

УСЛОВИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ГАЗОВОЙ СРЕДЫ РАСТЕНИЙ

Куценко Ю. М.

Таврический государственный агротехнологический университет

Определены условия определения диэлектрической проницаемости газовой среды растений.

Постановка проблемы. В ряде вопросов касающихся изучения жизнедеятельности растений важной задачей является установление режима газообмена при изменении отдельных факторов внешней среды. Для ее решения с высокой достоверностью можно использовать цилиндрический диэлектрический резонатор.

Анализ последних достижений и публикаций. Алгоритм определения электрофизических параметров среды окружающей диэлектрический резонатор основан на уравнениях, которые устанавливают связь между резонансными частотами, геометрическими и материальными параметрами резонатора и диэлектрической и магнитной проницаемостями внешней среды. В общем случае, уравнения следует решать численными методами (например, методом Ньютона и т.п.) [1]. Однако, для практических применений такой подход сопряжен с определенными трудностями. Так, необходимо иметь достаточно хорошие начальные приближения для собственных частот резонатора [2]. Кроме того, имеется возможность появления неоднозначной связи между резонансными частотами и параметрами внешней среды [3-4].

Цель работы. Обосновать электрофизические параметры окружающей среды для определения диэлектрической проницаемости газовой среды растений.

Основной материал исследований. Для решения поставленной проблемы целесообразно ввести ряд предположений. Будем считать, что среда окружающая диэлектрический резонатор является изотропной, однородной и характеризуется диэлектрической проницаемостью ε_0 близкой к единице, т.е. $|\varepsilon_{0-1}| \ll 1$. Потери малы настолько, что ими можно

пренебречь (тангенс угла потерь $tg \delta = \frac{Im \varepsilon_0}{Re \varepsilon_0} \ll 1$,

где $Re \varepsilon_0$ и $Im \varepsilon_0$ соответственно реальная и мнимая части диэлектрической проницаемости). Кроме того, среда является немагнитной, т.е. магнитная проницаемость $\mu_0 = 1$. Относительно резонатора будем предполагать следующее. Материал, из которого изготовлен цилиндрический резонатор, моделируется анизотропной диэлектрической средой с тензором диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp}, 0, 0 \\ 0, \varepsilon_{\perp}, 0 \\ 0, 0, \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}$$

И магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Компоненты тензора $\varepsilon_{\parallel}, \varepsilon_{\perp}$ не обладают частотной дисперсией. В этих предположениях, как следует из уравнений собственные колебания HE_{mnp} типа слабо реагируют на малые изменения диэлектрической проницаемости ε_0 внешней среды. Поэтому, в дальнейшем ограничимся, случаем колебаний EH_{mnp} типа, для которых E_z компонента напряженности электрического поля является доминирующей внутри резонатора. Для этих типов колебаний постоянная затухания α поля вне резонатора и постоянная распространения β внутри резонатора удовлетворяют уравнениям:

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\perp}} \beta \operatorname{tg} \frac{\beta h}{2} \quad (1)$$

$$\alpha = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_{\perp}} \beta \operatorname{ctg} \frac{\beta h}{2} \quad (2)$$

Уравнение (1) отвечает случаю, когда E_z является четной функцией переменной z , а уравнение (2), когда нечетной. Для определенности, далее будем рассматривать уравнение (1).

Тогда, легко получить соотношение между резонансным волновым числом $k_0 = \frac{\omega}{c}$ и постоянной распространения β , которое в безразмерной форме имеет вид:

$$\hat{k}_0 = u \sqrt{\frac{1 + \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_{\perp}^2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u h}{2R} \right)}{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_0}}, \quad (3)$$

где $\hat{k}_0 = k_0 R$, $u = \beta R$, h - высота; R - радиус резонатора.

