

Калінін Є.І.¹,
Коротій В.О.²,
Романченко В.М.¹

¹Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка
м. Харків, Україна
E-mail: kalinihntusg@gmail.com
²Харківський державний
автотранспортний
коледж

**ВЛАСНІ ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ СТРИЖНЯ
З ВРАХУВАННЯМ ЙОГО ВІДНОСНОЇ ДОВЖИНИ
ТА ПІДДАТЛИВОСТІ ВУЗЛА КРІПЛЕННЯ**

УДК 539.4:534.1

В роботі розглянуто питання про вплив на значення частоти коливань відносної висоти стрижня, яка визначається відношенням висоти його поперечного перерізу до довжини. Отримані залежності, кожна гілка яких відповідає тому чи іншому виду поперечного перерізу стрижня в певній формі вигину його пружної лінії. Аналогічні криві, або відповідні їм таблиці, можуть бути побудовані для будь-яких випадків коливань. Розв'язана задача про визначення впливу недосконалості кріплення стрижня на частоти коливань останнього. На основі порівняння пружних властивостей стрижня і реального вузла його кріплення зроблено висновок про їх сумірності в окремих випадках. Зроблено припущення, що в цьому випадку нульовий перетин стрижня зміщується в поперечному напрямку і при цьому повертається. В такому разі, спосіб кріплення стрижня схематично можна представити у вигляді двох пружин з лінійними властивостями, одна з яких працює в умовах розтягування-стиснення, а друга – закручується.

В результаті проведених розрахунків реальної моделі виявилися отриманими всі дані, що необхідні для визначення значення частоти власних коливань стійки.

Отримане значення відповідає циклічній частоті в 1006 хв^{-1} . Порівняння результатів експерименту (1050 хв^{-1}) та зробленого розрахунку говорить про їх задовільний збіг і дозволяє зробити висновок про те, що запропонована методика розрахунку частот власних поперечних коливань прямих стрижнів надає досить достовірні результати. Цей ефект отриманий в результаті відходу від надмірної ідеалізації механічної системи і врахування низки реальних істотних її особливостей.

Ключові слова: стрижень, власні поперечні коливання, піддатливість вузла кріплення, циклічна частота.

Вступ. При дослідженні напружено-деформованого стану різного роду конструкцій і устаткування використовуються моделі пружного стрижня. Загальні підходи до побудови математичних моделей поперечних коливань стрижнів відомі і розглянуті в літературі, проте, аналітичні розв'язки отримані переважно для стрижнів жорстко закріплених в'язями. Пошук аналітичних розв'язків задач коливань стрижнів з податливими в'язями дозволить не тільки визначити динамічні характеристики об'єкта на стадії проектних робіт, але і може бути використаний для побудови еталонної моделі при проведенні перевірочних розрахунків в програмних комплексах на базі методу скінченних елементів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Частоти власних поперечних коливань стрижнів визначають зазвичай за допомогою залежності виду:

$$p_i = \frac{\alpha_i^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (1)$$

яка постійно зустрічається в науковій та навчальній літературі з теорії коливань [2, 3, 7 та ін.].

Тут α_i – число, що відображає спосіб закріплення стрижня і форму вигину його пружної лінії; l – довжина стрижня; E і μ – модуль пружності при вигині та погонна маса його матеріалу; I – момент інерції поперечного перерізу.

Довідник І.В. Ананьєва [1] дозволяє враховувати у формулі (1) вплив приєднаної маси на частоту коливань, розширюючи цим її можливості.

Однак дві обставини вельми істотно знижують точність значень частоти, яка може бути обчислена за формулою (1). Перша з них пов'язане з тим, що ця формула отримана з диференціального рівняння, яке описує коливальний рух відносно довгих стрижнів. Якщо стрижень такий, що його висота і довжина мають однаковий порядок, то розрахункове значення частоти виявляється вельми наближеним і може відрізнятись від дійсного на 30...100%.

