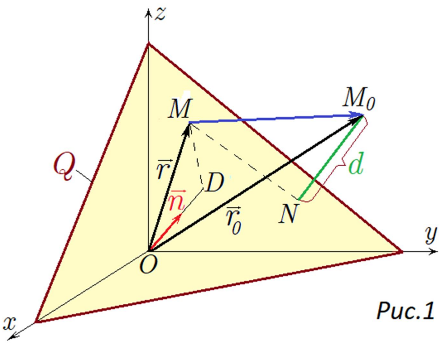


Рис.1

Візьмемо на площині Q довільну точку $M(x;y;z)$ і проведемо до неї радіус-вектор $\vec{r} = (x, y, z)$. Знайдемо проекцію цього вектора на вектор $\vec{n}$. З одного боку вона дорівнює скалярному добутку $\vec{r}\cdot\vec{n}$, а з іншого – відрізку $OD = p$. Таким чином, можна записати:

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{n} - p = 0} \tag{1.1}$$

Це і є **нормальне рівняння площини у вектороному вигляді.**

Щоб відійти від векторного виду в рівнянні (1.1) розкриємо скалярний добуток:

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0} \tag{1.2}$$

– **нормальне рівняння площини в скалярному вигляді.**

Нехай, тепер, поза площиною Q задана точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$. Проведемо в цю точку радіус-вектор $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Далі можемо знайти $\overrightarrow{MM_0} = \vec{r}_0 - \vec{r}$. Відстань $d = |M_0N|$ від точки M_0 до площини

Q дорівнює проекції вектора $\overrightarrow{MM_0}$ на вектор $\vec{n}$, тобто їх скалярному добутку: $d = |(\vec{r}_0 - \vec{r}) \cdot \vec{n}| = |\vec{r}_0 \cdot \vec{n} - \vec{r} \cdot \vec{n}|$. Щоб знайти остаточно відстань d треба розкрити в знайденому виразі скалярний добуток $\vec{r}_0 \cdot \vec{n}$ і врахувати, що $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ (1.1).

$$\boxed{d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p|} \qquad (1.3)$$

– відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини Q.

Таким чином, щоб знайти відстань від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до площини Q треба в нормальне рівняння (1.2) ***цієї площини замість поточних координат x, y, z підставити координати x_0, y_0, z_0 точки M_0 і обчислити абсолютне значення одержаного виразу.***

Якщо у виразі (1.3) опустити знак абсолютного значення, то одержимо величину, яка називається **відхиленням точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини Q:**

$$\boxed{\delta = \vec{r}_0 \cdot \vec{n} - p = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p} \qquad (1.4)$$

З цього виразу витікає, що $\delta = \pm d$. При цьому знак (+) виникає, якщо проекція вектора $\vec{r}_0$ на $\vec{n}$ додатна (тоді вона більша p), а знак (–), якщо вона від'ємна. Перше спостерігається коли точка M_0 і початок координат знаходяться по різні сторони від площини Q, а друге – по одну сторону площини (рис.1). **Отже, обчисленням відхилення δ вирішується задача про орієнтацію точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ відносно площини Q.**

Приклад 1. Знайти нормальне рівняння площини, знаючи, що точка $P(3; -6; 2)$ це основа перпендикуляра, опущеного з початку координат на цю площину.

Знайдемо спочатку довжину $p = OP$ згаданого перпендикуляра:

$$p = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 36 + 4} = 7.$$

Координатами одиничного вектора $\vec{n}$ (1.1), що лежить на відрізку $p = OP$ є напрямні косинуси цього відрізка:

$$\cos\alpha = \frac{x_p}{p} = \frac{3}{7}; \quad \cos\beta = \frac{y_p}{p} = -\frac{6}{7}; \quad \cos\gamma = \frac{z_p}{p} = \frac{2}{7}.$$

Залишається записати рівняння шуканої площини (1.2):

$$\frac{3}{7}x-\frac{6}{7}y+\frac{2}{7}z-7=0.$$

Приклад 2. Знайти відстань між площиною $x-\sqrt{2}y+z+6=0$ та точкою $M_0(1;\sqrt{2};-1)$.

Якщо площина задана в нормальному виді, то для знаходження вказаної відстані можна використати формулу (1.3). Коефіцієнтами при змінних x, y, z в "нормальній" площині є координати одиничного вектора. В нашому випадку:

$$\sqrt{1^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{1+2+1}=2.$$

Тобто, коефіцієнти при змінних x, y, z створюють вектор довжиною 2. Очевидно щоб перетворити його на одиничний треба розділити задане рівняння площини на 2. Крім того, в нормальному рівнянні площини (1.2) вільний член "$-p$" завжди від'ємний, так як геометрично p додатна величина – довжина. В заданому рівнянні вільний член додатний, тому слід змінити йому знак на протилежний. Отже, щоб перетворити це рівняння до нормального виду поділимо його на від'ємне число (–2). Одержимо:

$$-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y-\frac{1}{2}z-3=0.$$

Це є нормальне рівняння площини, тому тепер можна застосувати формулу (1.3):

$$d=\left|-\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}-\frac{1}{2}\cdot(-1)-3\right|=\left|-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-3\right|=\left|-2\right|=2.$$

П р и м і т к а. Якщо в правій частині останнього виразу опустити знак модуля, то замість відстані d одержимо відхилення (1.4) $\delta=-2$, що має від'ємний знак. Це означає, що точка M_0 і початок координат знаходяться по одну сторону від заданої площини, тобто розв'язування задач про відстань і орієнтацію точки відносно площини відбувається одночасно. Тому можна рекомендувати спочатку визначати відхилення за формулою (1.4), а потім довжину, враховуючи, що $d=|\delta|$.

1.2. Загальне рівняння площини. Приведення загального рівняння площини до нормального виду

Однозначно визначити положення площини у просторі можна різними способами. В попередньому випадку (п.1.1), наприклад, для цього було залучено відстань d від початку координат до площини та одиничний вектор $\vec{n}$ нормальний до площини. Визначимо, тепер, площину таким чином: зафіксуємо у просторі деяку точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, через яку проходить площина та задамо один із векторів $\vec{N}=(A,B,C)$, перпендикулярних до площини.

Щоб записати рівняння площини Q (рис.2) візьмемо на ній довільно ще одну точку $M(x,y,z)$ з поточними координатами x, y, z. Проведемо в ці точки, відповідно, радіуси-вектори $\vec{r}_0=(x_0,y_0,z_0)$ та $\vec{r}=(x,y,z)$ після чого знайдемо:

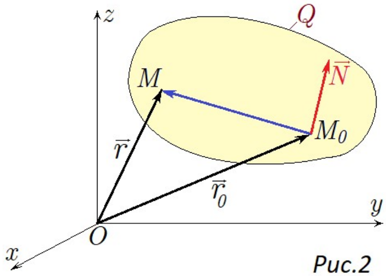


Рис.2

$$\overrightarrow{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0=$$

$$=(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0). \tag{1.5}$$

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежить на площині Q тому він перпендикулярний до вектора $\vec{N}$ ($\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{N}$). Тоді скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0 \ \Rightarrow\ (\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{N}=0. \tag{1.6}$$

Розкриваючи цей скалярний добуток, одержимо:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0} \tag{1.7}$$

– **рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(A,B,C)$.**

Спираючись на розподільний закон скалярного множення, із співвідношення (1.6) запишемо $\vec{r}\cdot\vec{N}-\vec{r}_0\cdot\vec{N}=0$. Після введення позначення $D=-\vec{r}_0\cdot\vec{N}$ будемо мати:

$$\boxed{\vec{r}\cdot\vec{N}+D=0} \tag{1.8}$$

– **загальне рівняння площини у векторному вигляді.**

Для приведення рівняння до скалярного вигляду достатньо розкрити добуток $\vec{r} \cdot \vec{N}$:

$$\boxed{Ax + By + Cz + D = 0} \qquad (1.9)$$

– **загальне рівняння площини.**

Відмітимо, що на практиці розв'язування різних задач часто приводить до рівняння площини, яке в більшості випадків і є загальним рівнянням (1.9). Але, як показано вище, знаходження відстані від точки до площини виконується досить просто, якщо маємо рівняння площини в нормальному виді. Отже, цілком природно виникає запитання: як перетворити загальне рівняння площини до нормального виду?

Для вирішення цього питання порівняємо між собою вказані рівняння у векторній формі: $\vec{r} \cdot \vec{n} - p = 0$– нормальне рівняння (1.1); $\vec{r} \cdot \vec{N} + D = 0$ – загальне рівняння (1.8).

Як бачимо, ці рівняння структурно дуже схожі. Вони показують, що рівняння (1.8) буде нормальним за двох умов. По-перше, в скалярному добутку $\vec{r} \cdot \vec{N}$ вектор $\vec{N}$ повинен бути змінений на одиничний. По-друге, знак вільного члена D повинен бути від'ємним.

Очевидно, що замість вектора $\vec{N}$ можна ввести його орт $\vec{N}/|\vec{N}|$. Для цього достатньо помножити загальне рівняння (1.8) на множник $1/|\vec{N}|$. Щоб задовольнити другу умову знак множника треба прийняти протилежним вільному члену D. Означений **множник називають нормуючим:**

$$\mu = \pm \frac{1}{|\vec{N}|} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (1.10)$$

де знак, як вже вказано вище, вибирається протилежним числу D.

Таким чином, **щоб привести загальне рівняння площини (1.9) до нормального виду слід помножити його на нормуючий множник (1.10).** Результатом цієї дії є:

$$\boxed{\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0} \qquad (1.11)$$

– **нормальне рівняння площини.**

Знаючи рівняння (1.11), легко записати формулу для визначення відхилення точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ від площини (1.9), заданої загальним рівнянням

$$\boxed{\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \tag{1.12}$$

та формулу для визначення відстані від точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до тієї ж площини

$$\boxed{d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}} \tag{1.13}$$

Приклад 2б. Покажемо застосування одержаних формул, для чого знову звернемося до умови, приведеної в другому прикладі, де рівняння площини задане в загальному виді: $x - \sqrt{2}y + z + 6 = 0$. Знайдемо відстань від точки $M_0(1; \sqrt{2}; -1)$ до площини (1.13):

$$d = \frac{\left|1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + 1 \cdot (-1) + 6\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{4}} = 2.$$

При визначенні відхилення точки M_0 від площини за формулою (1.12) в знаменнику слід вибрати від'ємний знак, протилежний вільному члену ($D = 6$) і тоді відхилення теж буде від'ємним і рівним $\delta = -2$.

Як бачимо, результат знаходиться простіше, ніж у згаданому прикладі, тому для відповідних задач рекомендується застосовувати формули (1.12), (1.13).

Приклад 3. Обчислити відстань між двома паралельними площинами: $x - 2y - 2z - 6 = 0$ та $x - 2y - 2z - 12 = 0$

Візьмемо на першій площині точку з координатами $(0; 0; -3)$. Відстань між будь-якою точкою першої площини і другою площиною і буде шуканою відстанню між заданими паралельними площинами. Отже, можна застосувати формулу (1.13):

$$d = \frac{\left|0 - 2 \cdot 0 - 2 \cdot (-3) - 12\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\left|-6\right|}{\sqrt{9}} = 2.$$

1.3. Частинні випадки розміщення площини

В загальному випадку всі коефіцієнти A, B, C, D рівняння площини (1.9) відмінні від нуля. Розглянемо далі випадки, коли деякі з цих коефіцієнтів дорівнюють нулю та з'ясуємо як це впливає на розміщення площин.

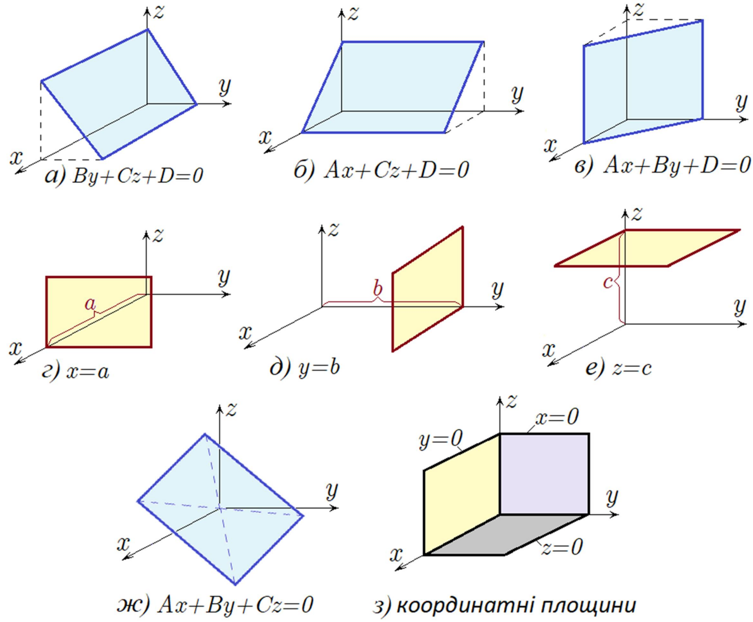


Рис.3.

1. $A = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{By + Cz + D = 0}$ (рис.3, *а*).

В цьому випадку вектор $\vec{N} = (0, B, C)$, який, як відомо, перпендикулярний до площини (рис.2), перпендикулярний також і до вісі абсцис Ox, так як проекція вектора на цю вісь дорівнює нулю. З цього витікає, що сама **площина паралельна вісі Ox.**

Аналогічно розглядаємо ще два наступні випадки.

2. $B = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{Ax + Cz + D = 0}$ (рис.3, *б*).

$\vec{N} = (A, 0, C) \;\Rightarrow\; \vec{N} \perp Oy -$ **площина паралельна вісі Oy.**

3. $C=0 \;\Rightarrow\; \boxed{Ax+By+D=0}$ (рис.3, *в*).

$\vec{N}=(A,\,B,\,0) \;\Rightarrow\; \vec{N}\perp Oz -$ **площина паралельна вісі Oz.**

З розглянутих випадків витікає наступне. ***ЯКЩО В РІВНЯННІ ПЛОЩИНИ ВІДСУТНЯ ЛИШЕ ОДНА З КООРДИНАТ, ЯКА ВІДПОВІДАЄ ПЕВНІЙ ОСІ, ТО ПЛОЩИНА ПАРАЛЕЛЬНА ЦІЙ ОСІ.***

4. $D=0 \;\Rightarrow\; \boxed{Ax+By+Cz=0}$ (рис.3, *ж*).

