

## УДАР ШАРООБРАЗНОГО ТЕЛА О НАКЛОННУЮ ПЛОСКОСТЬ

**Богомолова В.П., Зинченко М.А., Богомолов А.А., инженеры**  
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко)

*В статье рассмотрена теория удара шарообразного тела о наклонную плоскость.*

**Постановка задачи.** В теории сепарации часто используются элементы теории удара, однако в большинстве случаев частицы представляются в виде материальных точек без учета их геометрических характеристик [1], [2]. Вместе с тем при ударе реальных частиц о преграду образуется смятие обеих поверхностей [3], и нормальная реакция поверхности, о которую ударяется частицы, смещается вперед по ходу движения на величину коэффициента качения.

**Целью работы** является исследование процесса соударения шарообразного тела с наклонной плоскостью.

**Результаты исследований.** Во время соприкосновения частицы и преграды (в нашем случае – наклонной плоскости) в течение удара происходит качение частицы по плоскости в течение некоторого времени  $\tau$ . Возникает момент пары трения, что приводит к повороту частицы.

На рис. 1 представлена схема действующих сил в этом случае. Согласно схеме момент пары трения равен

$$\left( mg + \frac{mv}{\tau} \right) f_k \cos \alpha .$$

Момент силы трения

$$r \cdot f_{Tp} \left( mg + \frac{mv}{\tau} \right) \cos \alpha .$$

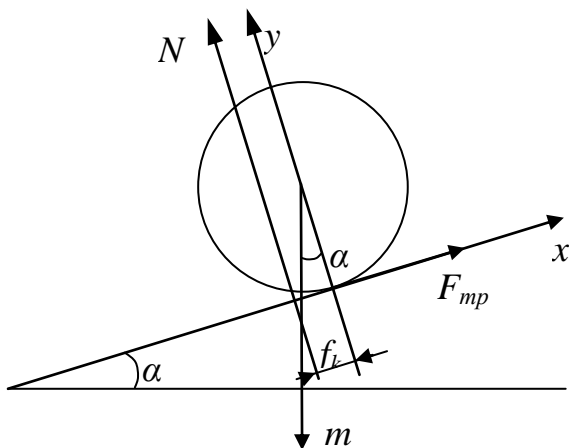


Рис. 1. Расчетная схема удара шарообразной частицы.

$V$  – скорость, м/с;

$F_{mp}$  – сила трения скольжения, Н;

$f_k$  – коэффициент трения качения, м;

$r$  – радиус шара, м;

$N$  – нормальная реакция плоскости; н,

$\alpha$  – угол наклона плоскости, рад,

$m$  – масса шара, кг;

$\tau$  – время удара, сек.

Отсюда вращающий (опрокидывающий) момент

$$M_o = m \left( g + \frac{v}{\tau} \right) \cos \alpha (r \cdot f_{Tp} - f_k).$$

Например, для гороха [3] при  $v = 1$  м/с при  $V = 3 \cdot 10^{-3}$  м,  $f_k = 10^{-3}$  м,  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\tau = 46,9 \cdot 10^{-6}$  с,  $m = 0,14 \cdot 10^{-3}$  кг получим  $M_o = 0,51 \cdot 10^{-3}$  Н.м.

Таким образом, во время удара возникает вращающий момент, приводящий тело к вращению во время полета после отскока.

Определим угловую скорость вращения шара, если его момент инерции относительно оси вращения равен  $I_z$ , а центр масс расположен на оси вращения. При этом шар будет вращаться под действием пары сил с моментом, зависящим от угловой скорости  $\dot{\phi}_x$  вращения:  $M_z = M_o - a \dot{\phi}^2$ , где  $M_o$  – начальный вращающий

момент,  $a\dot{\varphi}^2$  – тормозящий момент.

Дифференциальное уравнение вращения твердого тела в общем случае имеет вид:

$$I_Z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^n M_Z(F_k^e),$$

где  $F_k^e$  – равнодействующая внешних сил.