Теперь, учитывая, что диэлектрическая проницаемость внешней среды близка к единице, представим в следующей форме:

$$F_1(x, y) + \delta F_2(x, y) = 0 \quad (4)$$

Здесь $\delta = \varepsilon_0 - 1$,

$$F_1(x, y) = \left(y \sqrt{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel} I'_m \left(x \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}} \right) + F_m(x, y) \right) \times \left(y I'_m \left(x \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}} \right) + F_m(x, y) \right) - m^2 I_m^2(x) \left(1 + \frac{y^2}{x^2} \right) \left(\varepsilon_\perp + \frac{x^2}{y^2} \right), \quad (5)$$

$$F_2(x, y) = F_m(x, y) \times \left(y I'_m \left(x \sqrt{\frac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp}} \right) + F_m(x, y) \right) - m^2 I_m^2(x) \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right), \quad (6)$$

где $F_m(x, y) = x I_m(x) \frac{K'_m(y)}{K_m(y)}$,

$$x = u \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \left(1 + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\perp} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u h}{2R} \right) \right)}{\varepsilon_\perp - \varepsilon_0}}, \quad (7)$$

$$y = u \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \left(\frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_0} - 2 - \frac{\varepsilon_0^2}{\varepsilon_\perp^2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u h}{2R} \right) \right)}{\varepsilon_\perp - \varepsilon_0}}. \quad (8)$$

Как видно, уравнение (4) является уравнением относительно нормированной постоянной распространения u . Определив u из (4), по формуле (3) получаем нормированные резонансные волновые числа, а следовательно и резонансные частоты. Из (4) и (7), (8) следует, что u зависит от параметра $\delta = \varepsilon_0 - 1$, т.е. диэлектрической проницаемости внешней среды. Наша цель состоит в нахождении этой зависимости при выполнении условия $\delta \ll 1$.

Будем предполагать, что высота резонатора меньше резонансной длины волны и значительно меньше его диаметра, т.е. $\frac{h}{2R} \ll 1$. Такого типа ди-

электрические резонаторы обладают высокой радиационной добротностью на колебаниях "шепчущей галереи" [11].

Пусть u_0 - решение уравнения (3.70) при $\delta = 0$ (внешняя среда вакуум) и $\hat{k}_0(0)$ - соответствующее нормированное резонансное волновое число.

Тогда, разлагая (3) в ряд по малому параметру δ и учитывая условие $\frac{h}{2R} \ll 1$ имеем следующее вы-

ражение для $\hat{k}_0(\delta)$ при наличии внешней среды:

$$\hat{k}_0(\delta) = \hat{k}_0(0) + \delta \left[\dot{u}_0 \frac{\hat{k}(0)}{u_0} + \frac{u_0^2}{2 \hat{k}_0(0) (\varepsilon_\perp - 1)^2} \right] \quad (9)$$

В (9) через \dot{u}_0 обозначено значение производной по параметру δ , постоянной распространения u при $\delta = 0$. Определим теперь величину \dot{u}_0 .

Для этого рассмотрим уравнение (4). Очевидно, что решение этого уравнения зависит от параметра δ . Продифференцируем (4) по этому параметру и положим $\delta = 0$.

Тогда имеем:

$$\dot{u}_0 = - \frac{F_2(x, y) + \frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \delta}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}} \quad (10)$$

Теперь, используя (7) и (8), найдем выражения для $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial y}{\partial \delta}$ при $\delta = 0$.

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_\perp^{-1} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}{\varepsilon_\perp - 1}} + \frac{h u_0 \operatorname{tg} \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}{2R \varepsilon_\perp \sqrt{\varepsilon_\perp - 1} \sqrt{1 + \varepsilon_\perp^{-1} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)} \cos^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp - 2 - \varepsilon_\perp^{-2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}{\varepsilon_\perp - 1}} - \frac{h u_0 \operatorname{tg} \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}{2R \varepsilon_\perp^2 \sqrt{\varepsilon_\perp - 1} \sqrt{\varepsilon_\perp - 2 - \varepsilon_\perp^{-2} \operatorname{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)} \cos^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)} \quad (12)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = \frac{u_0 \left(\varepsilon_{\perp} + \text{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right) \right)}{2(\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2} \sqrt{1 + \varepsilon_{\perp}^{-1} \text{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}} \quad (13)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \delta} = - \frac{u_0 \left[\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\perp}^{-2} (3\varepsilon_{\perp} - 2) \text{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right) \right]}{2(\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_{\perp} - 2 - \varepsilon_{\perp}^{-2} \text{tg}^2 \left(\frac{u_0 h}{2R} \right)}} \quad (14)$$

