

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ХАРЧУВАННЯ ТА ТОРГІВЛІ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Вища математика.

Теорія ймовірностей та математична статистика

За редакцією професора М.С. Синєкопа

Навчальний посібник

Харків
ХДУХТ
2015

УДК 519 (075.8)
ББК 22.11
С-38

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. Харківського національного технічного
університету сільського господарства ім. П. Василенка
В.П. Ольшанський,
д-р техн. наук, проф. Харківського державного університету
харчування та торгівлі В.О. Потапов

Рекомендований до видання вченою радою ХДУХТ
протокол № 5 від 29.12.14 р.

Синєкоп М. С. Вища та прикладна математика. Частина 1. Вища
С-38 математика. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.
посібник / М. С. Синєкоп, Н. О. Жилюк, М. С. Софронова ; за ред.
проф. М. С. Синєкопа. – Х. : ХДУХТ, 2015. – 208 с.

ISBN

Навчальний посібник містить теоретичний та довідковий матеріал,
задачі за всіма розділами вищої та прикладної математики, що розкривають
основні положення теорії. Наводяться розв'язки типових прикладів, а також
завдання для самостійної роботи.

Призначений для студентів економічних спеціальностей
університетів та вищих економічних навчальних закладів. Буде корисним
студентам прискореної та заочної форм навчання.

УДК 519 (075.8)
ББК 22.11

© Синєкоп М.С., Жилюк Н.О.,
Софронова М.С., 2015
© Харківський державний університет
харчування та торгівлі, 2015

ISBN

ПЕРЕДМОВА

Навчальний посібник для вивчення курсу „Вища та прикладна математика” розраховано для студентів економічних спеціальностей та має за мету формування у студентів знань, умінь та практичних навичок засвоєння програмного матеріалу. За структурою посібник містить чотири тематичних частини курсу: 1. Вища математика; 2. Теорія ймовірностей та математична статистика; 3. Математичне програмування; 4. Дослідження операцій. Кожна тематична частина включає декілька тем курсу, в кожній з яких міститься стислий теоретичний матеріал, приклади розв’язання типових задач, завдання для проведення практичних занять, а також задачі для самостійного розв’язання (до деяких надаються відповіді).

Посібник містить стислий за змістом й досить повний за формою матеріал курсу та складається з двох частин. Перша частина складається з 7 розділів та включає в себе елементи лінійної та векторної алгебри, елементи аналітичної геометрії на площині та у просторі, вступ до математичного аналізу, диференціальні числення функції однієї та багатьох змінних, інтегральне числення (невизначений, визначений та невластні інтеграли), диференціальні рівняння та ряди. Кожний з цих розділів переслідує конкретну пізнавальну ціль. Так, розділи, що присвячені лінійній та векторній алгебрі, покликані розвинути техніку систематичних математичних обчислень. Наслідком вивчення розділу, в якому викладена аналітична геометрія, є розвиток геометричної інтуїції. Всі інші розділи, як елементи математичного аналізу, допомагають виробити уявлення про математичний опис реальних явищ, набуті необхідні навички перетворень над функціональними виразами. У другій частині, що складається з 7 розділів (розділи 8-14), викладаються елементи теорії ймовірностей, основні відомості з математичної статистики й елементи теорії кореляції.

Зміст кожного розділу певним чином структуровано. Розділи розбито на параграфи з подвійною нумерацією. Перша цифра вказує номер розділу, друга – номер параграфа в ньому. Параграфи містять основні теоретичні відомості – визначення і формули, а також формулювання необхідних положень, на які потрібно опиратися, розв’язуючи задачі. Викладення теоретичного матеріалу ілюструється великою кількістю типових прикладів та задач. Крім того, в кінці кожного розділу надаються завдання для самостійної роботи та відповіді до деяких з них. Зауважимо, що розгляд типових прикладів з детальним розв’язанням сприяє засвоєнню теоретичного матеріалу, надбанню та засвоєнню навичок самостійної роботи. Запропонований посібник, на думку авторів, повинен сприяти глибокому розумінню основ дисципліни математики, надбанню досвіду використання математичних методів для моделювання економічних процесів та їх аналізу, створить передумови для налагодження міждисциплінарних зв’язків.

ВИЩА МАТЕМАТИКА

РОЗДІЛ І. ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. МАТРИЦІ ТА ВИЗНАЧНИКИ

Довільна сукупність чисел $a_{11}, \dots, a_{mn}$, розміщена у вигляді прямокутної таблиці, що містить m рядків і n стовпців, називається *матрицею* (або *матрицею з розміром $m \times n$*) і позначається

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Число a_{kp} називають елементом матриці, який розташований в k -му рядку і p -му стовпці.

Дві матриці A і B називають *рівними*, якщо $a_{kp} = b_{kp}$, $k = 1, \dots, m$, $p = 1, \dots, n$. Якщо число рядків і стовпців матриці рівні, то матрицю називають квадратною, а число $m = n$ називають її порядком. Множина елементів квадратної матриці, для яких $k = p$, називається *головною діагоналлю* матриці A , тобто це $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

Якщо число стовпців матриці A дорівнює одиниці, тоді така матриця називається *матрицею-стовпцем* та записуємо так

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Аналогічно матриця розміру $1 \times n$, тобто *матриця-рядок*, позначається

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Матриця B називається *транспонованою* по відношенню до матриці A , якщо $b_{kp} = a_{pk}$, $p = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$. При цьому транспоновану матрицю позначають символом A^T , а операцію переходу від матриці A до матриці A^T називають *транспонуванням*.

Розглянемо дві матриці A і B однакового розміру $m \times n$ та визначимо операцію їх додавання.

Сумою матриць A і B називається матриця $C = A + B$, елементи якої

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Добутком числа λ на матрицю A називається матриця $C = \lambda A = A\lambda$, елементи якої $c_{ij} = \lambda a_{ij} = a_{ij} \lambda$.

Для будь-яких матриць A, B, C розміру $m \times n$ та будь-яких чисел λ, μ мають місце такі властивості:

1. $A + B = B + A$;
2. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
3. $(A + B) + C = A + (B + C)$;
4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;
5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;
6. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
7. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$.

Матриця C називається добутком матриці A розміру $m \times s$ і матриці B розміру $s \times n$, якщо її елементи визначаються формулою

$$c_{kp} = \sum_{j=1}^s a_{kj} b_{jp}, \quad (k = \overline{1, m}, p = \overline{1, n}).$$

Позначення: $C = AB$.

Зазначимо, що добуток AB є визначеним для тих матриць, у яких кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Матриця E називається *одиничною*, якщо для будь-якої матриці A має місце рівність

$$AE = EA = A.$$

Даному означенню відповідає лише одна матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Сформулюємо деякі властивості добутку матриць:

1. $A(BC) = (AB)C$;
2. $A(B + C) = AB + AC$; $(A + B)C = AC + BC$;
3. $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$;
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Квадратна матриця B називається *оберненою* по відношенню до матриці A , якщо

$$AB = BA = E$$

Обернена матриця до A позначається символом A^{-1} . Обернені матриці мають такі властивості:

1. $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$;
2. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

З квадратною матрицею пов'язане таке поняття, як визначник (детермінант). Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність обчислене певним способом число, яке називається *визначником* цієї матриці, й позначається таким чином:

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Визначником n -го порядку, що відповідає матриці A , називається алгебраїчна сума $n!$ доданків ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) n$), кожен з яких є добутком n елементів матриці A , узятих по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Таким чином, визначник першого порядку $|a_{11}| = a_{11}$ – це сам елемент a_{11} .

Визначник другого порядку є число, що дорівнює

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Визначник третього порядку – це число, яке одержуємо як результат суми шести доданків, тобто

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{22} a_{31} -$$

$$- a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33}.$$

Існують правила, які полегшують обчислення визначників 3-го порядку. Одне з них – *правило Саррюса* – таке: знизу приписується ще така ж матриця й обчислюються всі можливі добутки елементів по діагоналях: зверху вниз добутки беруться зі знаком “+”, знизу вверх – зі знаком “–”. Наприклад:

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (0 \cdot 2 \cdot 4) + (-1) \cdot 3 \cdot (-2) + (2 \cdot 1 \cdot 3) - (-2 \cdot 2 \cdot 2) - (0 \cdot 3 \cdot 3) -$$

$$- (-1 \cdot 1 \cdot 4) = 24$$

Обчислення визначників 4-го та наступних порядків можна звести до обчислення визначників 3-го порядку.

Якщо в матриці A викреслити k -й рядок і p -й стовпець, одержимо матрицю $(n-1)$ -го порядку; визначник цієї матриці називається *мінором* елемента a_{kp} визначника матриці A і позначається M_{kp} .

Алгебраїчним доповненням елемента a_{kp} визначника матриці A називається добуток $(-1)^{k+p}$ на мінор $(n-1)$ порядку M_{kp} :

$$A_{kp} = (-1)^{k+p} M_{kp}, \quad (k, p = \overline{1, n})$$

Сформулюємо властивості визначника n -го порядку.

