УДК 539.1.074

ИССЛЕДОВАНИЕ ОТКРЫТОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА ДЛЯ КОНТРОЛЯ ИЗМЕНЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Куценко Ю. Н.[1], Лисиченко Н. Л.[2], Черенков А. Д.[2]

[1]*Таврический государственный агротехнологический университет,*
[2]*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко*

Определены условия распространения электромагнитного поля во внешней плоскости открытого цилиндрического резонатора для контроля изменения диэлектрических параметров внешней среды.

Постановка проблеми. Интерес к открытым цилиндрическим диэлектрическим резонаторам (ОЦДР), возбуждаемых на колебаниях "шепчущей галереи", во многом определяется их прикладным значением, а именно, их использованием в качестве измерительных ячеек диэлектрометров для исследования электрических свойств как твердых тел, так и жидких и газообразных сред [1,2].

Анализ последних исследований и публикаций. Использование при изготовлении ОЦДР таких анизотропных диэлектрических материалов, как одноосные монокристаллы кварца, сапфира, рутила, обладающих в миллиметровом диапазоне длин волн, малыми значениями тангенса угла потерь $tg\,\delta \sim 5 \cdot 10^{-5}$, дало возможность существенно повысить собственную добротность колебаний ОЦДР. В частности, в резонаторах из сапфира была получена добротность $\sim 10^5$ при комнатной температуре [3]. Такая высокая добротность обусловлена возможностью существования в таких резонаторах колебаний "шепчущей галереи". Эти колебания формируются внутри резонатора волнами, характеризующихся большим значений азимутальных индексов $m >> 1$ и падающих на боковую поверхность резонатора под углами полного внутреннего отражения. Наличие каустик и области с экспоненциальным законом затухания волн вне диэлектрического резонатора и обусловливает высокие значения радиационной добротности. Колебания "шепчущей галереи" весьма чувствительны к изменению параметров внешней среды в окрестности границы резонатора. Поэтому, одной из главных задач теории открытых диэлектрических резонаторов является исследования влияния на спектр собственных частот резонатора изменения электрофизических характеристик внешней среды. Решение этой задачи для различных типов диэлектрических резонаторов, может служить основой для решения соответствующей обратной задачи – определение диэлектрических характеристик внешней среды по спектру собственных частот резонатора.

Существуют различные подходы к решению задач о спектральных характеристиках открытых диэлектрических резонаторов. С формальной точки зрения их можно разделить на три группы. Первая группа – это прямые численные методы : метод конечных элементов, методы конечных разностей в частотной и временной областях, вариационные методы [4].

Несмотря на относительную простоту применения этих методов, в настоящее время не представляется возможным их использование для решения спектральных задач теории открытых диэлектрических резонаторов. Основная причина состоит в том, что собственные колебания резонатора должны рассматриваться в неограниченной области и на бесконечности удовлетворять условию излучения [5]. Существующие компьютерные программы, реализующие прямые численные методы, не учитывают этого условия или учитывают приближенно. Кроме того, поскольку спектральные задачи для диэлектрических резонаторов являются несамосопряженными (потери на излучение) с нелинейным вхождением спектрального параметра (частоты) в условие излучения, то практически невозможно применение существующих вариационных методов [6].

Вторая группа методов – методы интегральных уравнений [7]. Прежде всего это методы, которые используют интегральные формулы Стреттона – Чу [8]. В результате есть возможность учесть условие излучения и получить граничные интегральные уравнения относительно тангенциальных компонент электромагнитного поля собственных колебаний на поверхности резонатора [7,8]. Главными ограничениями применения граничных интегральных уравнений являются наличие геометрических сингулярностей (типа ребер, вершин) поверхности резонатора и предположения о независимости электрофизических параметров резонатора от пространственных переменных.

Третья группа методов интегральных уравнений – сингулярные объемные интегральные уравнения [9]. По-видимому, впервые такого типа уравнения были получены в [10]. Эти уравнения позволяют учесть не только условие излучения, но и наличие геометрических сингулярностей поверхности резонатора. Однако, следует отметить, что непосредственная дискретизация (сведение к системе линейных алгебраических уравнений) этих уравнений на основе соответствующих квадратурных формул для сингулярных интегралов приводит к системам линейных алгебраических уравнений большой размерности. Последнее обстоятельство, даже с учетом современных компьютеров, затруднят использование сингулярных уравнений в ситуации, когда резонансная длина волны значительно меньше геометрических размеров резонатора, что характерно для диэлектрических резонаторов, возбуждаемых на колебаниях "шепчущей галереи" [11].

