УДК 517.27

О.М. Прохорова, канд. физ.-мат. наук, доцент
Харьковский национальный университет им. В.В. Докучаева

ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ В УЧЕБНИКЕ О. КОШИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

Постановка проблемы. Теория экстремумов имеет большое теоретическое и практическое значение, является одной из составных частей курса математического анализа [3], [5]. При этом большое значение имеют не только полученные результаты, но и разработанные при нахождении экстремумов методы.

Не сразу были получены те результаты, которые составляют основу этой теории в современных учебниках математического анализа. Для этого понадобилось почти три века. Попытки нахождения условий экстремума функций многих переменных встречаются в 17 веке еще до формирования дифференциального исчисления как целостной науки.

Для нужд математики и естествознания наиболее важным является случай нескольких переменных. В такой математической дисциплине как, например, математическое программирование [9], которое занимается изучением экстремальных задач для функций многих переменных, разработкой методов их решения. В свою очередь, целый ряд экономических задач сводится к задачам математического программирования [7, 8]. Необходимостью теоретической разработки этого случая объясняется, по-видимому, тот факт, что крупные аналитики 19 столетия не прошли мимо этого вопроса. Одним из них является О.Коши.

Анализ последних достижений и публикаций. В историко-математической литературе существуют исследования, посвященные научному творчеству О.Коши [1], [2], [4], [6], [10], однако его вклад в теорию экстремумов функций многих переменных не нашел должного освещения.

Целью статьи является исследование построения теории экстремумов функций многих переменных, изложенный в учебнике по дифференциальному исчислению О.Коши «Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal» [11].

Изложение основного материала исследования. В начале 19 века одно из центральных мест в разработке теории экстремумов функций многих переменных принадлежит О.Л.Коши. В своем учебнике «Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal» он находит условия для экстремума функции $u = f(x, y, z, ...)$ многих переменных.

Чтобы узнать, соответствует ли система значений $x_0,\ y_0,\ \cdots$, удовлетворяющих необходимому условию существования экстремума, максимуму или минимуму функции $u = f(x, y, ...)$, он изучает знак второго дифференциала

$$d^2u = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0, ...)}{\partial x^2}h^2 + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0, ...)}{\partial y^2}k^2 + ... + 2\frac{\partial^2 u(x_0, y_0, ...)}{\partial x \partial y}hk + \cdots,$$

где $dx = h,\quad dy = k,\quad \cdots$. При этом Коши выделяет три случая.

1. Второй дифференциал сохраняет знак, не обращаясь в нуль.
2. Второй дифференциал уничтожается для некоторых значений величин $h,\ k,\ l,\ \cdots$ и принимает прежний знак, когда перестанет обращаться в нуль.
3. d^2u будет менять знак.

Тогда в первом случае будет максимум или минимум, «иногда во втором и никогда в третьем». Во втором случае, замечает Коши, получится максимум или минимум, если для каждой из систем значений $h,\ k,\ l,\ \cdots$, удовлетворяющих уравнению

$$d^2u = 0,$$

первый из не уничтожающихся дифференциалов $d^3u,\ d^4u, ...$ будет четного порядка. Тогда для дифференциала $d^{2m}u$ будем иметь также три случая, аналогичные изложенным выше [11, 85-87].

Затем Коши находит условия, при которых второй дифференциал сохраняет знак. Например, для функции двух переменных второй дифференциал

$$d^2u = \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2}k^2$$

сохраняет знак, когда уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}r^2 + 2\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}r + \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} = 0,$$

где $r = \frac{h}{k}$, не имеет вещественных корней, то есть когда

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 .$$

Коши указывает, что такой прием применим и для функций любого числа переменных.

Затем Коши дает еще один способ исследования знака второго дифференциала для функций многих переменных.

Полагая

$$D_1 = \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x^2}, \quad D_2 = \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x \partial y}\right)^2, \ldots$$

(координаты точки x^0 найдены из необходимых условий существования экстремума) и обозначая вообще через D_n общий знаменатель, входящий в выражение для определения величин $h,\ k,\ \cdots$, найденных из уравнений

$$\frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x^2}h + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x \partial y}k + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x \partial z}l + \ldots = 1,$$

$$\frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x \partial y}h + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial y^2}k + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial y \partial z}l + \ldots = 1,$$

$$\frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial x \partial z}h + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial y \partial z}k + \frac{\partial^2 u\left(x^0\right)}{\partial^2 z}l + \ldots = 1,$$

. . . .