1. Визначник не змінюється при транспонуванні, тобто $\det(A) = \det(A^T)$.
2. При перестановці двох стовпців визначник змінює знак.
3. Визначник із двома однаковими стовпцями дорівнює нулю.
4. Якщо всі елементи p -го стовпця визначника $D = \det(A)$ мають вигляд:

$a_{kp} = \lambda b_k + \mu c_k, \quad k = \overline{1, n}$, де λ, μ - довільні числа, має місце формула:

$$D = \lambda D_p(b_k) + \mu D_p(c_k),$$

де $D_p(c_k)$ - визначник, що одержують із визначника D заміною k елементів

p -го стовпчика елементами c_k .

5. Спільний множник всіх елементів деякого стовпця визначника можна винести за знак визначника.
6. Якщо деякий стовпець складається із елементів, що дорівнюють нулю, визначник також дорівнює нулю.
7. Визначник не змінюється, якщо до елементів одного з його стовпців додати відповідні елементи будь-якого іншого стовпця, помножені на деяке число.
8. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$|A| = \sum_{k=1}^n a_{kp} A_{kp}, \quad p = \overline{1, n}.$$

9. Сума добутків елементів будь-якого стовпця визначника $|A|$ на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого стовпця дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{k=1}^n a_{kp} A_{ki} = 0 \quad (i \neq p).$$

Властивості 2-9 правильні також для рядків визначника.

Зазначимо, що властивість 8 дає змогу обчислювати визначник для матриці будь-якого порядку шляхом поступового зниження цього порядку аж до третього.

Теорема 1. Якщо A, B – будь-які матриці n -го порядку, то

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Квадратна матриця A називається *невиродженою*, якщо $\det(A) \neq 0$. У виродженій матриці визначник дорівнює нулю ($\det(A) = 0$).

Теорема 2. Щоб для матриці A існувала обернена, необхідно і достатньо, щоб вона була невивродженою.

Нехай дано невивроджену матрицю A . Тоді елементи оберненої матриці

$B = A^{-1}$ обчислюються за формулою:

$$b_{kp} = \frac{A_{kp}}{\det(A)}, \quad (k, p = \overline{1, n}),$$

де A_{kp} – алгебраїчне доповнення елемента a_{kp} матриці A^T .

Зазначимо, що визначник оберненої матриці дорівнює оберненому значенню визначника матриці A :

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Рангом $r(A)$ матриці A називається найбільший порядок мінора матриці, відмінний від нуля.

Приклад. Із матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

можна скласти чотири мінори третього порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0, \quad M_4 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Неважко помітити, що один із мінорів другого порядку

$$N_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0, \text{ тобто } r(A) = 2.$$

Елементарними перетвореннями над матрицями називають прості перетворення, які виконують над рядками (чи стовпцями) матриці без зміни її рангу. Це дає змогу більш легким шляхом визначити ранг матриці

без складання всіх мінорів. Елементарними перетвореннями над рядками матриці є такі:

- 1) перестановка двох рядків;
- 2) добуток рядка на довільне число $\lambda \neq 0$;
- 3) додавання до будь-якого рядка відповідних елементів іншого, помножених на ненульове число λ ;
- 4) викреслення нульового рядка.

Наведені елементарні перетворення над рядками стосуються також стовпців.

Розв'язування типових прикладів

1. Записати в розгорнутому вигляді матрицю A , елементи якої визначаються формулою

$$a_{kp} = b_k c_p, \quad (k = \overline{1,6}, \quad p = \overline{1,3}).$$

Розв'язання. Згідно з прийнятими позначеннями, маємо

$$A = \begin{pmatrix} b_1 c_1 & b_2 c_1 & b_3 c_1 & b_4 c_1 & b_5 c_1 & b_6 c_1 \\ b_1 c_2 & b_2 c_2 & b_3 c_2 & b_4 c_2 & b_5 c_2 & b_6 c_2 \\ b_1 c_3 & b_2 c_3 & b_3 c_3 & b_4 c_3 & b_5 c_3 & b_6 c_3 \end{pmatrix}$$

2. Знайти обернену матрицю для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки $\det(A) = 2 \neq 0$, існує обернена матриця A^{-1} . Спочатку запишемо транспоновану матрицю A

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Після цього запишемо матрицю A^* , що складається з алгебраїчних доповнень елементів матриці A^T

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тепер за формулою $A^{-1} = A^* / \det(A)$ одержимо матрицю

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3,5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Правильність обчислення перевіряється рівністю $AA^{-1} = E$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти обернену матрицю і перевірити правильність обернення матриці

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$3. \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -7 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 8 & -7 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

Відповіді:

$$1. -\frac{1}{27} \begin{pmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 1 & -11 & 18 \\ -8 & 7 & -9 \end{pmatrix}. 3. \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 14 & -3 & 13 \\ 14 & 6 & -5 \\ 7 & 3 & 29 \end{pmatrix}$$

1.2. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо систему m – лінійних рівнянь з n – невідомими

$$Ax = B,$$

де A – матриця розміром $m \times n$ з коефіцієнтами при невідомих, які позначаються буквою a_{ij} з двома індексами (перший індекс означає порядковий номер рівняння системи, а другий збігається з індексом невідомого); x – матриця-рядок – невідомі; B – матриця-стовпець – вільні члени.

В загальному вигляді систему m лінійних рівнянь з n невідомими зручно записувати так:

[illegible]

Система рівнянь з відмінними від нуля вільними членами називається *неоднорідною*. Система, в якій вільні члени дорівнюють нулю, є *однорідною*.

Неоднорідна система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б одне розв'язання. Матриці

називаються, відповідно, матрицею системи і розширеною матрицею системи.

Теорема 3 (теорема Кронекера-Капеллі). Неоднорідна система

Розв'язання систем лінійних рівнянь зводиться до ряду перетворень рівнянь даної системи, внаслідок чого система набирає такого вигляду, що її розв'язки можна знайти безпосередньо. Такі перетворення здійснюються за допомогою двох операцій: множення рівнянь на число та додавання рівнянь.

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з таким самим числом n невідомих:

причому детермінант, що складається з коефіцієнтів при невідомих, відмінний від нуля

Покажемо, що запропонована система має єдиний розв'язок, який можна знайти за допомогою детермінантів. Для цього з системи побудуємо таку вихідну систему, щоб кожне її рівняння містило лише одне якесь невідоме x_i . Для цього помножимо 1-е рівняння системи на алгебраїчне

доповнення A_{1j} , друге – на A_{2j} і так далі. Нарешті n -не рівняння – на A_{nj} , а потім всі знайдені рівняння додамо. Групуємо члени з одним і тим самим невідомим (ці члени стоять в одному й тому ж стовпчику в системі), знайдемо

$$x_1 \sum_{k=1}^n a_{k1} A_{kj} + x_2 \sum_{k=1}^n a_{k2} A_{kj} + \dots + x_j \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} + \dots + x_n \sum_{k=1}^n a_{kn} A_{kj} = \sum_{k=1}^n b_k A_{kj}.$$

Як відомо, сума попарних добутків елементів деякого стовпця на алгебраїчні доповнення цих елементів дорівнює детермінанту Δ . Але сума попарних добутків алгебраїчних елементів цього стовпця на відповідні елементи іншого стовпця дорівнює нулю. Тому в останній рівності коефіцієнти всіх невідомих, крім коефіцієнта при x_j , дорівнюють нулю. Коефіцієнт при x_j дорівнює детермінанту системи Δ

$$\sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} = \Delta$$

У правій частині рівності стоїть аналогічна сума, але в ній елементи j -го стовпця замінено відповідними вільними членами. Таким чином, права частина рівності є детермінант, утворений з детермінанта Δ системи заміною j -го стовпця на стовпець вільних членів. Позначимо його через Δ_j і запишемо рівняння коротко:

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j.$$

Виконавши такі лінійні перетворення системи для $j = 1, 2, \dots, n$, дістанемо вихідну систему

$$\begin{cases} \Delta \cdot x_1 = \Delta_1 \\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2 \\ \dots\dots\dots \\ \Delta \cdot x_n = \Delta_n \end{cases}$$

Поділивши тепер всі рівняння нової системи на Δ , одержимо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Одержані рівності являють собою, з одного боку, вихідну систему, знайдену лінійними перетвореннями заданої системи. З другого боку, ці рівності одразу вказують на числові значення кожного з невідомих, тобто на розв'язок системи. Одержані формули для невідомих називаються *формулами Крамера*.

Нехай задано систему n лінійних рівнянь з n невідомими:

[illegible]

За допомогою лінійних перетворень цієї системи можна завжди побудувати еквівалентну їй систему лінійних рівнянь з трикутною матрицею:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + ... + c_{1,n-1}x_{n-1} + c_{1n}x_n = b_1, \\ c_{22}x_2 + ... + c_{2,n-1}x_{n-1} + c_{2n}x_n = b_2, \\ \\ c_{n-1,n-1}x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = b_{n-1}, \\ c_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.$$

Розв'язання одержаної системи, очевидно, вже не становить труднощів. Визначивши з останнього рівняння x_n і підставивши його в попереднє, знайдемо x_{n-1} . Далі аналогічно визначаємо x_{n-2} і так далі. Процес виконання лінійних перетворень для переходу від заданої системи до трикутної називають *прямим ходом*. Визначення значень невідомих з трикутної системи називають *оберненим ходом*. Від заданої системи до трикутної переходять поступово, послідовно виключаючи невідомі і будуючи ряд допоміжних систем.