В цьому випадку рівнянню площини задовольняють координати точки $O(0,\,0,\,0)$ – **площина проходить через початок координат.**

5. $A=B=0 \Rightarrow Cz+D=0 \Rightarrow z=-\dfrac{D}{C} \Rightarrow \boxed{z=c},\ \partial e\ c=-\dfrac{D}{C}$

В цьому випадку вектор $\vec{N}=(0,\,0,\,C)$ паралельний вісі Oz, так як дає на вісі Ox, Oy нульові проекції. Тоді **площина перпендикулярна вісі Oz** (рис.3, *е*).

Аналогічно розглянемо ще два випадки.

6. $A=C=0 \Rightarrow By+D=0 \Rightarrow y=-\dfrac{D}{B} \Rightarrow \boxed{y=b},\ \partial e\ b=-\dfrac{D}{B}$

– площина перпендикулярна вісі Oy (рис.3, *д*).

7. $B=C=0 \Rightarrow Ax+D=0 \Rightarrow x=-\dfrac{D}{A} \Rightarrow \boxed{x=a},\ \partial e\ a=-\dfrac{D}{A}$

– площина перпендикулярна вісі Ox (рис.3, *г*).

За випадками 5-7 можна сформулювати таку ознаку. ***ЯКЩО В РІВНЯННІ ПЛОЩИНИ ПРИСУТНЯ ЛИШЕ ОДНА З КООРДИНАТ, ЯКА ВІДПОВІДАЄ ПЕВНІЙ ОСІ, ТО ПЛОЩИНА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНА ЦІЙ ОСІ.***

Одним з варіантів випадків 5-7 є наступний: $D=0$ (рис.3, *з*). Тоді: $c=0$; $b=0$; $a=0$. Отже, маємо площини, які перпендикулярні відповідним осям (випадки 5-7) і одночасно проходять через початок координат (випадок 4) – це координатні площини:

8. $\boxed{z=0}$ **– рівняння координатної площини xOy;**

9. $\boxed{y=0}$ **– рівняння координатної площини xOz;**

10. $\boxed{x=0}$ **– рівняння координатної площини yOz;**

Для випадків 1-3 теж вкажемо частинні варіанти, коли $D = 0$. При цьому площини не тільки паралельні відповідним осям, а й проходять через початок координат (випадок 4). Зрозуміло, що такі площини проходять безпосередньо по осям координат. Їх рівняння наступні:

11. $\boxed{By + Cz = 0}$ **– проходить через вісь $\boldsymbol{Ox}$;**

12. $\boxed{Ax + Cz = 0}$ **– проходить через вісь $\boldsymbol{Oy}$;**

13. $\boxed{Ax + By = 0}$ **– проходить через вісь $\boldsymbol{Oz}$.**

Приклад 4. Записати рівняння площини, яка проходить:
1) паралельно площині xOz через точку $M(2;-5;3)$;
2) через вісь Oz і точку $F(-3;1;-2)$;
3) через дві точки $P(4;0;-2)$, $Q(5;1;7)$ паралельно вісі Ox.

① Маємо шостий випадок розміщення площини, а саме: $y = b$. Координати точки $M(2;-5;3)$ за умовою задачі задовольняють це рівняння: $-5 = b$. Звідси рівняння шуканої площини:
$\underline{y = -5}$.

② Розглядається випадок 13: $Ax + By = 0$.
Підставимо в це рівняння координати точки $F(-3;1;-2)$:
$-3A + B = 0 \;\Rightarrow\; B = 3A.$
Врахуємо це співвідношення в записаному рівнянні площини:
$Ax + 3Ay = 0$. Після скорочення одержимо:
$\underline{x + 3y = 0}$.

③ Розглядається перший випадок: $By + Cz + D = 0$. Цьому рівнянню задовольняють координати обох точок $P(4;0;-2)$ і $Q(5;1;7)$. Результатом підстановки вказаних координат буде наступна система:

$$\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases}$$

Розв'язуємо систему відносно коефіцієнтів B і C:

$$C = \frac{D}{2}; \quad B = -7C - D = -7 \cdot \frac{D}{2} - D = -\frac{9}{2}D \;\Rightarrow\; B = -\frac{9}{2}D.$$

Враховуючи знайдені вирази, остаточно одержимо:

$$-\frac{9}{2}Dy + \frac{D}{2}z + D = 0 \;\Rightarrow\; \underline{z - 9y + 2 = 0}.$$

1.4. Рівняння площини у відрізках

Нехай задано загальне рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ деякої площини, яка перетинає вісі координат Ox, Oy, Oz, відповідно, в точках $P(a;\,0;\,0)$, $K(0;\,b;\,0)$, $L(0;\,0;\,c)$ (рис.4). Отже, вказана площина відтинає на відповідних осях Ox, Oy, Oz системи координат відрізки a, b, c. Виразимо ці відрізки через коефіцієнти A, B, C, D загального рівняння. Для цього використаємо те, що точки P, K, L належать площині і, значить, їх координати задовольняють рівнянню площини.

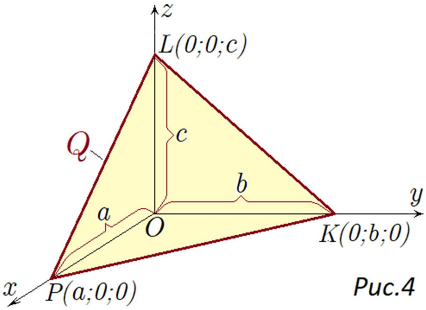


Рис.4

Почергова підстановка цих координат в рівняння площини дає $Aa + D = 0$, $Bb + D = 0$, $Cc + D = 0$, звідки:

$$a = -\frac{D}{A}; \quad b = -\frac{D}{B}; \quad c = -\frac{D}{C}. \tag{1.14}$$

Далі виконаємо елементарні перетворення рівняння площини:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \Rightarrow \frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1 \tag{1.15}$$

Підставляючи сюди співвідношення (1.14), в результаті одержимо:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \tag{1.16}$$

– рівняння площини у відрізках.

Приклад 5. Три грані тетраедра, розміщеного в другому октанті, співпадають з координатними площинами. Четверта грань перетинає вісі Ox, Oy, Oz, відповідно, в точках A, B, C при цьому: $AB = 6$, $BC = \sqrt{29}$, $AC = 5$. Записати рівняння цієї грані.

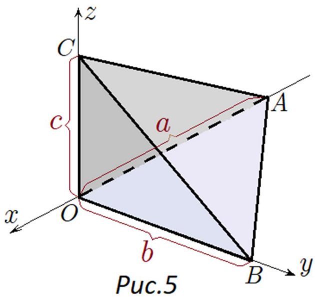


Рис.5

Згаданий тетраедр показано на рис.5. Грань ABC обмежена ребрами AB, BC і AC відомої довжини. Враховуючи ці дані, знайдемо відрізки $a, b, c,$ що відтинаються на осях координат площиною, суміщеною з гранню ABC . З цією метою запишемо теорему Піфагора для кожного з трикутників $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle AOC$.

В результаті, одержимо систему:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = AB^2 \\ b^2 + c^2 = BC^2 \\ a^2 + c^2 = AC^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u + v = 36 \\ v + w = 29 \\ u + w = 25 \end{cases}$$

Вище позначено: $u = a^2,\ v = b^2,\ w = c^2$ та враховано довжину ребер AB, BC і AC.

Запишемо тепер матриці, пов'язані з одержаною системою:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 36 \\ 29 \\ 25 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}.$$

Визначник основної матриці A дорівнює:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0\,.$$

Оскільки матриця A невироджена – вона має обернену:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тут "Т"– символ транспонування приєднаної матриці, елементи якої (алгебраїчні доповнення $A_{ij},\ i = 1, 2, 3,\ j = 1, 2, 3$) легко знаходяться завдяки простим елементам основної матриці (лише нулі та одиниці).

Матричний розв'язок системи має вигляд:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 36 \\ 29 \\ 25 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 36-29+25 \\ 36+29-25 \\ -36+29+25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Отже, $u = 16, v = 20, w = 9,$ а відрізки, що відтинаються від координатних осей площиною грані ABC тетраедра, складають $a = -4;$ $b = 2\sqrt{5};$ $c = 3.$ Знаком "мінус" відрізка a враховано, що тетраедр за умовою задачі розміщено в другому октанті (рис.5).

Остаточно рівняння грані ABC можна записати, як рівняння площини у відрізках (1.16):

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{2\sqrt{5}} + \frac{z}{3} = 1.$$

Приклад 6. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $P(-1; 4; -1)$, $M(-13; 2; -10)$ і відтинає на координатних осях Ox, Oz відмінні від нуля відрізки однакової довжини.

Запишемо рівняння згаданої площини у відрізках (1.16), в якому за умовою задачі $c = a$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{a} = 1.$$

Цьому рівнянню задовольняють координати точок P і M, що дозволяє скласти систему рівнянь для визначення невідомих $a,\ b$:

$$\begin{cases} -\frac{1}{a} + \frac{4}{b} - \frac{1}{a} = 1 \\ -\frac{13}{a} + \frac{2}{b} - \frac{10}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{2} \\ \frac{2}{b} - \frac{23}{a} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{a} = -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = -\frac{1}{44} \\ \frac{1}{b} = \frac{21}{88} \end{cases}.$$

Маємо наступні значення $a = -44,\ \ b = 88/21$, а також:

$$\frac{x}{-44} + \frac{y}{88/21} + \frac{z}{-44} = 1$$

– рівняння шуканої площини у відрізках.

В загальному виді це рівняння виглядає так:

$$2x - 21y + 2z + 88 = 0.$$

1.5. Рівняння площини, що проходить через три задані точки

Через три точки, що не лежать на одній прямій, як відомо зі змісту шкільної аксіоми, можна провести тільки одну площину. Будемо вважати ці три точки заданими (рис.6): $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$; $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$; $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$.

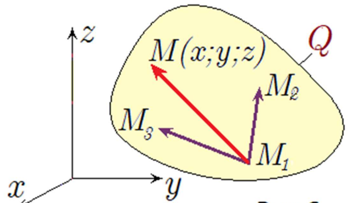


Рис.6

Візьмемо на площині Q крім точок M_1, M_2, M_3 – поточну точку $M(x;y;z)$ з довільними координатами $x,\, y,\, z$. Через, вказані на площині, точки проведем три вектори з кінцями в точках $M,\ M_2,\ M_3$ та початком в точці M_1. Очевидно, що вони можуть бути знайдені, як різниця координат їх початку і кінця:

$$\overrightarrow{M_1M} = \left(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1\right); \quad \overrightarrow{M_1M_2} = \left(x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1\right);$$
$$\overrightarrow{M_1M_3} = \left(x_3 - x_1,\, y_3 - y_1,\, z_3 - z_1\right). \tag{1.17}$$

Так, як довільна точка M так само, як і інші три точки M_1, $M_2,\, M_3,$ лежить на площині Q , то і всі три вектори лежать на цій площині, а значить (за визначенням) вони компланарні. Умовою компланарності є рівність нулю змішаного добутку цих векторів:

$$\left(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0. \tag{1.18}$$

Підкреслимо, що співвідношення (1.18) буде вірним доти, поки точка $M(x;y;z)$ буде знаходитись на площині Q , тобто воно і визначає собою цю площину.

Враховуючи визначення (1.17), запишемо змішаний добуток в скалярному вигляді:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0} \tag{1.19}$$

– рівняння площини, що проходить через три задані точки.

П р и м і т к а. Як показано вище, для розв'язку багатьох задач доцільно застосовувати рівняння площини в нормальному, загальному виді або рівняння у відрізках. Тому визначник (1.19) доводиться перетворювати до відповідного вигляду. Можна рекомендувати, після спрощення другого і третього рядків, розкладати визначник за елементами першого рядка. Це зразу приводить до рівняння площини у виді (1.7).

В літературі зустрічається ще один різновид рівняння площини, що проходить через три задані точки:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{1.20}$$

Очевидно, що при відніманні другого рядка визначника (1.20) від трьох інших і наступного розкривання визначника за елементами того ж другого рядка ми прийдемо до рівняння (1.19). Тобто, рівняння (1.19) і (1.20) рівносильні. При цьому співвідношення (1.20) простіше для сприймання, а співвідношення (1.19) простіше в застосуванні. Вибір одного з цих варіантів залишаємо за читачем.

Приклад 7. Вершини піраміди розміщені в точках $S(0;6;4)$, $A(3;5;3)$, $B(-2;11;-5)$, $C(1;-1;4)$. Знайти висоту h_S піраміди, опущеної з вершини S на основу ABC.

Знайдемо рівняння площини, яка проходить через точки A, B і C.

$$\begin{vmatrix} x-x_A & y-y_A & z-z_A \\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A \\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -2-3 & 11-5 & -5-3 \\ 1-3 & -1-5 & 4-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -7 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x-z & y-5 & z-3 \\ 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -7 \begin{vmatrix} x-z & y-5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7\cdot 3\begin{vmatrix} x-z & y-5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{2x - y - 2z + 5 = 0}$$

При перетвореннях визначників спочатку до третього рядка додали другий, що дало нульове значення другого елемента в третьому рядку. Далі до першого стовпця додали третій, що принесло другий нуль – перший елемент третього рядка. Після розкладання визначника за елементами третього рядка в одержаному визначнику другого порядку спільний множник – "3" винесли за знак визначника.

Тепер висоту h_S піраміди можна підрахувати, як відстань між точкою $S(0;6;4)$ та знайденою площиною:

$$h_S = \frac{\left|2\cdot 0 - 1\cdot 6 - 2\cdot 4 + 5\right|}{\sqrt{2^2 + 1 + 2^2}} = \frac{\left|-9\right|}{\sqrt{9}} = 3.$$

1.6. Рівняння пучка та в'язки площин

Пучком площин називається множина площин, які проходять через одну й ту ж пряму. Вказана пряма називається віссю пучка.

Нехай відомі деякі два рівняння площин пучка:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (1.21)$$

Тоді будь-яка площина цього пучка може бути задана рівнянням:

$$\boxed{\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \nu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.} \quad (1.22)$$

Тут μ і ν – дійсні числа, які не дорівнюють одночасно нулю.

За будь-яких значень чисел μ і ν координати будь-якої точки вісі пучка задовольняють рівняння площини (1.22), адже вони перетворюють її обидва доданки на нуль. З іншого боку, при $\nu = 0$ ця пряма задає першу площину, при $\mu = 0$ – другу, а при інших значеннях μ і ν – площини, які не співпадають з вказаними. Отже, рівняння **(1.22)** описує всі площини, які проходять через лінію перетину площин (1.21), тому воно **називається рівнянням пучка прямих.**

В'язкою площин є множина площин, що проходять через одну й ту ж точку, яка називається центром в'язки.