Ще більш істотно впливає на зниження точності розрахунків частот ідеалізація способу кріплення стрижнів. Ця обставина проявляється особливо різко при розрахунку стрижнів, які розглядаються як затиснені. Граничні умови в цьому випадку припускають відсутність прогину і повороту стрижня в місці виходу його з вузла кріплення. Насправді ж такі умови не виконуються, так як матеріал деталі, з якою пов'язаний стрижень, має певну деформативність і дає можливість стрижню повернутися і зміститися поступально.

Академік А.П. Філіппов відзначає, що цей ефект особливо різко проявляє себе при коливаннях коротких масивних стрижнів [8]. Авторам довелося переконатися в справедливості сказаного при порівнянні значень частоти власних поперечних коливань стійки вентилятора системи охолодження комбайна КСК-100, отриманих розрахунковим і експериментальним шляхами. Перший з них дав 4500 хв^{-1} , а другий – 1050 хв^{-1} . Розбіжність цих значень настільки велика, що взагалі неможливо говорити про які-небудь рівні точності обчислень.

Мета роботи. Тому була поставлена мета отримати таку формулу, яка дозволила б врахувати названі вище обставини при розрахунку частот власних поперечних коливань коротких затиснених стрижнів.

Результати досліджень. Розглянемо спочатку питання про вплив на значення частоти відносної висоти стрижня, яка визначається відношенням висоти його поперечного перерізу до довжини. Диференціальне рівняння, що враховує зсувні деформації і інерцію повороту поперечного перерізу має вигляд [8]:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial t^2} - I\delta \left(1 + \frac{Ek}{G}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{Ik\delta}{G} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0,$$

де $y(x,t)$ – рівняння динамічної пружної лінії стрижня; G і δ – модуль пружності при зсуві і питома вага матеріалу стрижня; k – коефіцієнт нерівномірності дотичних напружень в поперечному перерізі стрижня, що залежить від його форми, який обчислюється за формулою виду [8]:

$$k = \frac{F}{I^2} \int_{-h_1}^{h_2} \frac{s^2(y)}{b(y)} dy,$$

де F – площа поперечного перерізу стрижня; $s(y)$ – статичний момент виділеної частини цієї площі (рис. 1); $b(y)$ – змінна ширина поперечного перерізу.

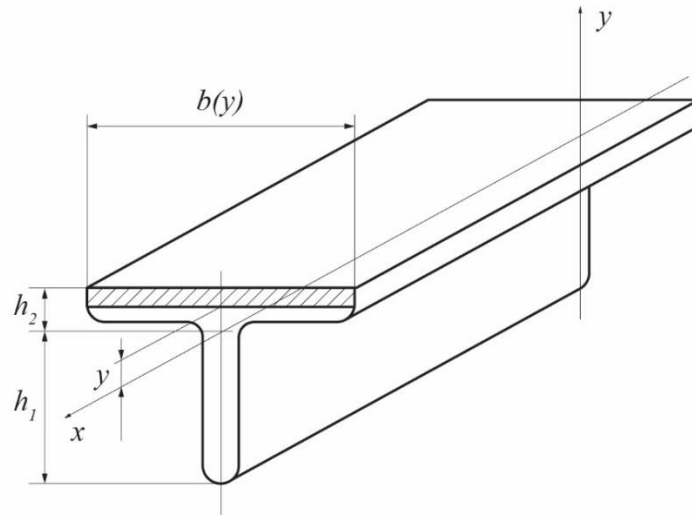


Рис. 1 – Розрахункова схема

Розв'язання частотної задачі на основі останнього рівняння [5] призвело до такої формули для визначення частоти:

$$p_i = \frac{\alpha_i^2 \beta_i}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, \quad (2)$$

де

$$\beta_i = \sqrt{\frac{1 - b_i^2(1+a) - \sqrt{(1 - b_i^2(1+a))^2 - 4ab_i^4}}{2ab_i^4}}. \quad (3)$$

В залежності (3) $a = \frac{Ek}{G}$; $b_i = \alpha_i \lambda \nu$; $\lambda = \frac{h}{l}$ – відносна висота поперечного перерізу;

$\nu = \frac{\rho}{h}$ – коефіцієнт форми поперечного перерізу; ρ – радіус інерції поперечного перерізу.