Коефіцієнти із рівнянь заданої системи ділимо на коефіцієнти при x_1 . Візьмемо для прикладу перше рівняння і поділимо його на a_{11} (вважаємо, звичайно, що $a_{11} \neq 0$). Тоді дістанемо

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \dots + \frac{a_{1,n-1}}{a_{11}} x_{n-1} + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Перемножуючи це рівняння по черзі на $a_{21}, a_{31}, \dots, a_{n-1,1}, a_{n1}$ і віднімаючи результат відповідно від 2-го, 3-го, ..., $(n-1)$ -го, n -го рівнянь, матимемо систему такого вигляду:

$$a_{ki}^{(1)} = a_{ki} - \frac{a_{1i}}{a_{11}} \cdot a_{k1}, \quad b_k^{(1)} = b_k - \frac{b_1}{a_{11}} \cdot a_{k1}, \quad (i, k = 2, \dots, n)$$

Далі, з останніх $n - 1$ рівнянь з $n - 1$ невідомими останньої системи, аналогічно до попередньої, виключаємо невідоме x_2 . Тоді таким самим способом виключаємо послідовно і невідомі $x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$. В результаті дістанемо систему лінійних рівнянь із трикутною матрицею, де коефіцієнти $c_{kk} = 1, k = 1, 2, \dots, n$.

Розв'язати систему лінійних рівнянь двома способами: за правилом Крамера та за допомогою матриці, оберненої до матриці системи

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Lambda}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Lambda}, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Lambda},$$
$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 11 & 7 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -11 - 70 = -81 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 29 & 0 & 7 \\ 8 & 1 & 1 \\ 19 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 29 & 7 \\ 19 & -1 \end{vmatrix} = -29 - 133 = -162,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 1 \\ 4 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -27 & 0 \\ 3 & 8 & 1 \\ 13 & 27 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot 1 \begin{vmatrix} -10 & -27 \\ 13 & 27 \end{vmatrix} = -3 \cdot 27 = -81,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 11 & 0 & 29 \\ 3 & 1 & 8 \\ 10 & 0 & 19 \end{vmatrix} = (-1)^{2+2} \cdot 1 \begin{vmatrix} 11 & 29 \\ 10 & 19 \end{vmatrix} = 209 - 290 = -81.$$

Звідси, маємо

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-162}{-81} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-81}{-81} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-81}{-81} = 1.$$

- 2) Запишемо систему лінійних рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A є невиродженою, то

$$X = A^{-1}B.$$

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, $1 \leq i, j \leq 3$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -17; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 13; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -22; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -10; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -8; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-81} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -7 \\ 13 & -22 & 10 \\ -10 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

Отже маємо

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} -1 & -17 & -7 \\ 13 & -22 & 10 \\ -10 & -8 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} -5 & -136 & -21 \\ 65 & -176 & 30 \\ -50 & -64 & 33 \end{pmatrix} = -\frac{1}{81} \begin{pmatrix} -162 \\ -81 \\ -81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким чином, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Завдання для самостійної роботи

Довести сумісність системи лінійних рівнянь і розв'язати за методом Гаусса, за правилом Крамера.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

Відповіді:

1. $x_1=1, x_2=2, x_3=3$. **3.** $x_1=1, x_2=1, x_3=0$.

РОЗДІЛ II. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ

Вектором називається напрямлений відрізок. Вектор позначається так: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, точка A – початок вектора, точка B – його кінець. Для позначення кінця вектора використовується стрілка (рис. 2.1).

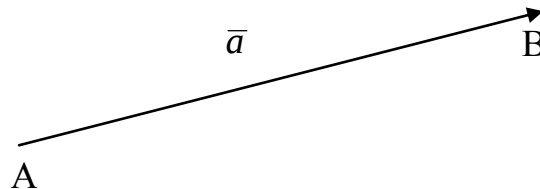


рис. 2.1

Два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називаються *колінеарними*, якщо вони лежать на одній або паралельних прямих.

Модулем (довжиною) вектора $\overrightarrow{AB}$, називається довжина відрізка AB , тобто відстань між його початком A і кінцем B . Для модуля вектора вживається позначення $|\overrightarrow{AB}|$ і $|\vec{a}|$. Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається *одичним* вектором або *ортом*.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони колінеарні, мають однакові напрями і рівні модулі. Для кожного вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ існує *протилежний вектор* $-\vec{a} = -\overrightarrow{AB}$, який має таку ж довжину, але протилежний напрямок (рис. 2.2).

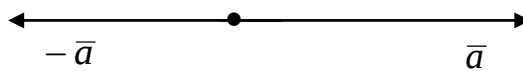


рис. 2.2

Вектори можна додавати, віднімати і множити на число.

Сумою векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BC}$ є вектор $\overrightarrow{AC}$, який сполучає початок вектора $\overrightarrow{AB}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$ при умові, що вектор $\overrightarrow{BC}$ відкладемо від кінця вектора $\overrightarrow{AB}$, тобто

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Це правило додавання векторів називається “*правилом трикутника*” (рис. 2.3).

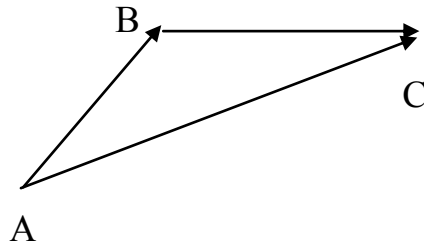


рис. 2.3

При додаванні протилежних векторів $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ одержуємо *нуль-вектор* $\vec{0}$, тобто

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0},$$

модуль якого дорівнює нулю.

Суму двох векторів можна одержати за “*правилом паралелограма*”, яким зручно користуватись для векторів зі спільним початком (рис. 2.4).

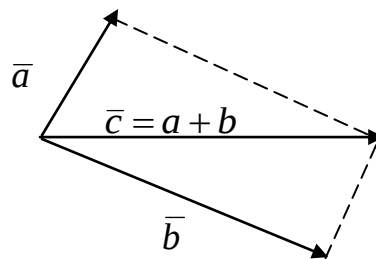


рис. 2.4

Різницею двох векторів $\vec{a} - \vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, який в сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}, \quad \text{тобто} \quad \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

Щоб від вектора $\vec{a}$ відняти вектор $\vec{b}$, досить до вектора $\vec{a}$ додати вектор $-\vec{b}$, протилежний вектору $\vec{b}$.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число λ називається вектор $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$, що:

- а) є колінеарним вектору $\vec{a}$;
- б) має модуль $|\vec{a}\lambda|$, що дорівнює добутку $|\vec{a}||\lambda|$ модулів вектора $\vec{a}$ і числа λ ;
- в) має напрям, що збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, або протилежний йому, якщо $\lambda < 0$.

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь l називається число, яке позначається $\text{пр}_l \overline{AB}$ і дорівнює

$$\text{пр}_l \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos \varphi,$$

де φ - кут між вектором $\overline{AB}$ і віссю l ($0 \leq \varphi \leq \pi$).

Геометрично проекцію вектора $\overline{AB}$ на задану вісь в просторі представлено на рис. 2.5 а); б), точки A_1, B_1 – проекції на вісь l відповідно початку і кінця вектора $\overline{AB}$

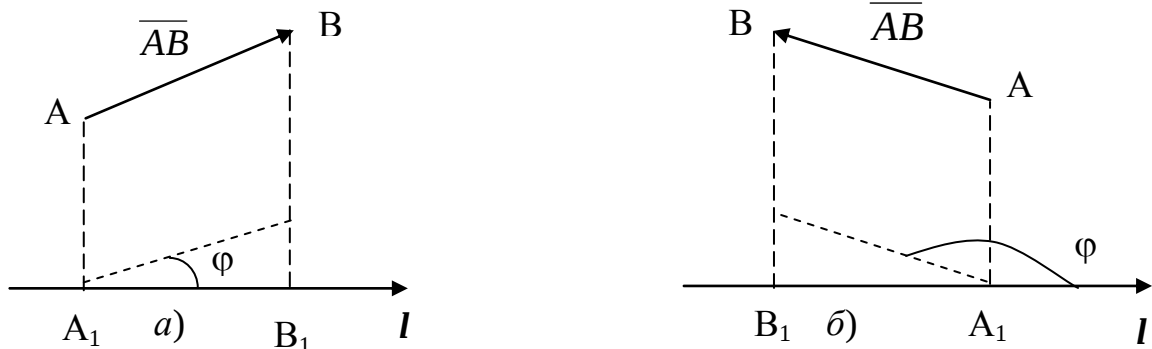
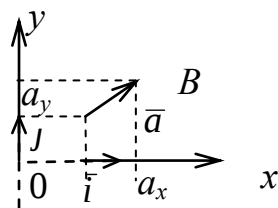


Рис. 2.5

Рис. 2.5 а) відповідає випадку, коли $\varphi < \frac{\pi}{2}$ ($\cos \varphi > 0$), а рис. 2.5 б) – випадку, коли $\varphi > \frac{\pi}{2}$ ($\cos \varphi < 0$). Таким чином проекція вектора на вісь (згідно з рис. 2.5) може бути додатнім або від'ємним числом.

Розглядаючи вектор $\vec{a} = \overline{AB}$ на координатній площині xOy , можемо записати його проекції на вісі Ox і Oy відповідно a_x, a_y .