З аналогічних міркувань можна показати, що по відомим трьом площинам, які перетинаються в одній точці, можна записати **рівняння в'язки площин у вигляді**:

$$\boxed{\begin{gathered}\mu(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \nu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ +\lambda(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,\end{gathered}} \qquad (1.23)$$

де μ, ν і λ – деякі дійсні числа, які не дорівнюють одночасно нулю.

Рівняння в'язки площин можна записати також у виді:

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,} \qquad (1.24)$$

де центром в'язки є точка з координатами $(x_0; y_0; z_0)$, але, на відміну від рівняння (1.7), тут коефіцієнти A, B і C можуть приймати довільні значення, які не дорівнюють одночасно нулю.

Приклад 8. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $A(0; 2; 1)$ і пряму, задану перетином площин: $3y + z - 3 = 0$, $x + 2y - z + 1 = 0$.

Запишемо рівняння пучка площин, використовуючи задані рівняння:

$\mu(3y + z - 3) + \nu(x + 2y - z + 1) = 0$.

Нехай це рівняння пучка відображає шукану площину. Тоді координати точки A задовольняють це рівняння.

$\mu(3 \cdot 2 + 1 - 3) + \nu(2 \cdot 2 - 1 + 1) = 0 \Rightarrow 4\mu + 4\nu = 0 \Rightarrow \mu = -\nu$.

Звідси маємо: $\mu = 1$ при $\nu = -1$.

Підставляючи ці значення в рівняння пучка, остаточно одержимо:

$3y + z - 3 - x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow \underline{-x + y + 2z - 4 = 0}$.

Приклад 9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $A(-1; 2; 0)$, $B(0; 0; 2)$ і центр в'язки площин, яка утворена площинами: $2x - z = 0$, $x + y + 2z = 0$, $y = 0$.

В'язка заданих площин

$\mu(2x - z) + \nu(x + y + 2z) + \lambda y = 0$

при певних значеннях величин μ, ν і λ визначає шукану площину, якій задовольняють координати точок A і B.

Підставляючи їх в рівняння в'язки, одержимо систему:

$$\begin{cases} -2\mu + \nu + 2\lambda = 0 \\ -2\mu + 4\nu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\nu + 2\lambda = 0 \\ \mu = 2\nu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2}\nu \\ \mu = 2\nu \end{cases}$$

Приймемо, що $\nu = 2$ тоді $\lambda = 3,\ \ \mu = 4.$ З рівняння в'язки:

$$4(2x - z) + 2(x + y + 2z) + 3y = 0 \Rightarrow 8x - 4z + 2x + 2y + 4z = 3y = 0.$$

Після належних перетворень дістанемо рівняння шуканої площини:

$\underline{2x + y = 0.}$

Для самостійного розв'язку

1. Обчислити відстань від початку координат до площини: $15x - 10y + 6z - 190 = 0.$
2. Довести, що площина перетинає відрізок, обмежений точками $P(3;-2;1)$ $M(-2;5;2).$
3. Для кожної з наступних площин обчислити кути α, β і γ, утворені нормаллю з осями координат і відстань від початку координат: $1)\ x - 2y + 2z - 6 = 0;\quad 2)\ y - z + 2 = 0;\quad 3)\ 2y + 1 = 0.$
4. Знайти точку, симетричну з початком координат відносно площини $6x + 2y - 9z + 121 = 0.$
5. Рухома точка з початкового положення в точці $F(5;-1;2)$ рухається паралельно вісі $Oy.$ Знайти точку її зустрічі з площиною $x - 2y - 3z + 7 = 0.$
6. Вказати особливості розміщення вказаних площин: $1)\ 3x - 5z + 1 = 0;\quad 2)\ 9y - 2 = 0;\quad 3)\ 8y - 2z = 0;$ $4)\ 2x + 3y - 7z = 0;\ \ 5)\ x + y - 5 = 0.$
7. Площина Q відтинає на координатних осях Ox, Oy і Oz відрізки: $a = 2;$ $b = 5;\ c = -10/3,$ утворюючи разом з координатними площинами деякий тетраедр. В цей тетраедр вписано куб, три грані якого співпадають з координатними площинами, а однією з вершин він дотикається до площини $Q.$ Знайти ребро куба.
8. Деяка площина проходить через три точки $M(1;2;3), N(2;-1;2),$ $L(3;1;0).$ З'ясувати чи лежить точка $R(1;5;1)$ на цій площині.
9. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $F(2;1;-2)$ і вісь пучка прямих: $\mu(x + 2y - 1) + \nu(2x - 3y - z + 5) = 0.$
10. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(5;0;1),$ $N(0;-1;2)$ і центр в'язки площин, утвореної площинами: $3x - z = 0,$ $x - 2y + z - 1 = 0,\ \ y + 4z - 3 = 0.$

II. ПРЯМА У ПРОСТОРІ

В цьому розділі, як і у попередньому для площини, розглянемо кілька видів рівнянь прямої. Це диктується тим, що різні групи задач розв'язуються більш просто за допомогою тих чи інших рівнянь. Поряд з цим виникає необхідність вивчення методів перетворення одного виду рівнянь прямої в інші.

2.1. Канонічні і параметричні рівняння прямої. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки

Нехай будуть відомими деяка просторова точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$, віднесена до прямокутної системи координат xyz, та вектор $\vec{S}$ з координатами $(n; m; \ell)$ (рис.7). Очевидно, що через точку M_0 можна провести єдину пряму, паралельно вектору $\vec{S}$ (червоний колір). Візьмемо довільно на цій прямій ще одну точку $M(x; y; z)$ з поточними координатами $(x; y; z)$ і проведемо в точки M_0 і M радіус-вектори $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ і $\vec{r} = (x,\ y,\ z)$. Тоді для вектора $\overrightarrow{M_0M}$ будемо мати: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0)$. Якщо точка M не покидає пряму, то вектори $\vec{S}$ і $\overrightarrow{M_0M}$ колінеарні. Умовою колінеарності двох векторів (в скалярному виді) є пропорційність їх відповідних проекцій, тобто:

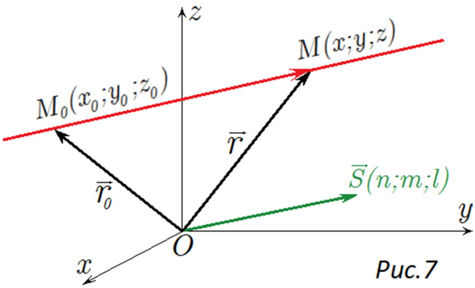


Рис.7

$$\boxed{\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{\ell}.} \qquad (2.1)$$

Точка $M(x; y; z)$ належить прямій тоді і тільки тоді, коли її координати задовольняють цим рівнянням. Отже, співвідношення (2.1) і є рівняннями прямої. **Вони називаються канонічними рівняннями**.

Запишемо далі умову колінеарності тих же векторів у векторному вигляді: $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{S}$ або $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{S}$ (t – деяке дійсне число) і спроектуємо записану рівність на вісі координат. В результаті одержимо:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + \ell t. \end{cases}} \qquad (2.2)$$

– **параметричні рівняння прямої** (роль параметра грає змінна t).

П р и м і т к а. Рівняння (2.2) можна також одержати шляхом перетворення канонічного рівняння. Для цього слід доповнити його параметром t

$\dfrac{x - x_0}{n} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{\ell} = t,$ звідки:

$$\frac{x - x_0}{n} = t; \quad \frac{y - y_0}{m} = t; \quad \frac{z - z_0}{\ell} = t.$$

Розв'язуючи ці рівняння відносно змінних x, y, z, одержимо параметричні рівняння (2.2).

Наведене перетворення зручно застосовувати при розв'язуванні задач.

Припустимо, тепер, що пряма проходить через дві задані точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Тоді за напрямний вектор можна взяти: $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1)$, а замість точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, (через яку проходить пряма) – одну з точок, наприклад $M_1(x_1; y_1; z_1)$. З врахуванням зазначеного, рівняння прямої (2.1) прийме вигляд:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad (2.3)$$

– рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Приклад 10. Задано вершини трикутника $A(3; 6; -7)$, $B(-5; 2; 3)$, $C(4; -7; -2)$. Знайти параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини C.

Знайдемо координати точки M медіани CM, як середини сторони AB:

$x_M = 0,5(x_A + x_B) = 0,5(3 - 5) = -1;$

$y_M = 0,5(y_A + y_B) = 0,5(6 + 2) = 4;$
$z_M = 0,5(z_A + z_B) = 0,5(-7 + 3) = -2.$

Тепер можна записати рівняння медіани (2.3) по відомим двом точкам $C(4;-7;-2)$ і $M(-1;4;-2)$:

$$\frac{x - x_C}{x_M - x_C} = \frac{y - y_C}{y_M - y_C} = \frac{z - z_C}{z_M - z_C} \Rightarrow \frac{x-4}{-1-4} = \frac{y+7}{4+7} = \frac{z+2}{-2+2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y+7}{11} = \frac{z+2}{0}.$$

Одержано канонічні рівняння медіани CM. Щоб знайти параметричні рівняння (2.2) прирівняємо знайдені співвідношення параметру t:

$$\frac{x-4}{-5} = t; \quad \frac{y+7}{11} = t; \quad \frac{z+2}{0} = t.$$

Звідси, після належних перетворень, знаходимо параметричні рівняння медіани:

$$\begin{cases} x = 4 - 5t, \\ y = -7 + 11t, \\ z = -2. \end{cases}$$

Рівняння показують, що медіана належить площині ($z = -2$), перпендикулярній вісі Oz.

Приклад 11. Задано вершини трикутника $A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$. Скласти канонічне рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині B.

Знайдемо, спочатку, вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ по відомим координатам їх початку і кінця:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B; y_A - y_B; z_A - z_B) = (3-1; -1-2; -1+7) = (2;-3;6);$$
$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B; z_C - z_B) = (-5-1; 14-2; -3+7) = (-6;12;4).$$

Довжина кожного вектора:

$$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \sqrt{49} = 7; \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 4^2} = \sqrt{196} = 14.$$

Складемо вектори $\overrightarrow{BA}$ і $0,5 \cdot \overrightarrow{BC}$, які мають однакову довжину – 7. Тоді сумарний вектор буде направлений саме по бісектрисі внутрішнього кута трикутника $\triangle ABC$ при вершині B.

$\overrightarrow{BA} + 0,5 \cdot \overrightarrow{BC} = (2-3; -3+6; 6+2) = (-1; 3; 8).$

Цей вектор можна взяти за напрямний для шуканого канонічного рівняння (2.1) бісектриси. Враховуючи, ще координати точки $B(1; 2; -7)$, через яку проходить бісектриса, вказане рівняння запишемо так:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+7}{8}.$$

2.2. Пряма, як перетин двох площин. Перетворення рівнянь прямої до заданого виду

Розглянемо дві площини, які перетинаються. Нехай ці площини задаються рівняннями:

$$1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad 2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \quad (2.4)$$

Запишемо систему:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \quad (2.5)$$

Системі (2.5) задовольняють координати точок, які належать одночасно і першій і другій площині, тобто координати точок, які лежать на лінії перетину цих площин. Очевидно, що цією лінією є пряма. Отже, **системою (2.5) задається пряма перетину двох площин (2.4).**

Приклад 12. Скласти рівняння проекції прямої

$$\begin{cases} 5x - 4y - 2z - 5 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{на площину} \quad 2x - y + z - 1 = 0.$$

Якщо через задану пряму провести площину, перпендикулярно до заданої площини, то лінія перетину цих площин і буде шуканою проекцією.

Візьмемо рівняння проектуючої площини у виді пучка (1.22):

$$\mu(5x - 4y - 2z - 5) + \nu(x + 2z - 2) = 0. \quad (1)$$

Перетворимо рівняння (1) до загального виду:

$$(5\mu + \nu)x - 4\mu y + (-2\mu + 2\nu)z - 5\mu - 2\nu = 0 \quad . \tag{2}$$

Запишемо вирази векторів, перпендикулярних до площини (2) і заданої площини:

$$\vec{n}_1 = (5\mu + \nu; -4\mu; -2\mu + 2\nu), \quad \vec{n}_2 = (2; -1;\ 1). \tag{3}$$

Оскільки задана і проектуюча площина (2) взаємно перпендикулярні, то перпендикулярні і вектори (3). Отже, їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$\vec{n}_1\vec{n}_2 = 2 \cdot (5\mu + \nu) - 1 \cdot (-4\mu) + 1 \cdot (-2\mu + 2\nu) = 0.$$

Звідси: $\nu = -3\mu.$ Приймемо значення $\mu = 1$ тоді $\nu = -3.$ Підставляючи ці значення в рівняння (1), одержимо:

$$5x - 4y - 2z - 5 - 3x - 6z + 6 = 0 \Rightarrow 2x - 4y - 8z + 1 = 0. \tag{4}$$

Маємо задане рівняння площини (на яку проектується пряма) та рівняння проектуючої площини (4), тому шукане рівняння проекції зручно подати у вигляді перетину цих площин (2.5):

$$\begin{cases} 2x - 4y - 8z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

Досить розповсюдженою є ситуація, коли розв'язок задачі заданого типу вимагає застосування рівняння прямої одного виду, але відомим є рівняння прямої іншого виду. Таким чином, виникає необхідність перетворення одного виду рівняння прямої в інший.

Нехай пряма задана перетином двох площин (2.5). Як же записати цю саму пряму в канонічному виді (2.1)?

Відмітимо, що в канонічному рівнянні прямої використовуються координати $(x_0; y_0; z_0)$ точки, через яку проходить пряма, та координати $(n;\ m;\ \ell)$ напрямного вектора, паралельно якому проходить пряма.