Множник β_i змінюється в межах від 1 до 2, незалежно від форми поперечного перерізу стрижня. Закон його зміни представлений на рис. 2.

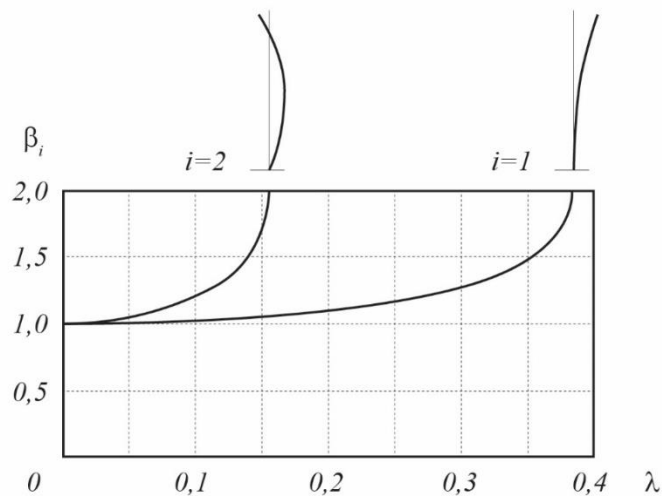


Рис. 2 – Залежність множника β_i від відносної висоти поперечного перерізу

Кожна гілка графіка відповідає тому чи іншому виду поперечного перерізу стрижня в певній формі вигину його пружної лінії. Аналогічні криві, або відповідні їм таблиці, можуть бути побудовані і для інших випадків. Нижче, при чисельному розв'язанні задачі, буде показано, як практично використовуються дані функції.

Перейдемо до розв'язання задачі про визначення впливу недосконалості кріплення стрижня на частоти його коливань. Розглянемо для цього загальний вигляд рівняння, що описує пружну лінію стрижня, що коливається:

$$y(x) = c_1 s(\lambda x) + c_2 T(\lambda x) + c_3 u(\lambda x) + c_4 V(\lambda x),$$

де c_1, c_2, c_3 і c_4 – невизначені величини; $s(\lambda x) = 0,5(ch\lambda x + \cos \lambda x)$, $T(\lambda x) = 0,5(sh\lambda x + \sin \lambda x)$; $u(\lambda x) = 0,5(ch\lambda x - \cos \lambda x)$; $V(\lambda x) = 0,5(sh\lambda x - \sin \lambda x)$ – балкові функції академіка А.Н. Крилова [2, 6, 7].

Якщо припустити, що заземлення стрижня ідеальне, то в цьому випадку зміщення і кут повороту його поперечного перерізу в місці виходу з кріплення будуть дорівнювати нулю. Розташувавши координатні вісі відносно стрижня так, як показано на рис. 3 а, отримаємо наступний опис граничних умов:

$$\begin{array}{ll} x=0 & y=0 \\ & y'=0 \end{array} \quad \begin{array}{ll} x=l & y''=0 \\ & y'''=0 \end{array}$$

При їх виконанні отримаємо трансцендентне рівняння виду:

$$ch\alpha \cdot \cos\alpha + 1 = 0, \quad (\alpha = \lambda l),$$

з якого визначаються значення параметра α_i , які відповідають різним формам вигину пружної лінії стрижня ($\alpha_1 = 1,87510$, $\alpha_2 = 4,69409$ і т.д.). Як вже зазначалося вище, будучи використаними у формулі (1), вони призводять до значних похибок.