Он дает следующий критерий для определения, сохраняет ли второй дифференциал постоянный знак. Если $D_2,\ D_3,\ \ldots,\ D_n$ будут иметь одинаковые знаки с $D_1^2,\ D_1^3,\ \ldots.,\ D_1^n$, то второй дифференциал будет сохранять знак. То есть, если $D_1 > 0$, тогда все величины $D_1^2,\ D_1^3,\ \ldots.,\ D_1^n$ также будут больше нуля, следовательно, и $D_2,\ D_3,\ \ldots,\ D_n$ окажутся больше нуля. Этот случай соответствует минимуму функции. Если $D_1 < 0$, то $D_1^m \quad (m = 2, 3, \ldots, n)$ будут иметь положительный или отрицательный знак в зависимости от того, m - четное или нечетное. Имеем максимум.

Далее Коши рассматривает подробнее это правило для случая функции трех переменных. Для случая двух и трех переменных оно соответствует, в современной терминологии, критерию Сильвестра для определения положительной и отрицательной определенности квадратичных форм. Однако Коши термином «квадратичная форма» не пользуется.

Для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ указанная система будет иметь вид

$$ah + bk + cl = 1,$$
$$bh + pk + dl = 1,$$
$$ch + dk + ql = 1,$$

где

$$a = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x^2}, \quad b = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y \partial x}, \quad c = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial x \partial z},$$

$$p = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y^2}, \quad d = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial y \partial z}, \quad q = \frac{\partial^2 u\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$h = \frac{1 - bk - cl}{a},$$

$$k = \frac{a - l\left(da - cb\right) - b}{ap - b^2},$$

$$l = \frac{ap - b^2 - cp + cb - ad + db}{2cbd - c^2 p + apq - qb^2 - ad^2}.$$

В этом случае

$$D_1 = a,$$

$$D_2 = ap - b^2,$$

$$D_3 = 2cbd - c^2 p + apq - qb^2 - ad^2.$$

То есть

$$D_1 = \Delta_1,$$

$$D_2 = \Delta_2,$$

$$D_3 = \Delta_3,$$

где

$$\Delta_1 = a, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & p \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & p & d \\ c & d & q \end{vmatrix}.$$

Тогда, если $D_1 < 0$, то, согласно правилу Коши, будет $D_2 > 0,\ D_3 < 0$. В этом случае функция $u = f\left(x, y, z\right)$ достигает в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ максимума. Для $D_1 > 0$ будет $D_2 > 0,\ D_3 > 0$, следовательно, рассматриваемая функция будет иметь в точке $\left(x_0, y_0, z_0\right)$ минимум.

Выводы. Таким образом, О.Коши внес существенный вклад в развитие теории экстремумов функций многих переменных. Он впервые в задаче на экстремум функции многих переменных фактически применил критерий Сильвестра положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм.

Библиографический список: 1. Бородин А.И. Выдающиеся математики / А.И. Бородин, А.С. Бугай. – Киев: Радянська школа, 1987. – 656с. 2. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в 19 столетии / Ф.Клейн. – М.: Наука, 1989. – Т.1. – 453 с. 3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа / Л.Д.Кудрявцев. – М.: Наука, 1990. – Т.2. – 444 с. 4. Медведев Ф.А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже 19–20 веков / Ф.А. Медведев. – М.: Наука, 1976. – 231 с. 5. Никольский С.М. Курс математического анализа / С.М. Никольский. – М.: Наука, 1983. – Т.1. – 459 с. 6. Рыбников К.А. История математики / К.А.Рыбников. – М.: Моск. ун-т, 1974. – 451 с. 7. Кремер Н.М. Исследование операций в экономике / Н.М. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Гришин, М.Н. Фридман – М.: ЮНИТИ, 2005. – 407 с. 8. Бережная Е.В. Математическое моделирование экономических систем / Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с. 9. Палий И.А. Линейное программирование.

Учебное пособие / И.А. Палий. – М.: Эксмо, 2008. – 256 с. 10. Cantor M. Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik / M. Cantor. – Leipzig, 1908. – Bd. 4. – 1113 p. 11. Cauchy A. Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal. / A. Cauchy. – Paris: De L`imprimerie royale, 1823. – 400 p.

О.М. Прохорова. Теорія ектремумів фунцкій багатьох змінних у підручнику О.Коши з диференціального числення. У статті наведено аналіз методів знаходження ектремумів функцій двох і більшої кількості змінних у підручнику Коши. Висвітлено його внесок у розвиток теорії екстремумів функцій багатьох змінних.

Prokhorova O. Theory of extremums of the functions of many variable values. Analysis has been conducted the methods of find out the extremums of the functions of two and more numbers variable values in Coshy`s book in this article. His deposit to development of theory of exstremums of the functions of many variable values is reveal.