Щоб знайти координати деякої точки прямої, треба зафіксувати (прийняти конкретне значення) однієї з координат, а дві інші – знайти з системи (2.5). Якщо, наприклад, прийнято $z_0 = 0,$ то для знаходження двох інших координат записують:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + D_1 = 0, \\ A_2x_0 + B_2y_0 + D_2 = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

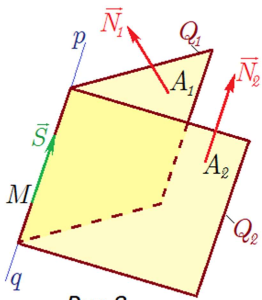


Рис.8

Нагадаємо, що для кожної з площин (2.4), що складають систему (2.5), можна виписати нормальні вектори, які перпендикулярні до лінії pq перетину площин, а значить і до її напрямного вектора $\vec{S}$ (рис.8):

$$\begin{aligned} &\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1); \quad \vec{N}_1 \perp \vec{S}; \\ &\vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2); \quad \vec{N}_2 \perp \vec{S}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Отже, за напрямний вектор можна взяти векторний добуток вказаних нормальних векторів:

$$\vec{S} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}. \tag{2.8}$$

Тоді координати напрямного вектора прямої обчислюються за формулами:

$$n = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \qquad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \qquad \ell = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Тепер, за відомими координатами $(x_0; y_0; z_0)$ точки, через яку проходить пряма, та координатами $(n; m; \ell)$ напрямного вектора можна записати шукане канонічне рівняння (2.1) прямої:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{\ell}.$$

П р и м і т к а. Якщо знайдені числа n, m і ℓ мають спільний множник, то його слід скоротити. Це дає спрощення запису канонічного рівняння прямої. Очевидно, що допустимим є також заміна знайденого вектора $\vec{S}(n; m; \ell)$ на протилежний, тобто – заміна знаків чисел n, m і ℓ.

Нехай, тепер, навпаки – задано канонічні рівняння прямої (2.1) і нашим завданням є перетворення їх до виду прямої, як перетину двох площин (2.5). З рівнянь (2.1) витікають наступні співвідношення:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m}; \qquad \frac{x - x_0}{n} = \frac{z - z_0}{\ell}; \qquad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{\ell}; \tag{2.10}$$

Незалежними є тільки два з них, а третє є наслідком двох інших. Отже, вибравши будь-які два з цих співвідношень, можна скласти з них систему рівнянь. Наприклад:

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{n} = \dfrac{y-y_0}{m}, \\ \dfrac{y-y_0}{m} = \dfrac{z-z_0}{\ell}. \end{cases} \tag{2.11}$$

Це і є рівняння тієї ж прямої, але заданої у вигляді перетину двох площин.

П р и м і т к а. В такому перетворенні використовуються площини лише частинного виду (2.10). Так, в системі (2.11), перша з площин паралельна вісі Oz, а друга – вісі Ox. Відсутність в кожному рівнянні по одній змінній значно спрощує систему.

Приклад 12. Привести задане рівняння прямої до канонічного виду:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0, \\ 2x-y-3z=0. \end{cases}$$

Маємо два нормальних вектори виду (2.4):

$\vec{N}_1 = (1;1;1); \quad \vec{N}_2 = (2;-1;-3).$

Обчислимо їх векторний добуток:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = -2\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}.$$

За напрямний вектор прямої можна взяти знайдений, але, щоб зменшити кількість від'ємних знаків, зручніше взяти вектор, йому протилежний:

$\vec{S} = (2;-5;3).$

Візьмемо далі точку M_0 на заданій прямій, для якої $z=0$. Тоді із заданого рівняння прямої маємо:

$$\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Отже, пряма проходить через точку $M_0(1;2;0)$ паралельно вектору $\vec{S} = (2;-5;\,3)$, а це значить, що вона має рівняння:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z}{3}.$$

2.3. Відстань між точкою і прямою

Візьмемо деяку пряму pq (рис.8), яка проходить через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S} = (n;\,n;\,\ell)$. Нехай поза прямою pq розташована точка $M_1(x_1;y_1;z_1)$ і треба знайти відстань між прямою і точкою M_1. Розглянемо для цього вектори $\vec{S} = (n;\,n;\,\ell)$ і $\overrightarrow{M_0M_1} = (x_1 - x_0,\, y_1 - y_0,\, z_1 - z_0)$ та площу паралелограма (заштрихована), побудованого на цих векторах, як на сторонах.

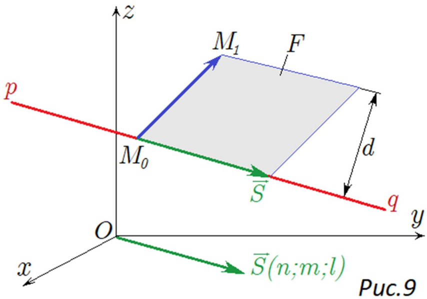


Рис.9

З одного боку, площею паралелограма є добуток основи на висоту. При цьому основою вказаного паралелограма є довжина вектора $\vec{S}$, а висотою паралелограма – відстань d між точкою M_1 і прямою pq. Отже, маємо:

$$F = d\left|\vec{S}\right|, \tag{2.12}$$

де: $\left|\vec{S}\right| = \sqrt{n^2 + m^2 + \ell^2}$. (2.13)

З іншого боку, ця ж площа дорівнює довжині векторного добутку векторів $\vec{S}$ і $\overrightarrow{M_0M_1}$:

$$F = \left|\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1}\right|, \tag{2.14}$$

де: $$\vec{S} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ n & m & \ell \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & \ell \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}\vec{i} +$$

$$+\begin{vmatrix} \ell & n \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} n & m \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}\vec{k}; \tag{2.15}$$

$$\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right| = \sqrt{\begin{vmatrix} m & \ell \\ y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \ell & n \\ z_1-z_0 & x_1-x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & m \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}^2}. \quad (2.16)$$

Прирівнюючи між собою вирази (2.12) і (2.14), одержимо:

$$\boxed{d = \frac{\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_0M_1}\right|}{\left|\vec{S}\right|}.} \quad (2.17)$$

З врахуванням співвідношень (2.13) і (2.16), формулу (2.17) можна записати в розгорнутому вигляді:

$$d = \sqrt{\frac{\begin{vmatrix} m & \ell \\ y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \ell & n \\ z_1-z_0 & x_1-x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n & m \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{vmatrix}^2}{n^2+m^2+\ell^2}}. \quad (2.18)$$

П р и м і т к а. Формула (2.18) є логічно завершеною і крім елементарних обчислень з вихідними даними не передбачає ніяких допоміжних перетворень. Але із-за її громіздкості при знаходженні відстані між точкою і прямою часто замість (2.18) послідовно виконують розрахунки за формулами (2.13), (2.15) і (2.16), а потім уже за формулою (2.17), яка при виконаних розрахунках відрізняється надзвичайною простотою.

Приклад 13. Знайти відстань від точки $P(1;-1;-2)$ до прямої:

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

З канонічного рівняння прямої витікає, що вона проходить через точку $M(-3;-2;\,8)$. Тоді $\overrightarrow{MP} = (1+3;\,-1+2;\,-2-8)$ або $\overrightarrow{MP} = (4;\,1;-10)$.

Очевидно, що напрямний вектор прямої дорівнює: $\vec{S} = (3;\,2;-2)$.

За формулою (2.15) дістанемо:

$$\vec{S}\times\overrightarrow{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -10 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -10 & 4 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}.$$

Після обчислення визначників:

$\vec{S} \times \overrightarrow{MP} = -18\vec{i} + 22\vec{j} - 5\vec{k}$

Обчислимо довжини знайдених векторів:

$$\left|\vec{S} \times \overrightarrow{MP}\right| = \sqrt{18^2 + 22^2 + 5^2} = \sqrt{833};$$

$$\left|\vec{S}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}.$$

Для знаходження шуканої відстані залишилось застосувати формулу (2.17):

$$d = \frac{\left|\vec{S} \times \overrightarrow{MP}\right|}{\left|\vec{S}\right|} = \sqrt{\frac{833}{17}} = \sqrt{49} = 7.$$

III. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

В цьому розділі розглянемо кути між вказаними об'єктами (двома площинами, двома прямими, прямою і площиною), умови їх паралельності та перпендикулярності, а також перетин прямої і площини.

3.1. Кут між двома площинами, умови паралельності та перпендикулярності двох площин

Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, утвореними при перетині цих площин третьою площиною, перпендикулярною до прямої перетину даних площин. Отже, значення цього кута лежить в проміжку $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Нехай задано рівняння двох площин в загальному виді:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{3.1}$$

Тоді відомі і нормальні вектори до цих площин (рис.10):

$$\vec{N}_1 = (A_1; B_1; C_1); \ \vec{N}_1 \perp Q_1; \quad \vec{N}_2 = (A_2; B_2; C_2); \ \vec{N}_2 \perp Q_2. \tag{3.2}$$

Якщо кут α між векторами $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ гострий, то він співпадає з кутом φ між площинами Q_1, Q_2 (рис.10, *а*) і, так як $\cos\alpha > 0$ можна записати:

$$\cos\varphi = \cos\alpha = \left|\cos\alpha\right|. \tag{3.3}$$

Якщо кут α між векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ тупий, то $\cos\alpha < 0$ і він доповнює кут φ між площинами Q_1, Q_2 до 180° (рис.10, *б*). Тоді:

$$\cos\varphi = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha = \left|\cos\alpha\right|. \tag{3.4}$$

Як бачимо, в обох випадках косинус кута між площинами співпадає з абсолютним значенням косинуса кута між векторами $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$, значення якого можна знайти за відомою формулою з векторної алгебри [1, 4]. Отже, для визначення кута φ маємо:

$$\boxed{\varphi = \arccos\frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \tag{3.5}$$

– кут між двома площинами (3.1).

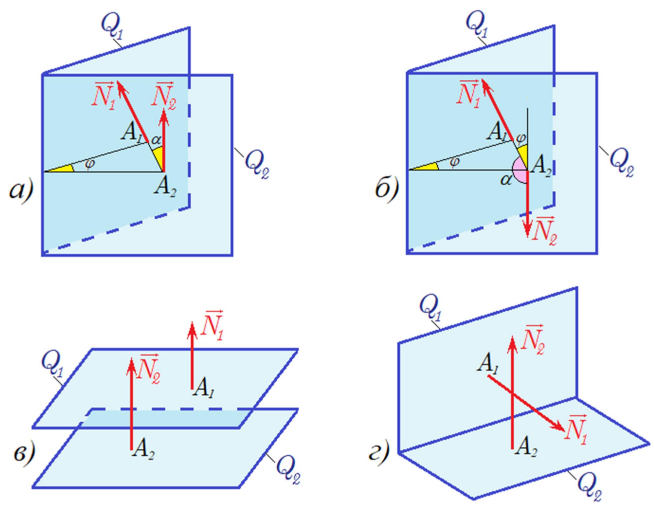


Рис.10

Умова паралельності двох площин збігається з умовою колінеарності векторів $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ (рис.10, *в*), яка полягає в пропорціональності відповідних координат цих векторів:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \tag{3.6}$$

– умова паралельності двох площин.

Умова перпендикулярності двох площин співпадає з умовою перпендикулярності векторів $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ (рис.10, *г*). В цьому випадку скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0} \tag{3.7}$$

– умова перпендикулярності двох площин.

Приклад. 14. Знайти кут між заданими площинами:

$x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0; \quad x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0.$

Знайдемо косинус шуканого кута (3.5):

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + \left(-\sqrt{2}\right)\cdot\sqrt{2} + 1\cdot(-1)}{\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2+1}\cdot\sqrt{1+\left(\sqrt{2}\right)^2+1}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Звідси: $\varphi = \arccos\left|-\dfrac{1}{2}\right| = 60^\circ.$

Приклад. 15. При якому значенні параметрів μ і ν задані рівняння будуть визначати паралельні площини?

$2x + \mu y + 3z - 5 = 0; \quad \nu x - 6y - 6z + 2 = 0.$

Запишемо умову паралельності (3.6) для цих площин:

$$\frac{2}{\nu} = \frac{\mu}{-6} = \frac{3}{-6}.$$

Маємо два рівняння для знаходження параметрів μ і ν.

$$\frac{2}{\nu} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\nu = -4}; \qquad \frac{\mu}{-6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\mu = 3}.$$

Приклад. 16. При якому значенні параметра λ задана пара рівнянь буде визначати перпендикулярні площини?

$3x - 5y + \lambda z - 3 = 0; \quad x + 3y + 2z + 5 = 0.$

Умова перпендикулярності (3.7) для цих площин має вигляд:

$3\cdot 1 + (-5)\cdot 3 + \lambda\cdot 2 = 0.$

З одержаного рівняння знаходимо:

$-12 + 2\lambda = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = 6}.$

3.2. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Нехай задано рівняння двох прямих в канонічному виді:

$$\frac{x-x_1}{n_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{\ell_1}; \qquad \frac{x-x_2}{n_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{\ell_2}. \tag{3.8}$$

Тоді відомі і їх напрямні вектори:

$$\vec{S}_1=(n_1,m_1,\ell_1); \qquad \vec{S}_2=(n_2,m_2,\ell_2). \tag{3.9}$$

Можемо вважати, що ці вектори розміщені безпосередньо на заданих прямих. Тому питання про кут між прямими, паралельність та перпендикулярність прямих відповідає тим же питанням по відношенню до напрямних векторів.

Кут між двома прямими, як і між двома площинами, лежить в діапазоні $0 \le \varphi \le \pi/2$. З тих же міркувань, як і для площин, приходимо до висновку, що косинус кута між двома прямими співпадає з абсолютним значенням косинуса кута між напрямними векторами (3.9) цих прямих. Отже, маємо:

$$\boxed{\varphi=\arccos\frac{\left|n_1n_2+m_1m_2+\ell_1\ell_2\right|}{\sqrt{n_1^2+m_1^2+\ell_1^2}\sqrt{n_2^2+m_2^2+\ell_2^2}}} \tag{3.10}$$

– кут між двома прямими (3.8).

Умова паралельності двох прямих співпадає з умовою колінеарності напрямних векторів (3.9):

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2}=\frac{m_1}{m_2}=\frac{\ell_1}{\ell_2}} \tag{3.11}$$

– умова паралельності двох прямих.

Умова перпендикулярності двох прямих співпадає з умовою перпендикулярності напрямних векторів (3.9):

$$\boxed{n_1n_2+m_1m_2+\ell_1\ell_2=0} \tag{3.12}$$

– умова перпендикулярності двох прямих.

