

УДК 631.362.3, 531.1  
№ держреєстрації 0118U003317

Інв. №

**ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
(ДБТУ)**

вул. Алчевських, 44, м. Харків, 61002,  
+38 (057) 700-38-88, <http://btu.kharkov.ua>, [info@btu.kharkov.ua](mailto:info@btu.kharkov.ua)



**ЗАТВЕРДЖУЮ**

Проректор з наукової роботи

Валерій МИХАЙЛОВ

(22.12.2022)

**ЗВІТ  
ПРО НАУКОВО-ДОСЛІДНУ РОБОТУ**

**ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ, ПРОДУКТИВНОСТІ ТА  
НАДІЙНОСТІ МАШИН ДЛЯ РОЗДІЛЕННЯ ЗЕРНОВИХ МАТЕРІАЛІВ  
(остаточний)**

Керівник НДР  
канд. техн. наук, доцент







Максим СЛІПЧЕНКО

Харків 2022

Рукопис закінчено «16» грудня 2022 р.

Результати цієї роботи розглянуто науково-технічною радою факультету мехатроніки та інжинірингу, протокол № 3 від 21.12.2022 р.

## СПИСОК АВТОРІВ

Керівник НДР, завідувач кафедри НММС ім. В.Я. Аніловича, канд. техн. наук, доц.		Сліпченко М.В. (вступ; розділи 2, 4; висновки)	
Виконавці: Професор, Док-р. фіз.-мат. наук		<table border="1" style="width: 100%;"><tr><td>Ольшанський В.П.</td></tr></table> (вступ; розділи 2, 4)	Ольшанський В.П.
Ольшанський В.П.			
Професор, док-р. фіз.-мат. наук		<table border="1" style="width: 100%;"><tr><td>Спольнік О.І.</td></tr></table> (розділи 1, 4)	Спольнік О.І.
Спольнік О.І.			
Доцент, док-р. техн. наук		Алфьоров О.І. (розділ 5; висновки)	
Доцент, канд. техн. наук		Півень М.В. (розділ 1; висновки)	
Доцент, канд. техн. наук		Бредихін В.В. (вступ; розділ 3, 4; висновки)	
Доцент, канд. техн. наук		Скофенко С.М. (розділ 2)	
Ст. викладач		Шукаєва О.М. (розділи 2, 4)	

## РЕФЕРАТ

Звіт про НДР: 80 с., 8 табл., 9 рис., 82 джерела.

ЗЕРНО, СЕПАРАЦІЯ, ОЧИСТКА, ФРАКЦІОНУВАННЯ, КОЛИВАННЯ, ЗАВАНТАЖЕННЯ, ШВИДКІСТЬ РУХУ, ОСЦИЛЯТОР, НАДІЙНІСТЬ.

Об'єкт досліджень – Об'єкт дослідження: процес сепарації зернових матеріалів, зв'язок процесу очищення з умовами завантаження та проходження зернового матеріалу по робочим органам зерноочисних машин, дослідження впливу коливань різного типу на рух зернових частинок.

Предмет дослідження: Предмет дослідження обґрунтування параметрів процесу сепарації та впливу конструктивно-технологічних параметрів на процес сепарації.

Мета роботи – Теоретичні дослідження та розробка методів і конструкцій для підвищення ефективності, продуктивності та надійності машин для розділення зернових матеріалів.

Методи досліджень – Теоретичні дослідження виконані з застосуванням основних положенням теоретичної механіки, теорії нелінійних коливань, математичної статистики, теорії суцільних та гетерогенних середовищ, континуальної гідродинамічної моделі.

В роботі виведено залежності, що дають змогу встановити залежність процесу сепарації від завантаження, розподілу зон завантаження та недозавантаження і їх вплив на продуктивність та ефективність процесу сепарації.

Встановлено залежність швидкості зернового потоку по товщині зернового шару і його вплив на продуктивність сепаратора.

Отримано функціональні залежності між визначальними параметрами процесу вібропневмовідцентрового розділення зернового матеріалу за густиною насіння та конструкційно-кінематичними параметрами вібропневмовідцентрового сепаратора. Доведена ефективність застосування

удосконаленої механіко-математичної моделі під час вибору раціональних параметрів роботи вібропневмовідцентрового сепаратору

В роботі основна увага сконцентрована на аналізі вільних нелінійних коливань дисипативних механічних осциляторів. Для наближеного розрахунку екстремальних відхилень від положення рівноваги використано метод енергетичного балансу (МЕБ). Реалізовано диференціальну та алгебраїчну форму вказаного методу.

Розглянуто питання раптових відмов та параметрів, що впливають на вірогідність безвідмовної роботи.

За темою НДР видано 2 монографії, опубліковано 8 статей у виданнях групи А, 44 статті у виданнях групи Б, 27 тез доповідей.

## СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАКИ

МЕБ	Метод енергетичного балансу
ВБК метод	Метод Венцеля-Брилюєна-Крамера
ЗМ	зернова маса
р.	рік
рр.	роки
рис.	рисунок
табл.	таблиця
НДР	Науково дослідна робота
НММС	Надійність та міцність машин і споруд

## ЗМІСТ

ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВЕЛИЧИНИ ПОДАЧІ НА ПРОЦЕС ЗАВАНТАЖЕННЯ ВІБРОРЕШЕТА.....	9
РОЗДІЛ 2. ДИНАМІКА ЗЕРНОПОТОКУ В ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ВІБРОРЕШЕТІ .....	27
РОЗДІЛ 3. ФРАКЦІОНУВАННЯ ЗЕРНОВИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ГУСТИНОЮ .....	33
РОЗДІЛ 4. ДИНАМІКА ДИСИПАТИВНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ .....	45
РОЗДІЛ 5. ПРОГНОЗУВАННЯ І УПРАВЛІННЯ НАДІЙНІСТЮ ПРИ ПУАСОНІВСЬКОМУ ПОТОЦІ НАВАНТАЖЕНЬ .....	57
ВИСНОВКИ .....	69
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....	72

## ВСТУП

Вібровідцентрові сепаратори призначені для очищення зернових сумішей пшениці, жита, ячменю, вівса від домішок та сортування на фракції за розмірами частинок. Неочищене зерно відноситься до фуражного і не може використовуватись як посівне та як продовольче. Збільшення продуктивності та ефективності очистки зернової маси сепараторами різних типів є актуальною задачею.

З метою інтенсифікації процесів сепарації пропонується комплексне обґрунтування їх техніко-конструктивних параметрів та вдосконалення робочих органів. З цією метою розглянуто процес завантаження та вплив бокових стінок на процес сепарації, виведено залежність динаміки сепарованої маси (суміші) від її фізико-механічних характеристик, створено вдосконалену модель динаміки багатофазних середовищ при фракціонуванні. З метою подальшої оптимізації конструкції машин для сепарування та очищення зернової маси (ЗМ) розглянуто питання щодо динаміки нелінійних осциляторів. А також, з метою підвищення надійності сепараторів розглянуто питання раптових відмов та параметрів, що впливають на вірогідність безвідмовної роботи.

Зерновий матеріал (насінна купа) навіть після декількох етапів очищення й сортування на решетних машинах містить значну кількість домішок бур'янистих рослин і інших сільськогосподарських культур. Використання густини насіння як ознаки подільності забезпечує ефективне відділення не тільки хворих і дрібних зерен основної культури, але й важковідокремлюваних домішок. Відібрані за густиною зерна мають високу енергію проростання, більшу схожість і відповідно забезпечують підвищення урожайності.

В умовах гострої конкуренції підприємств аграрного сектору найважливішим фактором виробництва є зниження собівартості продукції і підвищення якості робіт. Це безпосередньо пов'язано з розробкою і

впровадженням принципово нових робочих органів і машин, а також удосконаленням існуючих. Особливе значення цей фактор має для інтенсифікації широко поширених технологічних процесів таких, як сепарування зернових сумішей. При збиранні, зберіганні та переробці зерна сепарують десятки та сотні тон зернового матеріалу. В межах таких масштабів навіть незначне удосконалення технологічного процесу розділення на фракції може надати істотний ефект в енергоефективності та ресурсоефективності даного процесу. Необхідність підвищення ефективності та продуктивності машин для сепарування ЗМ викликається також пред'явленням більш жорстких вимог до якості зерна, що надходить на зернопереробні підприємства. Актуальність удосконалення процесів сепарування та обладнання для їх забезпечення є очевидною.



## 1. ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ВЕЛИЧИНИ ПОДАЧІ НА ПРОЦЕС ЗАВАНТАЖЕННЯ ВІБРОРЕШЕТА

Для створення оптимальних умов процесу сепарування на віброрешетах, необхідно забезпечити рівномірне завантаження робочої поверхні. Наявність ділянок недовантаження призводить до зменшення заповнення решета сумішшю, а отже до зменшення ступеню використання площі робочої поверхні. Наявність ділянок перевантаження призводить до зростання товщини шару і ущільнення суміші, що ускладнює просування частинок крізь пори до поверхні решета, а також западання їх в отвори, внаслідок неможливості повертання біля кромки. В обох випадках відбувається зменшення просіювальної здатності решета і зниження ефективності процесу сепарування.

Ефективність технологічних процесів обробки сипких сумішей визначається характером відносного руху потоку по всій площі поверхні робочого органу. Для більшості процесів, таких як транспортування, змішування, ущільнення, рихлення, розділення, сушіння та інших, важливо забезпечити оптимальні кінематичні параметри руху сипкої суміші та дотримати рівномірний розподіл цих параметрів по площі робочого органу. В загальному вигляді робочі органи для обробки сипких сумішей мають форму лотка, контейнера або ємності. Об'єм шару суміші обмежений робочою поверхнею та боковими стінками, на яких виникають граничні ефекти. В багатьох дослідженнях дія бокових стінок на процес вважалась незначною через малу товщину шару і суттєву ширину, а тому не враховувалась.

Для керування процесами обробки сипких матеріалів необхідно знати структурні і фізико-механічні властивості зернистих середовищ. В роботі [1] досліджені розподіли відносної щільності, пористості та координаційного числа середовища яке складається з сферичних частинок однакового розміру. Розроблений алгоритм і програма, що моделює тривимірну упаковку сферичних частинок в гіпотетичний контейнер з жорсткими стінками та

дном. Враховані зони впливу бокових стінок і дна контейнера, а також вільної поверхні упаковки на значення досліджуваних характеристик. Встановлено, що граничний ефект дна та вільної поверхні розповсюджується на відстань 5-6 радіусів частинок, а граничний ефект бокових стінок контейнера на відстань більшу трьох радіусів частинок. Отже, наявність бокових стінок змінює структурні та фізичні властивості сипкого середовища в граничних зонах.

Дослідження випадкових упаковок сферичних частинок різних розмірів представлено в роботі [2]. Генерація упаковки відбувається запуском частинок з випадково обраної координати на верхній грані контейнера. Передбачена можливість заповнення полідисперсною сукупністю у вигляді будь-якої монотонно зростаючої аналітичної функції розподілу частинок за розмірами. Визначений вплив складу різних за розмірами частинок на пористість упаковки. Підтверджена відома із експерименту наявність коливань локальної пористості біля бокових стінок контейнера. При подальшому віддаленні від стінки пористість виходить на постійне значення. Таким чином, пористість, а отже і щільність суміші всередині шару та біля бокових стінок відрізняються за величиною.

Однак залишилися невирішеними питання впливу бокових стінок на щільність та швидкість рухомої суміші. Причиною цього можуть бути об'єктивні труднощі, пов'язані зі складністю фізичних дослідів, високою вартістю обладнання та значними витратами праці, що робить такі дослідження недоцільними. Варіантом подолання таких труднощів може бути використання методів чисельного моделювання, які досить легко реалізуються на ЕОМ. Саме такий підхід використаний в роботах [3, 4]. Моделюється процес переміщення сипкого середовища транспортуючим органом у вигляді двох лотків з'єднаних пружними елементами і утворюючих прямокутну трубу. На лотках встановлені дебалансні вібратори, що викликають синфазні коливання стінок у вертикальному напрямі та протифазні в горизонтальному. В якості транспортуючого матеріалу

прийнятий сухий пісок, який розглядається як ізотропне суцільне середовище. Для даного матеріалу прийнята умова, що при ширині шару більшій за його товщину, дія сил опору бокових стінок на динаміку потоку незначна і тому не враховується. Отже, при співвідношенні ширини до товщини шару більше одиниці, бокові стінки не чинитимуть суттєвий вплив на рух суміші.

В роботі [5] розв'язується задача розрахунку параметрів руху розплавленого полімерного матеріалу в зоні каналу одношнекового екструдера. В якості геометричної моделі гвинтового каналу використана розгортка на площину, оскільки глибина каналу набагато менше радіусу шнека. Шнек вважається нерухомим, а корпус розгортається на площину і рухається з постійною швидкістю. В результаті задача руху в гвинтовому каналі зводиться до задачі руху в прямокутному каналі. Для чисельної реалізації моделі процесу та розрахунку профілів швидкостей застосований ітераційний метод Ньютона. Прийнято припущення, сформульоване у роботі [6], що при відношенні ширини каналу до його глибини більше трьох, рух потоку в середньому поздовжньому перетині можна розглядати без врахування впливу бокових стінок. Порівняльний аналіз розрахункових даних з результатами експерименту показав незначні розходження, що доводить можливість застосування спрощувальної умови для даного випадку. Отже, встановлено співвідношення між шириною та глибиною шару, при якому бокові стінки не впливатимуть на рух в середньому поздовжньому перетині. Але це співвідношення не є однаковим для різних матеріалів. Застосування такої умови для інших перетинів потоку не досліджувалось.

В роботі [7] рух харчової суміші в гвинтовому каналі екструдера також представлений рухом в довгому прямокутному каналі, верхня стінка якого рухається. Математична модель включає в себе рівняння руху в'язкої рідини, збереження маси, теплового балансу, зв'язку тензора напружень з тензором швидкостей деформацій з врахуванням реологічних властивостей. За результатами чисельного моделювання представлені епюри розподілу полів

швидкостей суміші в каналі. Їх аналіз показав, що форма профілю швидкостей в поперечному перетині каналу практично не змінюється, але біля бокових стінок відбувається їх зменшення до нуля. Таким чином, бокові стінки змінюють профіль швидкостей по ширині каналу, а тому існує певна зона їхнього впливу на потік і не можна застосувати спрощувальну умову для всіх поздовжніх перетинів.

Експериментальні дослідження процесу вібраційного змішування сипких матеріалів проведені в роботі [8, 9] підтверджують вплив бокових стінок на процес. Так шар суміші розташований в центрі контейнера є більш рухомих ніж біля бокових ділянок, на рух яких чинить суттєвий вплив сила тертя зі стінками. При збільшенні ширини контейнера різниця в рухливості суміші на цих ділянках зростає. Дія певних режимів вібрацій приводить до переходу суміші у стан віброкипіння та вирівнювання рухливості по всьому об'єму шару. Отже конструктивні розміри робочого органу та його кінематичні параметри можуть по різному впливати на ступінь та величину зони впливу бокових стінок. Однак теоретичне обґрунтування цього впливу відсутнє.

Дослідження турбулентного руху в'язкої нестискаємої рідини в прямому каналі між двома паралельними площинами проведено в роботі [10]. Течія описується рівняннями Нав'є-Стокса для нестискаємої рідини. Для моделювання дії бокових стінок в праві частини рівнянь додані штучні сили, що примушують рідину зупинятись на цих поверхнях. Величина середнього градієнту тиску, що викликає рух вздовж каналу, обирається із умови сталості витрати рідини. Встановлено, що при збільшенні висоти бокових стінок сила тертя на цих поверхнях зростає, а на дні лотка зменшується. Зі збільшенням відстані між стінками їх дія на потік зменшується. Однак, в роботі не встановлено як сили тертя на бокових стінках впливатимуть на рух суміші.

В роботі [11, 12] досліджено розподіл зернової суміші по площі поперечного перетину пневмосепаруючого каналу. За результатами експериментів встановлено, що поле швидкостей зерноповітряного потоку

нерівномірне. Відбувається різке зменшення швидкостей біля стінок каналу, а в центральній його частині швидкість потоку збільшується. Зі збільшенням ширини каналу нерівномірність швидкостей зерноповітряного потоку зростає. Однак, в роботі досліджена тільки одна характеристика потоку, яка є емпіричною.

Дослідження нестационарного магнітогідродинамічного потоку в'язкої рідини між двома паралельними боковими стінками, перпендикулярними до площини робочої поверхні, представлені в роботі [13]. Рух потоку спричиняється пилкоподібними імпульсами прикладеними до площини робочої поверхні. Розрахунок виконаний чисельним методом з використанням аналітичних рішень рівняння Бюргерса в якості модельного рівняння динаміки в'язкої рідини. Досліджено вплив магнітного поля і бокових стінок на рух рідини. Встановлено, що швидкість рідини змінюється від нуля на бокових стінках до максимального значення на середині каналу. Із збільшенням відстані між стінками величина профілю швидкості збільшується. Але, для інших середовищ, наприклад зернистих, швидкість на стінці не буде нульовою через ковзання суміші по її поверхні. Отже, характеристики потоку під дією стінок потребують окремого дослідження для різних середовищ.

В роботах з вивчення сепарування на решетах досліджено рух сипких сумішей з метою створення оптимальних умов протікання складових процесу розділення – сегрегації та просіювання [14, 15]. Визначалась ступінь рихлення суміші шляхом зміни пористості, для покращення здатності проходження частинок крізь шар до поверхні решета [16]. Визначалась відносна швидкість руху, що забезпечує западання та проходження частинок в отвори з врахуванням їх форми та розмірів [17]. Для інтенсифікації сепарування застосовувались вібраційні коливання решета. Дія вібрацій перетворює сили сухого тертя в сили типу в'язкого тертя, а поведінка віброзрідженої суміші подібна до в'язкої рідини. Це дає змогу застосувати рівняння гідродинаміки для опису руху сипкої суміші [18, 19]. В основу

математичних моделей процесу сепарування покладені методи механіки гетерогенних середовищ, проведені обчислювальні та фізичні експерименти. Встановлено, що діапазон оптимальних кінематичних параметрів руху потоку змінюється у вузьких межах, а сам процес дуже чутливий до зміни завантаження, яке визначається швидкістю та щільністю суміші [20, 21].

У більшості робіт приймалися припущення, що параметри потоку сипких зернистих сумішей не змінюються по площі решета, а вплив бокових стінок взагалі не враховувався [14-22]. В окремих роботах для оцінки похибки, що привносить таке припущення розроблена теорія руху суміші по віброрешету скінченої ширини [23, 24]. Визначено вплив бокових стінок на середню швидкість потоку та продуктивність решета. Однак, для процесу сепарування важливо встановити параметри руху потоку на всій площі робочої поверхні.

Як свідчить досвід попередніх досліджень, характер потоку змінюється під впливом бокових стінок і потребує уточнених досліджень для кожного окремого випадку. У більшості робіт дослідження були розрізненими, визначались тільки окремі характеристики потоку, відсутній комплексний підхід у вивченні даного процесу. Залишились не визначеними умова виникнення, ступінь, характер та зона впливу бокових стінок віброрешета на розподіл параметрів руху потоку сипкої суміші по всій площі робочої поверхні. Все це дозволяє стверджувати, що доцільним є проведення дослідження присвяченого визначенню впливу бокових стінок віброрешета на рух потоку сипкої суміші.