В этой связи возможной альтернативой рассмотренным выше методам, являются различные приближенные подходы, позволяющие с использованием современных компьютеров эффективно, с вычислительной точки зрения, рассчитывать спектральные характеристики (спектр собственных частот, собственные колебания и их добротности) диэлектрических резонаторов. Один из таких подходов основан на методе частичных областей (метод разделения переменных, метод сшивания) [4,11].

Цель работы. Разработать метод решения задачи о собственных колебаниях открытого цилиндрического резонатора, выполненного из анизотропной диэлектрической среды, полученные методом частичных областей.

Основная часть материалов исследований. Задача электромагнитного анализа открытого цилиндрического диэлектрического резонатора (ОЦДР) сводится к математической модели, которая принадлежит классу краевых задач теории электромагнитного поля. С математической точки зрения резонатор моделируется некоторой ограниченной областью Q, граница которой – поверхность S. Эта область заполнена средой, характеризующейся тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ и магнитной проницаемостью μ. Вне резонатора среда предполагается однородной и изотропной с диэлектрической и магнитной проницаемостями, соответственно ε_0 и μ_0. Требуется определить электромагнитное поле, которое зависит от времени по закону $e^{-i\omega t}$. В такой постановке соответствующая задача о собственных частотах и колебаниях формулируется следующим образом: найти значения частоты ω, при которых существуют векторные функции $\vec{\mathrm{E}}$ и $\vec{\mathrm{H}}$, удовлетворяющие всюду, за исключением граничной поверхности S резонатора, однородным уравнениям Максвелла:

$$\dot{r}ot\,\vec{\mathrm{H}} = -i\,\frac{\omega}{c}\begin{cases}\hat{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}},\, в\, Q\\ \varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}},\, вне\, Q\end{cases} \quad (1)$$

$$rot\,\vec{\mathrm{E}} = i\,\frac{\omega}{c}\begin{cases}\mu\vec{\mathrm{H}},\, в\, Q\\ \mu_0\,\vec{\mathrm{H}},\, вне Q\end{cases} \quad (2)$$

$$div\,(\hat{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}}) = 0, \qquad div\left(\mu\,\vec{\mathrm{H}}\right) = 0,\, в\, Q, \quad (3)$$

$$div\,(\varepsilon_0\,\vec{\mathrm{E}}) = 0, \qquad div\left(\mu_0\,\vec{\mathrm{H}}\right) = 0,\, вне\, Q, \quad (4)$$

Условию непрерывности тангенциальных компонент поля на S и условию излучения на бесконечности [11]. В дальнейшем будем рассматривать резонатор в виде круглого цилиндра конечной длины. Кроме того, предположим, во-первых, что резонатор изготовлен из одноосного кристалла, характеризующегося тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon} = \left[\varepsilon i\, j\right]$ с отличными от нуля компонентами $\varepsilon_{\parallel}\ \varepsilon_{\perp}$ в направлениях параллельном и перпендикулярном к его оптической оси, и, во-вторых, оптическая ось резонатора совпадает с осью геометрической симметрии резонатора. Введем цилиндрическую систему координат таким образом, чтобы ось z совпадала с оптической осью кристалла, а начало координат находилось в плоскости геометрической симметрии резонатора ($z = 0$) (рис.1).

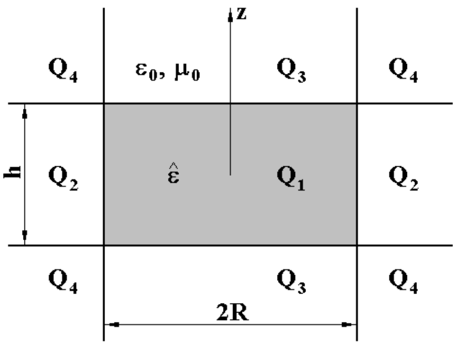

Рисунок 1 – Геометрия резонатора

Тогда область пространства Q, занятая резонатором совпадает с множеством:

$$Q = \left\{ \left(r, \varphi, z\right): 0 \le r \le R, \quad |r| < \frac{h}{r}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \right\},$$

где R - радиус резонатора;
h - высота резонатора.