Ограничиваясь в (11) – (14) главными членами по параметру $\frac{h}{2R}$ имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_{\perp} - 1}}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\perp} - 2}{\varepsilon_{\perp} - 1}}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \delta} &= \frac{u_0 \varepsilon_{\perp}}{2(\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2}}, \\ \frac{\partial y}{\partial \delta} &= - \frac{u_0 \varepsilon_{\perp}}{2(\varepsilon_{\perp} - 1)^{3/2} \sqrt{\varepsilon_{\perp} - 2}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее, используя (5), вычислим частные производные функции $F_1(x, y)$, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= \left[y_0 \varepsilon_{\parallel} I_m'' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m^x(x_0, y_0) \right] \times \\ &\times \left[y_0 I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m(x_0, y_0) \right] + \\ &+ \left[y_0 \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m(x_0, y_0) \right] \times \\ &\times \left[y_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} I_m'' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m^x(x_0, y_0) \right] - \\ &- 2m^2 I_m^2(x_0) \times \\ &\times \left[\frac{x_0}{y_0^2} - \varepsilon_{\perp} \frac{y_0}{x_0^3} + \frac{I_m'(x_0)}{I_m(x_0)} \left(1 + \frac{y_0^2}{x_0^2} \right) \left(\varepsilon_{\perp} + \frac{x_0^2}{y_0^2} \right) \right] \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \left[\sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}} I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m^y(x_0, y_0) \right] \times \\ &\times \left[y_0 I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m(x_0, y_0) \right] + \\ &+ \left[y_0 \sqrt{\varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel}} I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m(x_0, y_0) \right] \times \\ &\times \left[I_m' \left(x_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}}} \right) + F_m^y(x_0, y_0) \right] - \\ &- 2m^2 I_m^2(x_0) \left(\varepsilon_{\perp} \frac{y_0}{x_0^2} - \frac{x_0^2}{y_0^3} \right) \quad (18) \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} F_m^x(x_0, y_0) &= \frac{K_m'(y_0)}{K_m(y_0)} \times \\ &\times \left(I_m(x_0) + x_0 I_m'(x_0) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_m^y(x_0, y_0) &= x_0 I_m(x_0) \times \\ &\times \frac{K_m'(y_0) (K_m''(y_0) - K_m'(y_0))}{K_m^2(y_0)} \end{aligned}$$

а величины x_0 и y_0 вычисляются по формулам (7), (8) при $\varepsilon_0 = 1$ и $u = u_0$. Далее, подставляя (15), (16) в (10) из (9) окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \hat{\Delta k}_0 &= (\varepsilon_0 - 1) \times \\ &\times \left[\frac{u_0^2}{2 \hat{k}_0(0) (\varepsilon_{\perp} - 1)} + \dot{u}_0 \frac{\hat{k}_0(0)}{u_0} \right], \quad (19) \end{aligned}$$

где

$$\dot{u}_0 = - \frac{\sqrt{\varepsilon_{\perp} - 1} F_2(x_0, y_0) + \frac{u_0 \varepsilon_{\perp}}{2(\varepsilon_{\perp} - 1)}}{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon_{\perp} - 2} \frac{\partial F_1}{\partial y}} \times$$

$$\times \frac{\left[\frac{\partial F_1}{\partial x} - (\varepsilon_{\perp} - 2)^{-4/2} \frac{\partial F_1}{\partial y} \right]}{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \sqrt{\varepsilon_{\perp} - 2} \frac{\partial F_1}{\partial y}}.$$

Здесь $\hat{\Delta} k_0 = \hat{k}_0(\delta) - \hat{k}_0(0)$ - изменение резонансного волнового числа, а величины $\frac{\partial F_1}{\partial x}$, $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ вычисляются согласно формулам (17), (18).

Таким образом, получена связь между изменением резонансной характеристики резонатора и диэлектрической проницаемостью среды окружающей резонатор.

Тем самым решена задача об определении диэлектрической проницаемости среды внешней по от-

ношению к резонатору по изменению резонансной частоты колебания "шепчущей галереи".

Следует отметить, что полученная формула (19) является весьма громоздкой и ее использование требует численного решения характеристического уравнения (4).

Возможен альтернативный подход, который позволяет упростить расчетные формулы. Он основан на численных результатах, полученных с помощью уравнения (4).

Анализ этих результатов позволил установить следующую закономерность.

На рис.1 представлены результаты численных экспериментов.