Приклад. 17. Знайти гострий кут між прямими:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z}{4}; \qquad \frac{x}{4}=\frac{y}{7}=\frac{z}{4}.$$

Запишемо напрямні вектори для заданих прямих:

$$\vec{S}_1=(2;-4;\,4); \quad \vec{S}_2=(4;\,7;\,4).$$

Для визначення шуканого кута застосуємо формулу (3.10):

$$\varphi=\arccos\frac{\left|2\cdot 4+(-4)\cdot 7+4\cdot 4\right|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}\sqrt{4^2+7^2+4^2}}=\arccos\left|\frac{-4}{6\cdot 9}\right|=$$

$$=\arccos\frac{2}{27}=\arccos 0,074; \qquad \underline{\varphi\approx 85,75^\circ}.$$

Приклад. 18. Довести паралельність заданих прямих:

$$1)\ \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{1}; \qquad 2)\ \begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$$

Напрямний вектор для першої прямої:

$$\vec{S}_1=(3;-2;\,1).$$

Друга пряма задана перетином двох площин, які мають нормальні вектори:

$$\vec{N}_1=(1;\,1;-1); \quad \vec{N}_2=(1;-1;-5).$$

Знайдемо напрямний вектор для другої прямої, як векторний добуток вказаних нормальних векторів:

$$\vec{S}_2=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -5 \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=-6\vec{i}+4\vec{j}-2\vec{k}.$$

Далі скористаємося умовою паралельності двох прямих (3.11):

$$\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}\Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Отже, задані прямі – паралельні.

Приклад. 19. Довести перпендикулярність заданих прямих:

$$1)\ \begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = 3t - 2, \\ z = -6t + 1; \end{cases} \qquad 2)\ \frac{x+1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}.$$

Перше рівняння прямої задано в параметричному виді (2.2), а друге – в канонічному (2.1). За приведеними рівняннями запишемо напрямні вектори для цих прямих:

$\vec{S}_1 = (2;\, 3;\, -6); \quad \vec{S}_2 = (3;\, 2;\, 2).$

За умовою (3.12) переконуємося в перпендикулярності прямих:

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + (-6) \cdot 2 = 0.$

3.3. Кут між прямою і площиною, умови паралельності та перпендикулярності прямої і площини

Задано рівняння прямої і площини:

$$\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{\ell}; \qquad Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.13}$$

Про взаємне розміщення прямої pq і площини Q (рис.11) будемо судити по напрямному вектору $\vec{S}$ прямої та нормальному вектору $\vec{N}$ площини:

$$\vec{S} = (n;\, m;\, \ell); \qquad \vec{N} = (A;\, B;\, C). \tag{3.14}$$

Нехай кут α між векторами (3.14) гострий (рис.11, *а*). Тоді $\cos\alpha > 0$, що дозволяє записати:

$$\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\alpha = \left|\cos\alpha\right|. \tag{3.15}$$

Тут враховано, що кут $\varphi + \alpha$ прямий, де φ – кут між прямою і площиною.

Якщо кут α між векторами тупий (рис.11, *б*), то $\cos\alpha < 0$, з чого витікає:

$$\sin\varphi = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\cos\alpha = \left|\cos\alpha\right|. \tag{3.16}$$

Отже, в обох випадках маємо $\sin\varphi = \left|\cos\alpha\right|$, звідки:

$$\boxed{\varphi = \arcsin\frac{\left|An + Bm + C\ell\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{n^2 + m^2 + \ell^2}}} \tag{3.17}$$

– кут між прямою та площиною.

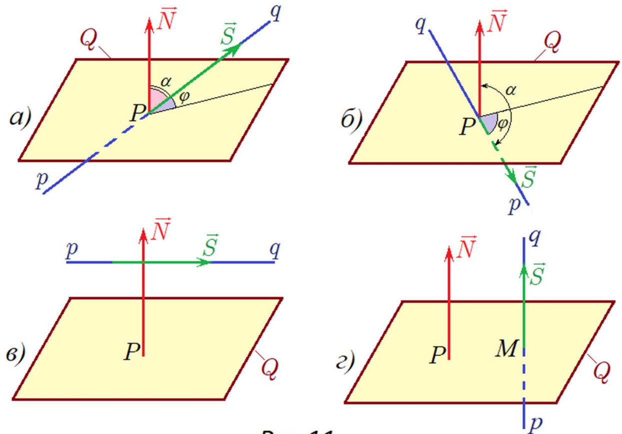


Рис.11

Рисунок (11, *в*) показує, що пряма pq паралельна площині Q, якщо вектори $\vec{S}$ і $\vec{N}$ перпендикулярні. Таким чином, маємо:

$$\boxed{An + Bm + C\ell = 0} \tag{3.18}$$

– умова паралельності прямої та площини.

Умова перпендикулярності прямої pq і площини Q співпадає з умовою колінеарності векторів $\vec{S}$ і $\vec{N}$ (рис.11, *г*), що можна записати так:

$$\boxed{\frac{A}{n} = \frac{B}{m} = \frac{C}{\ell}} \tag{3.19}$$

– умова перпендикулярності прямої та площини.

Приклад. 20. Довести, що пряма $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ паралельна площині $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Напрямний вектор $\vec{S}$ заданої прямої і вектор $\vec{N}$ нормальний до заданої площини мають вид:

$\vec{S} = (3; -4; 4)$; $\vec{N} = (4; -3; -6)$.

Перевіримо умову (3.18) паралельності прямої і площини, яка полягає в рівності нулю скалярного добутку цих векторів.

$\vec{S} \cdot \vec{N} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) = 12 + 12 - 24 = 0$.

Умова (3.18) виконана, тому пряма паралельна площині.

Приклад. 21. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $B(2;-3;-5)$ перпендикулярно площині $6x-3y-5z+2=0$.

З умови (3.19) витікає, що пряма буде перпендикулярною площині, якщо напрямний вектор $\vec{S}$ прямої і нормальний вектор $\vec{N}$ площини будуть колінеарними. Ця умова буде виконана, якщо прийняти:

$\vec{S}=\vec{N}=(6;-3;-5)$.

Маємо достатньо даних для складання шуканого рівняння прямої в канонічній формі:

$$\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{-3}=\frac{z+5}{-5}.$$

Приклад. 22. Скласти рівняння площини, яка проходить через пряму

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{2}$$

перпендикулярно до площини $3x+2y-z-5=0$.

Шукана площина проходить через задану пряму, тому вона включає її напрямний вектор $\vec{S}=(2;-3;2)$ разом з точкою $M_0(1;-2;2)$, через яку проведена пряма. З іншого боку ця площина включає також вектор $\vec{n}=(3;2;-1)$, нормальний до заданої площини, так як площини за умовою задачі є перпендикулярними. Для складання рівняння площини досить знати довільну точку, яка належить площині та нормальний вектор до цієї площини. Очевидно, що такою точкою може бути точка M_0, а нормальним вектором – векторний добуток $\vec{N}=\vec{S}\times\vec{n}$:

$$\vec{N}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -3 & 2\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\vec{k}=-\vec{i}+8\vec{j}+13\vec{k}.$$

Тепер можемо застосувати рівняння площини (1.7), яка проходить через деяку точку перпендикулярно заданому вектору:

$$-1\cdot(x-1)+8\cdot(y+2)+13\cdot(z-2)\Rightarrow -x+1+8y+16+13z-26=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{x-8y-13z+9=0}.$$

3.4. Перетин прямої і площини

Розглянемо випадок, коли пряма представлена перетином двох площин (2.5), а площина – загальним рівнянням (1.9):

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \qquad Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (3.20)$$

На основі співвідношень (3.20) легко складається наступна система:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (3.21)$$

Розв'язком цієї системи є трійка чисел, яка задовольняє відразу всім трьом рівнянням площин, тобто система дає точку перетину цих площин. Але, так як вказана трійка чисел задовольняє останні два рівняння системи, то відповідна точка належить заданій прямій. А, так як ця трійка чисел задовольняє і першому рівнянню системи, то точка належить також і заданій площині. Таким чином, **розв'язок системи (3.21) дає координати точки перетину прямої і площини (3.20)**.

Система (3.21), як відомо, буде мати єдиний розв'язок, якщо її визначник буде відмінним від нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & C \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (3.22)$$

Якщо $\Delta = 0$, то задача втрачає смисл, тому що в цьому випадку пряма буде або належати заданій площині, або розміщуватися паралельно цій площині. Отже, **співвідношення (3.22) це умова існування єдиної точки перетину прямої з площиною.**

Позначимо:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -D & B & C \\ -D_1 & B_1 & C_1 \\ -D_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} A & -D & C \\ A_1 & -D_1 & C_1 \\ A_2 & -D_2 & C_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} A & B & -D \\ A_1 & B_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & -D_2 \end{vmatrix}. \quad (3.23)$$

Тоді координати точки перетину прямої з площиною можна знайти за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{3.24}$$

Нехай тепер пряма задається параметричними рівняннями (2.2), а площина – загальним рівнянням (1.9):

$$\begin{cases} x = x_0 + nt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + \ell t, \end{cases} \qquad Ax + By + Cz + D = 0. \tag{3.25}$$

Перетин прямої з площиною можливий тільки тоді, коли пряма не паралельна площині, тобто, коли вектори $\vec{S} = (n; m; \ell)$ і $\vec{N} = (A; B; C)$ не перпендикулярні (3.18):

$$An + Bm + C\ell \neq 0. \tag{3.26}$$

При деякому значенні $t = t^*$ параметра t координати x, y, z прямої будуть задовольняти рівняння площини (пряма перетне площину). Щоб знайти вказане значення t^* підставимо вирази для x, y, z з параметричних рівнянь в рівняння площини:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + (An + Bm + C\ell)t^* = 0. \tag{3.27}$$

При умові (3.26) записане рівняння має розв'язок:

$$t^* = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{An + Bm + C\ell}. \tag{3.28}$$

При відомому значенні $t = t^*$ координати точки перетину легко знаходяться з параметричних рівнянь прямої:

$$x = x_0 + nt^*; \qquad y = y_0 + mt^*; \qquad z = z_0 + \ell t^*. \tag{3.29}$$

П р и м і т к а. Якщо пряма задана канонічним рівнянням, то точку її перетину з площиною можна знайти з системи, аналогічної (3.21):

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{n} = \dfrac{y - y_0}{m}, \\ \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{\ell}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Можна також перетворити канонічне рівняння прямої до параметричного виду і скористатися наведеною вище методикою.

Приклад. 23. Знайти точку перетину прямої

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6} \text{ з площиною } 2x+3y+z-1=0.$$

1. Перетворимо рівняння прямої до параметричного виду:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t \;\Rightarrow\; \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t. \end{cases}$$

Підставимо знайдені вирази в рівняння площини:

$$2t+2-6t-3+6t-1=0 \;\Rightarrow\; 2t-2=0 \;\Rightarrow\; t=1.$$

При відомому значенні $t=1$ координати точки перетину знаходимо з параметричних рівнянь:

$$x=1+1=2; \quad y=-2-1=-3; \quad z=6.$$

Отже, пряма перетинає задану площину в точці $M_0(2;-3;6)$.

2. Задану пряму легко перетворити до виду перетину двох площин (2.11), після чого скористатися системою (3.30):

$$\begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-2} \\ \dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 2x+y=1 \\ 3y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x=4 \\ y=1-2x \\ z=-3y-3 \end{cases}$$

У виконаних перетвореннях з першого рівняння другої системи виключили зразу два невідомих шляхом віднімання від нього третього рівняння.

З останньої системи маємо:

$$x=2; \quad y=1-2\cdot 2=-3; \quad z=-3\cdot(-3)-3=6,$$

тобто, точкою перетину прямої з площиною є $M_0(2;-3;6)$.

Приклад. 24. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $P(-1;2;-3)$ перпендикулярно вектору $\vec{a}=(6;-2;-3)$ і перетинає пряму:

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}.$$

Шукана пряма лежить у площині, яка проходить через точку P перпендикулярно вектору $\vec{a}$.

Знайдемо рівняння цієї площини (1.7):

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0 \Rightarrow 6x-2y-3z+1=0.$$

Визначимо точку перетину заданої прямої і знайденої площини, для чого використаємо параметричні рівняння прямої:

$$\frac{x-1}{3}=t,\;\; \frac{y+1}{2}=t,\;\; \frac{z-3}{-5}=t \Rightarrow \begin{cases} x=3t+1, \\ y=2t-1, \\ z=-5t+3. \end{cases}$$

$$6(3t+1)-2(2t-1)-3(3-5t)+1=0 \Rightarrow 29t=0 \Rightarrow t=0.$$

Точка перетину: $M(1;-1;\,3)$.

Умовам задачі задовольняє пряма, що включає точки P і M. Отже, слід застосувати рівняння прямої (2.3), що проходить через дві задані точки:

$$\frac{x+1}{1+1}=\frac{y-2}{-1-2}=\frac{z+3}{3+3} \;\Rightarrow\; \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+3}{6}.$$

Для самостійного розв'язку

1. Знайти кут між прямими, заданими параметричними рівняннями:
   1) $x=3t-2,\;\; y=0,\;\; z=-t+3;$ 2) $x=2t-1,\;\; y=0,\;\; z=t-3.$
2. Складати параметричні рівняння заданих прямих:
   1) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{z}{1};$ 2) $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0. \end{cases}$
3. Знайти косинус кута між прямими:
   $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases}$ $\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$
4. При яких значеннях A і D пряма $x=3+4t,\, y=1-4t,\, z=-3+t$ належить площині $Ax+2y-4z+D=0$.
5. Знайти точку P, симетричну точці $M(1;\,3;-4)$ відносно площини $3x+y-2z=0$.
6. На площині $2x+3y-4z-15=0$ знайти таку точку P різниця відстаней від якої до точок $A(5;\,2;-7)$ і $B(7;-25;\,10)$ була б найбільшою.
7. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;-2;\,1)$ і пряму $x=2t+1,\;\; y=-3t+2,\;\; z=2t-3$.
8. Переконатися, що задані прямі паралельні і знайти відстань між ними:
   $\begin{cases} 2x+2y-z-10=0, \\ x-y-z-22=0, \end{cases}$ $\dfrac{x+7}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-9}{4}.$

IV. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

В цьому розділі наведені різні види рівняння прямої на площині. В усіх них досить легко пізнаються зображення тих рівнянь, які пропонувалися у попередніх розділах, хіба що тут вони не включають третьої (просторової) координати – z. Відтак, вказані рівняння прямої на площині доречно давати у форматі довідкової інформації. З огляду на це – залишається осторонь лише "шкільне" рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, про яке до цього зовсім не йшлося. З нього і розпочнем.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом

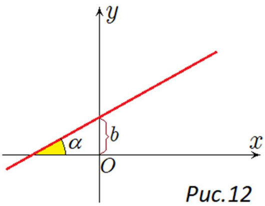


Рис.12

$$\boxed{y = kx + b} \tag{4.1}$$

$k = \operatorname{tg}\alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої;
α – кут нахилу прямої до вісі абсцис;
b – відрізок, що відтинається прямою на вісі ординат.

Цим рівнянням не можна описати вертикальну пряму, паралельну вісі Ox, так як при $\alpha = 90^\circ$ кутовий коефіцієнт k не існує.