Для проведення досліджень застосована математична модель просторового руху сипкої суміші на плоскому похилому віброрешеті одержана в роботі [25]. Решето має паралельні бокові стінки розташовані перпендикулярно до його робочої поверхні Дія вібрацій на середовище проявляється в зменшенні внутрішнього тертя при збільшенні інтенсивності коливань. Система рівнянь руху зведена до рівнянь планового потоку. Головною передумовою такого перетворення є незначні розміри товщини

шару в порівнянні з лінійними розмірами в площині потоку, а зміна складових швидкості вздовж нормалі до решета дуже мала. Вплив просіювання суміші на процес руху не враховувався, оскільки величина проходової фракції значно менше сходової. Система рівнянь планового руху потоку сипкої суміші на віброрешеті має вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma + u \frac{\partial}{\partial x} \gamma + v \frac{\partial}{\partial y} \gamma + \gamma \frac{\partial}{\partial x} u + \gamma \frac{\partial}{\partial y} v = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial x} u + v \frac{\partial}{\partial y} u + \frac{g \cos \theta}{2} \frac{\partial}{\partial x} h + \frac{hg \cos \theta}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \gamma - \frac{2\mu h}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u - \frac{\mu h}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u - \\ - \frac{2\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial x} u - \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} h \frac{\partial}{\partial y} u - \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \left( h \frac{\partial}{\partial x} v \right) + \frac{C_s}{\gamma} u - g \sin \theta = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} v + u \frac{\partial}{\partial x} v + v \frac{\partial}{\partial y} v + \frac{g \cos \theta}{2} \frac{\partial}{\partial y} h + \frac{hg \cos \theta}{2\gamma} \frac{\partial}{\partial y} \gamma - \frac{\mu h}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^2} v - \frac{2\mu h}{\gamma} \frac{\partial^2}{\partial y^2} v - \\ - \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} h \frac{\partial}{\partial x} v - \frac{2\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial y} h \frac{\partial}{\partial y} v - \frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left( h \frac{\partial}{\partial y} u \right) + \frac{C_s}{\gamma} v = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x, y$  – поточне значення координати в декартовій системі;  $u, v$  – проекції швидкості частинки на осі декартової системи координат;  $\gamma$  – поверхнева щільність суміші;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\theta$  – кут нахилу решета;  $h$  – товщина шару, відлічена уздовж нормалі до решета в напрямку вільної поверхні;  $t$  – час;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт зсувної в'язкості;  $C_s$  – феноменологічний коефіцієнт, аналогічний коефіцієнту Шезі.

Три рівняння (1-3) містять чотири невідомі функції  $h, \gamma, u, v$ . Для замикання цієї системи рівнянь прийнята кінематична гранична умова на вільній поверхні шару:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Шар суміші займає об'єм, обмежений плоским решетом, боковими стінками, вхідним і вихідним перерізами. Зверху шар обмежений поверхнею, яка змінює свою форму і переміщується відповідно руху суміші.

Система рівнянь доповнюється граничними і початковими умовами. На твердій стінці  $\Sigma$  – задана умова не протікання.

$$v_n|_{\Sigma} = 0 \quad (5)$$

де  $v_n$  – нормальна складова швидкості суміші на стінці.

Дотичне напруження на твердій стінці визначається співвідношенням Коші.

$$p_{\tau} = n_k \sigma_{ki} \tau_i e_i = - C_s v_k \tau_k \tau_i e_i \quad (6)$$

де  $n = (n_1, n_2, n_3) = (n_x, n_y, n_z)$  – одинична зовнішня по відношенню до об'єму  $V$  нормаль до поверхні  $\Sigma$ ;  $\hat{\sigma}$  – компоненти тензора напружень;  $\tau = \{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$  – довільний одиничний дотичний до  $\Sigma$  вектор;  $e_i$  – вектори базису декартової системи координат.

На вхідному перерізі решета задані розподіли щільності, швидкості та товщини шару суміші, які приймаються з експериментальних досліджень.

$$\rho_0 = \rho(t, 0, y, z), \quad u_0 = u(t, 0, y, z), \quad v_0 = v(t, 0, y, z), \quad w_0 = w(t, 0, y, z), \quad h_0 = h(t, 0, y). \quad (7)$$

На вихідному перерізі задані умови у вигляді, в якому вони застосовуються в чисельних методах розв'язання задач динаміки в'язкої



рідини

$$\left. \frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial v(t, x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0, \quad \left. \frac{\partial w(t, x, y, z)}{\partial x} \right|_{x=h} = 0 \quad (8)$$

На вільній поверхні сипкого шару встановлюються дві динамічні умови: одна витікає із закону збереження маси і виражає собою безперервність потоку маси через вільну поверхню

$$\langle \rho(v_n - W) \rangle = 0 \quad (9)$$

де  $\rho = \gamma v$  – щільність середовища з врахуванням порожнеч між частинками;  $v$  – об’ємна щільність середовища;  $W$  – нормальна складова швидкості руху поверхні розриву середовища;  $v_n$  – нормальна складова швидкості частинок на вільній поверхні, кутові дужки означають стрибок відповідної функції на цій поверхні.

Інша динамічна умова виражає собою безперервність напружень під час переходу через вільну поверхню

$$-2 \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \sigma_{xz} - 2 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sigma_{yz} + \sigma_{zz} + P_0 = 0 \quad (10)$$

$$- \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \sigma_{xx} - \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sigma_{xy} + \sigma_{xz} + \sigma_{zz} \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

$$- \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right) \sigma_{xy} - \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sigma_{yy} + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right) \sigma_{zz} + \sigma_{yz} = 0 \quad (12)$$

$$(z = h(t, x, y)),$$

де  $P_0$  – тиск, що чинить повітря на поверхню шару суміші.

Чисельне розв'язання отриманої системи рівнянь виконано скінченно-різницеvim методом [26].

За допомогою математичної моделі встановлено розподіл характеристик потоку сипкої суміші по всій площі робочої поверхні для різних за величиною значень товщини шару, довжини стінок, опору поверхонь бокових стінок та відстані між ними. Для проведення чисельних розрахунків приймалися наступні параметри процесу: щільність сипкої суміші  $800 \text{ кг/м}^3$ ; питома завантаження на вході решета  $900\text{-}2300 \text{ кг/год}\cdot\text{дм}$ ; поперечна до осі лотка складова швидкості суміші  $V_0^0=0 \text{ м/с}$ ; тиск на поверхні шару суміші  $P_0=20 \text{ кг/м}\cdot\text{с}^2$ ; довжина решета  $l=1,5 \text{ м}$ ; ширина решета  $l_1=0,4\text{-}1,0 \text{ м}$ ; кут нахилу решета до горизонту  $\theta=10 \text{ град}$ ; коефіцієнт зсувної в'язкості  $\mu=0,2 \text{ кг/м}\cdot\text{с}$ , феноменологічний коефіцієнт опору бокових стінок та решета, аналогічний коефіцієнту Шезі  $C_z=2\text{-}10 \text{ кг/м}^2\cdot\text{с}$ . Для виключення впливу нерівномірної подачі на вході решета на досліджуваний процес, профіль початкової швидкості по ширині решета був заданий рівномірним.

Потік характеризується товщиною шару, поверхневою щільністю, поздовжньою та поперечною складовими швидкості суміші, питомих завантаженням робочої поверхні. Це головні характеристики, які визначають ефективність сепарування на решетах. На рисунках 1-6 представлені розподіли вказаних характеристик по площі решета при різних значеннях коефіцієнту опору бокових стінок  $C_z$ , відстані між ними  $l_1$  та товщини шару  $h$ .

При рівномірній подачі суміші по ширині решета, товщині шару  $h=4\cdot 10^{-3} \text{ м}$ , ширині  $l_1=0,4 \text{ м}$  та довжині решета  $l=1,5 \text{ м}$ , опорі бокових стінок  $C_z=2 \text{ кг/м}^2\cdot\text{с}$ , куті нахилу  $\theta=10 \text{ град}$ , в'язкості суміші  $\mu=0,2 \text{ кг/м}\cdot\text{с}$ , потік рухається рівномірно. Основні характеристики потоку – товщина шару, поверхнева щільність, поздовжня та поперечна складові швидкості, питома завантаження залишаються незмінними майже на всій площі робочої поверхні (рис.1, а, б, в, г, д). На бокових стінках спостерігається незначне відхилення питомого завантаження у порівнянні із відхиленнями по площі решета, яке поступово зростає з довжиною стінки і становить 3-4%.

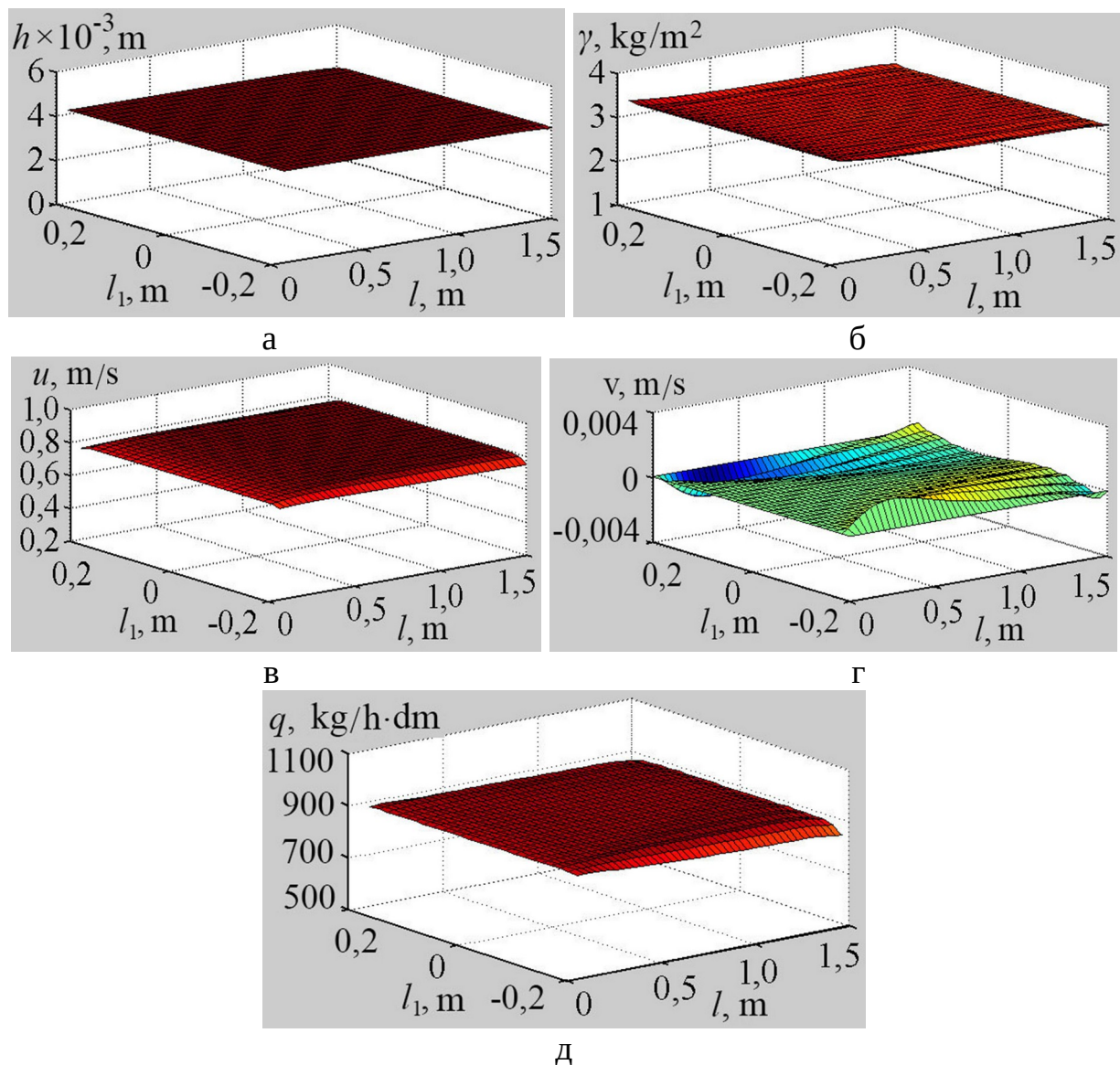


Рис. 1. Характеристики потоку суміші при  $h=4 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_1=0,4$  м;  $C_2=2$  кг/м<sup>2</sup>·с: а – товщина шару; б – поверхнева щільність суміші; в, г – поздовжня та поперечна складові швидкості; д – питоме завантаження

При збільшенні коефіцієнту опору бокових стінок, характеристики потоку біля їх поверхонь починають змінюватись. Поверхнева щільність збільшується, поздовжня складова швидкості зменшується. Виникає поперечна складова швидкості, але вона значно менша за величиною в порівнянні з поздовжньою (рис.2, б, в, г). Питоме завантаження змінюється з довжиною стінки (рис.2, д).

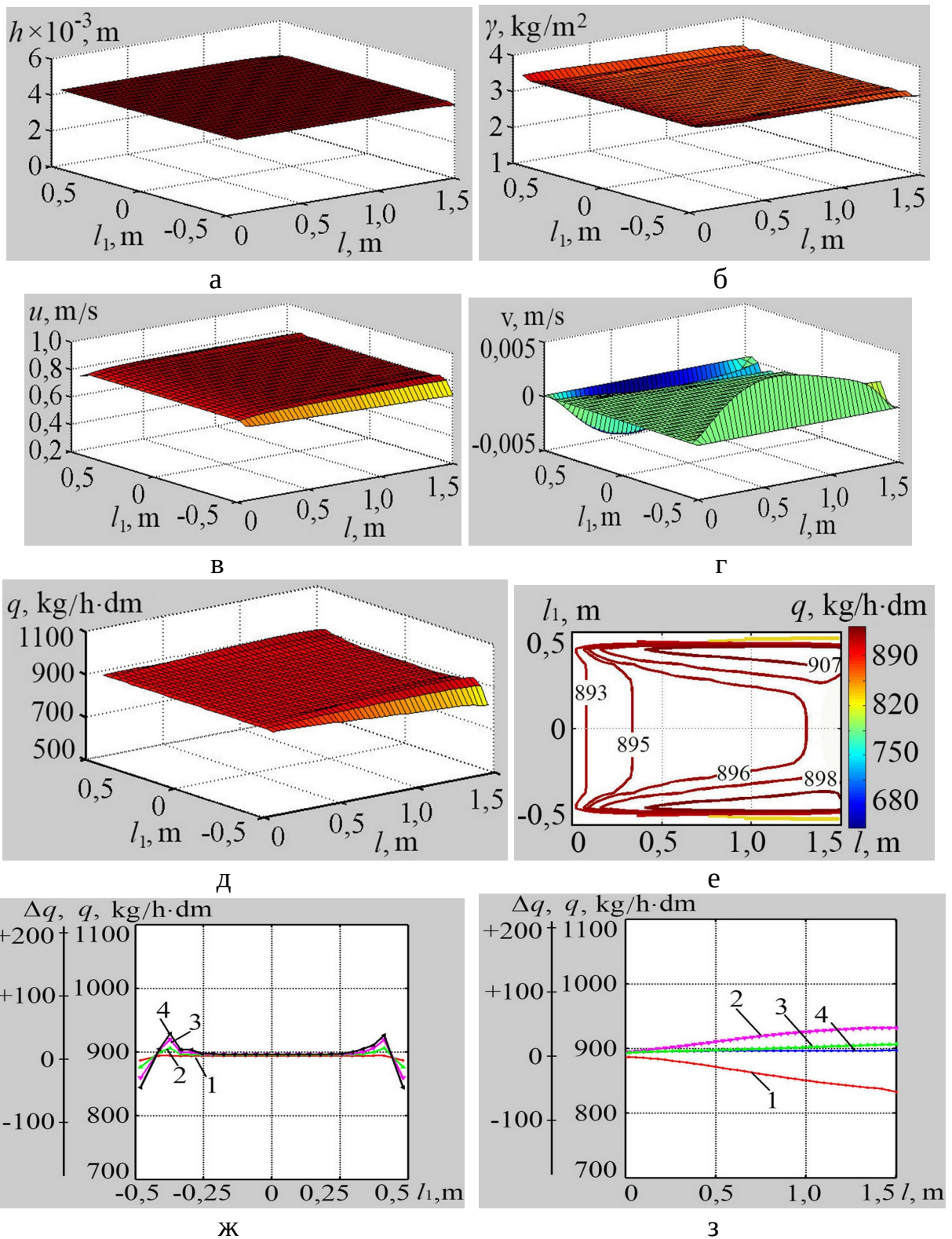


Рис. 2. Характеристики потоку суміші при  $h=4 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_1=1,0$  м;  $C_z=10$  кг/м<sup>2</sup>·с: а – товщина шару; б – поверхнева щільність суміші; в, г – поздовжня та поперечна складові швидкості; д – питоме завантаження; е – лінії рівня функції питомого завантаження; ж – поперечний перетин функції  $q=f(l_1, l)$  1 –  $l=0,1$  м, 2 –  $l=0,5$  м, 3 –  $l=0,75$  м, 4 –  $l=1,5$  м; з – поздовжній перетин функції  $q=f(l_1, l)$  1 –  $l_1=0,5$  м, 2 –  $l_1=0,39$  м, 3 –  $l_1=0,33$  м, 4 –  $l_1=0$  м

Для визначення характеру такої зміни зроблені поперечні, поздовжні перетини функції питомого завантаження та побудовані лінії рівня (рис.2, е, ж, з). В поперечному перерізі потоку, біля бокової стінки, відхилення питомого завантаження  $\Delta q$  найбільше і від'ємне (рис. 2, ж). По мірі віддалення від стінки воно зменшується до нуля, а потім змінює свій знак на додатній, зростає до деякого значення та знову спадає до нуля. Таким чином, біля стінки утворюється недовантажена та перевантажена ділянки, які однакові за величиною відхилень. Такий характер зміни питомого завантаження обумовлений відповідними змінами швидкості та щільності суміші. В поздовжньому перерізі потоку, біля бокової стінки, відхилення питомого завантаження зростають з довжиною в напрямку руху суміші (рис.2, з, криві 1, 2). Лінії рівня визначають форму та площу ділянок перевантаження або недовантаження решета під дією бокових стінок (рис. 2, е). Форма цих ділянок наближена до прямокутного трикутника, а їх площа майже однакова. Центральна ділянка решета має рівномірний розподіл питомого завантаження, а за формою наближена до трапеції. На центральній ділянці решета поверхнева щільність та складові швидкості суміші залишаються також незмінними, а товщина шару не змінилась і біля бокових стінок (рис.2, а, б, в, г).

Зі збільшенням товщини шару суміші змінюється характер руху потоку. Так, поздовжня складова швидкості зростає з довжиною решета до сталої величини, що вказує на прискорений рух потоку на початку решета, який переходить у рівномірний (рис. 3, в). Поверхнева щільність суміші зменшується з довжиною решета до сталої величини (рис. 3, б). Дія бокових стінок проявляється у зменшенні поздовжньої швидкості та збільшенні щільності суміші біля їх поверхонь. Поперечна складова швидкості значно зросла за величиною, але залишається меншою за поздовжню (рис.3, г).