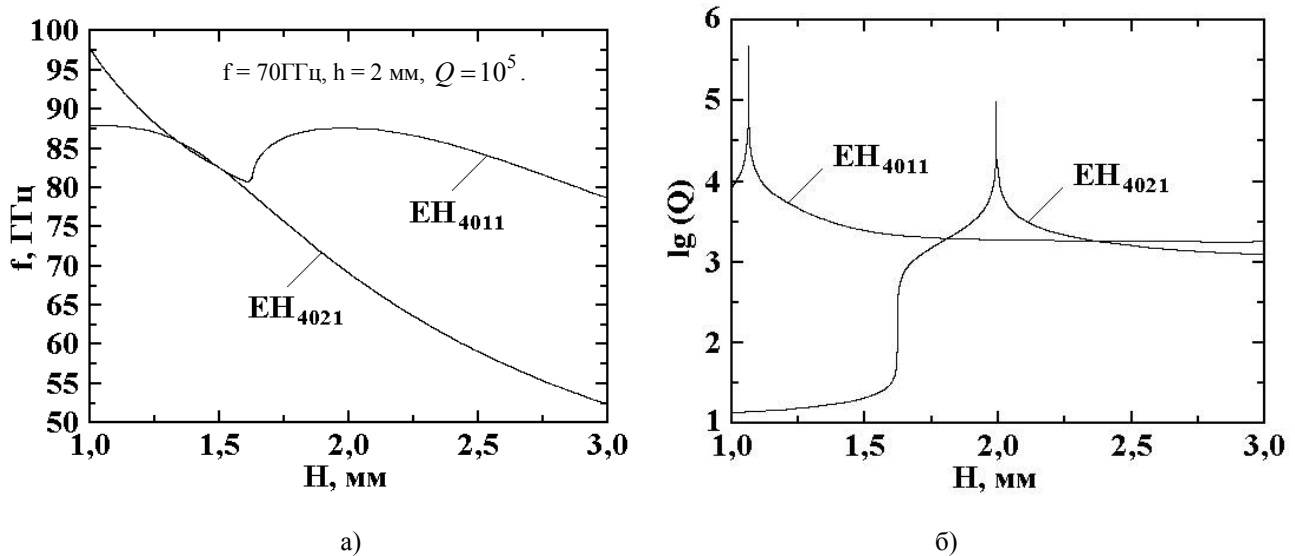


Рисунок 1 – Графики зависимости резонансных частот $f(h)$ и добротностей $Q = f(h)$ колебаний "шепчущей галереи" EH_{mnp} типа от высоты резонатора

Рассматривался открытый цилиндрический диэлектрический резонатор фиксированного радиуса.

В качестве материала резонатора был выбран лейкосапфир с диэлектрическими проницаемостями $\epsilon_{\parallel} = 11.51$, $\epsilon_{\perp} = 9.4$ [18].

Исследовалось колебание "шепчущей галереи" EH_{mnp} типа с азимутальным индексом $m = 40$, аксиальным индексом $p = 1$ и радиальным индексом $n = 1, 2$.

Основное внимание было уделено изучению зависимости резонансных частот и добротностей колебаний от изменения высоты h резонатора, радиус резонатора составляет 19 мм.

Как видно из рис.1, изменение добротности колебаний при вариации высоты резонатора имеет ярко выраженный резонансный характер.

Было установлено, что значениям высоты резонатора, при которых наблюдается максимальная радиационная добротность, отвечают резонансные частоты, при которых тангенциальные компоненты электриче-

ского поля практически близки к нулю на боковой поверхности резонатора.

Это возможно, если резонансное волновое число k_0 и постоянная распространения β вдоль оси резонатора удовлетворяют уравнению:

$$I_m \left(R \sqrt{k_0^2 \epsilon_{\perp} - \beta^2} \right) \cong 0 \quad (20)$$

$$\text{Следовательно, } k_0^2 \epsilon_{\perp} - \beta^2 = \frac{V_{mp}^2}{R^2},$$

где V_{mp} - p - корень функции Бесселя m -го порядка.

Теперь, если воспользоваться формулой (3) дающей связь волнового числа k_0 и постоянной распространения β , то можно получить следующую приближенную формулу для случая $\frac{h}{2R} \ll 1$:

$$k_0 = \frac{V_{mp}}{R\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \sqrt{1 + \frac{2(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{hV_{mp}}{R} \right)^2} \right) \frac{2(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_0)}{\varepsilon_{\parallel}}}} \quad (21)$$

Поэтому, выбирая геометрические параметры резонатора таким образом, чтобы выполнялось условие резонанса добротности колебаний (20) можно по формуле (21) получить информацию об изменении диэлектрической проницаемости внешней среды по изменению резонансной частоты.

