М.С. Синєкоп, д-р техн. наук, проф. *(ХДУХТ, Харків)*
М.М. Вермійчук, асист. *(ХДУХТ, Харків)*

ПРЕДСТАВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ *N* ЗМІННИХ ($N \geq 3$) СУПЕРПОЗИЦІЯМИ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ

Розроблено метод побудови суперпозицій неперервних функцій n змінних ($n \geq 3$) через неперервні функції двох змінних з використання діаграм Ейлера.

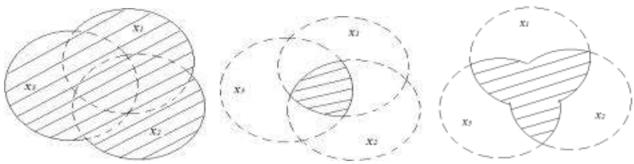
Діаграми Ейлера є потужним інструментом для геометричної інтерпретації множин і операцій над ними. Такий підхід довгий час розглядався як допоміжним етапом в осмисленні результатів. В роботі діаграми Ейлера використані як основний етап при побудові суперпозицій функцій неперервного і дискретного аналізу.

В якості функцій двох змінних будемо використовувати такі

$$x_1 \vee_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|),$$
$$x_1 \wedge_1 x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|). \qquad (1)$$

Тут $x_1 \vee_1 x_2$ – R-диз'юнкція, $x_1 \vee_1 x_2$ – R-кон'юнкція.

Будемо розглядати x_1, x_2, x_3 як деякі множини. Можливі дії над цими множинами представимо діаграмами Ейлера.



а) б) в)

Рисунок

Як і в якій послідовності формувати ті чи інші суперпозиції будуть визначати діаграми Ейлера.

Об'єднання цих множин (рис. а) можна представити формулами

$$(x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) + x_3 + \left|\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + |x_1 - x_2|) - x_3\right|\right). \qquad (2)$$

В роботі показано що $\max(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 x_3$. Зауважимо, що функція (2) є симетричною відносно змінних.

Тобто $(x_1 \vee_1 x_2) \vee_1 x_3 = x_1 \vee_1 (x_2 \vee_1 x_3) = x_2 \vee_1 (x_1 \vee_1 x_3)$,

або $\varphi(x_1, x_2, x_3) = \varphi(x_2, x_3, x_1) = \varphi(x_3, x_1, x_2)$.

Перетин множин x_1, x_2, x_3 (рис. б) через базові формули (1) запишемо в наступному виді

$$(x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|\right) + x_3 - \left|\frac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - |x_1 - x_2|\right) - x_3\right|\right). \quad (3)$$

Таким чином,

$\min(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3$. До того ж $(x_1 \wedge_1 x_2) \wedge_1 x_3 =$
$= x_1 \wedge_1 (x_2 \wedge_1 x_3) = x_2 \wedge_1 (x_1 \wedge_1 x_3)$.

Об'єднання множин $x_1 \wedge_1 x_2$, $x_1 \wedge_1 x_3$, $x_2 \wedge_1 x_3$ (рис. в) запишемо згідно з формулами (3)

$$\begin{aligned}((x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 (x_1 \wedge_1 x_3)) \vee_1 (x_2 \wedge_1 x_3) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) - \\ &- \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3|) + \left|\frac{1}{2}(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| - |x_1 - x_3|)\right|) + \\ &+ \frac{1}{2}(x_2 + x_3 - |x_2 - x_3|) - |\frac{1}{2}(x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) - \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| + |x_1 - x_3|) + \\ &+ |\frac{1}{2}(x_2 - x_3) - \frac{1}{2}(|x_1 - x_2| - |x_1 - x_3|)|) - \frac{1}{2}(x_2 + x_3 - |x_2 - x_3|)|).\end{aligned} \quad (4)$$

Таким чином,

$\max(\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3), \min(x_2, x_3)) = ((x_1 \wedge_1 x_2) \vee_1 (x_1 \wedge_1 x_3)) \vee_1 (x_2 \wedge_1 x_3)$.

Для множини M_3 маємо $x_м < x_с < x_б$, де $x_м = \min(x_1, x_2, x_3)$, $x_с = \max(\min(x_1, x_2), \min(x_1, x_3), \min(x_2, x_3))$, $x_б = \max(x_1, x_2, x_3)$.

Якщо ж $x_1 = x_2 = x_3$, то кожна із трьох формул (2), (3), (4) забезпечує $x_м = x_с = x_б$.

Аналогічним чином записуються формули, які відповідають діаграмам Ейлера для множин M_4, M_5 і т.і.

Розроблено алгоритм побудови суперпозицій функцій n ($n \geq 3$) змінних через функції двох змінних. Порядок формування таких суперпозицій визначають діаграми Ейлера.