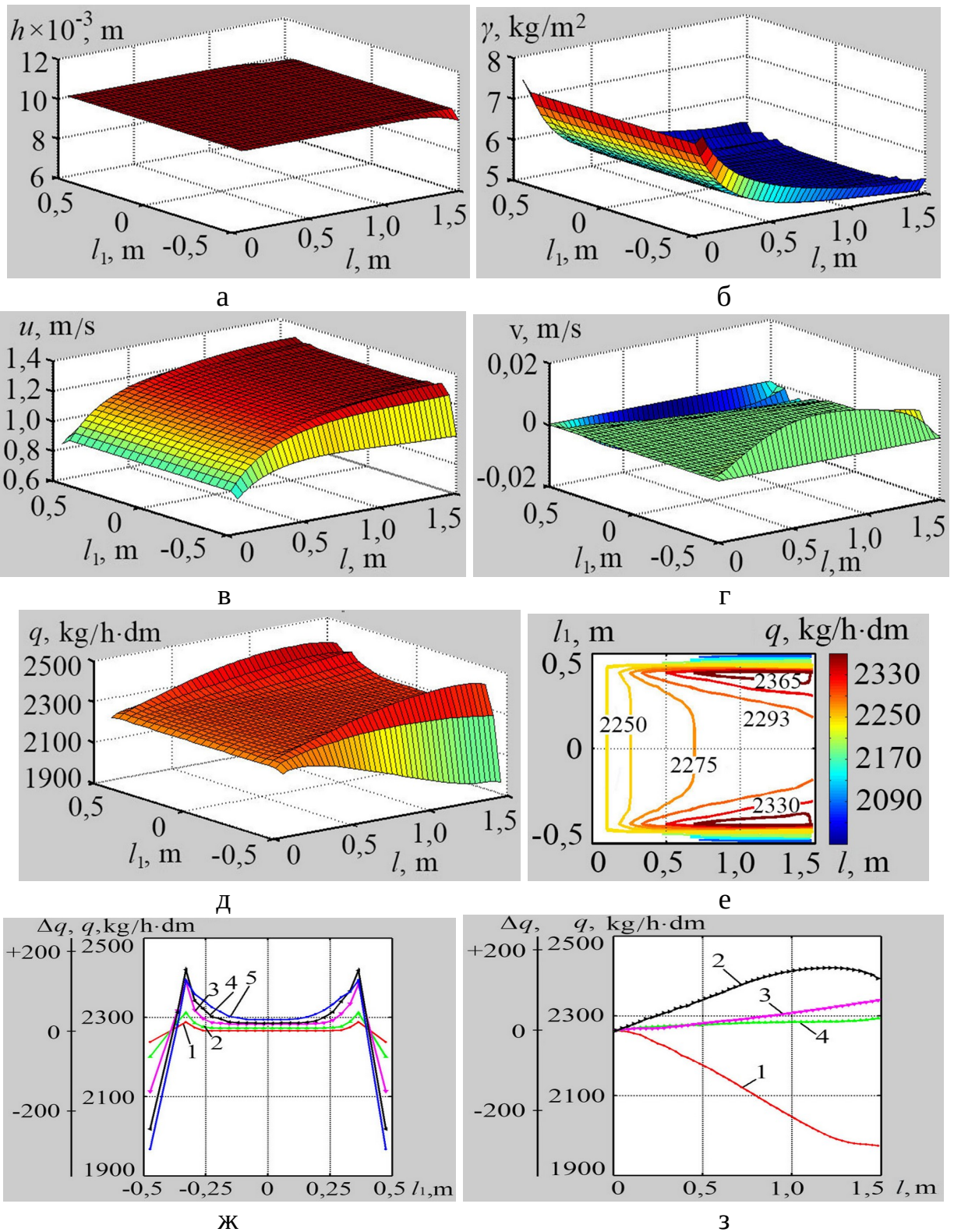


Рис. 3. Характеристики потоку суміші при  $h=10 \cdot 10^{-3}$  м;  $l_1=1,0$  м;  $C_z=10$   $\text{кг/м}^2 \cdot \text{с}$ : а – товщина шару; б – поверхнева щільність суміші; в, г – поздовжня та поперечна складові швидкості; д – питоме завантаження; е – лінії рівня функції питомого завантаження; ж – поперечний перетин функції  $q=f(l_1, l)$  1 –  $l=0,15$  м, 2 –  $l=0,4$  м, 3 –  $l=0,75$  м, 4 –  $l=1,1$  м, 5 –  $l=1,5$  м; з – поздовжній перетин функції  $q=f(l_1, l)$  1 –  $l_1=0,5$  м, 2 –  $l_1=0,37$  м, 3 –  $l_1=0,3$  м, 4 –  $l_1=0$  м

Товщина шару стала на всій площі решета (рис.3, а). Питоме завантаження змінилось більш суттєво біля бокових стінок (рис. 3, д). Величина додатних та від'ємних відхилень збільшилась та зростає з довжиною решета у напрямку руху суміші (рис.3, ж, з). Площа ділянок недовантаження та перевантаження також збільшилась (рис.3, е), але центральна частина решета має рівномірний розподіл завантаження внаслідок віддаленості від бокових стінок. Однак, з довжиною решета площа цієї ділянки зменшується. Отже, збільшення товщини шару суміші посилює дію бокових стінок як за величиною відхилень параметрів потоку так і за площею зони впливу.

Аналізом одержаних результатів встановлені закономірності руху потоку суміші по площі віброрешета під дією бокових стінок. Основними параметрами бокової стінки є висота, що дорівнює товщині контактуючого шару, довжина та опір її поверхні. Збільшення величин цих параметрів призводить до зміни характеристик потоку суміші. При одночасному збільшенні величин декількох параметрів ефект впливу на потік значно посилюється (рис.2, 3).

Біля пристінкової зони поздовжня складова швидкості суміші зменшується, а щільність збільшується. В центральній частині решета вказані параметри потоку залишаються незмінними. Товщина шару стала на всій площі решета, що відповідає властивостям віброзрідженої сипкої суміші. Відбувається зміна характеру питомого завантаження в поперечному перетині потоку. Біля поверхні стінки виникає ділянка недовантаження, а при віддаленні від неї ділянка перевантаження решета. Внаслідок зміни завантаження по ширині решета виникає поперечна складова швидкості суміші, яка направлена до бокових стінок, в напрямку меншого завантаження. Однак поперечна складова швидкості за величиною значно менше поздовжньої. Ділянки недовантаження та перевантаження однакові за величиною відхилень та площею, а центральна ділянка решета має рівномірний розподіл завантаження. З довжиною решета величина відхилень

та площа ділянок перевантаження та недовантаження зростає, і вони набувають форму прямокутних трикутників. Площа центральної рівномірно завантаженої ділянки зменшується з довжиною та набуває форму трапеції.

Дія бокових стінок на рух суміші відбувається при будь-якій відстані між ними. Зменшення відстані між стінками приводить до наближення пристінкових ділянок нерівномірного завантаження одна до одної. Якщо ця відстань більше граничної величини, то вона не впливає на абсолютні значення відхилень питомого завантаження та площі ділянок недовантаження та перевантаження решета. Якщо відстань між стінками дорівнює граничному значенню, то характер їхнього впливу на потік починає змінюватись на всій площі решета. Поздовжня швидкість біля стінки стає ще меншою, а щільність суміші ще більшою. Ділянки недовантаження та перевантаження біля бокових стінок стають різними за величиною відхилень та площею. Центральна ділянка поступово перевантажується, але зберігає рівномірний розподіл питомого завантаження на початку решета. Однак з довжиною решета площа цієї ділянки стрімко зменшується в напрямку руху суміші. Отже, при граничній відстані між стінками, вони починають взаємодіяти разом та підсилювати свій вплив на потік. Ознакою взаємодії бокових стінок між собою є відсутність рівномірно завантаженої центральної ділянки між ними (рис. 5, ж, криві 2, 3, 4). Для сталих значень параметрів стінок існує своє граничне значення відстані між ними. Так при висоті стінок  $h=10\cdot 10^{-3}$  м, опорі їх поверхонь  $C_z=10$  кг/м<sup>2</sup>·с, довжині решета  $l=0,5$  м гранична відстань між ними становить  $l_1=0,4$  м.

1. Основними параметрами бокових стінок є висота, що дорівнює товщині контактуючого шару, довжина та опір поверхні. Збільшення величин цих параметрів збільшує поверхневу щільність та зменшує поздовжню швидкість суміші біля пристінкової зони. Одночасне збільшення декількох параметрів стінки значно посилює вплив на потік. Наслідком зміни параметрів потоку є нерівномірне завантаження решета та поява поперечної складової швидкості, яка направлена до бокових стінок, але значно менша



поздовжньої швидкості. Товщина шару залишається сталою на всій площі решета.

2. Ознакою виникнення впливу бокових стінок на потік є перевищення відхилень питомого завантаження біля їх поверхонь за середнє відхилення на площі решета, що залишилась, при рівномірній подачі на вході. Умовою виникнення впливу є перевищення мінімальних значень параметрів стінки: висоти стінки  $h > 4 \cdot 10^{-3}$  м; опору поверхні стінки  $C_z > 2$  кг/м<sup>2</sup>·с; довжини стінки  $l > 0,5$  м. Якщо параметри стінок менші або дорівнюють мінімальним значенням, то їхнім впливом на потік можна знехтувати. Вказані умови встановлені для решета нахиленого під кутом  $\theta = 10$  град, опорі поверхні решета  $C_z = 10$  кг/м<sup>2</sup>·с, в'язкості віброзрідженої сипкої суміші  $\mu = 0,2$  кг/м·с, та рівномірній подачі на вході.

3. Вплив бокових стінок приводить до утворення біля пристінкової зони ділянок недовантаження та перевантаження решета, які однакові за величиною відхилень та площею. Величина зони впливу стінки в нормальному до її поверхні напрямку, збільшується з довжиною решета та має форму прямокутного трикутника. При висоті стінки  $h = 10 \cdot 10^{-3}$  м, опорі її поверхні  $C_z = 10$  кг/м<sup>2</sup>·с, для решета шириною  $l_1 = 1,0$  м та довжиною  $l = 1,5$  м, площа зони впливу стінок становить 30% загальної площі, а величина відхилень питомого завантаження досягає 14%. В центральній частині решета параметри потоку залишаються незмінними, а завантаження має рівномірний розподіл.

4. Дія бокових стінок на потік відбувається при будь-якій відстані між ними. Однак, для сталих параметрів стінки існує граничне значення відстані між ними, при якому пристінкові ділянки нерівномірного завантаження починають взаємодіяти між собою, посилюючи свій вплив на потік. Ознакою такої взаємодії є відсутність рівномірно завантаженої центральної ділянки. Результатом взаємодії є утворення різних за величиною відхилень і площею ділянок недовантаження та перевантаження решета та відсутність ділянок рівномірного завантаження. Для параметрів стінки  $h = 10 \cdot 10^{-3}$  м,  $C_z = 10$  кг/м<sup>2</sup>·с,

$l=0,5$  м гранична відстань між ними становить  $l_1=0,4$  м. Площа зони впливу стінок досягає 83% загальної площі решета, а величина відхилень питомого завантаження 26%.

5. Дію бокових стінок на рух потоку необхідно враховувати при проектуванні віброрешетних сепараторів та розрахунку режимів їх роботи. Для зменшення впливу бокових стінок необхідно зменшувати опір їхніх поверхонь, довжину решета та збільшувати його ширину при сталій площі, уникати граничної відстані між стінками та одночасного збільшення величин декількох параметрів.

## 2. ДИНАМІКА ЗЕРНОПОТОКУ В ВЕРТИКАЛЬНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ВІБРОРЕШЕТІ

В теорії руху вібросепарованих сумішей по поверхнях решіт набула поширення гідродинамічна модель псевдозрідженої суміші, започаткована в [27, 28]. У цих роботах йшлося про усталений рух однорідного кільцевого шару на внутрішній поверхні вертикального циліндричного віброрешета, яке обертається навколо своєї вісі. Узагальнення названої теорії на випадок змінної вібров'язкості суміші по товщині шару проведено в [29-31]. В роботах [29, 32-34] узагальнення гідродинамічних моделей здійснено врахуванням зміни пористості по товщині рухомого шару внаслідок зміни тиску. Для цього склали окреме диференціальне рівняння, що описує залежність пористості від просторової координати і розв'язували його. Потім одержаний розв'язок враховували в рівнянні руху суміші. Але, як свідчить практика, пористість суміші залежить також від швидкості її руху. Виходячи з цього, тут зроблена спроба врахувати цю залежність, яка є своєрідним зворотнім зв'язком, бо швидкість залежить від пористості, а пористість – від швидкості. В роботі прийнято найпростіший варіант залежності, а саме лінійний розв'язок, коли пористість більша там, де більша швидкість руху. Раніше така модель руху була використана при сепаруванні суміші на плоскому віброрешеті [35]. Тут розглядаємо циліндричну форму решета.

Як і в публікаціях [26, 27], вихідним диференціальним рівнянням приймаємо:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = - \frac{\rho g}{\mu}. \quad (13)$$

Тут  $u = u(r)$  – вертикальна, осереднена за період коливань, швидкість кільцевого шару;  $r$  – радіальна координата;  $\rho$  – питома маса зернової суміші;  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\mu$  – динамічний коефіцієнт вібров'язкості, що залежить від параметрів коливань решета і характеристик зернової суміші [36-38].

Крайовими умовами до рівняння (13) служать:

$$u(R) = 0; \left. \frac{du}{dr} \right|_{r=R_0} = 0, \quad (14)$$

де  $R_0$ ,  $R$  – відповідно внутрішній радіус кільцевого шару суміші та радіус решета (рис. 4).

Крім (14), можливі й інші варіанти крайових умов [39], при наявності на поверхні решета додаткових сегрегорів суміші: ребер, рифів, тощо.

Узагальнюючи відомі теорії, приймаємо:

$$\rho = \rho_* (1 - \lambda \cdot u), \quad (15)$$

причому:  $\lambda > 0$ ;  $\lambda \cdot u(R_0) < 1$ ;  $\rho_*$  – питома маса зерносуміші в стані спокою.

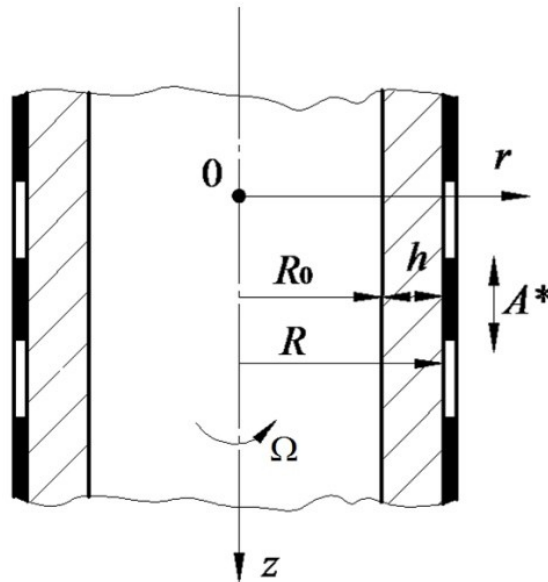


Рис. 4. Розрахункова схема

Враховуючи (13), (15), одержуємо узагальнене диференціальне рівняння типу Бесселя [40]:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \gamma^2 u = -\frac{\gamma^2}{\lambda}, \quad (16)$$

де  $\gamma = \sqrt{\rho_* g \lambda / \mu}$ .

Розв'язок рівняння (16) виражається в циліндричних функціях [41]. Але, щоб не обчислювати значень спеціальних функцій великого аргументу за асимптотичними формулами, далі побудуємо наближені розрахункові

формули. Для цього замість (16) будемо розв'язувати диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r_*} \frac{du}{dr} - \gamma^2 u = -\frac{\gamma^2}{\lambda}, \quad (17)$$

в якому  $r_* = 0,5(R_0 + R)$ .

Заміна (16) рівнянням (17) не дає великих похибок в зв'язку з тим, що в практиці сепарування товщина рухомого шару зерноsumіші значно менша радіуса решета. Ефективність вказаного спрощення підтверджена в [30].

Загальний розв'язок диференціального рівняння (17) має вигляд:

$$u(r) = \frac{1}{\lambda} + C_1 \exp(k_1 r) + C_2 \exp(k_2 r), \quad (18)$$

де  $k_{1,2} = -\frac{1}{2r_*} \pm \sqrt{\gamma^2 + \left(\frac{1}{2r_*}\right)^2}$ ;  $C_1, C_2$  – довільні сталі.

Підстановка (6) в (2) дає систему рівнянь:

$$\begin{aligned} C_1 k_1 \exp(k_1 R_0) + C_2 k_2 \exp(k_2 R_0) &= 0, \\ C_1 \exp(k_1 R) + C_2 \exp(k_2 R) &= -\frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, отримуємо:

$$C_1 = \frac{1}{\lambda} \frac{k_2 \exp(k_2 R_0)}{\Delta(R_0, R)}; \quad C_2 = -\frac{1}{\lambda} \frac{k_1 \exp(k_1 R_0)}{\Delta(R_0, R)}; \quad (19)$$

$$\Delta(R_0, R) = k_1 \exp(k_1 R_0) \exp(k_2 R) - k_2 \exp(k_1 R) \exp(k_2 R_0).$$

Враховуючи (6) і (7), одержуємо формулу швидкості зерно потоку:

$$u(r) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{k_1 \exp(k_1 R_0 - k_2 r) - k_2 \exp(k_2 R_0 - k_1 r)}{k_1 \exp(k_1 R_0 - k_2 R) - k_2 \exp(k_2 R_0 - k_1 R)} \right]. \quad (20)$$

Найбільше значення швидкості має при  $r = R_0$ . Її обчислення зводиться до формули:

$$u(R_0) = \frac{1}{\lambda} \left[ 1 - \frac{(k_1 - k_2) \exp(k_1 R_0 + k_2 R)}{\Delta(R_0, R)} \right].$$

Тут, а також в формулі (21), виникає невизначеність типу 0/0 при  $\lambda \rightarrow 0$ . Використавши граничний перехід в (20), отримуємо для однорідної суміші ( $\lambda = 0$ ):

$$u(r) = \frac{\rho g r_*^2}{\mu} \left[ \exp\left(\frac{R - R_0}{r_*}\right) - \exp\left(\frac{R_0 - r}{r_*}\right) + \frac{R - r}{r_*} \right]. \quad (21)$$

В практиці сепарування для оцінки продуктивності віброрешета використовують значення середньої швидкості [28]:

$$u_{cp} = \frac{2}{R^2 - R_0^2} \int_{R_0}^R r \cdot u(r) dr. \quad (22)$$

Враховуючи, що [42]:

$$\int_{R_0}^R r \cdot \exp(kr) dr = \frac{1}{k^2} \left[ \exp(kR) \cdot (kR - 1) - \exp(kR_0) \cdot (kR_0 - 1) \right],$$

після підстановки (20) в (22), отримуємо:

$$u_{cp} = \frac{1}{\lambda} \left\{ 1 + \frac{2 \exp[(k_1 + k_2)R_0]}{(R^2 - R_0^2)(k_1 k_2)^2 \Delta(R_0, R)} \left[ k_2^3 f_1(R_0, R) - k_1^3 f_2(R_0, R) \right] \right\}. \quad (23)$$

Тут

$$f_1(R_0, R) = (k_1 R - 1) \exp[k_1(R - R_0)] + 1 - k_1 R_0;$$

$$f_2(R_0, R) = (k_2 R - 1) \exp[k_2(R - R_0)] + 1 - k_2 R_0.$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  в (11) треба розкрити невизначеність виду  $|0/0|$ . Виконавши цю операцію, одержуємо:

$$u_{cp} = \frac{\rho g r_*^2}{\mu} \left\{ \left[ 1 + \frac{2r_*(R + r_*)}{R^2 - R_0^2} \right] \exp\frac{R_0 - R}{r_*} - 2 \frac{r_*(R_0 + r_*)}{R^2 - R_0^2} + \frac{R}{r_*} - \frac{2(R^2 + RR_0 + R_0^2)}{3r_*(R + R_0)} \right\}.$$

Це наближена формула середньої швидкості однорідної суміші ( $\lambda = 0$ ).