Ці проекції будемо називати *координатами вектора* $\vec{a}$ та позначати $\vec{a} = (a_x, a_y)$ або $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$ ($\vec{i}, \vec{j}$ – орти (одичні вектори) відповідно осей Ox, Oy). Нагадаємо, що модуль вектора $\vec{a}$ через координати a_x і a_y знаходиться за формулою $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.

2.2. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається добуток їх модулів на косинус кута між ними.

Позначимо скалярний добуток векторів як $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $(\vec{a}, \vec{b})$, а кут між ними - $\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$. Тоді

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos \left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Скалярний добуток підпорядковується таким законам:

- а) $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ – комутативний закон;
- б) $\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b})\lambda$ – асоціативний закон відносно скалярного множника;
- в) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c})$ – дистрибутивний закон.

В координатній формі скалярний добуток записується так $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$. Кут між двома векторами знаходиться за формулою $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$. Умовою ортогональності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є

$$a_x b_x + a_y b_y = 0, \text{ а умовою колінеарності } \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y}.$$

2.3 ВЕКТОРНИЙ ДОБУТОК ДВОХ ВЕКТОРІВ

Векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}]$ вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, який перпендикулярний до векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і утворює з ними праву трійку. Це означає, що коли вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ прикладемо до однієї точки, то спостерігач, який стоїть на площині векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ головою в напрямі до третього вектора, бачить обертання першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ навколо їх спільного початку через менший за абсолютною величиною з утворених ними кутів, як обертання проти годинникової стрілки.

Модуль (довжина) векторного добутку дорівнює добутку модулів векторів, що перемножуються, і синуса кута між ними, тобто площі паралелограма, побудованого на цих векторах, як на сторонах, а саме

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Векторний добуток підпорядковується таким законам:

- а) $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$ - альтернативний закон;
- б) $\lambda[\bar{a}, \bar{b}] = [\lambda\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, \lambda\bar{b}] = [\bar{a}, \bar{b}]\lambda$, де λ - скаляр, асоціативний закон відносно скалярного множника;
- в) $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$ - дистрибутивний закон.

В координатній формі векторний добуток записується

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

2.4. МІШАНИЙ ДОБУТОК ТРЬОХ ВЕКТОРІВ

Добуток $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$, де вектор $\bar{a}$ помножено на $\bar{b}$ векторно, а одержаний векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ помножено на $\bar{c}$ скалярно, називають *мішаним добутком* трьох векторів. Використовують ще позначення $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c})$.

Якщо $(\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}) = 0$, то три вектори $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ паралельні одній площині і називаються компланарними.

При відомих координатах векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$ мішаний добуток можна записати визначником

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ чисельно дорівнює об'єму V паралелепіпеда, побудованого на векторах $\bar{a}, \bar{b}$ і $\bar{c}$.

Розв'язування типових прикладів

1. Обчислити косинус кута, утвореного векторами $\bar{a} = (2, -4, 4)$ і $\bar{b} = (-3, 2, 6)$, та знайти проекцію вектора $\bar{a}$ на напрям $\bar{b}$.

За формулами

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad |\bar{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$$

обчислюємо скалярний добуток векторів $\bar{a}, \bar{b}$ та їх модулі

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 + 4 \cdot 6 = 10$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6, \quad |\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7.$$

Тоді

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{10}{6 \cdot 7} = \frac{5}{21}, \quad \text{np} \vec{b} \vec{a} = \frac{10}{7}.$$

2. Дано вершини трикутника $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ і $C(1, 3, -1)$. Обчислити довжину його висоти, опущеної з вершини B на сторону AC .

Позначимо висоту через h і порівняємо площі трикутника, знайдені двома способами

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} h \cdot |\overline{AC}| = \frac{1}{2} |\overline{AC} \times \overline{AB}|,$$

звідки

$$h = \frac{|\overline{AC} \times \overline{AB}|}{|\overline{AC}|}.$$

Обчислюємо координати векторів $\overline{AC}$ і $\overline{AB}$ та модуль вектора $\overline{AC}$

$$\overline{AC} = (0, 4, -3), \quad \overline{AB} = (4, -5, 0), \quad |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Одержуємо

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & -3 \\ 4 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -15\vec{i} + 12\vec{j} - 16\vec{k}.$$

Модуль векторного добутку становить

$$|\overline{AC} \times \overline{AB}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Таким чином, $h = \frac{25}{5} = 5$ (одиниць довжини).

Завдання для самостійної роботи

Дано координати вершин піраміди $A_1A_2A_3A_4$.

Засобами векторної алгебри знайти:

- 1) довжину ребра A_1A_2 ;
- 2) кут між ребрами A_1A_2 і A_1A_4 ;
- 3) проекцію вектора A_1A_3 на вектор A_1A_4 ;
- 4) площу грані $A_1A_2A_3$;
- 5) об'єм піраміди;
- 6) рівняння прямої A_1A_2 ;
- 7) рівняння площини $A_1A_2A_3$;
- 8) рівняння висоти, опущеної з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$;

9) кут між ребром A_1A_4 і гранню $A_1A_2A_3$.
Зробити рисунок.

Номер варіанта	A_1	A_2	A_3	A_4
1	$-2; 0; -1$	$0; 0; 4$	$1; 3; 2$	$3; 2; 7$
2	$3; 0; 6$	$1; -3; 2$	$3; 2; 5$	$2; 2; 5$
3	$1; 2; 3$	$2; 0; 0$	$3; 2; 5$	$4; 0; 0$
4	$-2; 0; 2$	$0; 0; -4$	$3; 2; 5$	$-1; 3; 2$
5	$2; 0; 0$	$-2; 0; -1$	$1; 4; 2$	$3; 0; 6$
6	$-1; 3; 0$	$2; 0; 0$	$4; -1; 2$	$3; 2; 7$

РОЗДІЛ ІІІ. ЕЛЕМЕНТИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

3.1. ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Співвідношення $\Phi(x, y) = 0$ (або $y = \varphi(x)$) називається рівнянням, якщо воно має місце лише для точок площини xOy , які належать цілком визначеній лінії на цій площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом має вигляд (рис. 3.1)

$$y = kx + b,$$

де k – кутовий коефіцієнт, який визначається через тангенс кута нахилу прямої до осі OX ; b – координата точки перетину прямої з віссю ординат.

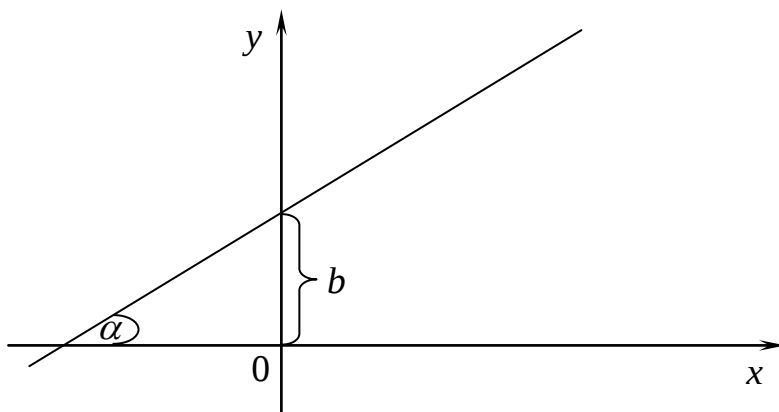


Рис. 3.1

Рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом, яка проходить через дану точку M_0 (рис. 3.2)

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

де k – кутовий коефіцієнт; (x_0, y_0) – координати точки, через яку проходить пряма.

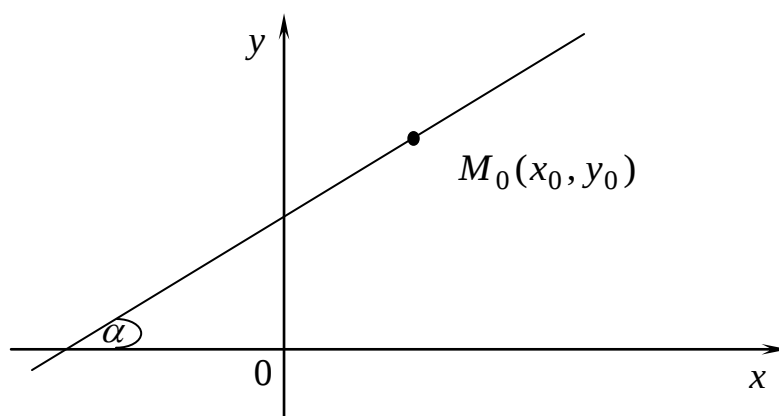


Рис. 3.2

Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки M_1, M_2 (рис. 3.3)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

де $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ – координати точок, через які проходить пряма.