Нормальне рівняння прямої

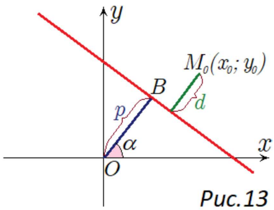


Рис.13

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0} \tag{4.2}$$

p – відстань від прямої до початку координат;
α – кут нахилу відрізка OB до вісі абсцис.

Загальне рівняння прямої

$$\boxed{Ax + By + D = 0} \tag{4.3}$$

$\vec{N} = (A;\, B)$ – вектор, перпендикулярний до прямої.

$\boxed{Ax + By = 0}$ – пряма проходить через початок координат.

$\boxed{Ax + D = 0}$ – пряма перпендикулярна вісі абсцис.

$\boxed{By + D = 0}$ – пряма перпендикулярна вісі ординат

Відстань від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої

$$\boxed{d = \left|x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p\right|} \quad \text{або} \quad \boxed{d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad (4.4)$$

Відхилення точки $M_0(x_0;y_0)$ від прямої

$$\boxed{\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p} \quad \text{або} \quad \boxed{\delta = \frac{Ax_0 + By_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}} \qquad (4.5)$$

Знак в знаменнику слід вибирати протилежним числу D.

Рівняння прямої, що проходить через задану точку $M_0(x_0;y_0)$ в заданому напрямку

$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)} \quad \text{або} \quad \boxed{\frac{x - x_0}{n} = \frac{y - y_0}{m}} \qquad (4.6)$$

$\vec{S} = (n;\, m)$ – напрямний вектор прямої; k – кутовий коефіцієнт.

Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки: $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}} \qquad (4.7)$$

Рівняння прямої у відрізках

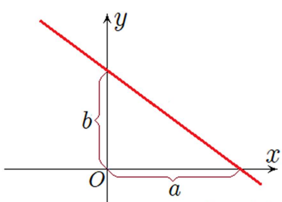


Рис.14

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \qquad (4.8)$$

a, b – відрізки, які відтинаються прямою, відповідно, на осях Ox та Oy.

Цим рівнянням не можна описати прямі, які збігаються з координатними осями, так як в цьому разі одне з чисел a чи b, що стоїть в знаменнику, перетворюється на нуль.

Взаємне розміщення прямих

А. Гострий кут між двома прямими:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}} \quad \text{або} \quad \boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|} \qquad (4.9)$$

$$k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2.$$

За формулою (4.9) , що справа, неможливо знайти кут між перпендикулярними прямими, так як $\operatorname{tg}\varphi$ при $\varphi = 90^\circ$ не існує.

Якщо за цією формулою необхідно визначити один з двох суміжних кутів між прямими, незалежно від того гострий він, чи ні, треба пронумерувати прямі так, щоб $\alpha_2 > \alpha_1$ і використати формулу (4.9) без знаку модуля.

Б. Умова паралельності прямих:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}} \quad \text{або} \quad \boxed{k_1 = k_2} \qquad (4.10)$$

В. Умова перпендикулярності прямих:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad \text{або} \quad \boxed{k_2 = -\frac{1}{k_1}} \qquad (4.11)$$

Г. Точка перетину двох прямих знаходиться з системи:

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}} \quad \text{або} \quad \boxed{\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}} \qquad (4.12)$$

Приклад. 25. Відомо, що пряма проходить через точки $A(6;\,0)$ і $B(0;\,2\sqrt{3})$. Скласти рівняння цієї прямої та знайти відстань від неї до початку координат.

Координати точок вказують на те, що задана пряма відтинає на осях координат Ox та Oy, відповідно, відрізки $a = 6$ і $b = 2\sqrt{3}$. Отже, можемо записати рівняння шуканої прямої у відрізках (4.8):

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{2\sqrt{3}} = 1.$$

Після множення на $6\sqrt{3}$ і належних перетворень одержимо рівняння цієї ж прямої в загальному вигляді:

$\sqrt{3}x + 3y - 6\sqrt{3} = 0.$

Відстань від прямої до початку координат обчислимо за формулою (4.4):

$$d = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 0 + 6\cdot 0 - 6\sqrt{3}\right|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = 3.$$

Приклад. 26. Одна з прямих проходить через дві точки: $D(1;\,0)$ і $C(2;\,1)$. Знайти рівняння другої прямої, яка проходить через точку C і перетинає першу пряму під кутом 60°.

Знайдемо рівняння першої прямої (4.7):

1) $\dfrac{x-1}{2-1} = \dfrac{y}{1} \;\Rightarrow\; y = x - 1,\;\; k_1 = 1.$

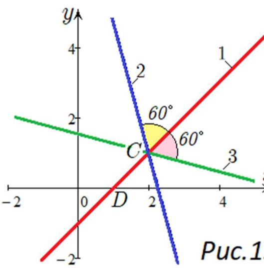


Рис.15

Оскільки вказаний кут (60°) гострий, для знаходження кутового коефіцієнта другої кривої застосуємо формулу (4.9):

$$\operatorname{tg}60^\circ = \left|\frac{k_2 - 1}{1 + k_2}\right| \;\Rightarrow\; \sqrt{3} = \left|\frac{k_2 - 1}{1 + k_2}\right|.$$

Нехай вираз під знаком модуля – додатне число. Тоді:

$$\sqrt{3} = \frac{k_2 - 1}{1 + k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = -\sqrt{3} - 2.$$

Якщо зазначений вираз від'ємний, то з попереднього співвідношення заміною "$\sqrt{3}$" на "$-\sqrt{3}$" одержимо: $k_2 = \sqrt{3} - 2.$

Отже, умові задачі відповідає пара прямих (4.6):

2) $y - 1 = (-\sqrt{3} - 2)(x - 2) \;\Rightarrow\; y = -(\sqrt{3} + 2)x + 2\sqrt{3} + 5;$

3) $y - 1 = (\sqrt{3} - 2)(x - 2) \;\Rightarrow\; y = (\sqrt{3} - 2)x - 2\sqrt{3} + 5.$

Знайдені прямі зображені на рис.15.

ДОДАТОК 1

Індивідуальні завдання.

Пряма на площині

I. Задані координати вершин трикутника ABC. Знайти:

1) довжини сторін AB і BC.
2) рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти;
3) внутрішній кут $\angle B$;
4) рівняння медіани AM;
5) рівняння висоти CH і її довжину;
6) рівняння бісектриси BK;
7) рівняння прямої AD, яка проходить через точку A паралельно стороні BC.

Варіанти даних взяти з таблиці 1.

Пряма у просторі і площина

II. Задані три точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ і вектор $\vec{N}=(A;B;C)$. Знайти:
1) рівняння прямої l_1, що проходить через точки M_1 і M_2;
2) рівняння прямої l_2, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{N}$;
3) кут між прямими l_1 і l_2;
4) рівняння площини Q_1, що проходить через точки M_1, M_2, M_3.
5) рівняння площини Q_2, яка проходить через точку M_2 перпендикулярно вектору $\vec{N}$, та привести його до виду рівняння площини у відрізках;
6) рівняння прямої, яка є перетином площин Q_1 і Q_2, в канонічному виді;
7) відстань від точки M_3 до прямої l_1;
8) відстань від точки M_1 до площини Q_2.

Варіанти даних взяти з таблиці 2.

Таблиця 1

№ вар.	A		B		C		№ вар.	A		B		C	
	x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3		x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3
1	–7	–1	5	–10	7	9	31	–6	0	6	–9	8	10
2	–6	–12	6	–3	8	4	32	–5	–11	7	–2	9	5
3	–10	1	2	–8	4	6	33	–9	2	3	–7	5	7
4	3	1	6	–3	8	4	34	4	2	7	–2	9	5
5	–8	–7	4	1	–4	4	35	–6	–5	6	3	–2	6
6	4	–4	7	0	2	5	36	5	–3	8	1	3	6
7	–3	4	9	–5	–5	–6	37	–1	6	11	–3	–3	–4
8	5	0	8	4	–1	2	38	4	–1	7	3	–2	1
9	–9	5	3	–4	5	7	39	–8	6	4	–3	6	8
10	5	3	9	6	7	–2	40	3	1	7	4	5	–4
11	–2	2	10	–7	5	4	41	–3	1	9	–8	4	3
12	7	–6	10	–2	2	4	42	8	–5	11	–1	3	5
13	–5	7	7	2	5	9	43	–3	5	5	0	3	7
14	3	–2	0	2	–3	3	44	4	–1	1	3	–2	4
15	–2	–4	10	5	7	2	45	–1	–3	11	6	8	3
16	0	–1	–4	2	2	4	46	1	0	–3	3	3	5
17	3	5	–9	–4	–6	6	47	5	7	–7	–2	–4	8
18	–3	0	0	4	–5	8	48	–2	1	1	5	–4	9
19	–4	6	8	–3	1	1	49	–3	5	7	–4	0	0
20	–3	3	1	0	3	4	50	–4	2	0	–1	2	3
21	–5	–3	7	6	4	–6	51	–4	–2	8	7	5	–5
22	–2	1	2	4	1	–3	52	–3	0	1	3	0	–4
23	–1	1	11	10	3	–2	53	–2	0	10	9	2	–3
24	3	2	6	–2	–1	–3	54	4	3	7	–1	0	–2
25	–9	6	3	–3	6	8	55	–10	5	2	–4	5	7
26	–1	4	2	8	1	–2	56	0	5	3	9	2	–1
27	–2	10	–14	1	3	2	57	1	13	–11	4	6	5
28	–1	2	3	5	–2	–4	58	0	3	4	6	–1	–3
29	2	11	–10	2	4	–1	59	3	12	–9	3	5	0
30	–2	2	1	–2	4	6	60	0	4	3	0	6	8

Таблиця 2

№ вар.	M_1			M_2			M_3			$\vec{N}$		
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	A	B	C
1	1	–3	2	5	1	–1	4	6	–6	2	3	–2
2	4	–2	–5	8	3	–7	5	6	–10	1	4	–3
3	5	–4	1	7	2	4	–2	4	3	3	1	2
4	4	–5	0	6	1	3	–3	3	2	2	–2	4
5	–2	3	2	–4	4	–6	2	–6	5	–4	1	3
6	2	–2	0	–3	1	–4	0	–3	–1	6	2	–1
7	–1	–5	3	–2	2	4	4	2	–6	–1	2	1
8	–3	1	2	1	–3	2	2	–3	6	3	0	4
9	4	3	1	–1	–2	–3	5	–2	–2	–2	–1	1
10	3	6	–1	1	3	–2	1	2	0	–3	3	2
11	1	–5	2	3	3	0	–1	2	–3	4	1	–2
12	5	5	–2	8	2	3	–3	0	–4	1	5	–1
13	2	3	–1	4	–4	1	7	3	2	4	1	3
14	7	–2	–5	4	–1	2	0	–5	2	3	4	2
15	–4	2	–5	1	–4	5	4	0	3	–2	1	4
16	3	5	1	2	–5	2	5	7	0	–3	–2	1
17	2	–2	3	6	2	0	5	7	–5	1	2	–1
18	5	–1	–4	9	4	–6	6	7	–9	2	5	–2
19	6	–3	2	8	3	5	–1	5	4	4	2	3
20	5	–4	–1	7	2	4	–2	4	3	3	–1	5
21	–1	4	3	–3	5	–5	3	–5	6	–3	2	4
22	3	–1	1	–2	2	–3	1	–2	0	5	1	–2
23	0	–4	4	–1	3	5	5	3	–5	–2	1	0
24	–2	2	3	2	-2	3	3	–2	7	4	1	5
25	5	4	2	0	–1	–2	6	–1	–1	–3	–2	1
26	4	7	0	2	4	–1	2	3	1	–2	4	3
27	2	-4	3	4	4	1	0	3	–2	5	2	–1
28	6	6	–1	9	3	4	–2	1	–3	2	6	0
29	3	4	0	5	–3	2	8	4	3	5	2	4
30	8	–1	–4	5	–1	2	1	–4	3	4	5	3

Продовження таблиці 2

№ вар.	M_1			M_2			M_3			$\vec{N}$		
	x_1	y_1	z_1	x_2	y_2	z_2	x_3	y_3	z_3	A	B	C
31	–5	2	6	1	–3	2	2	–3	6	3	0	4
32	–2	1	2	6	2	0	5	7	–5	1	2	–1
33	–1	6	10	1	3	–2	1	2	0	–3	3	2
34	–3	4	8	7	2	4	–2	4	3	3	1	2
35	1	–2	6	–4	4	–6	2	–6	5	–4	1	3
36	3	–5	4	8	3	5	–1	5	4	4	2	3
37	2	–6	5	6	1	3	–3	3	2	2	–2	4
38	4	–1	–5	4	–4	1	7	3	2	4	1	3
39	–5	5	4	–2	2	4	4	2	–6	–1	2	1
40	–7	4	3	1	–4	5	4	0	3	–2	1	4
41	–8	6	7	–1	–2	–3	5	–2	–2	–2	–1	1
42	4	1	–3	8	2	3	–3	0	–4	1	5	–1
43	6	–2	1	2	-2	3	3	–2	7	4	1	5
44	–3	5	–7	8	3	–7	5	6	–10	1	4	–3
45	–8	–2	–9	–3	1	–4	0	–3	–1	6	2	–1
46	10	–3	–1	4	–1	2	0	–5	2	3	4	2
47	–4	3	7	–3	5	–5	3	–5	6	–3	2	4
48	–1	2	–3	9	4	–6	6	7	–9	2	5	–2
49	0	7	11	5	1	–1	4	6	–6	2	3	–2
50	–2	5	9	0	–1	–2	6	–1	–1	–3	–2	1
51	2	–1	7	3	3	0	–1	2	–3	4	1	–2
52	4	–4	5	–2	2	–3	1	–2	0	5	1	–2
53	3	–5	6	–1	3	5	5	3	–5	–2	1	0
54	5	0	–4	9	3	4	–2	1	–3	2	6	0
55	–4	6	5	4	4	1	0	3	–2	5	2	–1
56	–6	5	4	2	4	–1	2	3	1	–2	4	3
57	–7	7	8	5	–1	2	1	–4	3	4	5	3
58	5	2	–2	9	3	4	–2	1	–3	2	6	0
59	7	–1	2	5	–3	2	8	4	3	5	2	4
60	–2	6	–6	7	2	4	–2	4	3	3	–1	5

ДОДАТОК 2

Зразок виконання індивідуальних завдань.

I. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ.

Задані координати вершин трикутника:

$A(-4;-1)$, $B(8;-10)$, $C(12;12)$.

