УДК 631.362.36; 621.928.9

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСРЕДНЕННЫХ КОМПОНЕНТОВ ТЕНЗОРА ВЯЗКИХ НАПРЯЖЕНИЙ ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА РАЗБРАСЫВАТЕЛЕ ПНЕВМОСЕПАРИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Тищенко Л.Н., д.т.н., проф., чл.-кор. НААНУ,
Слипченко М.В., ассистент
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко)

Рассмотрены свойства операторов осреднения применимо к условиям динамики очистки зерновых смесей. Получены осредненные компоненты тензора вязких напряжений зерновой смеси на тарельчатом разбрасывателе пневмосепарирующего устройства учетом феноменологических коэффициентов.

Постановка проблемы. Дальнейшее повышение эффективности очистки зерновых смесей (ЗС) виброцентробежными сепараторами связано с улучшением эффективности их очистки от легких примесей. Создание нового веерно-кольцевого конусно-каскадного пневмо-сепарирующего устройства с воздухопроницаемой конусно-каскадной поверхностью [1-3] является вариантом решения этой задачи. Составление уравнений динамики очищаемой ЗС как многофазной сплошной среды требует осреднения входящих в них величин.

Целью статьи является получение осредненных значений тензора напряжений, входящего в уравнение движения, с учетом конкретного вида поверхности тарельчатого разбрасывателя.

Основная часть. Рассмотрим область V_2 течения смеси по ротору: $d_0/2 \le r \le D_1/2,\ 0 \le \varphi \le \beta_1,\ 0 \le n \le h(t, r, \varphi)$. Обозначим через S_p сечение указанной области координатной поверхностью $r = const = r_p$ (рис.1) [4].

Векторное задание данной поверхности имеет вид:

$$\vec{r}_p = \vec{r}_p(\varphi, n) = (r_p \cos\varphi, r_p \sin\varphi, n). \qquad (1)$$

Элемент площади данной поверхности определяется в виде

[5,6]:

$$dS = \left| d_{(1)} \vec{r}_p \right|$$

$$dS = \left| d_{(1)} \vec{r}_p \times d_{(2)} \vec{r}_p \right| = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial n} \right| d\varphi \, dn. \qquad (2)$$

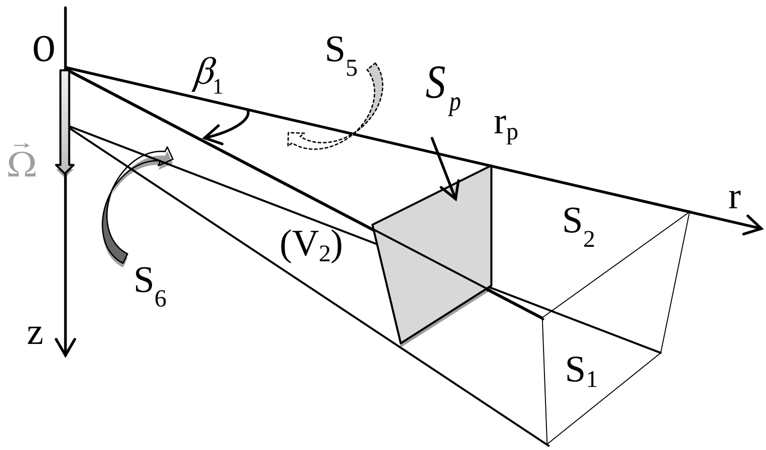

Рис.1. К определению области V_2

Пусть $f = f(r, \varphi, n)$ некоторая функция указанных переменных. Введем операцию осреднения по формуле:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\Psi_1} \int_0^{\beta_1} \int_0^{h(t,r,\varphi)} f(r, \varphi, n) r dn d\varphi, \qquad (3)$$

где

$$\Psi_1 = r \, \Psi(t, r);$$

$$\Psi = \int_0^{\beta_1} \int_0^{h(t,r,\varphi)} d\varphi dn = \int_0^{\beta_1} h(t, r, \varphi) d\varphi.$$

Или, окончательно, имеем:

$$\tilde{f} = \frac{1}{\Psi} \int_0^{\beta_1} \int_0^{h(t,r,\varphi)} f(r, \varphi, n) dn d\varphi. \qquad (4)$$

Представим некоторые свойства оператора осреднения.