К шару приложены силы:  $mg$  – сила тяжести тела, силы опорных реакций и пара сил с моментом  $M_z$ . Относительно оси вращения моменты силы тяжести и сил опорных реакций равны нулю. Следовательно, сумма моментов внешних сил относительно оси вращения равна моменту  $M_z$ , то есть

$$\sum_{k=1}^n M_z(F_k^e) = M_o - a\dot{\varphi}^2.$$

При этом дифференциальное уравнение вращения будет

$$I_Z \ddot{\varphi} = M_o - a\dot{\varphi}^2,$$

отсюда

$$\ddot{\varphi} = \frac{a}{I_Z} \left( \frac{M_o}{a} - \dot{\varphi}^2 \right).$$

Разделив переменные, будем иметь:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{\frac{M_o}{a} - \dot{\varphi}^2} = \frac{a}{I_Z} dt.$$

После интегрирования получим:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{M_o}} \ln \frac{\sqrt{\frac{M_o}{a}} + \dot{\varphi}}{\sqrt{\frac{M_o}{a}} - \dot{\varphi}} = \frac{a}{I_Z} t + c.$$

При начальных условиях  $t = 0, \dot{\phi} = 0, c = 0$

Тогда

$$\ln \frac{\sqrt{\frac{M_o}{a}} + \dot{\phi}}{\sqrt{\frac{M_o}{a}} - \dot{\phi}} = \frac{2}{I_z} \sqrt{aM_o} t.$$

Отсюда получаем

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{M_o}{a}} \frac{1 - e^{-\frac{2}{I_z} \sqrt{aM_o} t}}{1 + e^{-\frac{2}{I_z} \sqrt{aM_o} t}}.$$

В [4] вычислено затухание вращения частицы с учетом трения поверхности о воздушную среду, откуда для нашего случая получим  $a = 0,4 \cdot 10^{-6}$  кг·м<sup>2</sup>, подставив это значение в (1), будем иметь  $\dot{\phi} = 36$  1/с.

Таким образом, в случае для гороха после удара частица вращается с угловой скоростью 36 1/с. Из (1) при  $t = 0$ , получим

$\dot{\phi} = \omega = \sqrt{\frac{M_o}{a}}$ , т.е. в течение этого времени частица вращается с

постоянной угловой скоростью. При ударе вращающегося тела о плоскость (преграду) вычислим время его вращения при контакте с поверхностью. Частица вращается равномерно под действием силы трения. Можно написать

$$V_i = V_o - \omega t,$$

где  $V_i$  - линейная скорость,

$\omega$  - угловое ускорение.

Ускорение  $\omega$  вызывается силой трения

$$F_{Tp} = kF = m\omega.$$

Для случая удара о наклонную плоскость

$$F = F_o \cos \alpha ,$$

где  $F_o$  - сила удара о горизонтальную плоскость. В случае для гороха при  $V = 1$  м/с,  $F_o = 6$  Н.

Учитывая, что  $V_t = \omega r$ , находим

$$t = \frac{V_o}{\omega} = \frac{\omega r \cdot m}{kF} = \frac{\omega r \cdot m}{kF_o \cos \alpha} . \quad (1)$$

За это время число оборотов частицы составит

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \omega t - \frac{\varepsilon t^2}{2} \right), \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  - касательное угловое ускорение, равное  $\omega/t$ , откуда после подстановки (1) в (2), получим

$$n = \frac{1}{2\pi} \left( \omega t - \frac{\omega t}{2} \right) = \frac{\omega^2 \cdot r \cdot m}{4\pi \cdot k \cdot F_o \cdot \cos \alpha} . \quad (3)$$

Подставляя численные значения в(1) и (2), получим

$$t = 6,93 \cdot 10^{-6} \text{ с},$$

$$n = 19,86 \cdot 10^{-6} \text{ об.}$$

Для рапса эти значения составят  $t = 1,27 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ ,  $n = 2,1 \cdot 10^{-7} \text{ с}$ .