Запишем уравнения (3.1) и (3.2) в цилиндрической системе координат:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{E}_z}{\partial\,\varphi} - \frac{\partial\,\mathrm{E}_\varphi}{\partial\,z} = i\,k_0\,\mu\,\mathrm{H}_r\,, \quad (5)$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{E}_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,\mathrm{E}_z}{\partial\,r} = i\,k_0\,\mu\,\mathrm{H}_\varphi\,, \quad (6)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(r\,\mathrm{E}_\varphi\right)}{\partial\,r} - \frac{\partial\,\mathrm{E}_z}{\partial\,\varphi}\right] = i\,k_0\,\mu\,\mathrm{H}_z\,, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\,\mathrm{H}_z}{\partial\,\varphi} - \frac{\partial\,\mathrm{H}_\varphi}{\partial\,z} = -\,i\,k_0\,\varepsilon_\perp\,\mathrm{E}_r\,, \quad (8)$$

$$\frac{\partial\,\mathrm{H}_r}{\partial\,z} - \frac{\partial\,\mathrm{H}_z}{\partial\,\varphi} = -\,i\,k_0\,\varepsilon_\perp\,\mathrm{E}_\varphi\,, \quad (9)$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{\partial\left(r\,\mathrm{H}_\varphi\right)}{\partial\,r} - \frac{\partial\,\mathrm{H}_z}{\partial\,\varphi}\right] = -\,i\,k_0\,\varepsilon_\parallel\,\mathrm{E}_z\,, \quad (10)$$

Здесь $k_0 = \dfrac{\omega}{c}$, c - скорость света в вакууме. Уравнения (5) – (10) справедливы в области резонатора Q, а вне области Q следует в (3.5) – (3.10) положить $\varepsilon_\perp = \varepsilon_\parallel = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, где ε_0, μ_0 - материальные параметры внешней среды. Используя (3.5) – (3.10) выразим поперечные компоненты поля $\mathrm{E}_\varphi, \mathrm{E}_r, \mathrm{H}_\varphi, \mathrm{H}_r$ через продольные компоненты $\mathrm{E}_z, \mathrm{H}_z$. Для этого продифференцируем (3.5) по переменной z и подставим в полученное уравнение выражение для $\dfrac{\partial\,\mathrm{H}_r}{\partial\,z}$, следующее из (3.9), получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}_\varphi}{\partial z^2}+k^2\mathrm{E}_\varphi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \mathrm{E}_z}{\partial z\,\partial\varphi}-i k_0\,\mu\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial\varphi} \qquad (11)$$

Аналогично предыдущим преобразованиям, дифференцируем (3.6) по переменной z и используя (3.8), имеем:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}_r}{\partial z^2}+k^2\mathrm{E}_r=\frac{\partial^2 \mathrm{E}_r}{\partial z\,\partial r}+\frac{i k_0\,\mu}{r}\,\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial\varphi} \qquad (12)$$

Наконец, дифференцируя по переменной Z (8) и (9) и используя (5), (6) получаем уравнения для H_r и H_φ следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}_\varphi}{\partial z^2}+k^2\mathrm{H}_\varphi=i k_0\,\varepsilon_\perp\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial r}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2 \mathrm{H}_z}{\partial z\,\partial\varphi} \qquad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \mathrm{H}_r}{\partial z^2}+k^2\mathrm{H}_r=-\,\frac{i k_0\,\varepsilon_\perp}{r}\,\frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial\varphi}+\frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial z\,\partial r} \qquad (14)$$

Причем, в (11) – (14) введено обозначение $k^2=k_0^2\,\varepsilon_\perp\,\mu$.

Таким образом, формулы (11) – (14), во-первых, являются прямым следствием уравнений Максвелла и, во-вторых, выражают поперечные компоненты собственных колебаний через продольные компоненты, параллельные оптической оси резонатора.

Покажем теперь, что продольные компоненты E_z и H_z, удовлетворяют следующим уравнениям Гельмгольца :

$$\Delta\mathrm{E}_z+\frac{\partial^2 \mathrm{E}_z}{\partial z^2}\left(\frac{\varepsilon_{\shortparallel}}{\varepsilon_\perp}-1\right)+k_0^2\,\varepsilon_{\shortparallel}\,\mu\,\mathrm{E}_z=0, \qquad (15)$$

$$\Delta\mathrm{H}_z+k_0^2\,\mu\,\varepsilon_\perp\,\mathrm{H}_z=0. \qquad (16)$$

Здесь $\Delta=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа в цилиндрической системе координат. Уравнения (15), (16), как и уравнения (11) – (14) справедливы в области Q (внутри резонатора). Если в этих уравнениях положить $\varepsilon_\perp=\varepsilon_{\shortparallel}=\varepsilon_0$ и $\mu=\mu_0$, то получим уравнения для поля вне области запятой резонатором.