Порівняння пружних властивостей стрижня і реального вузла його кріплення дозволяють зробити висновок про їх сумірності в окремих випадках (наприклад, при з'єднанні масивного короткого стрижня з основою за допомогою болтів). Можна припустити, що в цьому випадку нульовий перетин стрижня зміщується в поперечному напрямку і при цьому повертається. Повернення його в положення стійкої рівноваги відбувається під дією пружних сил і моментів, що виникають при відповідних переміщеннях. Тоді спосіб кріплення стрижня схематично можна представити у вигляді двох пружин з лінійними властивостями, одна з яких працює в умовах розтягування-стиснення і має коефіцієнт жорсткості c_y , а друга – закручується. Її коефіцієнт жорсткості – c_ϕ (рис. 3, б). Граничні умови, що описують властивості такого вузла кріплення стрижня, виглядають тепер наступним чином:

$$\begin{array}{ll} x=0 & EIy'' = c_\phi y' \\ & EIy''' = -c_y y \end{array} \quad \begin{array}{ll} x=l & y''=0 \\ & y'''=0 \end{array}$$

Виконання даних граничних умов приводить до рівняння виду:

$$\alpha^4 ab[-T(\alpha)V(\alpha) + u^2(\alpha)] - \alpha^3 b[s(\alpha)T(\alpha) - u(\alpha)V(\alpha)] + \alpha a[s(\alpha)V(\alpha) - T(\alpha)u(\alpha)] + s^2(\alpha) - T(\alpha)V(\alpha) = 0 \quad (4)$$

з якого визначаються значення коефіцієнта α_i . В ньому:

$$a = EIc_\phi^{-1} \text{ і } b = EIc_y^{-1} \quad (5)$$

Видно, що розв'язок цього рівняння залежить від конкретного співвідношення згинальної жорсткості стрижня EI і крутильної c_ϕ та лінійної c_y жорсткості вузла кріплення. Вирішення цього завдання на ПК дало поле значень α в залежності від параметрів a і b . При цьому відмічено, що варіювання величиною жорсткості та, отже, параметром a відображається на значеннях α в більшій мірі, ніж варіювання лінійною жорсткістю.

Тому на рис. 4 представлені значення α в функції від a , що розглядається в якості незалежної змінної. При цьому величина b приймалася як параметр.

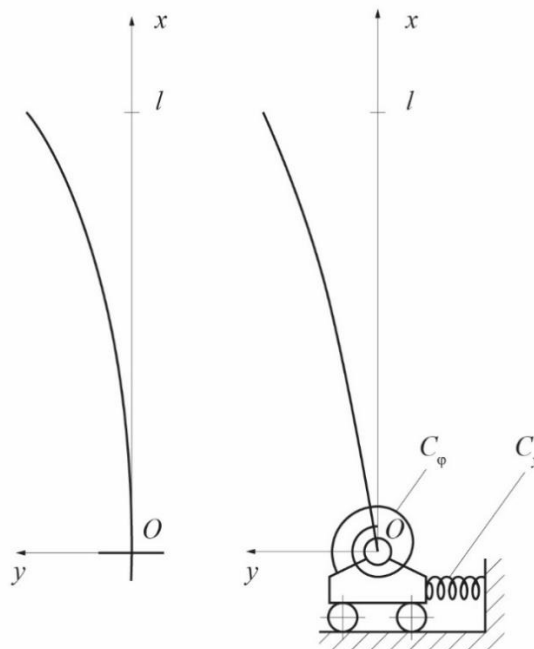


Рис. 3 – Розрахункова схема з заміною вузла кріплення

Використання результатів розв'язання цього завдання можна продемонструвати на прикладі чисельного розрахунку. Повернемося для цього до випадку коливань стійки вентилятора, згаданої вище. З конструкторської точки зору вона являє собою геометричну фігуру, близьку до рівнобічної трапеції. Опори її виконані з швелеру за ДСТУ 3436-96 з розмірами $100 \times 50 \times 5$ мм.