Очевидные свойства:

$$\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}; \tag{5}$$

$$\widetilde{cf} = c\tilde{f}, \quad (c = c(r)); \tag{6}$$

$$\widetilde{f+g} = \tilde{f} + \tilde{g}. \tag{7}$$

Менее очевидные свойства требуют привлечения правила дифференцирования интеграла, содержащего параметр, по параметру [7]:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dr}\int\limits_{a(r)}^{b(r)} f(r,x)dx = \\ = \int\limits_{a(r)}^{b(r)} \frac{\partial f(r,x)}{\partial r}dx + f(r,b(r))\frac{db(r)}{dr} - f(r,a(r))\frac{da(r)}{dr}.\end{gathered} \tag{8}$$

Имеем:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dr}\tilde{f} = \frac{1}{\psi(r)}\int_0^{\beta_1}\int_0^{h(r,\varphi)}\frac{\partial}{\partial r}f(r,\varphi,n)dn + \\ &+\left(\frac{\partial}{\partial r}h(r,\varphi)\right)f\left(r,\varphi,h(r,\varphi)\right)d\varphi - \\ &-\frac{\psi'(r)}{\psi^2(r)}\int_0^{\beta_1}\int_0^{h(r,\varphi)}f(r,\varphi,n)dnd\varphi = \\ &= \widetilde{\frac{\partial f}{\partial r}} + \frac{1}{\psi(r)}\int_0^{\beta_1}f\left(r,\varphi,h(r,\varphi)\right)\frac{\partial}{\partial r}h(r,\varphi)d\varphi - -\frac{\psi'(r)}{\psi(r)}\tilde{f}.\end{aligned} \tag{9}$$

Отсюда следует:

$$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial r}} = \frac{d\,\tilde{f}}{dr} + \frac{\psi'(r)}{\psi(r)}\tilde{f} - \frac{1}{\psi(r)}\int_0^{\beta}\left(\frac{\partial}{\partial r}h(r,\varphi)\right)f\left(r,\varphi,h(r,\varphi)\right)d\varphi\alpha;$$

$$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial \varphi}} = -\int_0^{\beta_1}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}h(r,\varphi)\right)f\left(r,\varphi,h(r,\varphi)\right)d\varphi; \tag{10}$$

$$\widetilde{\frac{\partial f}{\partial n}} = \frac{1}{\Psi}\int\limits_0^{\beta_1} f\left[r,\varphi,h(r,\varphi)\right]d\varphi - \frac{1}{\Psi}\int\limits_0^{\beta_1} f\left[r,\varphi,0\right]d\varphi.$$

Еще два нетривиальных свойства оператора осреднения:

$$u\,\mathrm{v} = \tilde{u}\,\tilde{\mathrm{v}} + \left(\left(u-\tilde{u}\right)\left(\mathrm{v}-\tilde{\mathrm{v}}\right)\right);$$

$$u\,\mathrm{v}\,w = \tilde{u}\,\tilde{\mathrm{v}}\tilde{w} + \tilde{u}\left(\left(\mathrm{v}-\tilde{\mathrm{v}}\right)\left(w-\tilde{w}\right)\right) + \tilde{\mathrm{v}}\left(\left(u-\tilde{u}\right)\left(w-\tilde{w}\right)\right) + \quad (11)$$

$$+\tilde{w}\left(\left(u-\tilde{u}\right)\left(\mathrm{v}-\tilde{\mathrm{v}}\right)\right) + \left(\left(u-\tilde{u}\right)\left(\mathrm{v}-\tilde{\mathrm{v}}\right)\left(w-\tilde{w}\right)\right).$$

Слагаемые, имеющие вид $\varepsilon_\alpha\left(\mathrm{v}_\alpha^i-\mathrm{v}_\alpha^i\right)\left(\mathrm{v}_\alpha^k-\mathrm{v}_\alpha^k\right)$, представляют собой аналог компонент тензора напряжений Рейнольдса в теории турбулентности [8]:

$$\bar{\sigma}_\alpha^{ik} = -\varepsilon_1\left(\mathrm{v}_\alpha^i-\mathrm{v}_\alpha^i\right)\left(\mathrm{v}_\alpha^k-\mathrm{v}_\alpha^k\right), \quad (\alpha,i,k=1,2). \qquad (12)$$

Зависимость компонент этого тензора от кинематических характеристик движущейся среды определяется так же, как и в случае тензора вязких напряжений σ_α^{ik}, как правило, эмпирическими соотношениями. Рассмотрим вначале тензор вязких напряжений σ^{ik} .