1. Довжини сторін AB і BC.

$$AB=\sqrt{\left(8-(-4)\right)^2+\left(-10-(-1)\right)^2}=\sqrt{12^2+(-9)^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$$

$$BC=\sqrt{\left(12-8\right)^2+\left(12-(-10)\right)^2}=\sqrt{4^2+22^2}=\sqrt{16+484}=\sqrt{500}=10\sqrt{5}$$

2. Рівняння сторін AB і BC та їх кутові коефіцієнти.

Рівняння сторін AB і BC знаходимо, як рівняння прямих що проходять через дві задані точки:

Сторона AB:

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}\ \Rightarrow\ \frac{x+4}{8+4}=\frac{y+1}{-10+1}\ \Rightarrow\ \frac{x+4}{12}=\frac{y+1}{-9}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 3x+12=-4y-4\ \Rightarrow\ \boxed{3x+4y+16=0}$$

Сторона BC:

$$\frac{x-x_B}{x_C-x_B}=\frac{y-y_B}{y_C-y_B}\ \Rightarrow\ \frac{x-8}{12-8}=\frac{y+10}{12+10}\ \Rightarrow\ \frac{x-8}{4}=\frac{y+10}{22}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 11x-88=2y+20\ \Rightarrow\ \boxed{11x-2y-108=0}$$

Запишемо знайдені загальні рівняння сторін у виді прямих з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$, після чого знайдемо кутові коефіцієнти кожної прямої.

$$AB\colon y=-\frac{3}{4}x-4\ \Rightarrow\ \boxed{k_{AB}=-\frac{3}{4}};\quad BC\colon y=\frac{11}{2}x-54\ \Rightarrow\ \boxed{k_{BC}=\frac{11}{2}}$$

3. Внутрішній кут $\angle B$:

$$\mathrm{tg}\left(\angle\mathrm{B}\right)=\frac{k_{AB}-k_{BC}}{1+k_{AB}k_{BC}}=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)\frac{11}{2}}=\frac{-6-44}{8-33}=\frac{-50}{-25}=2$$

$$\boxed{\angle\mathrm{B}=\mathrm{arctg}\,2=1{,}1=63{,}4^\circ}$$

4. Рівняння медіани AM.

Щоб знайти рівняння медіани AM – знайдемо спочатку координати точки M, яка ділить сторону BC пополам.

$$x_M = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{12+8}{2} = 10, \qquad y_M = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{12-10}{2} = 1$$

Далі застосовуємо рівняння прямої що проходить через дві задані точки.

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A} \Rightarrow \frac{x+4}{10+4} = \frac{y+1}{1+1} \Rightarrow x + 4 = 7y + 7$$

AM: $\boxed{x - 7y - 3 = 0}$

5. Рівняння висоти CH і її довжина.

Для знаходження рівняння висоти CH використаємо рівняння прямої (4.6) і умову перпендикулярності двох прямих (4.11).

Знаходимо кутовий коефіцієнт висоти CH з умови її перпендикулярності до прямої AB:

$$k_{CH} = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Використаємо ще координати точки $C(12;\,12)$, через яку проведена висота:

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C) \Rightarrow y - 12 = \tfrac{4}{3}(x - 12) \Rightarrow 3y - 36 = 4x - 48$$

CH : $\boxed{4x - 3y - 12 = 0}$

Довжину висоти CH знайдемо як відстань від вершини C до прямої AB:

$$CH = \frac{|3\cdot 12 + 4\cdot 12 + 16|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{100}{5} \Rightarrow \boxed{CH = 20}$$

6. Рівняння бісектриси BK.

Знаходимо вектори $\overrightarrow{BA}$ і $\overrightarrow{BC}$ та їх орти:

$$\overrightarrow{BA} = (x_A - x_B)\vec{i} + (y_A - y_B)\vec{j} = (-4-8)\vec{i} + (-1+10)\vec{j} = -12\vec{i} + 9\vec{j};$$

$$\overrightarrow{BC} = (x_C - x_B)\vec{i} + (y_C - y_B)\vec{j} = (12-8)\vec{i} + (12+10)\vec{j} = 4\vec{i} + 22\vec{j};$$

$$\overrightarrow{BA_o} = \frac{\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BA}|} = -\frac{12}{15}\vec{i} + \frac{9}{15}\vec{j} = -0,8\vec{i} + 0,6\vec{j};$$

$$\overrightarrow{BC_o} = \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{4}{10\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{22}{10\sqrt{5}}\vec{j} = 0,18\vec{i} + 0,98\vec{j}.$$

Напрямний вектор для бісектриси:

$$\vec{S} = \overrightarrow{BA_o} + \overrightarrow{BC_o} = (-0,8 + 0,18)\vec{i} + (0,6 + 0,98)\vec{j} = -0,62\vec{i} + 1,58\vec{j}.$$

Для зручності запису в якості напрямного вектора для бісектриси приймемо колінеарний знайденому: $\vec{S}_{BK} = (-62; 158)$.

Відома точка $B(8; -10)$, через яку проходить бісектриса і її напрямний вектор $\vec{S}_{BK}$, отже рівняння бісектриси можна записати у вигляді (4.6):

$$\boxed{\frac{x-8}{-62} = \frac{y+10}{158}}$$

7. Рівняння прямої AD, яка проходить через точку A паралельно стороні BC.

З умови паралельності (4.10) витікає, що кутовий коефіцієнт прямої AD, такий же, як і сторони BC: $k_{AD} = k_{BC}$. З врахуванням цього запишемо (4.6):

$$(y - y_A) = k_{AD}(x - x_A) \;\Rightarrow\; (y+1) = \tfrac{11}{2}(x+4)$$

$$AD: \boxed{11x - 2y + 42 = 0}$$

Розв'язок задач проілюстровано графіками на рис.16.

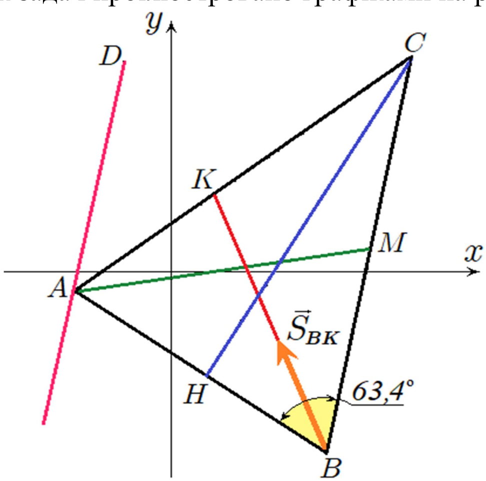


Рис.16.

ІІ. ПРЯМА У ПРОСТОРІ І ПЛОЩИНА

Задані три точки $M_1(-2;6;-6)$, $M_2(5;-1;2)$, $M_3(-2;4;3)$ і вектор $\vec{N}=(5;2;4)$.

1. Рівняння прямої l_1, що проходить через точки M_1 і M_2 (2.3):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}\ \Rightarrow\ \frac{x+2}{5+2}=\frac{y-6}{-1-6}=\frac{z+6}{2+6}.$$

$$l_1:\ \boxed{\frac{x+2}{7}=\frac{y-6}{-7}=\frac{z+6}{8}}$$

2. Рівняння прямої l_2, що проходить через точку $M_1(-2;6;-6)$, і має напрямний вектор $\vec{N}=(5;2;4)$ (2.1):

$$l_2:\ \boxed{\frac{x+2}{5}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+6}{4}}$$

3. Кут φ між прямими l_1 і l_2.

Напрямний вектор прямої l_1 : $\vec{S}_1=(7;-7;8)$. Для прямої l_2 напрямний вектор задано: $\vec{S}_2=\vec{N}=(5;2;4)$. За співвідношенням (3.10) маємо:

$$\boxed{\varphi=\arccos\frac{\left|7\cdot 5+-7\cdot 2+8\cdot 4\right|}{\sqrt{7^2+7^2+8^2}\sqrt{5^2+2^2+4^2}}=\arccos 0,621=51,6^\circ}$$

4. Рівняння площини Q_1, що проходить через точки $M_1(-2;6;-6)$, $M_2(5;-1;2)$, $M_3(-2;4;3)$.

Для знаходження цього рівняння виберемо співвідношення (1.19).

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-6 & z+6 \\ 5+2 & -1-6 & 2+6 \\ -2+2 & 4-6 & 3+6 \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix} x+2 & y-6 & z+6 \\ 7 & -7 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)\begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -2 & 9 \end{vmatrix}-(y-6)\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}+(z+6)\begin{vmatrix} 7 & -7 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -47(x+2)-63(y-6)-14(z+6)=0$$

$$Q_1:\ \boxed{47x+63y+14z-200=0}$$

5. Рівняння площини Q_2, яка проходить через точку $M_2(5;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\vec{N}=(5;2;4)$, у відрізках.

Знайдемо спочатку загальне рівняння площини Q_2 (1.7), (1.9):

$$Q_2:\ 5(x-5)+2(y+1)+4(z-2)=0\ \Rightarrow\ 5x+2y+4z-31=0.$$

Після належних перетворень цього виразу дістанемо рівняння площини у відрізках (1.16):

$$Q_2:\ \boxed{\frac{x}{\frac{31}{5}}+\frac{y}{\frac{31}{2}}+\frac{z}{\frac{31}{4}}=1}$$

6. Рівняння прямої l_3, яка є перетином площин Q_1 і Q_2:

$$l_3:\ \begin{cases}47x+63y+14z-200=0,\\ \quad 5x+2y+4z-31=0.\end{cases}$$

Для приведення рівняння до канонічного виду (2.1) знайдемо координати однієї з точок, через яку проходить пряма та напрямний вектор цієї прямої.

Щоб зафіксувати точку на прямій приймемо, наприклад, $y=3$. Тоді:

$$\begin{cases}47x+14z=11,\\ \quad 5x+4z=25.\end{cases}$$

Обчислимо корені системи за формулами Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix}47 & 14\\ 5 & 4\end{vmatrix}=118;\ \ \Delta_x=\begin{vmatrix}11 & 14\\ 25 & 4\end{vmatrix}=-306;\ \ \Delta_z=\begin{vmatrix}47 & 11\\ 5 & 25\end{vmatrix}=1120;$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-306}{118}=-2,59;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{1120}{118}=9,49.$$

Отже, пряма проходить через точку $A(-2,59;\,3;\,9,49)$.

Напрямний вектор прямої знаходимо за нормальними векторами до площин Q_1 і Q_2: $\vec{N}_1=(-47;-63;14)$; $\vec{N}_2=(5;2;4)$.

$$\vec{S}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -47 & -63 & 14\\ 5 & 2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-63 & 14\\ 2 & 4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-47 & 14\\ 5 & 4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-47 & -63\\ 5 & 2\end{vmatrix}\vec{k}.$$

$$\vec{S}=-280\vec{i}+258\vec{j}+221\vec{k}.$$

Тепер можемо записати рівняння прямої в канонічному виді:

$$l_3:\ \boxed{\frac{x+2,59}{-280}=\frac{y-3}{258}=\frac{z-9,49}{221}}$$

7. Відстань від точки $M_3(-2;\,4;\,3)$ до прямої

$l_1:\ \dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-6}{-7}=\dfrac{z+6}{8}$.

Пряма проходить через точку $M_1(-2;\,6;-6)$. Знайдемо вектор:

$\overrightarrow{M_1M_3}=(-2+2)\vec{i}+(4-6)\vec{j}+(3+6)\vec{k}=-2\vec{j}+9\vec{k}$.

Напрямний вектор прямої: $\vec{S}_1=(7;-7;\,8)$.

Векторний добуток цих векторів:

$$\overrightarrow{M_1M_3}\times\vec{S}_1=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -2 & 9\\ 7 & -7 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 9\\ -7 & 8\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 9\\ 7 & 8\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 7 & -7\end{vmatrix}\vec{k}=$$

$$=47\vec{i}+63\vec{j}+14\vec{k}.$$

Модулі останніх двох векторів:

$\left|\vec{S}_1\right|=\sqrt{7^2+7^2+8^2}=9\sqrt{2};$

$\left|\overrightarrow{M_1M_3}\times\vec{S}_1\right|=\sqrt{47^2+63^2+14^2}=\sqrt{6374}$.

Шукана відстань дорівнює (2.17):

$$\boxed{d_1=\frac{\left|\vec{S}\times\overrightarrow{M_1M_3}\right|}{\left|\vec{S}_1\right|}=\frac{\sqrt{6374}}{9\sqrt{2}}=6,27}$$

8. Відстань від точки $M_1(-2;\,6;-6)$, до площини

$Q_2:\ 5x+2y+4z-31=0.$

Застосовуємо формулу (1.13):

$$\boxed{d_2=\frac{\left|5\cdot(-2)+2\cdot 6+4\cdot(-6)-31\right|}{\sqrt{5^2+2^2+4^2}}=\frac{53}{3\sqrt{5}}=7,9}$$

ДОДАТОК 3

Зразок виконання індивідуальних завдань у середовищі Mathcad

I. Пряма на площині A(0; 7), B(12;-2), C(10; 12)

1) $L_{AB} := \sqrt{12^2 + (-2-7)^2}$ $L_{AB} \rightarrow 15$ $L_{BC} := \sqrt{(10-12)^2 + (12+2)^2}$ $L_{BC} \rightarrow 10\cdot\sqrt{2}$

2) $\frac{x}{12} = \frac{y-7}{-2-7}$ solve, y $\rightarrow 7 - \frac{3\cdot x}{4}$ $yAB(x) := 7 - \frac{3\cdot x}{4}$ $k_{AB} := -\frac{3}{4}$

$\frac{x}{10} = \frac{y-7}{12-7}$ solve, y $\rightarrow \frac{x}{2} + 7$ $yAC(x) := \frac{x}{2} + 7$ $k_{AC} := \frac{1}{2}$

$\frac{x-12}{10-12} = \frac{y+2}{12+2}$ solve, y $\rightarrow 82 - 7\cdot x$ $yBC(x) := 82 - 7\cdot x$ $k_{BC} := -7$

3) $\varphi := \operatorname{atan}\left(\frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB}\cdot k_{BC}}\right) = 45\cdot°$

4) $x_m := \frac{10+12}{2} \rightarrow 11$ $y_m := \frac{12-2}{2} \rightarrow 5$ $\frac{x}{11} = \frac{y-7}{5-7}$ solve, y $\rightarrow 7 - \frac{2\cdot x}{11}$ $yAM(x) := 7 - \frac{2\cdot x}{11}$