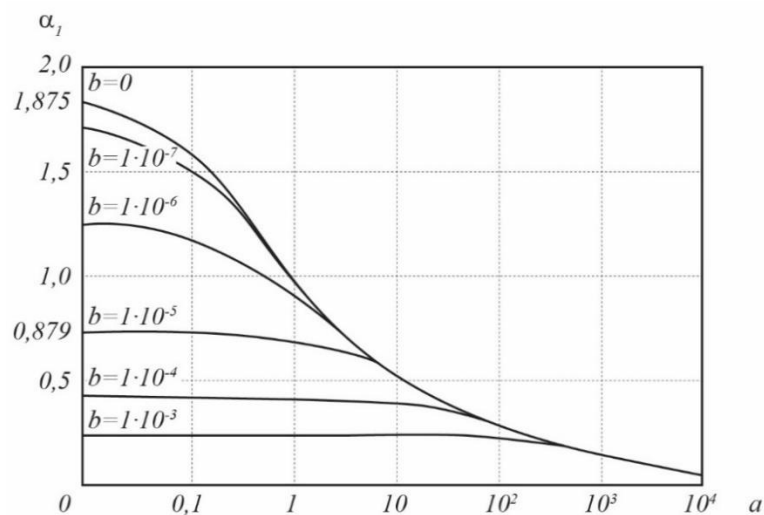


Рис. 4 – Залежність величини α від параметрів a і b

До нижніх торців кожної опори приварені прямокутні фланці, кожен з яких кріпиться до основи за допомогою двох болтів $M12 \times 1$. Висота стійки дорівнює 664 мм. На верхній її полиці встановлений вентиляторний вузол, маса якого, разом з масою полки, становить приблизно 18 кг.

Для використання формули (2), стійку треба привести до розрахункової схеми з рівномірно розподіленою масою. Значення її μ отримується як сума власної погонної

маси μ_1 і погонної маси μ_2 , що моделює зосереджену масу вентилятора з полицею m . Розрахуємо дані погонні маси.

$$\mu_1 = \delta F = 7,83 \cdot 10^3 \cdot 9,09 \cdot 10^{-4} = 7,12 \text{ кг/м.}$$

де F – площа поперечного перерізу однієї опори стійки; δ – питома вага її матеріалу.

Для відшукування μ_2 можна скористатися перетворенням, запропонованим Я.Г. Пановко [7], яке встановлює залежність між масою матеріальної точки на кінці консольної балки і розподіленою масою еквівалентної по динамічним властивостям однорідної балки.

$$m = \frac{33}{140} \mu l .$$

Звідси:

$$\mu_2 = \frac{140m}{33l} = \frac{140 \cdot 12}{33 \cdot 0,664} = 76,67 \text{ кг/м.}$$

Тоді розрахункова погонна маса:

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 = 7,12 + 76,67 = 83,79 \text{ кг/м.}$$

Момент інерції площі поперечного перерізу заданий ДСТУ і дорівнює $133,39 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$. Для визначення значення коефіцієнта β_1 , що відповідає першій власній частоті, можна скористатися залежністю $\beta_1 = f(\lambda)$, яка представлена на рис. 2. Тоді:

$$\lambda = \frac{h}{l} = \frac{0,1}{0,664} = 0,15.$$

Видно, що в даному випадку з високим ступенем точності можна прийняти, що $\beta_1 = 1,05$ (за допомогою графіка, представленого на рис. 2).

На цьому закінчується перша частина розрахунку, і можна перейти до пошуку коефіцієнта α_1 , що враховує крутильну і поперечну деформативність вузла кріплення стійки. Для цього скористаємося розв'язком рівняння (4), яке графічно представлено на рис. 4. Видно, що значення α_1 , залежать від величин a і b . Визначимо їх за допомогою співвідношень (3).

Коефіцієнт крутильної жорсткості c_φ отримують як відношення моменту сил інерції, що вигинає стійку в перерізі $x = 0$, до відповідного кута φ . Знайдемо цей кут через момент M з урахуванням деформації болтів і фланця стійки (рис. 5). Використання сил інерції дозволяє скласти умову динамічної рівноваги стійки у вигляді:

$$\theta_1(c + e) + \theta_2 e - M = 0.$$

Необхідно врахувати також умову спільності деформацій болтів:

$$\frac{\Delta l_1^*}{\Delta l_2^*} = \frac{c + e}{e},$$

де:

$$\Delta l_1^* = \frac{Q_1 l_{\text{болта}}}{EF},$$

$$\Delta l_2^* = \frac{Q_2 l_{\text{болта}}}{EF}.$$

Розв'язок рівняння рівноваги відносно сили Q_1 при врахуванні умови спільності деформацій болтів дає залежності виду:

$$Q_1 = \frac{M(c + e)}{e^2 + (c + e)^2} \text{ і } \Delta l_1^* = \frac{4M(c + e)l_{\text{болта}}}{\pi E d_1^2 [e^2 + (c + e)^2]},$$

де d_1 – діаметр тіла болта; $l_{\text{болта}} = l_1 + l_2 + 0,3d$ (рис. 5); d – діаметр болта.