Вывод уравнений (15), (16) достаточно громоздок, поэтому ограничимся общими замечаниями. Выразим вектор напряженности магнитного поля $\vec{H}$ из (3.2) и подставим в (3.1) тогда имеем:

$$rot\,rot\,\vec{\mathrm{E}}+k_0^2\,\mu\,\hat{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}}=0 \qquad (17)$$

Далее, используя определения для оператора Лапласа векторного поля, имеем:

$$grad\left(div\,\vec{\mathrm{E}}\right)-\Delta\vec{\mathrm{E}}+k_0^2\,\mu\hat{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}}=0 \qquad (18)$$

Если теперь (3.18) расписать в цилиндрической системе координат и воспользоваться уравнением (3):

$$div\left(\hat{\varepsilon}\,\vec{\mathrm{E}}\right)=0,$$

То после ряда громоздких преобразований получим уравнения (15). По аналогичной схеме может быть получено уравнение (16).

И так, показано, что исходная векторная задача о собственных колебаниях эквивалентна двум скалярным задачам для уравнений Гельмгольца (15), (16) относительно продольных компонент E_z и H_z, через которые по формулам (11) - (14) выражаются остальные компоненты поля собственных колебаний.

Получим представления для продольных компонент E_z и H_z. С этой целью воспользуемся методом частичных областей [11] и разобьем все пространство на области, как показано на рис.1. Областi:

$$Q_1=\left\{(r,\varphi,z): 0\le r\le R,\quad |r|\le\frac{h}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$$

$$Q_2=\left\{(r,\varphi,z): r\ge R,\quad |r|\le\frac{h}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$$

$$Q_3=\left\{(r,\varphi,z): 0\le r\le R,\quad |r|\ge\frac{h}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$$

$$Q_4=\left\{(r,\varphi,z): r\ge R,\quad |r|\ge\frac{h}{2},\quad 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$$

Решение уравнений (15), (16) в каждой из областей Q_1, Q_2, Q_3 будем искать в виде произведения трех множителей каждый из которых есть функция только одной переменной [11].

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_z&=R_{\mathrm{E}}(r)\Phi_{\mathrm{E}}(\varphi)z_{\mathrm{E}}(z)\\ \mathrm{H}_z&=R_{\mathrm{H}}(r)\Phi_{\mathrm{H}}(\varphi)z_{\mathrm{H}}(z)\end{aligned} \qquad (19)$$

Рассмотрим случай области Q_1. Поскольку тензор диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ является диагональным в цилиндрической системе координат (оптическая ось совпадает с осью Z) и резонатор имеет плоскость симметрии $(z=0)$, то очевидно функции $z_{\mathrm{H}}(z)$ и $z_{\mathrm{E}}(z)$ могут быть либо четными, либо нечетными. Для определенности ограничимся случаем, когда функция $z_{\mathrm{H}}(z)$ является четной, т.е. $z_{\mathrm{H}}(-z)=z_{\mathrm{H}}(z)$, а функция $z_{\mathrm{E}}(z)$ - нечетная. Аналогично могут быть рассмотрены и другие случаи ($z_{\mathrm{H}}(z)$ - нечетная, $z_{\mathrm{E}}(z)$ - четная и т.п.). Кроме того, поскольку резонатор обладает круговой симметрией, то функции $\Phi_{\mathrm{H}}(\varphi)$, $\Phi_{\mathrm{E}}(\varphi)$ должны совпадать с функциями $e^{im\varphi}, \cos m\varphi, \sin m\varphi$, где m - целое число.

Теперь достаточно подставить выражения (3.19) для E_z, H_z в уравнения (3.15), (3.16) и воспользоваться выводами, приведенными в [11] и в результате для области Q_1 имеем:

$$E_z^1 = A I_m(k_E r)\cos m\varphi \sin \beta z, \qquad (20)$$

$$H_z^1 = B I_m(k_H r)\sin m\varphi \cos \beta z. \qquad (21)$$

Здесь $k_H^2 = k_0^2 \varepsilon_\perp \mu - \beta^2$, $k_E^2 = \dfrac{\varepsilon_\parallel}{\varepsilon_\perp} k_H^2$,

β - постоянная распространения вдоль оси z,

A, B - константы,

$I_m(\cdots)$ - цилиндрическая функция Бесселя первого рода m - порядка.