При визначенні масової продуктивності  $Q$  віброрешета за сходовою фракцією доводиться обчислювати інтеграл:

$$Q = 2\pi\rho_* \int_{R_0}^R [1 - \lambda \cdot u(r)] u(r) r dr. \quad (24)$$

Залежності (20) він виражається в елементарних функціях, але відповідь громізка і не зручна в практичній реалізації. Тому, поступив шість точністю, інтеграл (12) можна обчислювати наближено за формулою Сімпсона [40]:

$$Q \approx \frac{\pi \rho_* (R - R_0)}{3} \times \left\{ [1 - \lambda \cdot u(R_0)] u(R_0) R_0 + 4 [1 - \lambda \cdot u(R_0)] \right\} [1 - \lambda \cdot u(r_*)] u(r_*) r_* \quad (25)$$

Похибка цього наближення мала із-за малої товщини рухомого шару, поданої різницею  $R - R_0$ .

Для проведення розрахунків приймаємо:  $\rho_* = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $R = 0,3075 \text{ м}$ ;  $R_0 = 0,2975 \text{ м}$ ;  $\mu = 0,6 \text{ Па}\cdot\text{с}$  і різні  $\lambda$ . Одержані двома способами значення швидкості по товщині кільцевого шару при  $\lambda = 0,1 \text{ с/м}$  записано в табл. 1.

Таблиця 1. Значення швидкості при  $\lambda = 0,1 \text{ с/м}$

$10r, \text{ м}$	Форм. (20)	Чисел. інтегр.	$10r, \text{ м}$	Форм. (20)	Чисел. інтегр.
	Значення $10u(r), \text{ м/с}$			Значення $10u(r), \text{ м/с}$	
2,975	5,7727	5,7727	3,025	4,3326	4,3327
2,985	5,7150	5,7150	3,035	3,6989	3,6990
2,995	5,5420	5,5420	3,045	2,9494	2,9495
3,005	5,2539	5,2540	3,055	2,0836	2,0837
3,015	4,8509	4,8509	3,065	1,1007	1,1008

Як видно з табл. 1 чисельне комп'ютерне інтегрування диференціального рівняння (16) підтвердило малі похибки заміни його диференціальним рівнянням (17), яке має прості розв'язки.

Цей висновок підтверджує порівняльний аналіз і числових результатів в табл. 2, які одержані при  $\lambda = 0,9 \text{ с/м}$ .

Швидкості в табл. 2 менші, ніж в табл. 1, тобто збільшення коефіцієнта  $\lambda$  або пористості сповільнює швидкість руху суміші.

Про вплив коефіцієнта  $\lambda$  на середню швидкість зернотоку надана інформація в табл. 3, одержана за формулою (11).

Таблиця 2. Значення швидкості при  $\lambda = 0,1$  с/м

$10r$ , м	Форм. (8)	Чисел. інтегр.	$10r$ , м	Форм. (8)	Чисел. інтегр.
	Значення $10u(r)$ , м/с			Значення $10u(r)$ , м/с	
2,975	4,1569	4,1569	3,025	3,1806	3,1807
2,985	4,1185	4,1185	3,035	2,7385	2,7385
2,995	4,0031	4,0031	3,045	2,2054	2,2055
3,005	3,8098	3,8098	3,055	1,5760	1,5760
3,015	3,5365	3,5365	3,065	0,8434	0,8434

Таблиця 3. Середні швидкості зернопотоку при різних  $\lambda$ 

$10\lambda$ , с/м	1	3	5	7	9
$10u_{cp}$ , м/с	3,835	3,512	3,239	3,006	2,805

Для порівняння, в табл. 4 записано швидкості, обчислені наближено за формулою Сімпсона [40]:

$$u_{cp} = \frac{1}{6r_*} [R_0 u(R_0) + 4u(r_*)], \quad (26)$$

а також продуктивності, обчислені за формулою (25).

Згідно з прийнятими числовими даними  $r_* = 0,3025$  м.

Таблиця 4. Результати обчислень за формулами (25) і (26)

$10\lambda$ , с/м	1	3	5	7	9
$Q$ , кг/с	5,210	4,360	3,702	3,183	2,765
$10u_{cp}$ , м/с	3,835	3,510	3,237	3,004	2,802

Розрахунки показують, що від значення  $\lambda$  суттєво залежить продуктивність віброрешета  $Q$  за масою сходової фракції.

Розбіжності значень середніх швидкостей в табл. 3 і табл. 4 досить малі, тобто формула Сімпсона цілком придатна для наближеного визначення  $u_{cp}$ .

Переходом до спрощеного диференціального рівняння виведено та апробовано наближені формули для розрахунку основних характеристик зернопотоку по вертикальному циліндричному віброрешету, з урахуванням зміни пористості в шарі зерноsumіші від швидкості руху.



### **3. ФРАКЦІОНУВАННЯ ЗЕРНОВИХ МАТЕРІАЛІВ ЗА ГУСТИНОЮ**

В умовах гострої конкуренції підприємств аграрного сектору найважливішим фактором виробництва є зниження собівартості продукції і підвищення якості робіт [41]. Це безпосередньо пов'язано з розробкою і впровадженням принципово нових робочих органів і машин, а також удосконаленням існуючих. Особливе значення цей фактор має для інтенсифікації широко поширених технологічних процесів таких, як сепарування зернових сумішей [42]. При збиранні, зберіганні та переробці зерна сепарують десятки та сотні тон зернового матеріалу (ЗМ). В межах таких масштабів навіть незначне удосконалення технологічного процесу розділення ЗМ на фракції може надати істотний ефект в енергоефективності та ресурсоефективності даного процесу [43].

Необхідність підвищення ефективності та продуктивності машин для сепарування ЗМ викликається також пред'явленням більш жорстких вимог до якості зерна, що надходить на зернопереробні підприємства. Актуальність удосконалення процесів сепарування та обладнання для їх забезпечення є очевидною. Особливо якщо врахувати, що витрати на післязбиральну обробку і зберігання зерна становлять від 40 до 60 % загальних витрат на його виробництво [44].

Всі сепаратори зернових сумішей мають одну загальну ознаку: для фракціонування неоднорідних систем в них використовується поле сил тяжіння. Використання поля сили тяжіння обумовлює обмежену питому продуктивність. Це один із основних важливих недоліків таких сепараторів [45]. В результаті цього з метою пошуку ефективних способів сепарування ЗМ зріс інтерес до відцентрових сепараторів. В таких сепараторах відділення частинок відбувається під дією інерційних сил, що набагато переважають сили тяжіння, які діють на ці частинки. Постійний контакт з сепаруючою поверхнею збільшує ймовірність попадання частинок в отвори, а велика швидкість руху сепарованого матеріалу забезпечує високу

продуктивність відцентрових сепараторів [46].

Поле інерційних сил використовується для інтенсифікації процесу сепарування ЗМ не тільки за розміром, але і за формою, властивостям поверхні частинок, їх густиною, що доводиться теоретичними та експериментальними дослідженнями [47]. Підвищення ефективності фракціонування неоднорідних систем досягається при цьому в результаті одночасного використання відцентрових, коріолісових і гравітаційних сил [48].

Однак відцентрові сепаратори не отримують достатньо широкого застосування на переробних підприємствах, незважаючи на те, що відомі вони достатньо давно та були використані для вирішення різних задач [49]. Пояснюється це тим, що процес сепарування ЗМ в відцентрових сепараторах недостатньо повно досліджений. При цьому відсутні науково обґрунтовані методики визначення конструктивних параметрів цих машин, що тягне за собою невисоку ефективність конструкторських рішень [50].

Проектування відцентрових сепараторів проводиться, як правило, з використанням значень параметрів процесу, отриманих експериментально. Це тягне за собою значимі похибки, в результаті чого прирощення енергетичної та ресурсоефективності є низьким [51]. Відповідно застосування для процесу сепарації ЗМ механіко-математичного моделювання є актуальним. При цьому є необхідність застосування різних моделей, які враховували б одночасну дію відцентрових, коріолісових і гравітаційних сил.

Одним із способів, що довів свою ефективність під час механіко-математичного моделювання процесу сепарації ЗМ [52], є використання концепції гідродинаміки багатофазних середовищ. В цьому методі псевдорозріджене середовище характеризується динамічною в'язкістю, а ЗМ представлена двофазною рідиною. Одна фаза – дискретна, що утворена твердими частинками (насіння). Інша фаза – неперервна фаза, утворена газоподібним середовищем (повітрям). Однак використання цієї методики для описання процесу фракціонування ЗМ на вібропневмовідцентровому

сепараторі потребує відповідних доповнень та уточнень [53]. Це дозволить максимально врахувати взаємодію фізико-механічних властивостей ЗМ і конструктивно-технологічних параметрів процесу сепарації насіння за густиною.

Таким чином, механіко-математичне моделювання процесу фракціонування ЗМ на фракції є перспективною задачею, яка дозволить оптимізувати параметри означеного процесу та розробити нові або удосконалити існуючі робочі поверхні відцентрових сепараторів. При цьому слід враховувати вплив конструкційно-кінематичних параметрів вібропневмовідцентрових сепараторів, фізико-механічних властивостей частинок ЗМ, внутрішньосферних процесів і сил, які діють на шар частинок ЗМ.

Для моделювання процесу вібропневмовідцентрового сепарування ЗМ за густиною насіння ефективним є метод гідродинаміки багатофазних середовищ. Такий підхід базується на припущенні, що шар частинок ЗМ, що різняться за густиною, моделюється багатофазною структурою, яка складається з кінцевої кількості шарів дискретної компоненти (частинки ЗМ) та неперервної компоненти (повітря). Такі дискретні та неперервні компоненти розглядаються, як суцільні середовища, що взаємодіють між собою. Таку взаємодію представлено відповідними умовами взаємодії на границях розділення фаз.

Під час побудови моделі розглянуто циліндричну робочу поверхню радіуса  $R$ , що виконує рівномірний обертальний рух навколо вертикальної вісі (вісь  $z$ ) з кутовою швидкістю  $\omega_1$ . При цьому поверхня виконує коливальний гармонічний рух вздовж цієї ж вісі з круговою частотою  $\omega_2$  та амплітудою  $A$ . Для опису руху суміші частинок введено дві циліндричні системи координат з віссю  $z$ , що співпадає з віссю симетрії циліндричної поверхні. Припущено, що одна з систем координат жорстко зв'язана з рухомою циліндричною поверхнею, а інша є абсолютною. Вважається, що в результаті дії повітряного потоку, поля відцентрових сил та гравітаційного

поля утворилось  $N$ -кільцевих шарів часток, які відрізняються за аероґравітаційними і гідродинамічними властивостями. Рух кожного шару частинок розглядається, як рух суцільного середовища. Введемо приведену густину частинок  $n$ -го шару  $\rho_n$  і середню густину часток  $\bar{\rho}_n$ ,

Це дає можливість отримати:

$$\rho_n = \delta_n \bar{\rho}_n, \quad (27)$$

де  $\delta_n$  – об’ємна доля частинок  $n$ -го шару ( $n$ -ої дискретної фази).

Якщо вважати, що  $\rho$  – приведена густина неперервної фази,  $\bar{\rho}$  – середня густина газоподібної фази, що утворює загальну фазу, то можна отримати:

$$\rho = \bar{\rho} \left( 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\rho_n}{\bar{\rho}_n} \right) = \bar{\rho} \left( 1 - \sum_{n=1}^N \delta_n \right), \quad (28)$$

Слід позначити середню товщину  $n$ -го кільцевого шару часток через  $h_n$ , де  $n=1, 2, \dots$ . Значення індексу  $n=1$  відповідає кільцевому шару, що знаходиться на циліндричній поверхні, а  $n=N$  – кільцевому шару, одна з меж якого, межує з повітрям.

Дослідження динаміки такої  $N$ -фазної структури проводиться відносно циліндричної системи координат, яка жорстко пов’язана з рухомою циліндричною поверхнею.

Нехай  $\bar{\omega}_1$  – вектор кутової швидкості циліндричної поверхні, яка направлена вздовж вісі  $z$  циліндричної системи координат  $Or \times O\varphi \times Oz$  з ортами  $\bar{e}_r, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$ . Абсолютне прискорення  $\bar{a}_n$  і швидкість  $\bar{V}_n$  елемента  $n$ -го кільцевого шару ( $n$ -ої дискретної фази) можна виразити через відносне прискорення  $\bar{b}_n$  і швидкість  $\bar{u}_n$  за допомогою:

$$\bar{a}_n = \bar{b}_0 + 2\bar{\omega}_1 \times \bar{u}_n + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) + \bar{b}_n, \quad (29)$$

$$\bar{V}_n = \bar{u}_0 + \bar{\omega}_1 \times \bar{r} + \bar{u}_n. \quad (30)$$

де  $\bar{b}_0 = -A\omega_2^2 \sin \omega_2 t \bar{e}_z$ ,  $\bar{u}_0 = A\omega_2 \sin \omega_2 t \bar{e}_z$  – відповідно прискорення і швидкість повздовжніх (вздовж вісі  $z$ ) коливань циліндричної поверхні;  $\bar{r} = r\bar{e}_r$  – вектор,

що відповідає радіусу елемента, який розглядається, тобто  $n$ -го циліндричного шару часток.

З урахуванням (29), (30), рівняння, яке описує відносний рух  $n$ -го кільцевого шару частинок, можна навести у вигляді:

$$\rho_n \left( \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial t} + (\bar{u}_n, \nabla) \bar{u}_n \right) = - \nabla P_n + \mu \Delta (\bar{u}_n + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}) + \rho_n \bar{F}_n + \bar{G}_n, \quad (31)$$

$$\rho_n \operatorname{div} \bar{u}_n = 0, \quad (32)$$

де  $n=1, 2, \dots$ ,  $\mu_n$  – ефективний коефіцієнт динамічної в'язкості  $n$ -го шару частинок.

Для взаємодії неперервної фази з частинками  $n$ -го шару:

$$\begin{aligned} \bar{F}_n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{V} - \bar{u}_n) + (\bar{V} - \bar{u}_n, \nabla) (\bar{V} - \bar{u}_n) + \right. \\ \left. + 2\bar{\omega}_1 \times (\bar{V} - \bar{u}_n) + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) \right] + F_n (\bar{V} - \bar{u}_n) \frac{9\bar{\rho}\sqrt{v}}{2\sqrt{\pi}a_n\bar{\rho}_n} \times \\ \times \int_0^t \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{V} - \bar{u}_n) + (\bar{V} - \bar{u}_n, \nabla) (\bar{V} - \bar{u}_n) + \right. \\ \left. + 2\bar{\omega}_1 \times (\bar{V} - \bar{u}_n) + \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) \right] (t-r)^{-\frac{1}{2}} dr \end{aligned} \quad (33)$$

$$G_n = - \rho_n g \bar{e}_z - \bar{b}_0 \rho_n - 2\rho_n (\bar{\omega}_1 \times \bar{u}_n) - \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) \rho_n, \quad (34)$$

де  $\bar{V}$  – відносна швидкість неперервної фази;  $v$  – ефективний коефіцієнт кінематичної в'язкості неперервної фази;  $a_n$  – еквівалентний середній радіус частинок за об'ємом  $n$ -го шару;  $F_n$  – коефіцієнт, що характеризує взаємодію неперервної фази з частинками  $n$ -го шару;  $G_n$  – приведена сила тяжіння шару.

Коефіцієнт, що характеризує взаємодію неперервної фази з частинками  $n$ -го шару, можна навести у вигляді:

$$F_n = \frac{\bar{\rho}}{2\bar{\rho}_n (1 - \delta_n)^2 a_n} \left( 1,75V_{0n} + \frac{75v\delta_n}{a_n} \right), \quad (35)$$

де  $V_{0n}$  – середня швидкість неперервної фази на границі  $n$ -го шару

$$r = R - \sum_{p=1}^n h_p.$$

Окрім (31), (32), які описують відносний рух  $n$ -ої дискретної фази ( $n$ -ий кільцевий шар часток), слід розглядати рівняння відносного руху

неперервної фази. Обмежимося лінійним наближенням, у такому випадку ці рівняння для  $n$ -го кільцевого шару можна навести у формі:

$$\rho \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = - (1 - \delta) \nabla P + \mu \Delta (\bar{V} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r}) + \rho_n \bar{F}_n + \bar{G}_n, \quad (36)$$

$$\operatorname{div} \bar{u}_n = 0, \quad (37)$$

де  $\mu$  – ефективний коефіцієнт динамічної в'язкості неперервної фази;  $P$  – надлишковий тиск;  $\delta = \sum_{n=1}^N \delta_n$ .

Для  $G$ :

$$G = -\rho g \bar{e}_z - \bar{b}_0 \rho - 2\rho (\bar{\omega}_1 \times \bar{u}_n) - \bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) \rho \quad (38)$$

Основна відмінність цих рівнянь полягає у введенні для масової сили додаткових складових у (31). Дійсно, перехід до відносного руху призводить до рдоповнення реальної масової сили (сили тяжіння) силою інерції. Тут  $\bar{b}_0 \rho_n$  – сила інерції поступового руху циліндричної поверхні;  $2\rho_n (\bar{\omega}_1 \times \bar{u}_n)$  – сила Коріоліса,  $\bar{\omega}_1 \times (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) \rho_n$  – відцентрова сила.

У рівняннях (31) і (36) складова  $\Delta (\bar{\omega}_1 \times \bar{r}) = 0$  оскільки функція  $\bar{\omega}_1 \times \bar{r}$  є гармонічною. Окрім рівнянь (31), (32) і (36), (37), поля швидкостей,  $\bar{u}_n$ ,  $\bar{V}$  і тиск  $P_n$  та  $P$  повинні задовольняти початковим і граничним умовам. А саме умовам рсполучення на границях розділення дискретних фаз і умовам на поверхні повітропроникної циліндричної робочої поверхні. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що для моменту часу  $t \leq 0$ , поле швидкостей  $\bar{u}_n$ ,  $\bar{V}$  та надлишковий тиск  $P_n$  та  $P$  обертаються у нуль.

$$\begin{aligned} P|_{t \leq 0} = P_n|_{t \leq 0} &= 0, \\ \bar{u}_n|_{t \leq 0} = \bar{V}|_{t \leq 0} &= 0. \end{aligned} \quad (39)$$

Зміна  $\bar{u}_n$ ,  $\bar{V}$ ,  $P_n$ ,  $P$  для моментів часу  $t > 0$  моделюються рівняннями (31) та (36). Умови сполучення на границі розділення кільцевих шарів ЗМ (дискретної фази) можна знайти наступним чином. Для цього необхідно

ввести тензор напружень  $\sigma^n = (\sigma_{ij}^n)_{i,j=1}^3$  для  $n$ -го кільцевого шару ЗМ.