Следовательно, во время удара вращающаяся частица прекращает вращение практически мгновенно, и отражение происходит так, как бы частица ударялась без вращения. Потеря

энергии при ударе составят  $\frac{I_z \omega^2}{2} = 19 \cdot 10^{-14}$  Дж для гороха и  $2,1 \cdot 10^{-15}$

Дж для рапса. Этими потерями можно пренебречь по сравнению с потенциальной энергией сжатия частицы при ударе, т.е. коэффициент восстановления скорости не изменится.

Однако следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Из анализа формулы (2) видно, что время до

остановки вращения зависит от частоты вращения, коэффициента трения и угла наклона плоскости (для данной частицы). В сепарации на ударных сепараторах частота вращения колеблется незначительно, коэффициент трения, как правило, изменяется в пределах  $\kappa=0,3 \div 0,4$ . Поэтому представляет интерес изучение влияния угла наклона. Найдем предельный угол наклона, при котором отражение не происходит. Это произойдет тогда, когда не прекращается вращение частицы во время контакта при ударе. Исходя из геометрических, кинематических параметров для гороха получим предельный угол  $\alpha = 75^\circ$ , т.е. границу, за которой отражение (отскок) частицы исчезает, и частица сползает или скатывается по плоскости.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда падающая частица вращается вокруг оси, параллельной наклонной плоскости. Согласно закону сохранения энергии иметь для первой фазы удара:

$$\frac{mV_1^2}{2} + \frac{I\omega_1^2}{2} = U_n + D_{ep}, \quad (4)$$

где  $U_n$  – потенциальная энергия сжатия частицы;

$D_{ep}$  – диссипативная функция от вращения частицы во время контакта.

$$U_n = kh^{5/2}[3],$$

где  $k = \frac{4}{5D} \sqrt{R}$ ,  $D = \frac{3}{4} \left( \frac{1-\sigma^2}{E} + \frac{1-\sigma_1^2}{E_1} \right)$ ,  $h = \left( \frac{m}{k} \right)^{2/5} V^{4/5}$ ,

$\sigma, \sigma_1$  – коэффициент Пуассона частицы, материала и плоскости  
 $E, E_1$  – модуль Юнга соответственно.

$$D_{ep} = f_{mp} \cdot F \cdot r \cdot 2\pi \cdot n,$$

где  $f_{mp}$  – коэффициент трения;

$F$  – сила удара, Н;

$r$  – радиус частицы, м;

$n$  – число оборотов частицы во время контакта.

После подстановки в (4) с учетом параметров получим  $n=0,0007$  об.

### **Выводы:**

В результате проведенных исследований установлено, что

вращение прекращается в течении первой фазы и отражение происходит обычным образом.

Таким образом, в пределах реальных значений частот вращения, коэффициентов трения и углов наклона отражающей плоскости вращение частицы не оказывает существенного влияния на отражение (отскок) частицы от плоскости.

### **Список литературы**

1. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

2. Заика П.М. Избранные задачи земледельческой механики. – К.: Изд-во УСХА, 1992. – 507 с.

3. Богомолов А.В. Контактная задача при ударе зерна об отражающую поверхность. // «Прогресивні ресурсозберігаючі технології та їх економічне обґрунтування у підприємствах харчування. Економічні проблеми торгівлі.» Зб.наук праць ХДАТОХ. Част. I. – Харків. 2001. – с.281-287.

4. Богомолов А.В. Учет вращения частицы зерновой смеси при движении ее в воздушном потоке. // Вісник ХДТУСГ «Сучасні напрямки технології та механізації процесів переробних і харчових виробництв». Вип..9. – Харків. – 2002. – с.5-14.

### **УДАР КУЛЕПОДІБНОГО ТІЛА ОБ НАХИЛЕНУ ПОВЕРХНЮ**

*У статті розглянуто теорію удару кулеподібного тіла об нахилену поверхню.*

### **BLOW OF THE SPHERICAL BODY ABOUT THE INCLINED PLANE**

*In article the theory of blow of a spherical body about an inclined plane is considered.*