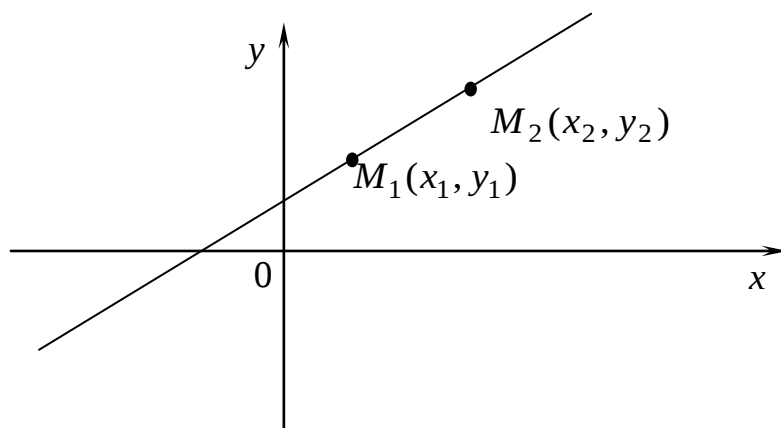


Рис. 3.3

Рівняння прямої у відрізках на осях (рис. 3.4)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

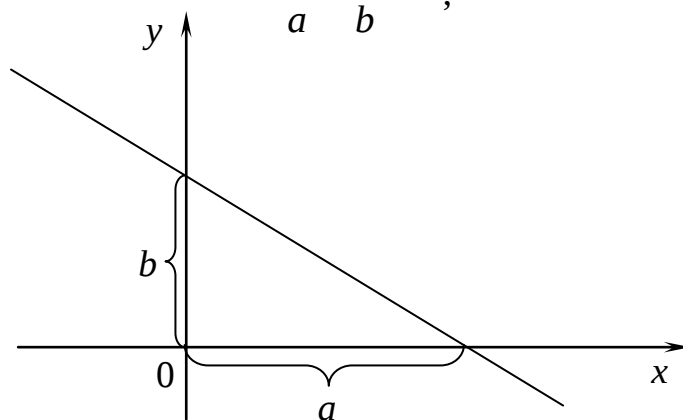


Рис. 3.4

де a – координата точки перетину прямої з віссю абсцис; b – координата точки перетину прямої з віссю ординат.

Загальне рівняння прямої лінії

$$Ax + By + C = 0.$$

Якщо $A = 0$, то пряма паралельна осі абсцис.

Якщо $B = 0$, то пряма паралельна осі ординат.

Якщо $C = 0$, то пряма проходить через початок координат.

Нормальне рівняння прямої (рис. 3.5)

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

де α - кут між нормальним вектором прямої (перпендикуляром до прямої) і віссю абсцис; p – найкоротша відстань від початку координат до прямої.

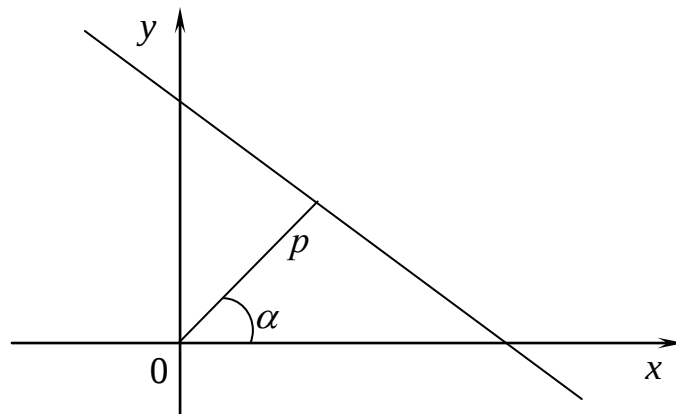


Рис. 3.5

Щоб одержати нормальне рівняння із загального, треба помножити його ліву частину на коефіцієнт

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

причому знак “+” береться, якщо $C < 0$, “-“ якщо $C > 0$.

Відстань від точки до прямої шукається за формулою

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

де $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої, (x_0, y_0) – координати точки.

Кут між двома прямими (рис.3.6)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

де α - кут між прямими; k_1, k_2 – кутові коефіцієнти прямих.

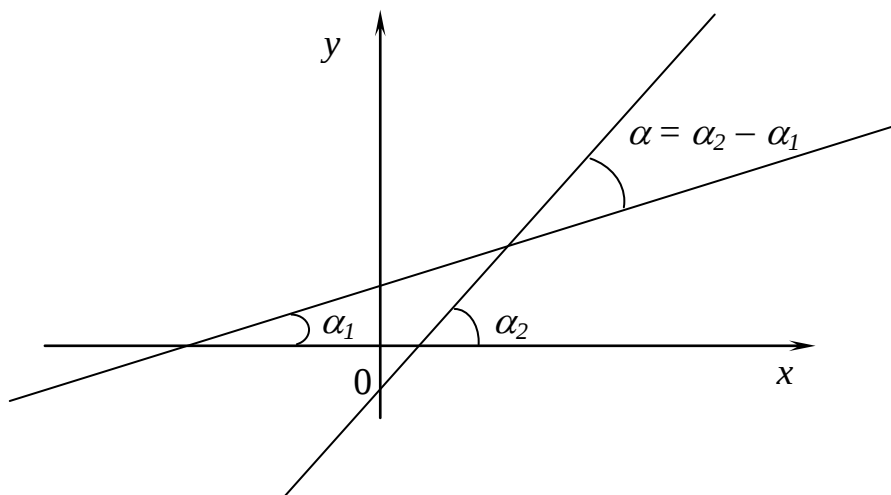


Рис. 3.6

Дві прямі паралельні, якщо $k_1 = k_2$, і перпендикулярні, якщо $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

3.2. ПЛОЩИНА І ПРЯМА У ПРОСТОРИ

Рівність $\Phi(x, y, z) = 0$ (або $z = \Phi(x, y)$) називається рівнянням, якщо вона має місце лише для точок, які належать цілком визначеній поверхні простору $xOyz$.

Загальне рівняння площини

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Якщо $A = 0$, то площина паралельна осі абсцис.

Якщо $B = 0$, то площина паралельна осі ординат.

Якщо $C = 0$, то площина паралельна осі аплікат.

Якщо $D = 0$, то площина проходить через початок координат.

Рівняння площини, яка проходить через дану точку і має даний нормальний вектор

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

де (A, B, C) – координати нормального вектора $\vec{n}$, (x_0, y_0, z_0) – координати точки M_0 , через яку проходить площина.

Рівняння площини, яка проходить через три точки

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

де (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) – координати точок, через які проходить площина.

Нормальне рівняння площини

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

де α, β, γ – кути між нормальним вектором і осями координат Ox, Oy, Oz відповідно; p – відстань від початку координат до площини.

Щоб одержати нормальне рівняння із загального, треба помножити його ліву частину на коефіцієнт

$$\mu = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

причому “+” береться, якщо $D < 0$, і “-”, – якщо $D > 0$.

Відстань від точки до площини

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

де $Ax + By + Cz + D = 0$ – загальне рівняння площини; (x_0, y_0, z_0) – координати даної точки.

Кут між двома площинами

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

де φ – кут між двома площинами; (A_1, B_1, C_1) та (A_2, B_2, C_2) – координати нормальних векторів площин.

Якщо площини паралельні, то їх нормальні вектори колінеарні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Якщо площини перпендикулярні, то скалярний добуток їх нормальних векторів дорівнює нулю, тобто

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Канонічні рівняння прямої у просторі

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p},$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, через яку проходить пряма; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої.

Параметричні рівняння прямої у просторі

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

де (x_0, y_0, z_0) – координати точки, через яку проходить пряма; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої, t – параметр.

Рівняння прямої, як перетин двох площин

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Кут між двома прямими

$$\cos \varphi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

де φ – кут між прямими; (m_1, n_1, p_1) та (m_2, n_2, p_2) – координати спрямовуючих векторів прямих.

Якщо прямі паралельні, то їхні напрямні вектори колінеарні, тобто

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Якщо прямі перпендикулярні, то скалярний добуток їхніх спрямовуючих векторів дорівнює нулю, тобто

$$m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Кут між прямою і площиною

$$\sin \varphi = \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де φ – кут між прямою і площиною; (A, B, C) – координати нормального вектора площини; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої.

Якщо пряма паралельна площині, то

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Якщо пряма перпендикулярна площині, то

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p},$$

де (A, B, C) – координати нормального вектора площини; (m, n, p) – координати напрямного вектора прямої.

Розв'язування типових прикладів

1. Дано вершини трикутника $A(0;1)$, $B(6;5)$, $C(12; -1)$. Скласти рівняння висоти трикутника, проведеної з вершини A .

Розв'язання. Висота h перпендикулярна стороні BC . Знайдемо рівняння цієї сторони, як рівняння прямої, що проходить через дві точки B і C .

$$\frac{x - x_B}{x_C - x_B} = \frac{y - y_B}{y_C - y_B}, \quad \frac{x - 6}{12 - 6} = \frac{y - 5}{-1 - 5}.$$

Знайдемо кутовий коефіцієнт цієї прямої. Перепишемо рівняння прямої так

$$y - 5 = -x + 6, \quad y = -x + 11.$$

Тоді кутовий коефіцієнт цієї прямої $k_{BC} = -1$. Добуток кутового коефіцієнта k_h і k_{BC} дорівнює -1 (за умови перпендикулярності прямих).

Тоді $k_h = 1$.

Висота h проходить через точку $A(0; 1)$ та має кутовий коефіцієнт $k_h = 1$.

Тоді її рівняння запишемо у вигляді $y - 1 = 1(x - 0)$, тобто $y = x + 1$.

Відповідь: рівняння висоти $y = x + 1$.