Для этого достаточно перейти в (21) к резонансной частоте f , тогда вместо (21) имеем:

$$f = \frac{cV_{mp}}{2\pi R\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \sqrt{1 + \frac{2(\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_0)}{\varepsilon_0 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_0}{\varepsilon_{\parallel}} \right) \left(\frac{hV_{mp}}{R} \right)^2} \right)}} \quad (22)$$

где c - скорость света в вакууме.

Как видно, увеличение диэлектрической проницаемости внешней среды приводит к уменьшению резонансной частоты.

Кроме того, при $|\varepsilon_0 - 1| \ll 1$ эта зависимость практически является линейной. Рис.2 иллюстрирует зависимость сдвига резонансной частоты $\Delta f = f_0 - f$ (f - резонансная частота при $\varepsilon_0 = 1$) от параметра $\varepsilon_0 - 1$.

На этом же рисунке пунктирной линией показан график зависимости Δf для случая, когда материалом резонатора является изотропный диэлектрик, а именно тефлон с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2,04$.

Анализ численных результатов позволяет утверждать, что анизотропный диэлектрический резонатор более предпочтителен, чем изотропный. Поскольку, наблюдается более существенное изменение резонансной частоты.

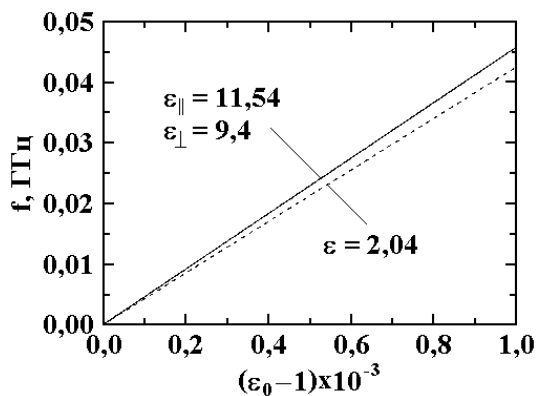


Рисунок 2 – Графики зависимости смещения резонансных частот $\Delta f = f(1) - f(\varepsilon_0)$ от диэлектрической проницаемости внешней среды для анизотропного и изотропного диэлектрических резонаторов

Таким образом, полученные выражения для резонансных частот колебаний "шепчущей галереи" могут служить для определения диэлектрической проницаемости газовой среды растений при использовании открытых диэлектрических резонаторов в качестве измерительной ячейки.

Выводы. Для выполнения требований по чувствительности измерения диэлектрической проницаемости газовой среды растений в пределах $\varepsilon_0 - 1 \sim 10^{-6}$ необходимо применять открытые цилиндрические анизотропные диэлектрические резонатора, возбуждаемые на колебаниях "шепчущей галереи".

Эти резонаторы обеспечивают добротность при комнатной температуре в пределах 10^5 . Для измерения газообмена растений следует использовать анизотропные диэлектрические резонаторы с параметрами $\varepsilon_{11} = 11,54$; $\varepsilon_1 = 11,54$; $R = 19 \text{ мм}$; $h = 2 \text{ мм}$; $f_p = 70 \text{ ГГц}$; $Q = 10^5$ тип волны EH_{4021} .

Список использованных источников

1. Дюженков Л. И. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник для вузів. / [Л. І. Дюженков, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін.] – К.: Вища школа, 2003. – 462 с.
2. Шестопапов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопапов – К.: Наук. думка, 1987. – 283 с.
3. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс – М.: Мир, 1987. – 311 с.
4. Ильченко М. Е. Теория диэлектрических резонаторов / М. Е. Ильченко, А. А. Трубин – К.: Либідь, 1993. – 214 с.
5. Егоров В.Н. Метод металлодиэлектрического резонатора в измерениях параметров радиоматериалов / В. Н. Егоров, Е. Ю. Токарева // Измерительная техника. – 2005. – №9. – С. 65-70.

Анотація

УМОВИ ВИЗНАЧЕННЯ ДІЕЛЕКТРИЧНОЇ ПРОНИКНОСТІ ГАЗОВОГО СЕРЕДОВИЩА РОСЛИН

Куценко Ю. М.

Визначено умови визначення діелектричної проникності газового середовища рослин.

Abstract

CONDITIONS OF DEFINITION OF DIELECTRICAL TRANSMITTIVITY OF THE GAS AMBIENCE OF THE PLANTS

Y. Kutsenko

The certain conditions of definition of dielectrically to transitivity of the gas ambience of the plants.