Для ньютоновской вязкой сжимаемой среды имеет место закон Навье-Стокса[8-10]:

$$\sigma^{ik} = -(p+\nu\, div\vec{\mathrm{v}})g^{ik} + \mu\left(g^{km}\,\mathrm{v}_{,m}^i + g^{im}\,\mathrm{v}_{,m}^k\right), \qquad (13)$$

где σ^{ik} - компоненты дважды контравариантного тензора второго ранга, g^{ik} - компоненты дважды контравариантного метрического тензора, p - давление, ν,μ - являются коэффициентами динамической вязкости при всестороннем расширении (сжатии) и сдвига. В криволинейной системе координат (r,φ,n) компоненты этого тензора имеют вид:

$$\sigma^{11} = -\frac{p}{1+Z'^2} + \frac{\nu}{1+Z'^2}\frac{\partial \mathrm{v}_1^3}{\partial n} + \frac{\nu}{r\left(1+Z'^2\right)}\mathrm{v}_1^1,$$

$$\sigma^{12} = \sigma^{21} = 0, \quad \sigma^{13} = \sigma^{31} = \mu\frac{\partial \mathrm{v}_1^1}{\partial n},$$

$$\sigma^{22} = -\frac{p}{r^2} + \frac{\nu+2\mu}{r^3}\mathrm{v}_1^1 + \frac{\nu}{r^2}\frac{\partial \mathrm{v}_1^3}{\partial n}, \quad \sigma^{23} = \sigma^{32} = \mu\frac{\partial \mathrm{v}_1^2}{\partial n},$$

$$\sigma^{33} = -p + \left(\nu+2\mu\right)\frac{\partial \mathrm{v}_1^3}{\partial n} + \frac{\nu}{r}\mathrm{v}_1^1.$$

Произведем операцию осреднения над компонентами тензора напряжений (13). Осредненные компоненты тензора вязких напряжений имеют вид:

$$\sigma^{11}=-\frac{p}{1+Z'^2}+\frac{\nu}{r\left(1+Z'^2\right)}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu}{\left(1+Z'^2\right)\psi}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi,$$

$$\sigma^{12}=\sigma^{21}=0,$$

$$\sigma^{13}=\sigma^{31}=\frac{\mu}{\psi}\left(\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^1\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi-\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^1\Big|_{n=0}d\varphi\right),$$

$$\sigma^{22}=-\frac{p}{r^2}+\frac{\nu+2\mu}{r^3}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu}{\psi r^2}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi, \tag{14}$$

$$\sigma^{23}=\sigma^{32}=\frac{\mu}{\psi}\left(\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^2\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi-\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^2\Big|_{n=0}d\varphi\right)r^{-2},$$

$$\sigma^{33}=-p+\frac{\nu}{r}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu+2\mu}{\psi}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi.$$

Компоненты тензора напряжений Рейнольдса $\bar{\sigma}^{ik}\,(i,k=1,2)$ определяются эмпирическими соотношениями. Простейшая модель для этого тензора дает соотношения подобные (13) с другими феноменологическими коэффициентами «вязкости» $\bar{\nu},\bar{\mu}$ [11]:

$$\bar{\sigma}^{11}=+\frac{\nu}{r\left(1+Z'^2\right)}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu}{\left(1+Z'^2\right)\psi}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi,$$

$$\sigma^{12}=\sigma^{21}=0,$$

$$\bar{\sigma}^{13}=\bar{\sigma}^{31}=\frac{\mu}{\psi}\left(\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^1\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi-\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^1\Big|_{n=0}d\varphi\right),$$

$$\bar{\sigma}^{22}=+\frac{\nu+2\mu}{r^3}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu}{\psi r^2}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi, \tag{15}$$

$$\bar{\sigma}^{23}=\bar{\sigma}^{32}=\frac{\mu}{\psi}\left(\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^2\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi-\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^2\Big|_{n=0}d\varphi\right)r^{-2},$$

$$\bar{\sigma}^{33}=+\frac{\nu}{r}\mathrm{v}_1^1+\frac{\nu+2\mu}{\psi}\int_0^{\beta_1}\mathrm{v}_1^3\Big|_{n=h(r,\varphi)}d\varphi.$$