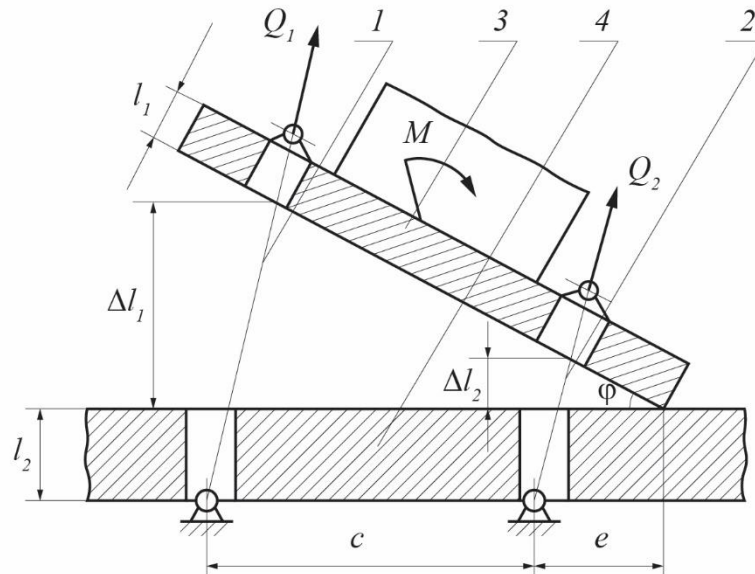


Рис. 5 – Розрахункова схема вузла кріплення вентилятора

Невелика товщина фланця $l_1 = 0,8 \cdot 10^{-2}$ м дозволяє припускати, що його деформації в напрямку дії сил Q_1 і Q_2 досить великі і повинні бути враховані. Спосіб розрахунку їх описаний в роботі [4] і не потребує додаткових розробок. Реалізується він у такий спосіб. Стиснення фланця в напрямку дії сили біля отвору під відповідний болт визначається співвідношенням виду [4]:

$$\Delta l_1^{**} = \frac{4Q_1 l_1}{\pi E[(\tau + l_1 \operatorname{tg} \alpha)^2 - d_{oms}^2]},$$

де τ – радіус опорної площі гайки; α – кут тиску ($\operatorname{tg} \alpha \approx 0,45$); d_{oms} – діаметр отвору фланця для болта.

Повна деформація болтового з'єднання, яка викликана дією сили Q_1 визначиться залежністю виду:

$$\Delta l_1 = \Delta l_1^* + \Delta l_1^{**} = \frac{4M(c+e)}{\pi E[e^2 + (c+e)^2]} \left[\frac{l_{болта}}{d_1^2} + \frac{l_1}{(\tau + l_1 \operatorname{tg} \alpha)^2 - d_{oms}^2} \right].$$

Використовуючи послідовно співвідношення $\varphi = \frac{\Delta l_1}{c+e}$, $c_\varphi = \frac{M}{\varphi}$ та $a = \frac{EI}{c_\varphi}$, отримаємо:

$$\begin{aligned} a &= \frac{4I}{\pi[e^2 + (c+e)^2]} \left[\frac{l_1 + l_2 + 0,3d}{d_1^2} + \frac{l_1}{(\tau + l_1 \operatorname{tg} \alpha)^2 - d_{oms}^2} \right] = \\ &= \frac{4 \cdot 133,4 \cdot 10^{-2}}{\pi[2,3^2 + (15,4 + 2,3)^2]} \left[\frac{1,76}{1,016^2} + \frac{1,4}{(1 + 1,4 \cdot 0,45)^2 - 1,3^2} \right] = 1,681 \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