2. Знайти, при яких значеннях l і m дані пари рівнянь визначають:

а) паралельні площини

$$2x + ly + 3z - 5 = 0, \quad mx - 6y - 6z + 2 = 0;$$

б) перпендикулярні площини

$$3x - 5y + lz - 3 = 0, \quad x + 3y + 8z - 5 = 0.$$

Розв'язання. а) за умови паралельності

$$\frac{2}{m} = \frac{l}{-6} = \frac{3}{-6}, \quad \frac{2}{m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow m = -4, \quad -\frac{l}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow l = 3.$$

б) за умови перпендикулярності

$$3 \cdot 1 + (-5) \cdot 3 + l \cdot 8 = 0$$

$$8l - 12 = 0 \Rightarrow l = \frac{3}{2}.$$

Відповідь: а) $m = -4$, $l = 3$; б) $l = \frac{3}{2}$.

3. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(1; -2; 1)$ перпендикулярно до прямої

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

Розв'язання. Якщо площина перпендикулярна прямій, то її нормальний вектор співпадає зі спрямовуючим вектором прямої. Пряма являє собою перетин двох площин, тобто вона належить до обох площин і тому перпендикулярна кожному з нормальних векторів. Тоді її спрямовуючий вектор можна знайти як векторний добуток нормальних векторів площини:

$$\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}.$$

тобто $\bar{S} = (1, 2, 3)$.

Нормальний вектор площини має координати $(1, 2, 3)$. Запишемо рівняння площини у вигляді

$$1(x - 1) + 2(y + 2) + 3(z - 1) = 0 \text{ або } x + 2y + 3z = 0.$$

Відповідь: $x + 2y + 3z = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Дано координати вершин трикутника ABC .

Номер варіанта	A	B	C
1	0; 0	2; 6	7; 2
2	-1; 3	1; 9	4; 7
3	-3; 1	-1; 7	12; 6
4	-6; -3	-4; 3	9; 2
5	-2; -6	0; 0	3; -2
6	-6; -4	-1; 2	6; 1

Засобами аналітичної геометрії: 1) скласти рівняння сторони AB ;

2) скласти рівняння висоти, проведеної з вершини C ; 3) обчислити довжину висоти, проведеної з вершини B ; 4) скласти рівняння прямої, яка проходить через центр ваги трикутника паралельно стороні AC ; 5) знайти площу трикутника; 6) знайти внутрішній кут трикутника при вершині A .

3.3. КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

До кривих другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола та парабола. Криві другого порядку називають ще *конічними перерізами*, оскільки їх можна дістати як лінії перетину прямого кругового конуса площинами. При перетині конуса площиною, перпендикулярною до вісі, одержимо коло (рис.3.7а). Якщо ж перетнути конус площиною, яка не проходить через вершину конуса і перетинає всі його твірні, то матимемо еліпс (рис.3.7б), якщо перетнути конус площиною, паралельною двом твірним конуса, то дістанемо гіперболу (рис.3.7в), якщо перетнути конус площиною, паралельною одній твірній конуса, то матимемо параболу (рис.3.7г)

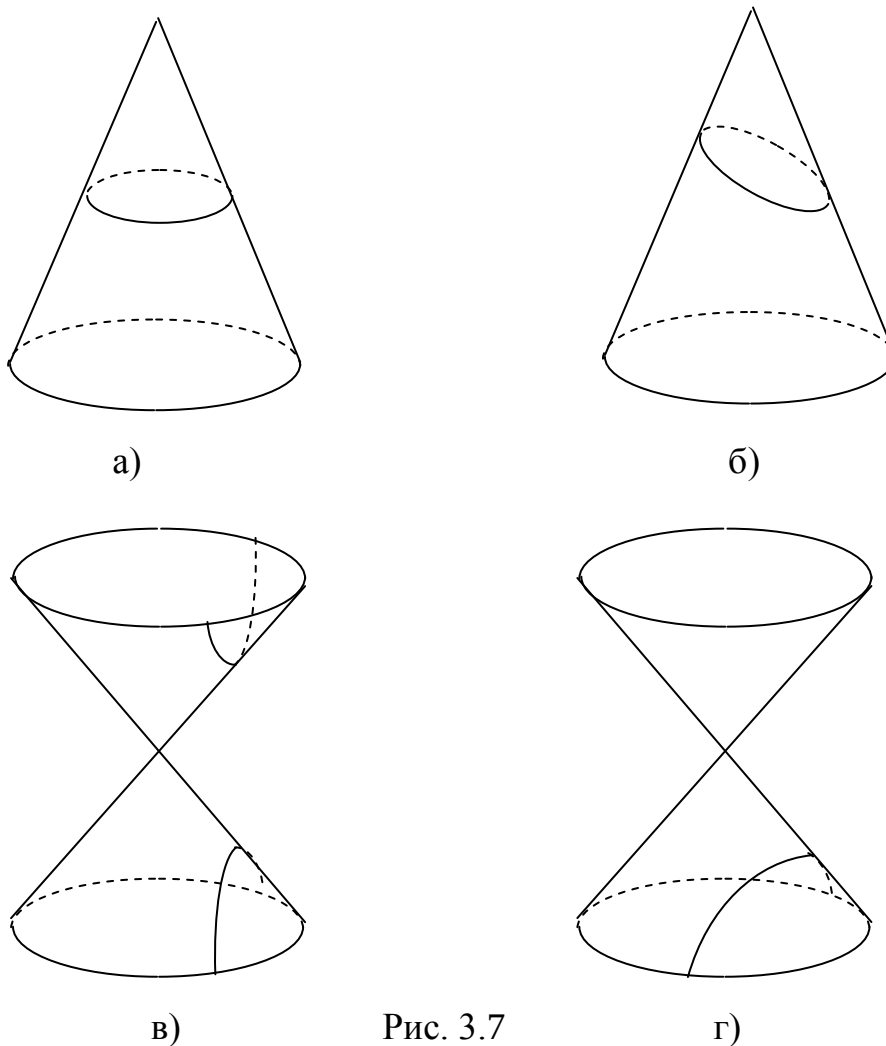


Рис. 3.7

Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки (*центра кола*) дорівнюють сталому числу (*радіусу*).

Щоб скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці $O(a,b)$, а радіус дорівнює R (Рис. 3.8), візьмемо на колі поточну точку $M(x,y)$.

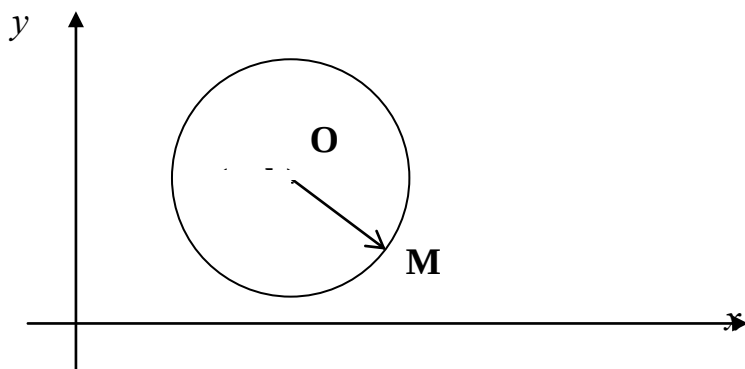


Рис. 3.8

Де б не знаходилася точка M на колі, завжди $|OM| = R$, тобто $|OM| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R$ або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (3.1)$$

Це канонічне рівняння кола.

Якщо в рівнянні (3.1) розкрити дужки і звести подібні члени, дістанемо загальне рівняння кола:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

де A, B, C – відомі коефіцієнти. Слід зауважити, що ліва частина цього рівняння не містить доданку xy

Еліпс

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок площини, які називаються *фокусами*, є величина стала (рис. 3.9).

Нехай F_1 та F_2 – фокуси еліпса, а M – його довільна точка, координати

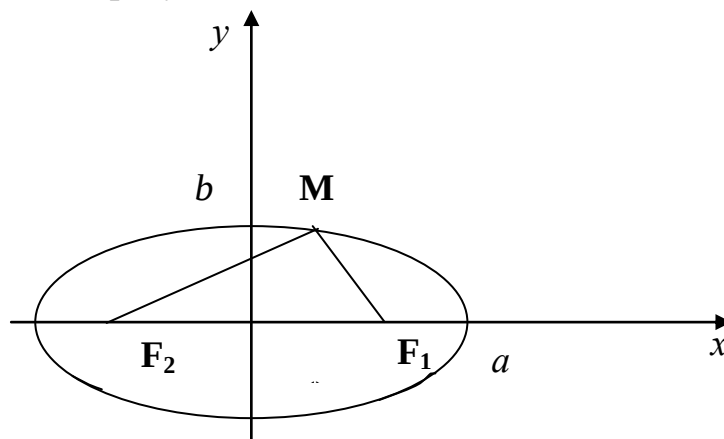


Рис. 3.9

якої позначимо через x і y . Відрізки F_1M і F_2M називають *фокальними радіусами* точки M еліпса, суму їх позначають через $2a$, а відстань F_1F_2 між фокусами – через $2c$. У відповідності з цими позначеннями фокуси еліпса відносно вибраної системи координат мають координати $F_1(c,0)$ та $F_2(-c,0)$. За формулами відстані між двома точками обчислимо

$$|F_1M| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad |F_2M| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

За означенням еліпса $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Це і є рівняння еліпса. Спрощуючи його, поступово позбуваючись коренів, отримаємо

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Нехай $b^2 = a^2 - c^2$. Тоді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Поділивши обидві частини цієї рівності на a^2b^2 , матимемо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.2)$$

Рівняння (3.2) називають *канонічним рівнянням еліпса*.