Выводы. Получены осредненные значения компонентов тензора вязких напряжений ЗС с учетом конкретного вида поверхности тарельчатого разбрасывателя пневмо-сепарирующего устройсва. Его значения с учетом полученных операторов осреднения планируется использовать для получения осредненных значений уравнений динамики очистки ЗС

Список литературы

1. Пат. 50587 Україна, МПК[9] B07B 1/00, B07B 4/00. Вібровідцентровий сепаратор / Тіщенко Л.М., Пастушенко М.Г., Харченко С.О., Сліпченко М.В.; заявник та власник Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка. №u 201000743; заявл. 26.01.10; опубл. 10.06.10, Бюл. №11/2010.

2. *Тищенко Л.Н., Слипченко М.В*. К исследованию динамики продуваемого слоя зерновой смеси / *Л.Н.* Тищенко, М.В. Слипченко // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету: ТДАТУ, Вип. 10 - Т.7 - Мелітополь, 2010. – С. 201-209.

3. Тищенко Л.Н., Слипченко М.В. Динамика извлечения легких примесей пневмосепарирующим устройством виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Вібрації в техниці та технологіях, № 1 (61), 2011. – С. 186-193.

4. *Тищенко Л.Н., Слипченко М.В.* К составлению граничних условий и уравнений динамики зерновой смеси на тарельчатом разбрасывателе виброцентробежного сепаратора / Л.Н. Тищенко, М.В. Слипченко // Науковий вісник луганського національного університету: ЛНАУ, № 30 - Луганск, 2011. – С. 296-304.

5. *Погорелов А.В.* Лекции по дифференциальной геометрии. / А.В. Погорелов – Харьков. Изд-во Харьковск. гос. ун-та, 1967. - 163 с.

6. *Тарапов И.Е., Борисенко А.И.* Механика сплошной среды. / И.Е. Тарапов, А.И. Борисенко – В 3 ч. Ч.1: Векторный анализ и начала тензорного исчисления. Харьков: Золотые страницы, 2003. - 320 с.

7. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. / В.И. Смирнов – Т.2. М.: ФМЛ, 1958. - 628 с.

8. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. / Л.Г. Лойцянский – М.: Наука.- 1978.- 727 с.

9. *Тарапов И.Е., Борисенко А.И.* Механика сплошной среды. / И.Е. Тарапов, А.И. Борисенко – В 3 ч. Ч.2: Общие законы кинематики и динамики. Харьков: Золотые страницы, 2002. - 516 с.

10. *Цытович Н.А.* Механика грунтов. / Н.А. Цытович – М.:

Гос.издат. лит. по строительству, архитект. и стройматер. 1963. - 636 с.

11. *Слеттери Дж. С.* Теория переноса импульса, энергии и массы в сплошных средах. / Дж. С. Слеттери – М.: Энергия, 1978.- 448 с.

Анотація

ДО ВИЗНАЧЕННЯ УСЕРЕДНЕНИХ ЗНАЧЕНЬ КОМПОНЕНТЫВ ТЕНЗОРА В'ЯЗКИХ НАПРУЖЕНЬ ЗЕРНОВОЇ СУМІШІ НА РОЗКИДУВАЧІ ПНЕВМОСЕПАРУЮЧОГО ПРИСТРОЮ

Розглянуто властивості операторів усереднення стосовно до умов динаміки очищення зернових сумішей. Отримано усереджені компоненти тензора в'язких напружень зернової суміші на тарілчастому розкидачі пневмосепаруючого пристрою з урахуванням феноменологічних коефіцієнтів.

Abstract

TO THE DETERMINATION OF THE COMPONENTS OF AVERAGING VISCOUS STRESS TENSOR

The properties of averaging operators applicable to the conditions of treatment of the of grain mixtures cleaning dynamics are investigated. Obtained averaged components of the viscous stress tensor of grain mixture on the poppet spreader of pneumocleaning device, taking into account the phenomenological coefficients.