На наступному етапі розрахунку треба визначити значення коефіцієнта B [5]. Як вже зазначалося, він пов'язаний з пружними поперечними переміщеннями нульового перетину стійки, що відбуваються від дії поперечних сил інерції стійки, рівнодіючу яких позначимо літерою Q . Припустимо, що ці переміщення відбуваються у зв'язку з явищами зсуву фланців стійки. Можна також припустити, що нижні площини фланців утримуються на місці силами тертя. Тоді верхні площини перемістяться на величину абсолютного зсуву $\Delta s = l_1 \gamma$. Відносний зсув пов'язаний співвідношенням $\gamma = \tau G^{-1}$ з дотичним напруженням τ і модулем пружності другого роду G . Причому:

$$\tau = \frac{Q}{2F} = \frac{Q}{2A \cdot B},$$

де $A = 20 \cdot 10^{-2}$ м і $B = 6 \cdot 10^{-2}$ м – розміри фланця в плані.

З огляду на сказане, отримуємо:

$$\Delta s = \frac{Ql_1}{2GA \cdot B}; c_y = \frac{Q}{\Delta s} = \frac{2GA \cdot B}{l_1}; B = \frac{EI}{c_y} = \frac{EI l_1}{2GA \cdot B}.$$

Оскільки $E = 2G(1 + \mu)$, то остаточно:

$$b = \frac{Il_1(1 + \mu)}{A \cdot B}.$$

Підставляючи числові значення, отримаємо:

$$b = \frac{133,4 \cdot 0,8 \cdot (1 + 0,3) \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 6} = 1,16 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Тепер за допомогою залежностей, наведених на рис. 4, визначаємо значення $\alpha_1 = 0,879$.

Висновки. В результаті проведених розрахунків виявилися отриманими всі дані, що необхідні для визначення значення частоти власних коливань стійки за допомогою формули (2). Підставимо їх в формулу і проведемо заключний розрахунок:

$$p_1 = \frac{0,879^2 \cdot 1,05 \cdot 10^5}{66,4^2} \sqrt{\frac{20,6 \cdot 133,4}{83,79}} = 105,4 \text{ с}^{-1}.$$

Отримане значення відповідає циклічній частоті $p_1 = 1006 \text{ хв}^{-1}$. Порівняння результатів експерименту (1050 хв^{-1}) та зробленого розрахунку говорить про їх задовільний збіг і дозволяє зробити висновок про те, що запропонована методика розрахунку частот власних поперечних коливань прямих стрижнів надає досить достовірні результати. Цей ефект отриманий в результаті відходу від надмірної ідеалізації механічної системи і врахування низки реальних істотних її особливостей. Ясно, що способи кріплення стрижнів, що відрізняються від розглянутого, зажадають побудови якихось інших розрахункових схем та інших методів розрахунку коефіцієнтів крутильної і лінійної жорсткості. Але співвідношення (2) – (5) при цьому не зміняться. Вони і є математичною основою запропонованої схеми розрахунку частот власних поперечних коливань стрижнів.

Література:

1. Ананьев И.З. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем. – М.: ОГИЗ, 1946. – 224 с.
2. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1958. – 628 с.
3. Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1972, 408 с.
4. Биргер И.А. Расчет на прочность деталей машин / Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Шнейдерович Р.М. – М.: Машиностроение, 1966. – 617 с.
5. Дубко А.Н. Обобщенное решение задачи об определении частот собственных поперечных колебаний однородных прямых стержней // Вестник машиностроения. – 1983. – №6. – С. 10-18.
6. Крылов А.Н. Собрание трудов. – М.: АН СССР, 1948. – 402 с.
7. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории упругих колебаний. – М.: Машгиз, 1957. – 336 с.
8. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. – М. Машиностроение, 1970. – 786 с.