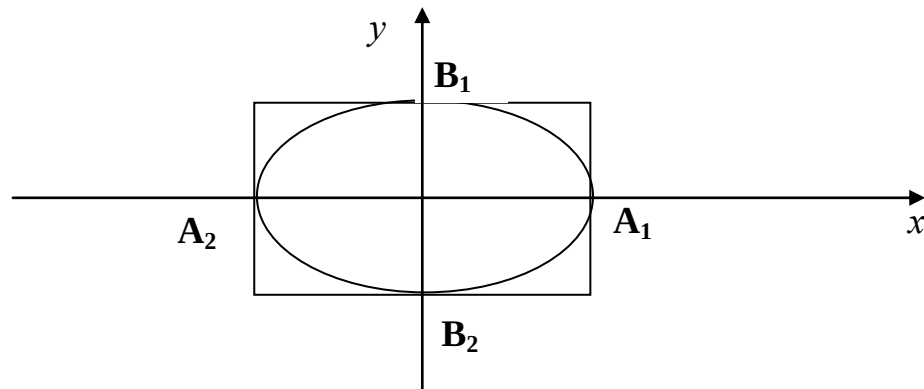


Рис. 3.10

Відрізки $|A_1A_2| = 2a$ і $|B_1B_2| = 2b$ називаються довжинами осей еліпса, $2a$ – довжина великої осі, $2b$ – довжина малої осі (рис. 3.10).

Ексцентриситетом еліпса називають відношення відстані між його фокусами до довжини його великої осі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c < a$, то $0 \leq \varepsilon < 1$.

Директрисами еліпса називають дві прямі, перпендикулярні до фокальної осі еліпса і розміщені симетрично відносно центра еліпса на відстані $\frac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Гіпербола

Гіперболою будемо називати множину точок площини xOy (Рис.3.11), модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала. Якщо позначити через F_1 і F_2 – фокальні точки гіперболи, а відстань між ними – через $2c$, тоді відповідний модуль різниці $|MF_1 - MF_2|$ запишемо формулою

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a .$$

Виконуючи над цією формулою ті ж перетворення, що і при виведенні рівняння еліпса та використовуючи позначення $b^2 = c^2 - a^2$, одержимо *канонічне рівняння гіперболи* у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.3)$$

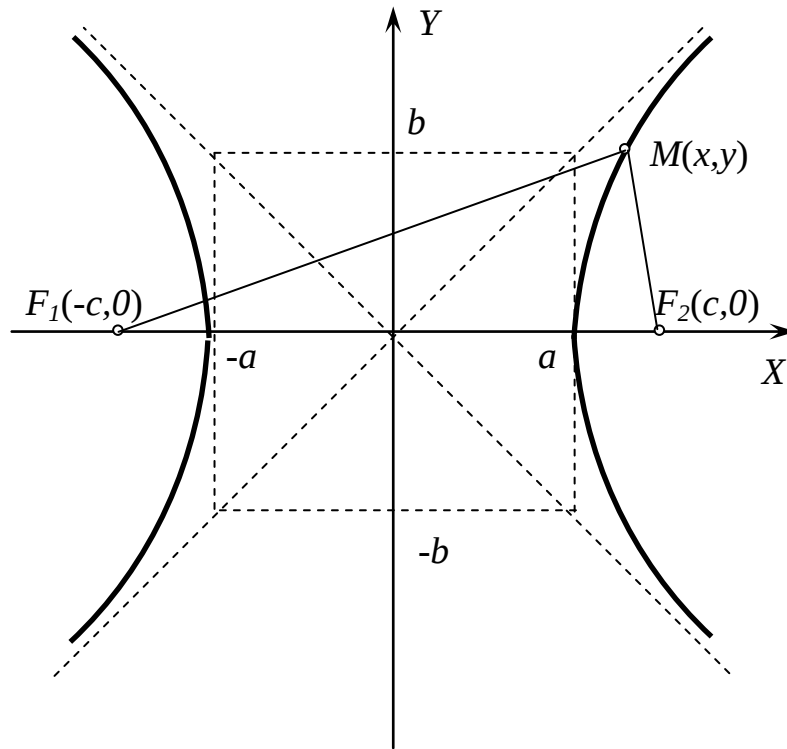


Рис. 3.11

Безпосередній аналіз формули показує, що гіпербола симетрична відносно осей Ox і Oy

Аналізуючи малюнок можна відмітити наступне:

1. Гіпербола не перетинає вісь Oy ;
2. На нескінченності змінна точка $M(x,y)$ наближається до прямої, яка називається асимптотою гіперболи. Внаслідок симетрії гіпербола має

дві асимптоти, рівняння яких $y = \pm \frac{b}{a}x$;

3. Гіпербола має дві вершини – точки перетину гіперболи з віссю Ox .

Ексцентриситетом гіперболи називають відношення відстані між його фокусами до її дійсної вісі:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Оскільки $c > a$, то $\varepsilon > 1$.

Парабола

Парабола – множина точок площини xOy , кожна з яких рівновіддалена від даної точки, яка називається *фокусом*, та даної прямої, яка називається *директрисою* (Рис. 3.12).

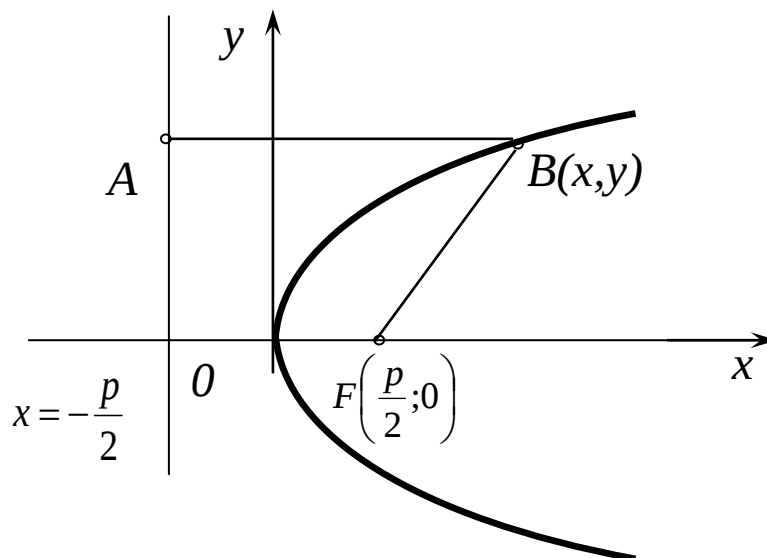


Рис . 3.12

На рисунку позначено координати фокуса через $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, а рівняння директриси записано у вигляді $x = -\frac{p}{2}$. Вказану рівність відстаней $AB=BF$ подамо формулою

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Після спрощень, аналогічних тим, що проводились вище при розгляді еліпса, одержимо канонічне рівняння параболи

$$y^2 = 2px. \quad (3.4)$$

Як бачимо, парабола симетрична відносно вісі Oy і проходить через початок координат $O(0,0)$. Ця точка називається вершиною параболи

Відносно параметра p відмітимо наступне: із зростанням p зростає крутизна віток параболи.

Розв'язання типових прикладів

1. Визначити координати центра та радіус кола $3x^2 + 3y^2 - 4x + 9y + 4 = 0$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на 3, отримаємо

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x + 3y + \frac{4}{3} = 0.$$

Доповнюючи до повних квадратів вирази відносно кожної із змінних, знаходимо

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{36}.$$

Звідси $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{3}{2}$, $R = \frac{7}{6}$.

2. Знайти піввісі, фокуси та ексцентриситет еліпсу $4x^2 + 9y^2 = 16$.

Розв'язання. Поділимо на 16 обидві частини рівняння, отримаємо

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{16}{9}} = 1.$$

Звідси $a^2 = 4$, $b^2 = \frac{16}{9}$, $a = 2$, $b = \frac{4}{3}$, $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9}$, $c = \frac{2\sqrt{5}}{3}$,

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Таким чином $a = 2$, $b = \frac{4}{3}$, $F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right)$, $F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right)$, $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

3. Написати канонічне рівняння еліпса, що симетричний відносно координатних осей та проходить через точки $L(3,1)$, $N(\sqrt{6}, \sqrt{2})$.

Розв'язання. Канонічне рівняння еліпса має вигляд (3.2). Визначимо a^2 та b^2 із умови приналежності еліпсу точок L та N . Підставляючи координати цих точок у рівняння (3.2), отримаємо

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \quad \frac{6}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1.$$

Це лінійна система двох рівнянь відносно невідомих $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$. Помноживши почленно перше рівняння на 2 та віднімаючи із одержаного друге рівняння системи, знаходимо $a^2 = 12$. Із другого рівняння одержуємо $b^2 = 4$.

Таким чином, рівняння має вигляд $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. Знайти канонічне рівняння гіперболи, яка симетрична відносно координатних осей, перетинає вісь OY та проходить через дві точки $M(24,5\sqrt{5})$, $N(0,5)$. Знайти фокуси цієї гіперболи.