Компоненти тензору напружень можна навести у вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^n &= -P_n \delta_{ij} + 2\mu_n e_{ij}^n, \\ n &= 1, 2, \dots, N, \quad i, j = 1, \dots, 3. \end{aligned} \quad (40)$$

де  $\sigma^n = (\sigma_{ij}^n)_{i,j=1}^3$  – тензор швидкісної деформації,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

У циліндричній системі координат маємо:

$$\begin{aligned} e_{11}^n &= \frac{\partial u_z^n}{\partial z}, \quad e_{22}^n = \frac{\partial u_r^n}{\partial r}, \quad e_{33}^n = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi} + \frac{u_r^n}{r}, \\ e_{23}^n &= e_{32}^n = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\varphi^n}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial u_r^n}{\partial \varphi}, \\ e_{31}^n &= e_{13}^n = \frac{1}{2r} \frac{\partial u_z^n}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial z}, \\ e_{12}^n &= e_{21}^n = \frac{1}{2} \frac{\partial u_r^n}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_z^n}{\partial r}. \end{aligned} \quad (41)$$

Підставлення (41) у (40) дозволяє отримати вираз для компонент тензору напружень у циліндричній системі координат:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^n &= -P_n + 2\mu_n \frac{\partial u_z^n}{\partial z}, \quad \sigma_{22}^n = -P_n + 2\mu_n \frac{\partial u_r^n}{\partial r}, \\ \sigma_{33}^n &= -P_n + \frac{2\mu_n}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial \varphi} + \frac{u_r^n}{r} \right), \\ \sigma_{23}^n &= \sigma_{32}^n = \mu_n \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^n}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial r} - \frac{u_\varphi^n}{r} \right), \\ \sigma_{31}^n &= \sigma_{13}^n = \mu_n \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^n}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi^n}{\partial z} \right), \\ \sigma_{12}^n &= \sigma_{21}^n = \mu_n \left( \frac{\partial u_r^n}{\partial z} + \frac{\partial u_z^n}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

У (41), (42),  $u_z^n$ ,  $u_\varphi^n$ ,  $u_r^n$  – компоненти відносної швидкості  $\bar{u}_n$ .

Умови сполучення на границях кільцевих шарів складаються з неперервності швидкостей і напружень. Відповідно, на границі сполучення  $n$ -го і  $(n+1)$ -го шарів повинні бути неперервними швидкості

$$\begin{aligned} \bar{u}_n \Big|_{r=\bar{h}_n} &= \bar{u}_{n+1} \Big|_{r=\bar{h}_n}, \\ n &= 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\text{де } \bar{h}_n = R - \sum_{p=1}^n h_p.$$

На цих границях повинні бути неперервними дотичні і нормальні компоненти тензорів напружень дискретних фаз:

$$\mu_n e_{ij}^n \tau_i n_j \Big|_{r=\bar{h}_n} = \mu_{n+1} e_{ij}^{n+1} \tau_i n_j \Big|_{r=\bar{h}_n}, \quad (44)$$

$$(P_n - 2\mu_n e_{ij}^n n_i n_j) \Big|_{r=\bar{h}_n} = (P_{n+1} - 2\mu_{n+1} e_{ij}^{n+1} n_i n_j) \Big|_{r=\bar{h}_n}, \quad (45)$$

Тут, за індексами, що повторюються, мається на увазі додавання, а через  $n_i$  і  $\tau_i$  позначені компоненти одиничних векторів нормальних і дотичних до границі сполучення шарів. Окрім умов сполучення (44), (45) слід встановити граничні умови на циліндричній поверхні і на границі кільцевого шару з повітрям (вільна границя). На вільній границі, у випадку, якщо знехтувати впливом повітряного потоку на динаміку ЗМ, напруження повинно обертатись у нуль:

$$\bar{n} \cdot \sigma^N \Big|_{r=R - \sum_{p=1}^n h_p} = 0, \quad (46)$$

де  $\bar{n}$  – орт нормалі до вільної границі;  $\sigma^N$  – тензор напружень  $N$ -го кільцевого шару.

Граничні умови на циліндричній поверхні можна знайти наступним чином. Будемо вважати, що швидкість частинок, що знаходяться на циліндричній поверхні не дорівнює нулю, і, відповідно, можливе проковзування. Це означає, що має місце рівність дотичних напружень кільцевого шару, що взаємодіє з циліндричною поверхнею, яку віднесено до одиниці площі. Таким чином, будемо вважати, що на циліндричній поверхні ( $r=R$ ) виконується умова:

$$\sigma_{12}^1 \Big|_{r=R} = fN, \quad \sigma_{32}^1 \Big|_{r=R} = fN, \quad (47)$$

де  $N$  – нормальний тиск;  $f$  – коефіцієнт тертя ковзання.



Нормальний тиск на одиницю площі буде дорівнювати:

$$N = \left| \bar{n} \sigma^1 \bar{n} \right|_{r=R} = \left| \sigma_{22}^1 \right|_{r=R}, \quad (48)$$

Урахування (48) дасть можливість отримати:

$$\sigma_{12}^1 = f \left| \sigma_{22}^1 \right|_{r=R}, \quad \sigma_{32}^1 = f \left| \sigma_{22}^1 \right|_{r=R}, \quad (49)$$

Базуючись на вищенаведеному, задача моделювання пошарового руху ЗМ по циліндричній повітропроникній поверхні, що обертається, складається з побудови розв'язку системи інтегро-диференціальних нестационарних рівнянь (32), (36). Вони задовольняють початковим рівнянням (39) та краєвим умовам (44), (45), (47), (49).

У результаті моделювання з використанням розробленої механікоматематичної моделі одержано траєкторії руху шарів насіння, що складаються з частинок різної власної густини. Приклад одержаних траєкторій наведено на рис. 5. Для експериментального доведення ефективності застосування удосконаленої механіко-математичної моделі фракціонування ЗМ було обрано вібропневмовідцентровий сепаратор А1-БЦС-100 (виробник: ПАТ «Вібросепаратор», м. Житомир, Україна), наведений на рис. 6. На обраному вібропневмовідцентровому сепараторі проведено розділення вихідного ЗМ на фракції за умови використання налаштувань виробника та за умови використання параметрів, отриманих за допомогою удосконаленої механіко-математичної моделі. В якості вихідного матеріалу використано модель ЗМ, що являла собою суміш шароподібних тіл з різною густиною. При цьому радіус частинок становив 2,5 мм, а їх густина змінювалась дискретно, кг/м<sup>3</sup> : 800; 900; 1000; 1100; 1200; 1300; 1400.

В результаті розділення вихідного ЗМ за параметрів роботи сепаратора, що пропонуються виробником, одержано дві фракції. Перша – «важка» фракція, до якої входили шароподібні тіла з густиною  $\rho=1000\dots1400$  кг/м<sup>3</sup>. Друга – «легка» фракція з густиною шароподібних тіл  $\rho=800\dots1100$  кг/м<sup>3</sup>. За умови використання параметрів, визначених за допомогою удосконаленої

механіко-математичної моделі, отримано дві фракції з густиною, відповідно, «важка» –  $\rho=1100\dots1400$  кг/м<sup>3</sup>, «легка» –  $\rho=800\dots1000$  кг/м<sup>3</sup>.

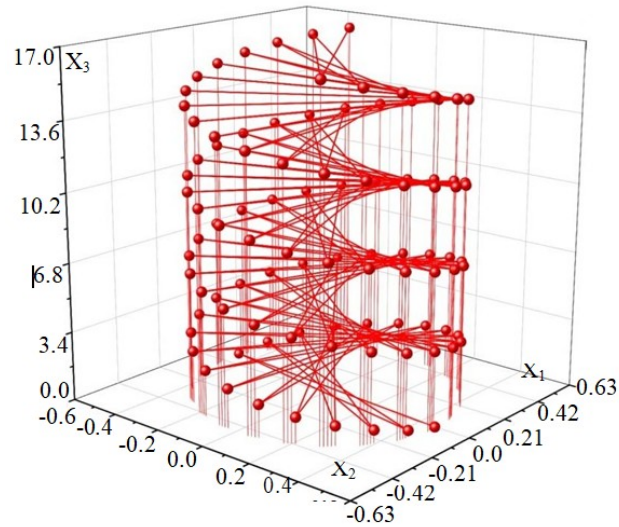


Рис. 5. Траєкторія руху частинки зернового матеріалу в інерційній системі координат



Рис. 6. Загальний вид модифікованого самопересувного вібропневмовідцентрового сепаратора А1-БЦС-100

З використанням удосконаленої механіко-математичної моделі вібропневмовідцентрового фракціонування ЗМ за густиною визначені

раціональні значення та діапазони значень технічних параметрів процесу. Так амплітуда і частота коливань робочої поверхні знаходяться в діапазонах  $A=(35...50)\cdot 10^{-5}$  м,  $\omega=15,0...15,6$  рад/с. Кругова частота обертання робочої поверхні  $\omega=24...25$  рад/с. Швидкість потоку повітря  $V=2$  м/с. При цьому зроблено наступні припущення для значень вихідних параметрів: густина повітря  $\rho_n=1,29$  кг/м<sup>3</sup>; густина частинок ЗМ  $\rho_{ч}=1183$  кг/м<sup>3</sup>; коефіцієнт тертя частинок ЗМ  $f=0,45$ ; еквівалентний радіус частинки ЗМ  $a=0,0021$  м. За таких параметрів існує можливість розділяти ЗМ на дві фракції: «важка» (частинки ЗМ з високою густиною) та «легка» (частинки ЗМ з меншою густиною).

Експериментально доведено ефективність застосування удосконаленої механіко-математичної моделі фракціонування ЗМ на вібропневмовідцентровому сепараторі А1-БЦС-100. Встановлено, що за використання параметрів рекомендованих виробником, відбувається незначне перекриття значень густини отриманих фракцій ЗМ. Так верхня межа «легкої» фракції 1100 кг/м<sup>3</sup>, а нижня межа «важкої» фракції становить 1000 кг/м<sup>3</sup>. Тобто шароподібні модельні тіла з густиною 1000 та 1100 кг/м<sup>3</sup> входять як до «легкої» фракції моделі ЗМ так і до «важкої». Тобто відбувається розділення моделі ЗМ з ефективністю очищення 60...80 %, як попереджає виробник вібропневмовідцентрового сепаратору.

За використання параметрів, визначених за допомогою удосконаленої механіко-математичної моделі, такого перекриття в діапазоні досліджуваної густини фракцій не спостерігається. Тобто для даної моделі ЗМ відбувається розділення компонентів з ефективністю 100 %.

Необхідно відмітити, що в даній моделі ЗМ не врахована наявність фракцій з проміжною густиною, а також різна форма реальних ЗМ. Однак переваги застосування удосконаленої механіко-математичної моделі для розрахунку раціональних параметрів роботи вібропневмовідцентрового сепаратору очевидні.

Також необхідно відмітити, що продуктивність вібропневмовідцентрового сепаратору за параметрів, визначених за допомогою удосконаленої механікоматематичної моделі, склала 60 т/год. В той же час продуктивність сепаратору за параметрів, що пропонуються виробником, склала 54 т/год.

Таким чином, врахування взаємодії дискретної та неперервної фаз ЗМ та їх коефіцієнта динамічної в'язкості в удосконаленій механіко-математичній моделі фракціонування надає можливість збільшити продуктивність вібропневмовідцентрового сепаратору на 9 %. При цьому ефективність розділення ЗМ може бути доведена до 100 %.

Імовірною перспективою подальших досліджень є автоматизація налаштування вібропневмовідцентрових сепараторів з використанням удосконаленої механіко-математичної моделі.

#### 4. ДИНАМІКА ДИСИПАТИВНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

Розглянемо розрахунок вільних коливань лінійно пружних осциляторів методом енергетичного балансу. Названий метод дозволяє наближено обчислювати амплітуду затухаючих коливань, без побудови розв'язків диференціальних рівнянь руху, що суттєво спрощує теорію. Але для одержання розрахункових формул доводиться апріорі наближено задавати закони руху осцилятора на певних проміжках часу та припускати малу зміну амплітуди за один цикл коливань. У результаті таких спрощень вираз обвідної графіка коливань стає розв'язком диференціального рівняння першого порядку, який легко одержати в аналітичній формі. Користуючись цим способом, в [54] розглядали коливання при різних варіантах одночленної степеневій апроксимації сили опору. Тут проводиться узагальнення теорії на випадок спільної дії декількох сил опору, або однієї сили, що описується поліномом. Крім диференціальної форми МЕБ, у цьому розділі реалізується також алгебраїчна форма методу, де для обчислення амплітуд коливань доводиться розв'язувати не диференціальне, а алгебраїчне рівняння. У підсумку послідовне обчислення амплітуд коливань зводиться до використання рекурентної формули. Порівняння числових результатів, одержаних енергетичним методом, з тими, що отримано в другому розділі на підставі точних розв'язків диференціальних рівнянь руху, підтвердило ефективність МЕБ у розрахунках механічних коливань.

У техніці для зменшення амплітуд коливань використовують демпфери як в'язкого, так і сухого тертя [55]. В'язке тертя суттєво гасить резонансні коливання, а сухе – ефективно зменшує амплітуди коливань поза межами резонансів. Тому, при боротьбі з вібраціями, на елементи конструкцій можуть ставити одночасно обидва види демпферів. Виходячи з цього, в першому розділі розглядали закономірності вільних коливань при спільній дії сил в'язкого і сухого тертя. Використовували метод припасовування розв'язків. Тут наближено розв'язуємо аналогічну задачу методом

енергетичного балансу, який ґрунтовно викладено в роботі [56], де розв'язано ряд нелінійних задач. У [56] подана диференціальна форма МЕБ, що призводить до диференціального рівняння обвідної графіка коливань, розв'язок якого дає можливість оцінювати темп затухання коливань.

У цьому параграфі реалізуємо два варіанти МЕБ. У першому варіанті складаємо і аналітично розв'язуємо диференціальне рівняння першого порядку для обвідної графіка коливань, а в другому варіанті не виконуємо цих дій, бо одержуємо алгебраїчне рівняння для обчислення амплітуд.

Колівальний рух системи описуємо диференціальним рівнянням [57]:

$$m_0 \ddot{x} + cx = \Phi(x), \quad (50)$$

у якому

$$\Phi(\dot{x}) = -kx - F_T \text{sign}(x), \quad (51)$$

де  $m$  - маса системи;  $c$  - коефіцієнт жорсткості;  $k$  - коефіцієнт в'язкого тертя;  $F_T$  - сила сухого тертя;  $x = x(t)$  - лінійне горизонтальне переміщення;  $t$  - час; крапка над  $x$  означає похідну по  $t$ .

Якщо рух маси, як матеріальної точки, відбувається на площині, нахилений під кутом  $\alpha$  до горизонту, то за законом Кулона:  $F_T = fmg \cos \alpha$ , де  $f$  - коефіцієнт сухого тертя;  $g$  - прискорення вільного падіння.

Причиною коливань вважаємо початкове відхилення системи вліво (протилежно напрямку вісі  $ox$  від положення рівноваги на відстань  $a_0$ ). Тому рівняння (50) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = -a_0 < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (52)$$

На першому напівциклі коливань, коли система рухається горизонтально зліва направо у додатному напрямі вісі  $ox$ ,  $\text{sign}(\dot{x}) = 1$  і згідно з (51):

$$\Phi(\dot{x}) = -kx - F_T. \quad (53)$$

Переміщення системи при цьому апроксимуємо виразом:

$$x(t) = -a \cdot \cos \omega t, \quad (54)$$

де  $\omega = \sqrt{c/m}$  - частота коливань;  $a = a(t)$  - монотонна функція, яка дуже повільно змінюється у часі.

Тоді похідна від (54) по  $t$  наближено дорівнює:

$$\dot{x} = a\omega \sin \omega t. \quad (55)$$

Обчислимо роботу  $A$  сили  $\Phi(\dot{x})$  на проміжку часу  $t \in (0; \pi/\omega)$ , що відповідає першому напівциклу,

$$A = - \int_0^{\pi/\omega} \Phi(\dot{x}) x dt. \quad (56)$$

Підставивши в (56) вирази (53) і (55), одержуємо:

$$A = - 2F_T a - \frac{1}{2} \pi k \omega a^2. \quad (57)$$

Реалізуючи перший варіант методу енергетичного балансу, зміну потенціальної енергії  $\Delta u$  на першому напівциклі коливань подаємо наближеною формулою [56]:

$$\Delta u = c \frac{\pi}{\omega} a \frac{da}{dt}. \quad (58)$$

Враховуючи (57) і (58) та умови енергетичного балансу  $\Delta u = A$ , одержуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{da}{dt} = - \frac{k}{2m} a - \frac{2F_T}{\pi \sqrt{cm}}. \quad (59)$$

Його розв'язуємо при початковій умові:

$$a(0) = a_0, \quad (60)$$

що узгоджується з (52).

Розв'язок задачі Коші, поданої виразами (59) і (60), має вигляд:

$$a(t) = a_0 \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right) - \frac{2F_T}{\lambda c} \left[1 - \exp\left(-\frac{kt}{2m}\right)\right], \quad (61)$$

де  $\lambda = \pi k (2\sqrt{cm})^{-1}$ .

Отже, (61) описує верхню обвідну графіка коливань.

Формула (61) дає можливість наближено обчислити час руху  $t_*$  осцилятора до повної його зупинки. Поклавши в (61)  $a(t)=0$ , одержуємо рівняння, коренем якого є:

$$t_* = \frac{2m}{k} \ln \left( 1 - \frac{c\lambda a_0}{2F_T} \right). \quad (62)$$

Із (62) витікає, що коли  $F_T \rightarrow 0$ , то  $t_* \rightarrow \infty$ . При  $k \rightarrow 0$  маємо невизначеність типу  $\left| \frac{0}{0} \right|$ . Розкривши її, одержуємо:

$$t_* = \pi a_0 - \frac{\sqrt{cm}}{2F_T}.$$

Отже, при відсутності сили сухого тертя ( $F_T = 0$ ), незалежно від  $k$  тривалість руху осцилятора нескінченна, а при  $k = 0$ ,  $F_T > 0$  осцилятор здійснює на протязі  $t \in (0; t_*)$  обмежену кількість напівциклів  $n_*$ , причому

$$n_* \leq \text{ціла частина} \left( \frac{ca_0}{2F_T} \right) + 1.$$

Щоб знайти амплітудне відхилення осцилятора в кінці першого напівциклу  $a_1$ , підставимо в (61) значення  $t = \pi / \omega$ . Тоді:

$$a_1 = a_0 q - \frac{2F_T}{\lambda c} (1 - q),$$

де  $q = \exp(-\lambda)$ .

Структура останньої формули не зміниться і при розгляді інших напівциклів. Тому:

$$a_n = a_{n-1} q - \frac{2F_T}{\lambda c} (1 - q), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (63)$$

Із рекурентного співвідношення (63), як окремі випадки, впливають відомі залежності. Так, при відсутності сили сухого тертя ( $F_T = 0$ ):

$$a_n = q a_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Спадання амплітуд підпорядковано закону геометричної прогресії зі знаменником  $q < 1$ .



Якщо  $k \rightarrow 0$ , то  $q \rightarrow 1$ ;  $1 - q \rightarrow \lambda$  і граничний перехід в (63) дає:

$$a_n = a_{n-1} - \frac{2F_T}{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Тут спадання амплітуд відбувається за законом арифметичної прогресії, що узгоджується з давно відомими результатами [58; 59].

Амплітудне відхилення системи в кінці  $n$ -го напівциклу  $a_n$  можна також виразити через початкове відхилення  $a_0$ . Використовуючи формулу суми членів геометричної прогресії та (63), одержуємо:

$$a_n = a_0 q^n - \frac{2F_T}{c\lambda}(1 - q^n), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

що є альтернативною співвідношенню (63).