5) $y - 12 = -\frac{1}{k_{AB}}\cdot(x-10)$ solve, y $\rightarrow \frac{4\cdot x}{3} - \frac{4}{3}$ $yCH(x) := \frac{4\cdot x}{3} - \frac{4}{3}$

$x_H := yCH(x) = yAB(x)$ $\left|\begin{matrix}\text{solve}, x\\ \text{float}, 3\end{matrix}\right. \rightarrow 4.0$ AB: $3x + 4y - 28 = 0$ $L_{CH} := \frac{|3\cdot 10 + 4\cdot 12 - 28|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow 10$

6) $BC := (10-12 \quad 12+2)^T$ $BA := (0-12 \quad 7+2)^T$ $S_{BK} := \frac{BC}{|BC|} + \frac{BA}{|BA|} = \begin{pmatrix} -0.941 \\ 1.59 \end{pmatrix}$

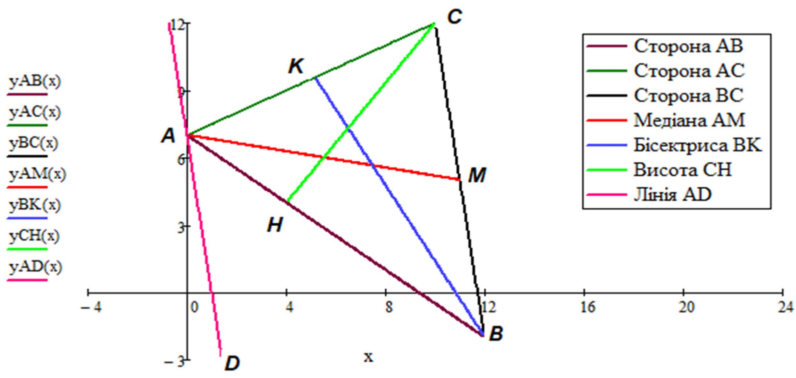
$yBK(x) := \frac{x-12}{-0.941} = \frac{y+2}{1.59}$ $\left|\begin{matrix}\text{solve}, y\\ \text{float}, 3\end{matrix}\right. \rightarrow -1.69\cdot x + 18.3$ $x_K := yAC(x) = yBK(x)$ $\left|\begin{matrix}\text{solve}, x\\ \text{float}, 3\end{matrix}\right. \rightarrow 5.16$

7) $y - 7 = -7\cdot(x-0)$ solve, y $\rightarrow 7 - 7\cdot x$ $yAD(x) := 7 - 7\cdot x$

$yAB(x) := \text{if}(0 < x < 12, yAB(x), \text{undefined})$ $yAC(x) := \text{if}(0 < x < 10, yAC(x), \text{undefined})$

$yBC(x) := \text{if}(10 < x < 12, yBC(x), \text{undefined})$ $yAM(x) := \text{if}(0 < x < 11, yAM(x), \text{undefined})$

$yBK(x) := \text{if}(5.16 < x < 12, yBK(x), \text{undefined})$ $yCH(x) := \text{if}(4 < x < 10, yCH(x), \text{undefined})$



Лист.1

II. Пряма у просторі та площина

M1(-1; 2; 3), M2(5; 1;-1), M3(0; 3;-2), $N := (2 \ \ 6 \ \ 0)^T$

1) $\frac{x+1}{5+1} = \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-3}{-1-3}$ L1: $\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-4}$

2) L2: $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-3}{0}$

3) $\varphi := \operatorname{acos}\left(\frac{6\cdot 2 - 1\cdot 6 - 4\cdot 0}{\sqrt{6^2+1^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+6^2}}\right) = 82.5\cdot°$

4) Q1: $\left|\begin{pmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 6 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}\right| = 0 \rightarrow 9\cdot x + 26\cdot y + 7\cdot z - 64 = 0$

5) $2\cdot(x-5) + 6\cdot(y-1) + 0\cdot(z+1) = 0 \rightarrow 2\cdot x + 6\cdot y - 16 = 0$

$(2\cdot x + 6\cdot y = 16)\cdot\frac{1}{16}$ $\frac{x}{8} + \frac{3y}{8} = 1$ Q2: $\frac{x}{8} + \frac{y}{\frac{8}{3}} = 1$ ***- паралельна вісі Oz***

6) Q1: $9\cdot x + 26\cdot y + 7\cdot z - 64 = 0$ $N1 := (9 \ \ 26 \ \ 7)^T$

Q2: $2\cdot x + 6\cdot y - 16 = 0$ $N2 := (2 \ \ 6 \ \ 0)^T$

$z := -1$ $\begin{pmatrix} 9\cdot x + 26\cdot y + 7\cdot z - 64 = 0 \\ 2\cdot x + 6\cdot y - 16 = 0 \end{pmatrix}$ solve, x, y $\rightarrow (5 \ \ 1)$

$S := N1 \times N2$ $S^T \rightarrow (-42 \ \ 14 \ \ 2)$ L3: $\frac{x-5}{-21} = \frac{y-1}{7} = \frac{z+1}{1}$

7) $M1M3 := (0+1 \ \ 3-2 \ \ -2-3)^T$ $M1M3^T \rightarrow (1 \ \ 1 \ \ -5)$

$S1 := (6 \ \ -1 \ \ -4)^T$

$d_1 := \frac{|M1M3 \times S1|}{|S1|} \rightarrow \frac{\sqrt{53}\cdot\sqrt{806}}{53} = 3.9$

8) $d_2 := \frac{|2\cdot(-1) + 6\cdot 2 - 16|}{\sqrt{2^2+6^2}} \rightarrow \frac{3\cdot\sqrt{10}}{10} = 0.949$

Лист.2

ДОДАТОК 4

Коротка довідка про використання влаштованих функцій «Mathcad»

Влаштовані функції в програмі «Mathcad» розподілені за категоріями і розміщені в списку функцій $f(x)$ стандартної панелі. При активації піктограми $f(x)$ відкривається дворівневий список, в першій частині якого за допомогою курсора вказують категорію, а в другій – необхідну функцію.

В завданні використано функції "$\mathrm{acos}(\blacksquare)$", "$\mathrm{atan}(\blacksquare)$" (арккосинус і арктангенс) категорії "***тригонометричні***". Зрозуміло, що аргумент арккосинуса не повинен за абсолютним значенням перевищувати одиницю інакше результатом обчислення буде комплексне число.

Крім того в п.7 на першому листі задіяна функція "$\mathrm{if}(\blacksquare,\blacksquare,\blacksquare)$" категорії "***кусочно-неперервні***". Як бачимо, функція має три аргументи: перший це деяка умова, а два інших – деякі аналітичні вирази. Функція обчислює перший з них, якщо умова вірна і другий, якщо невірна. В нашому випадку першим аргументом була умова типу $x_1 < x < x_2$, яка вказувала інтервал, на якому слід будувати певну пряму. Другим аргументом було ім'я функції користувача $yPM(x)$, яка по значенню "x" обчислює значення ординати прямої PM. Третім аргументом було слово "undefined", яке набирається з клавіатури і означає – "не визначено". Таким чином, графік прямої (сторони трикутника, висоти, медіани…) будувався лише в заданих межах.

Досить зручним в системі "Mathcad" є використання панелей інструментів. Вони дозволяють ввести в розрахунковий лист – знаки операцій, найбільш розповсюджені функції, оператори, шаблони графіків тощо…– одним натиском на клавішу "мишки". Кожна панель об'єднує тематично спільні інструменти (матриць, математичного аналізу, булевої алгебри, програмування і т. д.) і розміщується на робочому листі.

В першій частині індивідуального завдання використані оператори "$\blacksquare\ \mathrm{solve},\blacksquare,\blacksquare\ \rightarrow$" та "$\blacksquare\ \mathrm{float},\blacksquare\ \rightarrow$" з панелі "Символьні". Перший оператор назначений для розв'язку рівнянь і систем рівнянь, які розміщують зліва від слова solve, а справа через кому перелічують невідомі, які треба знайти. Систему рівнянь представляють у вигляді вектора-стовпця, тоді її розв'язок буде виведений у вигляді вектора-рядка. Місце зліва від слова float займає деякий розрахунок, а справа вказують кількість значущих цифр, які треба вивести, як результат цього розрахунку. Якщо це не вказується спеціально в розрахунковому блоці, то «Mathcad» за стандартними налаштуваннями розраховує результат до 20 значущих цифр, що практично завжди в інженерних задачах не є раціональним. Доречно показати це на прикладі:

$$x - 2.5\sqrt{\pi}\ \text{solve}, x\ \rightarrow 4.4311346272637900682$$

$$x - 2.5\sqrt{\pi}\ \left|\begin{array}{l}\text{solve}, x\\ \text{float}, 3\end{array}\right. \rightarrow 4.43$$

З панелі "Матриці" використовувались такі інструменти, як: матриця або вектор; визначник квадратної матриці; транспонування матриці; векторний добуток двох матриць, які застосовувалися стандартно. Але до цього добавимо, що «Mathcad» сприймає вектор лише тоді, коли він заданий у формі стовпця. Для звичного сприймання і раціонального компонування в "зразку" вектори записувались у вигляді рядка зі знаком транспонування:

$$N := (2\ \ 6\ \ 0)^T \quad \text{тоді} \quad N = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Набір індексів $i = 1, 2, \ldots$ масиву даних x_i виконують за допомогою клавіші $\langle [\rangle$. Клавіша $\langle . \rangle$ (крапка) зміщує, записані після неї літери або цифри в нижній регістр, але це не перетворює запис в елемент масиву. Наприклад, $x_{\text{ср}}$ не є елементом масиву (проставлена точка після x не спостерігається і спливає лише після наведення на них курсору). В "зразку" так (через крапку) записані позначення $\mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2$ для відстаней від точки до прямої і площини.

Інколи виникає потреба записати на робочому листі вираз (ім'я змінної, точки з її координатами тощо), окремі елементи якого в «Mathcad» мають функціональне призначення або зарезервовані для введення деяких операторів. Такими є, наприклад, круглі, квадратні чи фігурні дужки. Стандартним способом ввести їх не вдається. Тоді треба записати їх окремо в текстовому регіоні і вставити в необхідне місце через буфер обміну. В останніх версіях «Mathcad» з'явилася можливість спростити цю послідовність. Після клавіш $\langle \text{ctrl} \rangle + \langle \text{chift} \rangle + \langle \text{K} \rangle$ з'являється текстовий (червоний) курсор і можливість вводити символи в текстовому режимі. Повторна комбінація тих же клавіш переводить набір знову до регіону формул. В "зразку" цим способом вводились умови задач, які відмічені бузковим кольором.

Іншими можливостями сучасних версій «Mathcad» є присвоєння результатів розрахунку числовими методами або деякими символьними операторами змінним або функціям в одному рядку регіону формул. Також можливим є присвоєння і виведення результатів обчислень в одному рядку. Для ілюстрації вказаних положень приводимо фрагменти розрахунку:

$$yBK(x) := \frac{x-12}{-0.941} = \frac{y+2}{1.59} \;\middle|\; \begin{matrix} \text{solve}, y \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow -1.69 \cdot x + 18.3$$

$$d_1 := \frac{|M1M3 \times S1|}{|S1|} \rightarrow \frac{\sqrt{53} \cdot \sqrt{806}}{53} = 3.9$$

Ця форма представлення розрахунків більш звична, компактніша, а головне – дозволяє автоматизувати обчислення при необхідності зміни параметрів, що задіяні в цих обчисленнях. В ранніх версіях «Mathcad» ті ж обчислення вигляділи б таким чином:

$$\frac{x-12}{-0.941} = \frac{y+2}{1.59} \;\middle|\; \begin{matrix} \text{solve}, y \\ \text{float}, 3 \end{matrix} \rightarrow -1.69 \cdot x + 18.3 \qquad yBK(x) := -1.69 \cdot x + 18.3$$

$$d_1 := \frac{|M1M3 \times S1|}{|S1|} \qquad d_1 \rightarrow \frac{\sqrt{53} \cdot \sqrt{806}}{53} = 3.9$$

Тобто, тут обчислення і виведення результату допустимо тільки в різних регіонах формул. Але така форма розрахунків має чудову особливість: вона зберігається в усіх версіях «Mathcad», що дає можливість спиратися на численні розрахунки, що приводяться в різних базах даних.

ЛІТЕРАТУРА

1. Аналітична геометрія. Навчальний посібник / Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. – Суми.: ВТД Університетська книга, 2004. – 296 с.
2. Аналітична геометрія у просторі / Яковець В.П., Боровик В.Н., Ваврикович Л.В. – Ніжин.: НДПУ, 2002.
3. Аналітична геометрія на площині / Яковець В.П., Ваврикович Л.В. – Ніжин.: НДПУ, 2001.
4. Векторна алгебра. Навчально-методичний посібник для самостійної роботи студентів / Завгородній О.І., Зотова О.С., Левкін Д.А., Обихвіст О.В.– Харків: ХНТУСГ, 2017 – 44с.
5. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / В. В. Булдигін, І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Н. Р. Коновалова. − К.: ТВіМС, 2011. − С. 119−149.
6. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібн. / Ю.К. Рудавський, П. П. Костробій, Х. П. Луник, Д. В. Уханська. −Львів: «Львівська політехніка», 1999. − 262 с.
7. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Збірник задач: Навч. посіб. / Г. Г. Барановська, Л. В. Барановська. – К.: НТУУ “КПІ”, 2015. − 198 с.
8. Аналітична геометрія: Навч. посібн. / Ю. В. Яременко, Л. І. Лутченко. – Кіровоград: КДПУ ім.В. Винниченка, 2006. – С. 58−118.
9. Практикум з аналітичної геометрії. Частина 3. Лінії та поверхні другого порядку: Навчально-методичний посібник. / Прус А.В., Чемерис О.А., Мосіюк О.О. – Житомир: ЖДУ ім. І. Франка, 2012. – 58 с.
10. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. підручник. / Рудавський Ю. К., Костровій П. П., Луник Х. П., Уханська Д.В. – Львів: «Бескид Біт», 2002. – 262с.
11. Обчислювання та програмування в Mathcad. / Паранчук Я.С., Мороз В.І.. – Львів: ЛПІ, 2013. – 364 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ
(ПРЯМА ТА ПЛОЩИНА)

Основи теорії та методика розв'язування задач
з варіантами індивідуальних завдань

ЗАВГОРОДНІЙ Олексій Іванович
СОЛОВИЧЕНКО Ольга Володимирівна
ЛЕВКІН Дмитро Артурович
СИЧОВА Тетяна Володимирівна

Формат 60х84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 4,8
Наклад 100 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44