Как следует из свойств функций Бесселя [12] при $|k_E R|(|k_H R|) \geq \sqrt{m(m+2)}$, поле вдоль координат r монотонно возрастает и максимально в окрестности границы резонатора $(r \cong R)$. Такое распределение поля характерно для колебаний "шепчущей галереи", а поле вне резонатора (области Q_2, Q_3) в соответствии с теорией колебаний "шепчущей галереи" [13] может быть представлено в виде:

Область Q_2:

$$E_z^2 = C K_m(\bar{k} r)\cos m\varphi \sin \beta z, \qquad (3.22)$$

$$H_z^2 = D K_m(\bar{k} r)\sin m\varphi \cos \beta z. \qquad (3.23)$$

Область Q_3:

$$E_z^3 = E I_m(\bar{\bar{k}} r)\cos m\varphi\, e^{-\alpha|z|} \qquad (3.24)$$

$$H_z^3 = F I_m(\bar{\bar{k}} r)\sin m\varphi\, e^{-\alpha|z|} \qquad (3.25)$$

Здесь

$\bar{k}^2 = \beta^2 - K_0^2 \varepsilon_0 \mu_0$, $\bar{\bar{k}}^2 = K_0^2 \varepsilon_0 \mu_0 + \alpha^2$, - постоянная затухания вдоль оси z; C, D, E, F - константы, $K_m(\cdots)$ - модифицированная функция Бесселя третьего рода причем необходимо учитывать, что при $Re(\bar{k} r) > 0$ и $r \to \infty$ функция $K_m(\bar{k} r)$ экспоненциально убывает [12].

Вывод. Таким образом, такое распределение поля в указанных выше областях (Q_2, Q_3), во-первых, удовлетворяет уравнениям Максвелла (15), (16), а во-вторых, находится в соответствии с тем фактом, что поле колебаний "шепчущей галереи" убывает вне резонатора.

Причем, в данном исследовании не накладывалось никаких ограничений на постоянную затухания α и постоянную распространения β.

Список использованных источников

1. А. с. 991828 СССР, МКИЧ, G 01 R 27/ 26. Устройство для измерения параметров диэлектрических материалов / В. Ф. Взятышев, Б. И. Рябов, Г. Д. Якухин и др. // Открытия. Изобретения. – 1985. - № 1. – С. 121.
2. Патент України № 20863 від 15.02.2007 на корисну модель "Квазіоптичний діелектрометр" / Губін О. І., Лавринович О. А., Черпак М. Т.
3. Брагинский В. Б., Ильченко В. С. // Письма в ЖТФ. – 1985. – Т.11. – Вып.7. – С.247-251.
4. Вычислительные методы в электродинамике: [под ред. М. Митры] – М.: Мир, 1977. – С. 485.
5. Шестопалов В. П. Спектральная теория и возбуждение открытых структур / В. П. Шестопалов. – К.: Наукова думка, 1987. – 283 с.
6. Конторович Л. В. Приближенные методы высшего анализа / Л. В. Конторович, В. И. Крылов. – М.: ГИФМЛ, 1962. – 708 с.
7. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения / Е. Н. Васильев. – М.: Радио и Связь, 1987. – 272 с.
8. Колтон Д. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния / Д. Колтон, Р. Кресс. – М.: Мир, 1987. - 311 с.
9. Самохин А. Б. Интегральные уравнения и интегральные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин – М.: Радио и Связь, 1998. – 160 с.
10. Хижняк Н. А. Интегральные уравнения макроскопической электродинамики / Н. А. Хижняк – К.: Наукова думка, 1986. – 280 с.
11. Ильченко М. Е., Теория диэлектрических резонаторов / М. Е. Ильченко, А. А. Трубин. – К.: Либідь, 1993. – 214 с.
12. Абрамович М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамович, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

Анотація

ДОСЛІДЖЕННЯ ВІДКРИТОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО РЕЗОНАТОРУ ДЛЯ КОНТРОЛЮ ЗМІНИ ДІЕЛЕКТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЗОВНІШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА

Куценко Ю. М., Лисиченко М. Л., Черенков О. Д.

Визначені умови розповсюдження електромагнітного поля навколо відкритого циліндричного резонатору для контролю зміни діелектричних параметрів зовнішнього середовища.

Abstract

RESEARCH OF THE OPEN CYLINDRICAL RESONATOR FOR THE CONTROL CHANGES OF DIELECTRIC PARAMETERS OF THE ENVIRONMENT

Y. Kutsenko, N. Lysychenko, O. Cherenkov

Conditions of distribution of an electromagnetic field in an external plane of the open cylindrical resonator for the control of change of dielectric parameters of an environment are defined.