Далі розглянемо другий варіант методу енергетичного балансу. Зміну потенціальної енергії  $\Delta u$  на першому напівциклі коливань подаємо у вигляді:

$$\Delta u = c(a_1 - a_0)a, \quad (64)$$

де  $a = \frac{a_0 + a_1}{2}$ .

Прирівнявши  $\Delta u$  до  $A$ , з урахуванням виразів (57) і (64), одержуємо лінійне рівняння з невідомим  $a_1$ :

$$c(a_1 - a_0) = 2F_T + \frac{\pi k}{4} \sqrt{\frac{c}{m}} (a_1 + a_0).$$

Із нього випливає, що:

$$a_1 = a_0 \cdot s - \frac{F_T}{c}(1 + s). \quad (65)$$

Тут  $s = \left(1 - \frac{\pi k}{4\sqrt{cm}}\right) \left(1 + \frac{\pi k}{4\sqrt{cm}}\right)^{-1}$ .

Узагальнивши (3.16), одержуємо рекурентне співвідношення:

$$a_n = a_{n-1} \cdot s - \frac{F_T}{c}(1 + s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Наближена формула (66) відрізняється від точної формули в [57] тим, що у точному розв'язку задачі:

$$s = \exp(-\lambda).$$

Тому похибка формули (66) пов'язана з похибкою апроксимації:

$$\exp(-\lambda) \approx \frac{1 - 0,5\lambda}{1 + 0,5\lambda}.$$

Інформацію про умовно точні (до  $10^{-4}$ ) та наближені значення експоненти надаємо в табл. 5.

Таблиця 5 – Похибки апроксимації при різних  $\lambda$

$\lambda$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\exp(-\lambda)$	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065
$\frac{1 - 0,5\lambda}{1 + 0,5\lambda}$	0,9048	0,8182	0,7391	0,6667	0,6000
похибка %	0	0,061	0,229	0,537	1,072

При  $0 \leq \lambda < 0,5$  похибка апроксимації знаходиться у межах одного відсотка.

Перетворивши (66), одержуємо вираз  $a_n$  через  $a_0$ :

$$a_n = \left( a_0 - \frac{F_T}{c} \right) \cdot s^n - 2 \frac{F_T}{c} \frac{1 - s^n}{1 - s} + \frac{F_T}{c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Ця формула є альтернативною до (66).

Порівняльний аналіз результатів розрахунку. Для проведення обчислень приймали:  $m = 3$  кг;  $c = 1962$  Н/м;  $F_T = 5,886$  Н;  $a_0 = 0,063$  м; та два значення  $k = 5$  кг/с і  $k = 10$  кг/с. Одержані результати записано в табл. 6.

Символом \* позначено розмахи, при яких система не проходить положення  $x = 0$ .

Запозичені з [57] значення  $a_n$ , обчислені там на основі точного розв'язку задачі динаміки.

Таблиця 6 – Значення  $100a_n, м$ 

n	k = 5 кг/с			k = 10 кг/с		
	із [57]	формула (63)	формула (66)	із [57]	формула (63)	формула (66)
1	5,116	5,117	5,116	4,587	4,591	4,586
2	4,047	4,048	4,047	3,192	3,198	3,190
3	3,082	3,084	3,082	2,055	2,064	2,053
4	2,211	2,214	2,211	1,130	1,139	1,127
5	1,425	1,428	1,425	0,376	0,386	0,374
6	0,716	0,719	0,715	0,238*	0,228*	0,240*
7	0,075	0,079	0,075	-	-	-

У табл. 6 маємо гарну узгодженість результатів, одержаних різними методами. Другий варіант методу енергетичного балансу виявився більш точним, ніж перший варіант методу.

Отже, розрахунки і порівняльний аналіз підтвердили, що метод енергетичного балансу дає можливість простим способом одержати наближені формули високої точності для обчислення амплітуд коливань механічної системи з комбінаційним тертям. Збільшення коефіцієнта в'язкого тертя прискорює темп згасання амплітуд та зменшує кількість напівциклів, зроблених осцилятором за час руху.

Розрахунок вимушених резонансних коливань має важливе значення в інженерній справі, бо саме такі коливання відносяться до найбільш небезпечних з позицій руйнування елементів конструкцій або втрати їх працездатності. Тому вимушені коливання нелінійних систем були і залишаються предметом численних наукових досліджень в [60-69].

Розглядаючи вільні коливання дисипативних осциляторів у [70], було встановлено, що МЕБ дає можливість одержати досить точні розрахункові формули, без пошуку аналітичних розв'язків рівнянь руху. Виходячи з цього, далі з'ясуємо можливості названого методу в розрахунках вимушених

коливань, спричинених зовнішньою силою, яка змінюється за законом «ступінчастого синуса». Таке зовнішнє збудження дає найбільші величини амплітуд резонансних коливань. У підсумку воно призводить до верхніх оцінок амплітуд, які може викликати дія інших періодичних, зокрема гармонічних, сил, що має важливе практичне значення.

З метою подальшого порівняння числових результатів, одержаних різними методами, розглянемо коливання осциляторів при дії окремих сил тертя, тобто наближено розв'яжемо задачі, точні розв'язки яких уже побудовано в другому розділі.

Коливання осцилятора, при одночасній дії вказаних дисипативних сил описуємо рівнянням (67):

$$m\ddot{x} + kx + cx = Q \cdot \text{sign } x. \quad (67)$$

де  $Q = F - F_T > 0$  - різниця значень збурюючої сили і сили сухого тертя.

Щоб застосувати МЕБ, перепишемо (67) у вигляді:

$$m\ddot{x} + cx = \Phi(x),$$

де  $\Phi(\dot{x}) = -kx + Q \cdot \text{sign}(x)$ .

Обчисливши роботу сили  $\Phi(\dot{x})$  на першому напівциклі коливань, одержуємо:

$$A = -2Qa - \frac{1}{2}\pi k \omega a^2.$$

Тут  $a = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)$ ;  $\omega = (c/m - k^2/(4m^2))^{1/2}$ .

Прирівнявши роботу  $A$  зміні потенціальної енергії системи  $\Delta u = 0,5c(a_1^2 - a_0^2)$ , отримуємо рівняння:

$$a_1 - a_0 = \frac{2Q}{c} - \frac{\pi k \omega}{4c}(a_1 + a_0),$$

із якого випливає, що:

$$a_1 = a_0 \cdot s + \frac{Q}{c}(1 + s). \quad (68)$$

При цьому:  $s = \left(1 - \frac{\pi k \omega}{4c}\right) \cdot \left(1 + \frac{\pi k \omega}{4c}\right)^{-1}$ .

Узагальнивши (68) на випадок  $n$ -го напівциклу, розрахунок розмахів вимушених коливань зводимо до рекурентного співвідношення:

$$a_n = a_{n-1} \cdot s + \frac{Q}{c}(1 + s), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (69)$$

Формулу (69) можна одержати уведенням апроксимації [70]:

$$q = \exp\left(-\frac{\pi k}{2m\omega}\right) \approx s = \frac{1 - \pi k \omega / (4c)}{1 + \pi k \omega / (4c)}. \quad (70)$$

Отже похибка МЕБ є по суті похибкою апроксимації (70).

Прийнявши в (69)  $a_n = a_{n-1} = a_*$ , одержуємо формулу для обчислення амплітуди усталеного резонансного режиму

$$a_* = \frac{Q}{c} \frac{1 + s}{1 - s}.$$

При  $m = 2$  кг;  $c = 1800$  Н/м;  $k = 20$  кг/с;  $Q = 15$  Н. Маємо:  $s \approx 0,5897$ ;  $a_* \approx 0,0323$  м.

Обчислені по формулі (69) значення  $a_n$  для цих числових даних записано в табл. 7.

Таблиця 7 – Значення  $100a_n$ , м при різних  $a_0$

$n$	$a_0 = 0,04$ м	$a_0 = 0,02$ м	$n$	$a_0 = 0,04$ м	$a_0 = 0,02$ м
1	3,683	2,504	4	3,322	3,080
2	3,496	2,801	5	3,284	3,141
3	3,387	2,977	6	3,261	3,177

Наближені значення розмахів в табл. 7 мало відрізняються від точних результатів одержаних в [70], що засвідчує прийнятність МЕБ і в розрахунках вимушених коливань.

Використовуюючи МЕБ, одержимо наближені оцінки амплітуди усталених резонансних коливань, спричинених дією на осцилятор зовнішньої гармонічної сили.

Розглянемо випадок, коли переміщення осцилятора описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \mu x|x| + F_T \text{sign}(x) = P \sin(\omega t).$$

Окрім уведених раніше позначень, тут  $P, \omega$  - відповідно амплітуда і частота збурюючої сили.

Розглянемо резонансний режим коливань ( $\omega = \sqrt{c/m}$ ), коли різниця фаз збурюючої сили і переміщення дорівнює  $\pi/2$ .

Уводячи, як і раніше, апроксимації:

$$x = -a_* \cdot \cos(\omega t); \quad \dot{x} = a_* \omega \sin(\omega t),$$

обчислимо роботу сил опору  $A_1$  і збурюючої сили  $A_2$  на першому напівциклі  $t \in [0; \pi/\omega]$ .

Маємо:

$$A_1 = - \int_0^{\pi/\omega} (k\ddot{x} + \mu x|x| + F_T) x dt = - \frac{1}{2} k \pi \omega a_*^2 - \frac{4}{3} \mu \omega^2 a_*^3 - 2F_T a_*;$$

$$A_2 = - \int_0^{\pi/\omega} P \sin(\omega t) \dot{x} dt = \frac{1}{2} \pi a_* P. \quad (71)$$

Умова енергетичного балансу  $A_1 + A_2 = 0$ , з урахуванням (71), призводить до рівняння:

$$a_*^2 + \frac{3}{8} \frac{k\pi}{\mu\omega} a_* - \frac{3\pi}{8\mu\omega^2} \left( P - \frac{4F_T}{\pi} \right) = 0. \quad (72)$$

При  $\mu = 0, F_T = 0$ , воно має компактний розв'язок:

$$a_* = \frac{P}{k\omega},$$

що давно відомий в теорії резонансних коливань осцилятора з в'язким лінійним опором [54].

Із (72) випливає, що коливання можливі лише при виконанні умови:

$$P > \frac{4F_T}{\pi}. \quad (73)$$

Дещо слабкішу вимогу до амплітуди збурюючої сили

$$P > F_T,$$

з цього приводу, наведено в [54].

Якщо виконується умова (73) і  $\mu = 0$ , то:

$$a_* = \frac{\pi P - 4F_T}{k\pi\omega}.$$

При наявності квадратичного опору ( $\mu \neq 0$ ) розв'язком рівняння (73) є:

$$a_* = \sqrt{\frac{D^2}{4} + B} - \frac{D}{2}, \quad (74)$$

причому  $D = \frac{3k\pi}{8\mu\omega}$ ;  $B = \frac{3\pi}{8\mu\omega^2} \left( P - \frac{4F_T}{\pi} \right) > 0$ .

Узагальнимо одержані результати на випадок, коли крім врахованих сил опору, ще додатково в системі є позиційне тертя. Тоді роботу  $A_1$  слід доповнити зміною потенціальної енергії на одному напівциклі коливань, яка дорівнює  $\frac{1}{2}(c_1 - c_2)a_*^2$ . Тут  $c_1$  - жорсткість пружини при її розвантаженні, а  $c_2$  - жорсткість при навантаженні, причому  $c_{1,2} = c \mp \Delta c$ . Для оцінки амплітуди коливань, при  $\mu = 0$ , одержуємо формулу:

$$a_* = \frac{\pi P - 4F_T}{k\pi\omega + c_2 - c_1}.$$

Якщо ж  $\mu \neq 0$ , то для обчислення  $a_*$  збережеться формула (74), але в ній треба  $D$  замінити виразом:

$$D = \frac{3}{8\mu\omega^2} (k\pi\omega + c_2 - c_1). \quad (75)$$

Результати обчислень коефіцієнта динамічності системи:

$$K_g = a_* c P^{-1} \quad (76)$$

по формулах (74), (75), (76) записано в табл. 8. Вони одержані при  $m = 5$  кг;  $c = 4500$  Н/м;  $F_T = 4$  Н;  $\mu = 15$  кг/м для двох значень  $\Delta c$ , двох значень  $P / F_T$  і п'яти значень  $k$ .

Таблиця 8 – Значення  $K_g$

$k$ , кг/с	$P / F_T = 5$		$P / F_T = 10$	
	$\frac{\Delta c}{c} = 0,025$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,05$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,025$	$\frac{\Delta c}{c} = 0,05$
10	5,249	4,857	4,647	4,404
20	3,863	3,617	3,733	3,553
30	2,985	2,825	3,060	2,927
40	2,405	2,297	2,562	2,463
50	2,004	1,926	2,188	2,113

Як бачимо, збільшення  $k$  і  $\Delta c / c$  понижує коефіцієнт динамічності. Оскільки система нелінійна, то  $K_g$  залежить і від амплітуди  $P$  збурюючої сили. Така залежність відсутня в лінійних системах.



## 5. ПРОГНОЗУВАННЯ І УПРАВЛІННЯ НАДІЙНІСТЮ ПРИ ПУАСОНІВСЬКОМУ ПОТОЦІ НАВАНТАЖЕНЬ

Оскільки екстремальні навантаження відносяться до рідкісних випадкових подій [71], то прогнозування показників надійності в залежності від напрацювання доцільно проводити у припущенні, що випадковий потік екстремальних навантажень є пуасонівським. Тоді ймовірність безвідмовної роботи можна визначати за допомогою виразу, в якому при наявності випадкового розсіювання несучої здатності умовні ймовірності  $R_i$  визначаються з виразів виду:

$$R_i = \int_0^{\infty} F^i(P) g(P) dP = \int_0^1 F_1^i(G) dG = \int_0^1 F^i g_1(F) dF. \quad (77)$$

$$R(t) = \int_0^{\infty} g(P) e^{-\bar{m}(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\bar{m}(t))^i F^i(P)}{i!} dP. \quad (78)$$

Слідуючи [72], можна замінити суму ряду, що входить в (78), експонентою і отримати загальний вигляд виразу для ймовірності безвідмовної роботи залежно від напрацювання:

$$R(t) = e^{-\bar{m}(t)} \int_0^{\infty} e^{\bar{m}(t)F(P)} g(P) dP. \quad (79)$$

Переходячи в (79) з урахуванням (77) до одиничних розподілів, отримаємо дві більш прості форми виразів для ймовірності безвідмовної роботи:

$$R(t) = \int_0^1 e^{-\bar{m}(t)[1-F_1(G)]} dG = \int_0^1 e^{-\bar{m}(t)(1-F)} g_1(F) dF. \quad (80)$$

Якщо потік екстремальних навантажень є стаціонарний з постійною інтенсивністю  $\omega_0 = 1/T_0$ , то виходячи з (80), ймовірність безвідмовної роботи визначається виразами

$$R(t) = \int_0^1 e^{-\omega_0 t [1 - F_1(G)]} dG = \int_0^1 e^{-\omega_0(t)(1-F)} g_1(F) dF. \quad (81)$$

Вхідна в (81) функція одиничного розподілу навантаження  $F_1(G)$  залежить як від виду розподілів навантаження і несучої здатності, так і від величини їх параметрів [73-75]. Наприклад, в разі несприятливого в сенсі надійності поєднання розподілів Фреше для навантаження і Вейбулла для несучої здатності маємо такий вираз цієї функції:

$$F_1(G) = \exp \left\{ - \left( \frac{\Gamma(1 + 1/b)}{\bar{K} \Gamma(1 - 1/\rho)} \right)^\rho [-\ln(1 - G)]^{-\rho/b} \right\}, \quad (82)$$

в якому  $\rho$  і  $b$  – параметри форми законів Фреше і Вейбулла, однозначно залежать від коефіцієнтів варіації навантаження  $V_H$  і несучої здатності  $V_n$ .

У формулу (82) входить і коефіцієнт запасу  $\bar{K}$ , за допомогою завдання якого в основному і може забезпечуватися необхідний рівень надійності при проектуванні.

Інтенсивність відмов при постійній інтенсивності навантажень  $\omega_0$  визначається формулою:

$$\lambda(t) = \omega_0 \left( 1 - \frac{\int_0^1 F_1(G) e^{\omega_0 t F_1(G)} dG}{\int_0^1 e^{\omega_0 t F_1(G)} dG} \right). \quad (83)$$

З (83) слідує, що при постійній інтенсивності навантажень інтенсивність відмов  $\lambda(t)$  є монотонно спадаючою функцією напрацювання. У найпростішому варіанті, коли навантаження і несуча здатність мають розподіли Вейбулла або Фреше з однаковими коефіцієнтами варіації, а коефіцієнт запасу  $\bar{K} = 1$ , отримаємо, що  $F_1(G) = G$ .

Тоді з (81) виходить аналітичний вираз для ймовірності безвідмовної роботи залежно від напрацювання:

$$R(t) = \frac{1 - e^{-\omega_0 t}}{\omega_0 t}. \quad (84)$$

Перейшовши до безрозмірної змінної  $\tau = \omega_0 t$ , можна отримати вираз для середнього напрацювання до раптової відмови

$$T = \int_0^{\infty} R(t) dt = \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau. \quad (85)$$

Використання табличного [76] інтегралу

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau = E_1(x) + \ln|x| + C_0,$$

де  $E_1(x)$  – інтегральна показова функція;  $C_0 = 0,57721\dots$  – стала Ейлера; дозволяє зробити висновок про те, що інтеграл в (85) розходиться і, отже, в межах даної моделі не існує кінцевої величини у середнього напрацювання до відмови. Такий результат виходить при  $\bar{K} = 1$ , але враховуючи, що зі збільшенням коефіцієнту запасу збільшується і  $R(t)$ , логічно очікувати, що і при  $\bar{K} > 1$  величина  $T \rightarrow \infty$ . Тому при стаціонарному пуассонівському потоці навантажень і випадковому необмеженому зверху розсіюванні несучої здатності деяка частина навантажувальних елементів буде залишатися працездатною при будь-якому збільшенні напрацювання.

В окремому випадку, якщо екстремальні навантаження і несуча здатність є подібними випадковими величинами і розподілені за законом Вейбулла з одним і тим же параметром форми  $b$ , то з (81) можна отримати аналітичний вираз для прогнозування ймовірності безвідмовної роботи залежно від напрацювання. У цьому випадку функція одиничного розподілу навантаження  $F_1(G) = 1 - (1 - G)^{\bar{K}^b}$ , і після підстановки якої в (81) отримаємо:

$$R(t) = \int_0^1 e^{-\omega_0 t (1-G)^{\bar{K}^b}} dG. \quad (86)$$

Заміна змінної  $x = (1 - G)^{\bar{K}^b}$  призводить цей інтеграл до вигляду:

$$R(t) = \frac{1}{\bar{K}^b} \int_0^1 e^{-\omega_0 t x} x^{\frac{1}{\bar{K}^b}-1} dx. \quad (87)$$

Після інтегрування і перетворень (87) виражається за допомогою табульованих гамма-функцій [40] у вигляді

$$R(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}, \omega_0 t\right)}{(\omega_0 t)^{\frac{1}{\bar{K}^b}}} + e^{-\omega_0 t}, \quad (88)$$

де  $\Gamma(\alpha, \omega_0 t) = \int_{\omega_0 t}^{\infty} e^{-y} y^{\alpha-1} dy$  - неповна гамма-функція.

Можна показати, що при  $\bar{K} = 1$  вираз (88) збігається з (84).