9. Калінін Є.І. Дослідження перехідних процесів в коробці змінних передач мобільного енергетичного засобу / Є.І. Калінін, М.Л. Шуляк, І.О. Шевченко // Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. – 2016. – Вип. 168. – С. 73-79.
10. Калінін Є.І. Формування умови стійкості лінійної системи при випадкових збуреннях її параметрів / Є.І. Калінін, В.М. Романченко, Г.П. Юр'єва // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2017. – № 7. – С. 100-108.

Summary

E. Kalinin, V. Korotij, V. Romanchenko Own transverse oscillations of the rod, taking into account its relative length and suitability of the mounting point

The paper considers the effect on the value of the frequency of oscillations of the relative height of the rod, which is determined by the ratio of the height of its cross-section to length. Obtained dependencies, each branch of which corresponds to one or another type of cross-section of the rod in a certain form bend its elastic line. Similar curves, or the corresponding tables, can be constructed for any cases of oscillations. The problem of determining the influence of imperfection of the fastening of the rod on the frequency of the latter fluctuations is solved. On the basis of comparison of the elastic properties of the rod and the actual site of its mounting, it was concluded that they are comparable in some cases. It is assumed that in this case the zero crossing of the rod is shifted in the transverse direction and at the same time it returns. In this case, the method of fastening the rod schematically can be represented in the form of two springs with linear properties, one of which works in conditions of stretching-compression, and the second - twists.

As a result of the calculations of the real model, all the data necessary to determine the value of the frequency of the internal oscillations of the rack were obtained.

The resulting value corresponds to a cyclic frequency of 1006 min⁻¹. Comparison of the results of the experiment (1050 min⁻¹) and the calculated calculation indicates their satisfactory coincidence and allows us to conclude that the proposed method for calculating the frequencies of the own transverse oscillations of the straight cores gives quite reliable results. This effect is obtained as a result of the abandonment of the excessive idealization of the mechanical system and the consideration of a number of real significant features.

Keywords: rod, own transverse oscillations, capacity of mounting node, cyclic frequency.

References

1. Ananov Y.Z. Spravochnyk po raschetu sobstvennikh kolebaniy upruzhnykh system. – M.: OHYZ, 1946. – 224 s.
2. Babakov Y.M. Teoriya kolebaniy. – M.: Gosudarstvennoe yzdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi lyteraturi, 1958. – 628 s.
3. Byderman V.L. Prykladnaia teoriya mekhanicheskikh kolebaniy. – M.: Visshaia shkola, 1972, 408 s.
4. Byrher Y.A. Raschet na prochnost detalei mashyn / Byrher Y.A., Shorr B.F., Shneiderovych R.M. – M.: Mashynostroeniye, 1966. – 617 s.
5. Dubko A.N. Obobshchennoe reshenye zadachy ob opredelenii chastot sobstvennikh poperechnikh kolebaniy odnorodnykh priamikh sterzhnei // Vestnyk mashynostroeniya. – 1983. – №6. – S. 10-18.
6. Krilov A.N. Sobranye trudov. – M.: AN SSSR, 1948. – 402 s.

7. Пановко Ya.Н. Osnovi prykladnoi teoryy upruhykh kolebanyi. – M.: Mashhyz, 1957. – 336 s.
8. Fylyppov A. P. Kolebanyia deformatyemikh system. – M. Mashynostroeny, 1970. – 786 s.
9. Kalinin Ye.I. Doslidzhennia perekhidnykh protsesiv v korobtsi zminnykh peredach mobilnoho enerhetychnoho zasobu / Ye.I. Kalinin, M.L. Shuliak, I.O. Shevchenko // Visnyk KhNTUSH im. Petra Vasylenka. – 2016. – Vyp. 168. – S. 73-79.
10. Kalinin Ye.I. Formuvannia umovy stiikosti liniinoi systemy pry vypadkovykh zburenniakh yii parametriv / Ye.I. Kalinin, V.M. Romanchenko, H.P. Yurieva // Tekhnichniy servis ahropromyslovoho, lisovoho ta transportnoho kompleksiv – 2017. – № 7. – S. 100-108.