Обчислення в (88) повної  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}\right)$  і неповної  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}, \omega_0 t\right)$  гамма-функцій можна здійснювати за допомогою комп'ютерного математичного пакету Mathcad [77, 78]. Для наближених обчислень неповної гамма-функції в інженерних розрахунках можна використовувати [79] її розклад Лежандра в безперервний (ланцюговий) дріб:

$$\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}, \omega_0 t\right) \cong \frac{e^{-\omega_0 t} (\omega_0 t)^{1 + \frac{1}{\bar{K}^b}}}{\omega_0 t - \frac{\frac{1}{\bar{K}^b}}{1 + \frac{1}{\omega_0 t + \frac{1 - \frac{1}{\bar{K}^b}}{2}}{1 + \frac{1}{\omega_0 t + 2 - \frac{1}{\bar{K}^b}}}}}. \quad (89)$$

При досить великих значеннях коефіцієнту запасу, якщо  $\omega_0 t \geq 10$ , то неповна гамма-функція  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}, \omega_0 t\right) \approx 0$  і  $e^{-\omega_0 t} \approx 0$ . В цьому випадку прогнозування ймовірності безвідмовної роботи можна виконувати за допомогою наближеної формули:

$$R(t) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}\right)}{(\omega_0 t)^{\frac{1}{\bar{K}^b}}}. \quad (90)$$

Виходячи з (90) і вважаючи, що  $\Gamma\left(1 + \frac{1}{\bar{K}^b}\right) \approx 1$ , для ймовірно обґрунтованого коефіцієнту запасу при досить великій гарантованій ймовірності  $R(t_y) = \gamma > 0,95$  отримаємо наближену залежність:

$$\bar{K}_y(t_y) = \left( \frac{\ln \omega_0 t_y}{\ln \frac{1}{\gamma}} \right)^{\frac{1}{b}}, \quad (91)$$

яка дає свідомо завищену оцінку для  $\bar{K}_y(t_y)$  і справедлива при  $\omega_0 t_y \geq 10$ .

Отримати аналітичний вираз для ймовірності безвідмовної роботи, виходячи з (80), можна також в разі подібних величин навантаження і несучої здатності, якщо вони мають розподіл Фреше. Тоді, відповідно до (80) маємо:

$$R(t) = \int_0^1 e^{-\bar{m}(t) \left(1 - G \frac{1}{\bar{K}^\rho}\right)} dG. \quad (92)$$

Роблячи в (92) заміну змінної  $x = G \frac{1}{\bar{K}^\rho}$ , отримаємо вираз, зручний для інтегрування:

$$R(t) = e^{-\bar{m}(t)} \bar{K}^\rho \int_0^1 e^{\bar{m}(t)x} x^{\bar{K}^\rho - 1} dx. \quad (93)$$

Інтеграл в (93) є табличним [80] і при цілих значеннях  $\bar{K}^\rho$  обчислюється в замкненому вигляді. В результаті виходить вираз для ймовірності безвідмовної роботи у вигляді кінцевої суми:

$$R(t) = (k+1) \left[ \frac{1}{\bar{m}(t)} + \sum_{i=1}^k (-1)^i \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{[\bar{m}(t)]^{i+1}} + (-1)^{k+1} \frac{k! e^{-\bar{m}(t)}}{[\bar{m}(t)]^{k+1}} \right], \quad (94)$$

де  $k = \bar{K}^\rho - 1$ .

Формулу (94) зручно використовувати тільки при досить малих цілих значеннях  $\bar{K}^\rho$ . Тому в загальному випадку доцільно застосовувати вираз виду (92), з використанням чисельного інтегрування. Виходячи з (93), при  $\bar{K} = 1$  і  $F_1(G) = G$  після інтегрування може бути отримано вираз для інтенсивності відмов в явному вигляді:

$$\lambda(t) = \frac{e^{\omega_o t} - \omega_o t - 1}{t(e^{\omega_o t} - 1)}. \quad (95)$$

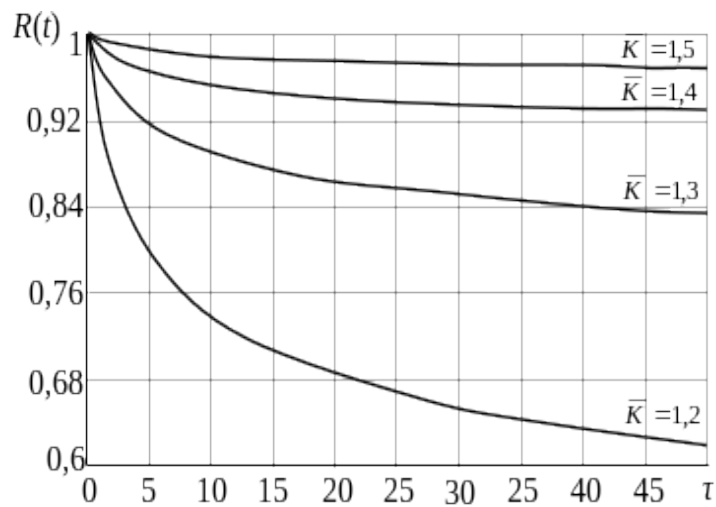
Можна показати, що в цьому окремому випадку  $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda(t) = \frac{\omega_o}{2}$ , а далі зі збільшенням напруження функція інтенсивності відмов монотонно спадає, прагнучи до нуля. У загальному випадку з (93) випливає, що початкове (найбільше) значення інтенсивності відмов при  $t = 0$  визначається формулою:

$$\lambda(0) = \omega_o \left( 1 - \int_0^1 F_1(G) dG \right) = \omega_o (1 - R_1). \quad (96)$$

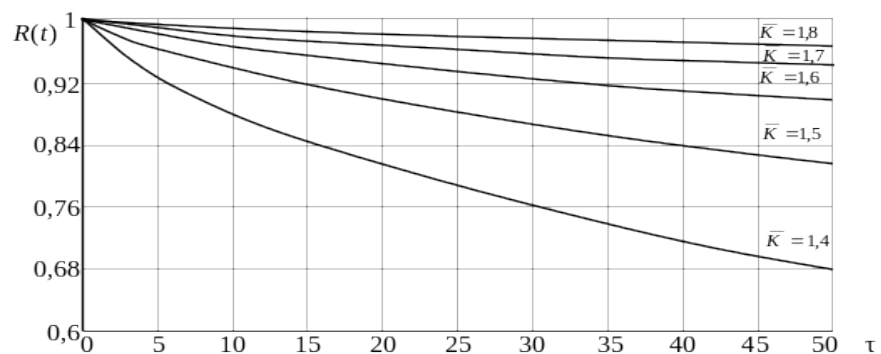
Отже, в порівнянні з інтенсивністю потоку екстремальних навантажень  $\omega_o$  початкове значення інтенсивності відмов зменшується пропорційно величині ймовірності відмови при першому навантаженні. За формою виразу (96) збігається з (97), однак, по-перше, ймовірності  $R_1$  і  $R_1(K)$ , що входять до них, обчислюються по-різному, а по-друге, при випадковому розсіюванні несучої здатності інтенсивність відмов є монотонно спадаючою, починаючи від  $\lambda(0)$ , функцією напруження.

На рис. 7 показані графіки ймовірності безвідмовної роботи залежно від безрозмірного напруження  $\tau = \omega_o t$ . Криві на рис. 7, а побудовані за допомогою загального виразу (81) при  $F_1(G) = 1 - (1 - G)^{\bar{K}^b}$ , що відповідає

розподілу Вейбулла для навантаження і несучої здатності. При цьому  $b = 12,15$  (коефіцієнт варіації навантаження і несучої здатності  $V = 0,1$ ).



а



б

а - закон Вейбулла для навантаження і несучої здатності;

б - поєднання законів Фреше і Вейбулла

Рис. 7 – Графіки кривих зміни ймовірності безвідмовної роботи в залежності від напрацювання і коефіцієнту запасу

На рис. 7, б наведено також графіки ймовірності безвідмовної роботи, які відповідають несприятливому поєднанню розподілів навантаження по

закону Фреше і несучий здатності за законом Вейбулла. Ці графіки побудовані за допомогою загального виразу (81), в якому функція одиничного розподілу навантаження визначалася за формулою (82), а коефіцієнти варіації навантаження і несучої здатності  $V_n = V_\pi = 0,1$  забезпечувалися за рахунок значень параметрів форми:  $\rho = 13,62$  і  $b = 12,15$ .

З аналізу графіків, показаних на рис. 7, очевидна можливість ефективного управління надійністю за допомогою зміни коефіцієнтів запасу за середніми  $\bar{K}$ . При цьому можна забезпечувати необхідну ймовірність безвідмовної роботи  $\mathcal{Y}$  з урахуванням періоду  $\tau_y$ , протягом якого гарантовано повинна виконуватися умова:

$$R(\tau_y) \geq \mathcal{Y}, \quad \text{якщо } \tau \leq \tau_y. \quad (97)$$

Наведені на рис. 7 графіки вказують на можливість стабілізації рівня безвідмовності елементів за рахунок збільшення коефіцієнтів запасу і відповідного зменшення впливу напрацювання на ймовірність безвідмовної роботи. З порівняння графіків на рис. 7 а) і 7 б), які побудовані при одному й тому ж рівні випадкового розсіювання навантаження і несучої здатності, виходить, що істотно впливає на характер зміни і величину ймовірності безвідмовної роботи вид використовуваних розподілів навантаження і несучої здатності. Тому в умовах невизначеності інформації щодо дійсного виду цих розподілів з метою забезпечення гарантованого результату при управлінні надійністю можна рекомендувати використання виразу (82) для функції одиничного розподілу навантаження  $F_1(G)$ , що входить в загальний вираз (81) для прогнозу ймовірності безвідмовної роботи. Так як випадкове розсіювання несучої здатності елементів має суттєвий вплив на величину гарантованого напрацювання  $\tau_y$ , то це свідчить про доцільність та ефективність зменшення ступеня розсіювання несучої здатності при забезпеченні надійності.



Розглянемо числовий приклад, який ілюструє характер поведінки інтенсивності відмов в залежності від напрацювання при стаціонарному пуасонівському потоці навантажень. Нехай середній період між навантаженими  $T_o = 100$  од. напрацювання і, отже, інтенсивність пуасонівського потоку навантажень  $\omega_o = 0,01$  (на рис. 8 показана штриховою лінією). Якщо випадкове навантаження має розподіл Вейбулла з коефіцієнтом варіації  $V_n = 0,1$  і параметром форми  $b_n = 12,15$ , то при детермінованій постійній несучій здатності і коефіцієнті запасу  $K = 1$  інтенсивність відмов у відповідності з виразом (87) визначається наступним чином:

$$\lambda = 0,01 \cdot \exp \left\{ - \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{1}{12,15} \right) \right]^{12,15} \right\} = 0,00549.$$

Це постійне значення інтенсивності відмов показано на рис. 8 горизонтальною прямою 1. Нижче на рис. 8 наведено графік інтенсивності відмов в разі, коли несуча здатність є фіксованою в часі випадковою величиною, розподіленою так само, як і навантаження за законом Вейбулла з параметром  $b_n = b_n = 12,15$ , а коефіцієнт запасу  $\bar{K} = 1$ . Цей графік (крива 2) побудований за формулою (95) і має спадаючий характер в залежності від безрозмірного напрацювання  $\omega_o t$ . Якщо коефіцієнт запасу  $\bar{K} > 1$ , то в даному випадку  $F_1(G) = 1 - (1 - G)^{\bar{K}b}$  і розрахунок інтенсивності відмов ведеться за загальною формулою (83) з використанням чисельного інтегрування. Таким способом на рис. 8 побудовані: крива 3 (при  $\bar{K} = 1,1$ ) та крива 4 (при  $\bar{K} = 1,2$ ). Вони мають монотонно спадаючий характер, а також показують вплив збільшення коефіцієнту запасу на зниження інтенсивності відмов.

Зокрема, початкове (найбільше) значення інтенсивності відмов в даному випадку з урахуванням (5.86) може бути визначено за формулою:

$$\max \lambda(t) = \lambda(0) = \frac{\omega_0}{\bar{K}^b + 1}. \quad (98)$$

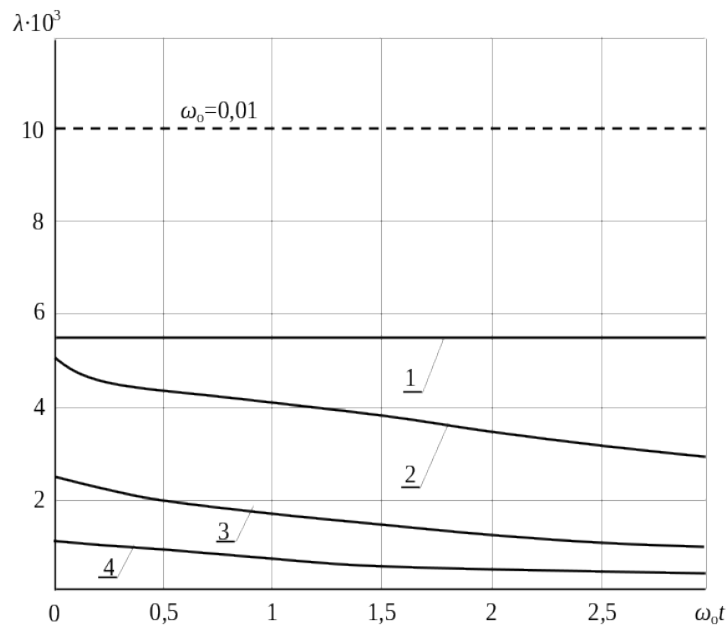


Рис. 8 – Графіки функції інтенсивності раптових відмов при стаціонарному пуасонівському потоці навантажень

Цей вираз дозволяє при проектуванні призначити величину коефіцієнту запасу, керуючи надійністю виходячи з вимог до рівня безвідмовності елементу в початковий період експлуатації. Спадання функції інтенсивності відмов  $\lambda(t)$  вказує на те, що на відміну від варіанту, коли немає випадкового розсіювання несучої здатності у елементів, при наявності такого розсіювання і стаціонарному пуасонівському потоці навантажень потік відмов у сукупності елементів відрізняється від пуасонівського. При цьому і розподіл випадкового напрацювання між відмовами буде відрізнятися від експоненціального. Спадаючий характер інтенсивності відмов в залежності від терміну експлуатації при крихкому руйнуванні сталевих конструкцій підтверджується статистичними даними, наведеними в [81].

Максимальна величина інтенсивності відмов, визначається виразом (96), може бути зменшена в порівнянні з інтенсивністю навантажень  $\omega_o$  за рахунок відповідного завдання коефіцієнтів запасу. У разі розподілу Вейбулла у подібних величин навантаження і несучої здатності для цього призначена формула (98). Якщо використовувати розподіл Фреше, то  $\max \lambda(t) = \frac{\omega_o}{\bar{K}^\rho + 1}$ . У разі несприятливого поєднання розподілів навантаження і несучої здатності (розподілу Фреше і Вейбулла) управління надійністю можна здійснювати за допомогою даних про верхні межі коефіцієнта запасу. Так, якщо при значеннях коефіцієнтів варіації навантаження  $V_n = 0,2$  і несучої здатності  $V_n = 0,1$  потрібно зменшити максимум інтенсивності відмов у порівнянні з інтенсивністю навантажень в сто раз, то для цього достатнім є коефіцієнт запасу  $\bar{K} = 1,82$ , а щоб знизити до  $0,001\omega_o$ , слід мати  $\bar{K} = 2,511$ .

Наслідком монотонного убуття інтенсивності раптових відмов буде особливість у зміні відповідної умовної ймовірності безвідмовної роботи. Умовна ймовірність безвідмовної роботи  $R\left(\frac{t}{t_o}\right)$  залежить від двох аргументів:  $t_o$  – відпрацьованого безвідмовно попереднього періоду і  $t$  – подальшого напрацювання. Вираз для визначення умовної ймовірності безвідмовної роботи має вигляд:

$$R\left(\frac{t}{t_o}\right) = \frac{R(t_o + t)}{R(t_o)}. \quad (99)$$

Характерна для випадку монотонно спадної інтенсивності відмов закономірність поведінки функції  $R\left(\frac{t}{t_o}\right)$  полягає в тому, що при одному і тому ж значенні подальшого напрацювання  $t$  зі збільшенням попереднього періоду  $t_o$  умовна ймовірність безвідмовної роботи зростає [82]. Це ілюструє

рис. 9, де при тому, що значення умовної ймовірності збільшуються:

$$R\left(\frac{t}{0}\right) < R\left(\frac{t}{t_{o_1}}\right) < R\left(\frac{t}{t_{o_2}}\right).$$

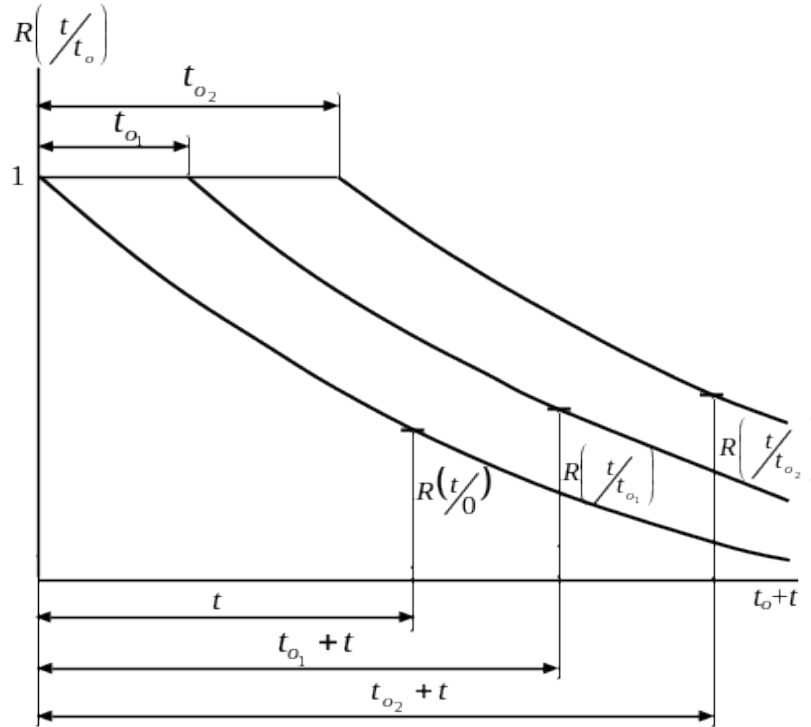


Рис. 9 – Вид графіків зміни умовної ймовірності безвідмовної роботи зі збільшенням відпрацьованого періоду

Отже, при проектуванні базовою характеристикою, що визначає рівень надійності за раптових відмов є функція безумовної ймовірності безвідмовної роботи  $R(t) = R\left(\frac{t}{0}\right)$ , яка в процесі експлуатації у елементів, що залишаються працездатними, не повинна погіршуватися. Підвищення умовної ймовірності безвідмовної роботи  $R\left(\frac{t}{t_o}\right)$  при збільшенні відпрацьованого попереднього періоду  $t_o$  може супроводжуватися замінами деякої частини (слабких) елементів, що відмовили. Однак виконання профілактичних заміन елементів, що експлуатуються, в разі раптових механічних відмов, обумовлених лише перевантаженнями, ефекту не дає.

## ВИСНОВКИ

1. На ефективність та продуктивність процесу сепарації впливає велика сукупність факторів починаючи від надходження зернової маси до сепаратора і її розподілу по робочим органам до техніко-технологічних параметрів сепаратора. Ці параметри обираються в залежності від фізико-механічних характеристик сировини, а їх оптимальне співвідношення визначається теоретичними чи практичними методами.

2. Встановлено, що закономірності розподілу питомого завантаження решета є визначальними при проектуванні живильників і розподільників сипких сумішей та розрахунках режимів сепарування. По ширині решета характеристики потоку змінюються у відповідності з профілем початкової швидкості. При опуклому профілі початкової швидкості відбувається перевантаження поверхні вздовж поздовжньої осі решета, та недовантаження біля бокових стінок. При увігнутому профілі – поверхня перевантажена біля бокових стінок, а вздовж поздовжньої осі решета недовантажена. При трикутному профілі – поверхня перевантажена вздовж однієї бокової стінки, і недовантажена вздовж протилежної. Найбільші відхилення питомого завантаження мають місце біля вхідного перерізу потоку, найменші – біля вихідного.

3. Встановлено, що зміна величини початкового питомого завантаження суттєво впливає на взаємне розташування ділянок перевантаження та недовантаження робочої поверхні, їх площу та кількість. На вході решета завжди перевантажена центральна ділянка, а бокові недовантажені і найбільші відхилення завантаження мають місце на вхідному перетині. З довжиною решета загальна нерівномірність розподілу місцевого завантаження зменшується.

4. Основними параметрами бокових стінок є висота, що дорівнює товщині контактуючого шару, довжина та опір поверхні. Збільшення величин цих параметрів збільшує поверхневу щільність та зменшує поздовжню

швидкість суміші біля пристінкової зони. Умовою виникнення впливу бокових стінок на потік є перевищення мінімальних значень параметрів: висоти стінки  $h > 4 \cdot 10^{-3}$  м; опору поверхні стінки  $C_z > 2$  кг/м<sup>2</sup>·с; довжини стінки  $l > 0,5$  м. Вплив бокових стінок приводить до утворення біля пристінкової зони ділянок недовантаження та перевантаження решета, які однакові за величиною відхилень та площею. Величина зони впливу стінки збільшується з довжиною решета та має форму прямокутного трикутника.

5. В роботі отримані формули, що дають змогу отримати значення швидкості зернового потоку, а також визначити продуктивність сепаратора за допомогою наближених формул без проведення числового інтегрування диференціальних рівнянь. Отримано двосторонню залежність пористість суміші від швидкості її руху та навпаки. Виходячи з цього, тут зроблена спроба врахувати цю залежність, яка є своєрідним зворотнім зв'язком, бо швидкість залежить від пористості, а пористість – від швидкості.

6. Удосконалено механіко-математичну модель фракціонування зернового матеріалу на пневматичних вібраційних відцентрових сепараторах, яка базується на теорії руху та гідродинаміці суцільних багатофазних середовищ. В моделі враховано взаємодію між фазами матеріалу в умовах взаємного руху шарів частинок із різною щільністю, і взаємодію між цими шарами і фазою (повітря).

7. Для наближеного розрахунку екстремальних відхилень від положення рівноваги використано метод енергетичного балансу (МЕБ). Реалізовано диференціальну та алгебраїчну форму вказаного методу. Є випадки, коли МЕБ призводить до відомих точних розрахункових формул. Завдяки використанню МЕБ вдалося, без аналітичного розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь, встановити умови, за яких осцилятор без сухого тертя в ході вільних коливань має обмежену кількість циклів, як і осцилятор з сухим тертям. Раніше МЕБ системно використовували для досліджень

лінійно пружних системи, а вказана робота дала змогу поширити його і на нелінійно пружні осцилятори.

8. Підвищення надійності машин для розділення зернової маси складається як в коректному виборі матеріалів так і в забезпеченні надійності їх експлуатації. При проектуванні базовою характеристикою, що визначає рівень надійності за раптових відмов є функція безумовної ймовірності безвідмовної роботи  $R(t)$ , яка в процесі експлуатації у елементів, що залишаються працездатними, не повинна погіршуватися. Підвищення умовної ймовірності безвідмовної роботи при збільшенні відпрацьованого попереднього періоду  $t_0$  може супроводжуватися замінами деякої частини (слабких) елементів, що відмовили. Однак виконання профілактичних заміन елементів, що експлуатуються, в разі раптових механічних відмов, обумовлених лише перевантаженнями, ефекту не дає.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лесин Ю. В., Марков С. О., Тюленев М. А. Влияние граничного эффекта на физико-структурные характеристики раздельнозернистой среды // Горный информационно-аналитический бюллетень. 2002. № 9. С. 213.
2. Дик И. Г., Дьяченко Е. Н., Миньков Л. Л. Моделирование случайной упаковки шаров // Физическая механика. 2006. Т. 9. № 4. С. 63–69.
3. Сизиков В. С. Упруго-вязкая модель взаимодействия слоя сыпучей среды с двумя противофазно вибрирующими стенками виброконвейера // Вестник Гражданских инженеров. 2016. №2 (55). С. 225–231.
4. Сизиков В. С. Математическое моделирование виброперемещения сыпучей среды противофазно вибрирующими стенками транспортирующего органа // Вестник гражданских инженеров. 2017. №2 (61). С. 213–218.
5. Бессонова М. П., Пономарева М. А., Якутенок В. А. Численное решение задачи о течении расплава полимера в одношнековом экструдере // Химическая физика и мезоскопия. 2019. Том 21. №2. С 198-217.
6. Пономарева М. А., Филина М. П., Якутенок В. А. Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. № 2(40). С. 97–107.
7. Остриков А. Н., Обрамов О. В. Модель процесса экструзии при неизотермическом течении вязкой среды в одношнековых экструдерах // Известия вузов. Пищевая технология. 1999. №1. С 49–52.
8. Яцун С. Ф., Маслова О. Г. Расчет технологических вибромашин для формирования виброкипящего слоя // Известия вузов Машиностроение. 1992. №4-6. С. 63–37.



9. Локтионова О. Г. Динамика и оптимальный синтез виброкипящего слоя сыпучей среды // Известия вузов Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2008. - №1. С. 8–10.

10. Водопьянов И. С., Никитин Н. В., Чернышенко С. И. Снижение турбулентного сопротивления боковыми колебаниями оребренной поверхности // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2013. № 4. С.46–56.

11. Ковриков И. Т., Тавтилов И. Ш. Влияние способа подачи зерна на равномерность воздушного потока пневмоканала зернового сепаратора // Труды Оренбургского регионального отделения Российской инженерной академии. 2003. Вып. 3. С. 120–126.

12. Ковриков И. Т., Тавтилов И. Ш. Повышение равномерности распределения семян по сечению пневмоканала и совершенствование питателей зерновых сепараторов // Механизация и электрификация сельского хозяйства. 2004. №7. С.9–11.

13. Sultan Q., Nazar M. Flow of generalized Burgers' fluid between side walls induced by sawtooth pulses stress // Journal of Applied Fluid Mechanics. 2016. Vol. 9. No.5. P. 2195–2204.

14. Vasylykovskiy O., Vasylykovska K., Moroz S., Sviren M., Storozhyk L. The influence of basic parameters of separating conveyor operation on grain cleaning quality // INMATEH. Agricultural Engineering. Romania, Bucharest: INMA. 2019. Vol. 57. No.1. P. 63–70.

15. Ахмадиев Ф. Г., Гиззятов Р. Ф., Назипов И. Т. Расчет многоярусных ситовых классификаторов для разделения зернистых материалов по размерам // Математические методы в технике и технологиях. Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А. 2019. Т. 8. С. 54–61.

16. Zhanfu Li, Xin Tong, Huihuang Xia, Luojian Yu. A study of particles looseness in screening process of a linear vibrating screen // Journal of vibroengineering. 2016. Vol. 18. P. 671–681.

17. Akhmadiev F., Gizzyatov R., Kiyamov K. Mathematical modeling of thin layer separation of granular materials on sieve classifiers // Theoretical foundations of chemical engineering. 2013. Vol. 47. No 3. P. 254–261.
18. Федоренко И. Я., Пирожков Д. Н. Синергетические явления в сыпучей среде и их использование в технологии перерабатывающих производств // Вестник ЧГАА. 2013. Том 66. С. 84–94.
19. Akhmadiev G. F., Gizzyato R. F., Nazipov I. T. Hydrogasdynamics and Kinetics of Separation of Disperse Media on Sieve Classifiers // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2017. T. 90. No 5. P. 1077–1086.
20. Akhmadiev F., Gizzyatov R. Separation Processes of Granular Materials by Sizes at the Sieve Classifiers // Journal of Chemistry and Chemical Engineering. 2013. Vol. 1. Issue 7. P. 56–63.
21. Ахмадиев Ф. Г., Гиззятов Р. Ф., Назипов И. Т. Моделирование и оптимизация процесса разделения зернистых материалов на ситовых классификаторах // Вестник ТГТУ. 2015. Том 21. № 1. С. 78–82.
22. Равшанов Н. Математическая модель и новые критерии процесса сепарирования сыпучих смесей // Вестник ТОГУ. 2015. № 1(36). С. 83–91.
23. Тищенко Л. Н., Ольшанский В. П. Решения упрощённых уравнений гидродинамики при моделировании движения зерновой смеси по наклонному плоскому решету // Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. Вісник ХНТУСГ. 2008. Вип. 74. С. 306–312.
24. Самурганов Е. Е. О движении виброожигенного сепарируемого слоя зерна по плоскому решету конечной ширины // Научный журнал КубГАУ. 2016. №123 (09). С. 1–9.
25. Piven M. Equation of the planned flow of granular grain mixture // ТЕКА. Commission of motorization and energetics in agriculture. Lublin. 2016. Vol.16. №4. P. 63–72.

26. Piven M. Numerical solution of the problem of spatial movement of a loose mixture in a vibrolot // ТЕКА. Commission of motorization and energetics in agriculture. Lublin. 2017. Vol.17. №2. P. 19–28.

27. Тищенко Л.Н. Гидродинамические характеристики псевдооживленных сыпучих сред при виброцентробежном сепарировании на зерноперерабатывающих предприятиях. Вісник ХДТУСГ. Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. 2001. Вип. 5. С. 13-33.

28. Тищенко Л. Н. Интенсификация сепарирования зерна. Харьков : Основа, 2004. 224 с.

29. Моделирование процессов зерновых сепараторов / Л. Н. Тищенко и др. Харьков : Міськдрук, 2010. 360 с.

30. Динамика виброцентробежной зерноочистки / Л. Н. Тищенко и др. Харьков : Міськдрук, 2013. 440 с.

31. Tishchenko L. N., Olshanskiy V. P, Olshanskiy S. V. On velocity profiles of an inhomogeneous vibrofluidized grain bed on a shaker. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2011. 84 (3). P. 509-514. doi.org/10.1007/s10891-011-0498-4.

32. Пивень М. В. Исследование процесса сегрегации зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании. Вибрации в технике и технологиях. 2004. № 4 (36). С. 23-26.

33. Теорія сепарування зерна / В. П. Ольшанський та ін. Харків : ХНТУСГ, 2017. 803 с.

34. Тищенко Л. Н., Пивень М. В. Исследование внутрислового движения частиц зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании. Вибрационные машины и технологии. 2003. С. 150-156.

35. Ольшанський В. П. Про рух неоднорідної дрібнозернистої суміші по плоскому віброрешету. Інженерія переробних і харчових виробництв. 2017. 2(1). С. 17-22.

36. Тищенко Л. Н., Пивень М. В., Харченко С. А., Бредихин В. В. Исследование закономерностей вибровязкости зерновых смесей при сепарировании цилиндрическими виброцентробежными решётами. Вісник ХНТУСГ. Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв. 2009. Вип. 88. С. 34-44.

37. Тищенко Л. М., Абдуева Ф. М., Ольшанский В. П. Сравнение двух способов вычисления коэффициента вибровязкости псевдооживленной зерновой смеси при виброцентробежном сепарировании. Вібрації в техніці та технологіях. 2008. № 1 (50). С. 96-100.

38. Тищенко Л. М., Карнодуд Р. В., Ольшанский В. П., Идентификация вибровязкости зерновых смесей в цилиндрических решётах виброцентрифуги. Вібрації в техніці та технологіях. 2012. № 3 (67). С. 54-60.

39. Тищенко Л. М., Ольшанский В. П., Харченко С. А., Харченко Ф. М. Моделирование динамики зерновой смеси при сепарировании на рифленом решете вибросепаратора. Інженерія природокористування. 2014. № 2 (2). С. 134-137.

40. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). Москва : Наука, 1979. 832 с.

41. Wang, P., Deng, X., Jiang, S. Global warming, grain production and its efficiency: Case study of major grain production region. Ecological Indicators, 2019. 105. P 563–570. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ecolind.2018.05.022>

42. Stepanenko, S. P., Kotov, B. I. Theoretical research of separation process grain mixtures. Naukovij Žurnal «Tehnika Ta Energetika». 2019. 10 (4). P.137–143. doi: <https://doi.org/10.31548/machenergy2019.04.137>

43. Qi, X., Li, J., Yuan, W., Wang, R. Y. Coordinating the food- energy-water nexus in grain production in the context of rural livelihood transitions and farmland resource constraints. Resources, Conservation and Recycling. 2021. 164. 105148. doi: <https://doi.org/10.1016/j.resconrec.2020.105148>

44. Kumar, D., Kalita, P. Reducing Postharvest Losses during Storage of

Grain Crops to Strengthen Food Security in Developing Countries. *Foods*. 2017. 6 (1), 8. doi: <https://doi.org/10.3390/foods6010008>

45. Kharchenko, S., Borshch, Y., Kovalyshyn, S., Piven, M., Abduev, M., Miernik, A. et. al. Modeling of Aerodynamic Separation of Preliminarily Stratified Grain Mixture in Vertical Pneumatic Separation Duct. *Applied Sciences*. 2021. 11 (10), 4383. doi: <https://doi.org/10.3390/app11104383>

46. Linenko, A., Aipov, R., Yarullin, R., Gabitov, I., Tuktarov, M., Mudarisov, S. et. al. Experimental vibro-centrifugal grain separator with linear asynchronous electric drive. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018 13, P. 6551–6557.

47. Ol'shanskii, V., Spol'nik, O., Slipchenko, M., Znaidiuk, V. Modeling the elastic impact of a body with a special point at its surface. *Eastern- European Journal of Enterprise Technologies*, 2019. 1 (7 (97)), P. 25–32. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.155854>

48. Wan, X., Liao, Y., Yuan, J., Wang, C., He, K., Liao, Q. Parameters Analysis and Experiment of Cyclone Separation Cleaning System with Replaceable Parts for Rapeseed Combine Harvester. *Nongye Jixie Xuebao/Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*. 2020. 51 (s2), P. 202–211. doi: <https://doi.org/10.6041/j.issn.1000-1298.2020.S2.024>

49. Ma, Q., Lu, A., Gao, L., Wang, Z., Tan, Z., Li, X. Aerodynamic characteristics of lotus seed mixtures and test on pneumatic separating device for lotus seed kernel and contaminants. *Nongye Gongcheng Xuebao/Transactions of the Chinese Society of Agricultural Engineering*, 2015. 31 (6), P. 297–303.

50. Badretdinov, I., Mudarisov, S., Tuktarov, M., Dick, E., Arslanbekova, S. Mathematical modeling of the grain material separation in the pneumatic system of the grain-cleaning machine. *Journal of Applied Engineering Science*. 2019. 17 (4), 529–534. doi: <https://doi.org/10.5937/jaes17-22640>.

51. Bulgakov, V., Nikolaenko, S., Holovach, I., Adamchuk, V., Kiurchev, S., Ivanovs, S., Olt, J. Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation. *Agronomy Research*, 2020. 18 (1), P. 18–37. doi:

<https://doi.org/10.15159/ar.20.057>

52. Bredykhin, V., Gurskyi, P., Alfyorov, O., Bredykhina, K., Pak, A. Improving the mechanical-mathematical model of grain mass separation in a fluidized bed. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*, 2021. 3 (1 (111)), 79– 86. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.232017>

53. Тищенко, Л. Н., Харченко, С. А., Харченко, Ф. М., Бредихин, В. В., Цуркан, О. В. Идентификация скорости прохождения частиц зерновой смеси через отверстия решет вибрационных зерновых сепараторов. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. 2 (7 (80)), С. 63–69. doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2016.65920>.

54. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. Ленинград : Машиностроение, 1976. 320 с.

55. Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний. Севастополь : Вебер, 2013. 403 с.

56. Пановко Я. Г. Введение в теорию механических колебаний. – Москва: Наука, 1980. 270 с.

57. Бурлака В. В., Ольшанський В. П., Малець О. М. До розрахунку коливань механізмів при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя. *Механізація сільськогосподарського виробництва : Вісник ХНТУСГ*. 2014. Вип. 148. С. 19-24.

58. Бидерман В. Л. Теория механических колебаний. Москва : Высшая школа, 1980. 408 с.

59. Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р. Курс теоретической механики. Динамика. Т. 2. Москва : Наука, 1985. 496 с.

60. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. Модели, методы, явления : в 2 т. Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. Т1. 716 с.

61. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Москва : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. 916 с.

62. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва : Наука, 1974. 504 с.
63. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. Москва : Наука, 1988. 328 с.
64. Мандельштам Л. И. Лекции по теории колебаний. Москва : Наука, 1972. 470 с.
65. Пукач П.Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем. Львів : Львівська політехніка, 2014. 288 с.
66. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. Москва : Иностран. лит., 1953. 258 с.
67. Хаяси Т. Нелинейные колебания в механических системах. Москва : Мир, 1968. 432 с.
68. Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силовых передач машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. 456 с.
69. Rao S. S. Mechanical vibrations. Pearson (6 edition), 2016. 1152 p.
70. Ольшанський В. П., Сліпченко М. В., Спольнік О. І., Бурлака В. В. Нелінійні колювання дисипативних осциляторів. Харків : КП Міська друкарня, 2020. 268 с.
71. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М.: Мир, 1965. 452 с.
72. Капур К., Ламберсон Л. Надежность и проектирование систем. М.: Мир, 1980. 604 с.
73. Алферов, А. И. Основы прогнозирования и управления надежностью в условиях экстремальных нагрузок: монография / А. И. Алферов, А. С. Гринченко. – Харьков: Планета-Принт, 2017. – 135 с.
74. Болотин В. В. Основы теории надежности механических систем. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3 томах. Т. 1. М.: Машиностроение, 1968. С. 164–182.
75. Гринченко А. С. Анализ прочностной надежности элементов и систем на основе метода единичных распределений. Вісник Харків. нац.

техн. ун-ту сіл. госп-ва ім. Петра Василенка. Харків, 2010. Вип. 100: Проблеми надійності машин та засобів механізації с.-г. вир-ва С. 109–118.

76. Артёмов Н. П., Шуляк М. Л. Использование фильтра для повышения точности исследований динамики мобильных машин. Науковий вісник НУБІП України. Сер.: Техніка та енергетика АПК. 2015. № 226. С. 290–295.

77. Алексеев Е. Р., Чеснокова О. В. Matcad 12. М.: НТ Пресс, 2005. 347 с.

78. Кирьянов Д. В. Самоучитель Mathcad 11. СПб.: БХВ-Петербург, 2003. 560 с.

79. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. 296 с.

80. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. М.: Наука, 1981. 800 с.

81. Сильвестров А. В., Шагимординов Р. М. Хрупкое разрушение стальных конструкций и пути его предотвращения. Проблемы прочности. 1972. № 5. С. 88–94.

82. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука. 1965. 524 с.