Розв'язання. Рівняння гіперболи шукаємо у вигляді (3.3). З того, що M та N лежать на гіперболі, витікає, що їх координати задовольняють рівнянню гіперболи. Підставляючи координати даних точок у рівняння (3.3), отримаємо

$$\frac{125}{b^2} - \frac{24^2}{a^2} = 1, \frac{25}{b^2} = 1.$$

Розв'язавши одержану систему, знаходимо

$$b^2 = 25, a^2 = 144.$$

Таким чином, рівняння

$$\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$$

відповідає умові задачі. Згідно формули $c^2 = a^2 + b^2$, отримаємо $c = \sqrt{144 + 25} = 13$. Фокуси даної гіперболи лежать на осі OY : $F_1(0, -5)$, $F_2(0, 5)$.

5. Довести, що добуток відстаней довільної точки гіперболи до асимптот є величина стала.

Розв'язання. Рівняння асимптот гіперболи мають вигляд $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Нехай $M(x, y)$ – довільна точка гіперболи. Її відстань до асимптот має такий вираз

$$d_1 = \left| \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|, d_2 = \left| \frac{bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \Rightarrow d_1 d_2 = \left| \frac{b^2 x^2 - a^2 y^2}{a^2 + b^2} \right| = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

що і необхідно було довести

6. Написати рівняння параболи, яка симетрична відносно осі OY та проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Розв'язання. Знайдемо точки перетину прямої та кола. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + y^2 + 8y = 0. \end{cases}$$

Визначаючи x із першої рівності та підставляючи його в другу, отримаємо

$$(-y)^2 + y^2 + 8y = 0 \text{ або } 2y^2 + 8y = 0, 2y(y + 4) = 0.$$

Звідки $y_1 = 0, y_2 = -4$.

Оскільки $x = -y$, одержимо $x_1 = 0, x_2 = 4$. Отже $O(0,0), M(4,-4)$ – точки перетину прямої і кола.

Рівняння параболи, що симетричне відносно осі OY та проходить через

початок координат, має вигляд (3.4). Знайдемо параметр p із умови, що парабола проходить через точку $M(4, -4)$. Підставляючи координати цієї точки до рівняння параболи, маємо $4^2 = 2p(-4)$, звідки $2p = -4$. Отже, рівняння параболи має вигляд $x^2 = -4y$.

Завдання для самостійної роботи

1. Скласти рівняння кола, якщо:
 - а) його центр знаходиться у точці $S(3, -5)$ та коло проходить через точку $N(7, -2)$;
 - б) діаметром його є відрізок MN , де $M(3, 2)$, $N(-1, 6)$;
 - в) його центр знаходиться в точці $N(2, -3)$, яке дотикається прямої $4x + 3y - 19 = 0$;
 - г) воно проходить через точки $L(-3, -17)$, $M(7, 7)$, $N(14, 0)$.
2. Знайти рівняння спільної хорди двох кіл
$$x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0, \quad x^2 + y^2 - 6x - 10y + 30 = 0.$$
3. Скласти канонічні рівняння еліпсів, знаючи, що
 - а) відстань між фокусами дорівнює 24 та найбільша вісь дорівнює 26;
 - б) мала напіввісь дорівнює 12, ексцентриситет дорівнює $\frac{5}{13}$;
 - в) відстань між фокусами $2c = 6$ і ексцентриситет дорівнює $\frac{3}{2}$.
4. Визначити довжину осей, координати фокусів і ексцентриситет еліпсів, що задані рівнянням а) $9x^2 + 25y^2 = 225$; б) $3x^2 + 5y^2 = 12$.
Написати рівняння директрис еліпсів.
5. Скласти канонічне рівняння гіперболи, знаючи, що
 - а) відстань між фокусами дорівнює 10, а відстані між вершинами 8;
 - б) відстань між фокусами дорівнює 10 а ексцентриситет $\frac{5}{3}$.
6. Знайти довжини осей, координати фокусів і ексцентриситетів гіпербол, що задані рівностями а) $3x^2 - 4y^2 = 12$; б) $4y^2 - 5x^2 = 20$.
7. Знайти кут, між асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.
8. Скласти рівняння параболи, якщо відомо що:
 - а) парабола симетрична відносно осі OX , проходить через точку $N(-3, 6)$ та початок координат;
 - б) парабола симетрична відносно осі OY , проходить через точку $N(6, 3)$ та початок координат.
 - в) фокус знаходиться у точці $F(5, 0)$, директриса є віссю ординат та вісь симетрії – вісь абсцис;
 - г) фокус знаходиться у точці $F(5, 0)$, директриса є віссю абсцис та вісь

симетрії – вісь ординат.

9. На параболі $y^2 = 16x$ знайти точку, фокальний радіус якої дорівнює 5.

10. Параболи задані рівняннями:

а) $y = x^2 - 5x + 7$; б) $y = 4x^2 + 8x + 7$; в) $y = -3x^2 + 6x - 5$; г)

$y = -x^2 + 4x - 6$.

Привести рівняння парабол до канонічного виду та знайти координати їх вершин.

Відповіді:

1. б) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 10$. 3. в) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$.

РОЗДІЛ IV. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ. ЕЛЕМЕНТИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1. ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Поняття функції – одне з основних понять математичного аналізу.

Якщо до кожного значення змінної величини x , яка належить множині дійсних чисел X , за певним правилом поставимо у відповідність цілком певне дійсне значення змінної величини y , то кажуть, що на множині дійсних чисел задано *функцію* $y = f(x)$.

Число x називається *незалежною змінною (аргументом)* функції, а X – *областю визначення* функції, y – *значенням* функції в точці x , а сукупність всіх значень функції позначимо через Y . Найчастіше зустрічаються три способи завдання функції: аналітичний, табличний і графічний. При аналітичному способі функцію задають за допомогою однієї або кількох формул.

Наприклад:

$$y = \sqrt{x^2 - 1}, \quad y = \lg(1 + \sin^2 x),$$
$$y = \begin{cases} x + 1, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 0, \\ 1, & \text{якщо } 0 < x \leq 1, \\ \sin \frac{\pi}{2} x, & \text{якщо } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Серед функцій, заданих аналітично, головну роль відіграють основні *елементарні функції* (степенева, показникова, логарифмічна, тригонометрична, обернена тригонометрична, стала), а також функції, заданих за допомогою формул, що містять скінченне число арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення) і суперпозицій основних елементарних функцій. Вони складають основу математичного аналізу.

Число A називається *границею* функції $f(x)$ в точці x_0 , якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$, можна знайти $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$ ($x \in X$), виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

За допомогою символів:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, \quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Твердження про те, що A – границя функції $f(x)$ у точці x_0 , можна записати таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad \text{або} \quad f(x) \rightarrow A \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Для існування границі функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$ необхідно і достатньо, щоб мала місце рівність $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ – *ліва границя* функції і $f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ – *права границя* функції $f(x)$ у точці $x = x_0$. Запис $x \rightarrow x_0 - 0$ ($x \rightarrow x_0 + 0$) означає, що точка x наближається до точки x_0 зліва (справа). Права і ліва границі функції у точці називаються *односторонніми границями* функції в цій точці.

На практиці обчислення границь ґрунтується на таких правилах. Якщо існують скінченні $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n, \quad \text{де } n - \text{ціле дане число};$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)};$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x)} \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) \neq 0);$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c = c, \quad \text{де } c = \text{const}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{c}{x} = \infty, \quad \text{де } c = \text{const};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{c}{x} = 0, \quad \text{де } c = \text{const}.$$

Зазначимо, що для всіх елементарних функцій в будь-якій точці їх областей визначення має місце рівність

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right) = f(x_0).$$

Зауважимо, що обчислення границі будь-якої функції $f(x)$ треба починати з підстановки замість x його граничного значення.

Наприклад, обчислити

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 + x^2 + 1} = \frac{1 - 2 + 3}{1^3 + 1^2 + 1} = \frac{2}{3}.$$

В багатьох випадках у результаті такої підстановки одержують вирази $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞ , які називаються *невизначеностями*. Всі вказані невизначеності розкриваються алгебраїчними і тригонометричними перетвореннями, або за допомогою переходу до еквівалентних нескінченно малих величин.

Нескінченні малі в точці x_0 функції $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають *еквівалентними нескінченно-малими* в околі точки x_0 , якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Таблиця еквівалентних нескінченно малих при $u(x) \rightarrow 0$

$$\sin u \sim u; \quad \operatorname{tg} u \sim u; \quad \arcsin u \sim u;$$

$$\operatorname{arctg} u \sim u; \quad \log_a(1+u) \sim \frac{u}{\ln a}; \quad \ln(1+u) \sim u;$$

$$a^u - 1 \sim u \ln a; \quad e^u - 1 \sim u; \quad (1+u)^k - 1 \sim ku.$$

Приклад еквівалентних нескінченно великих при $x \rightarrow \infty$

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \sim a_0 x^n.$$

За допомогою еквівалентних нескінченно малих розкривається безпосередньо невизначеність $\frac{0}{0}$, а за допомогою еквівалентних нескінченно великих — невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. При цьому використовується теорема про заміну нескінченно малих або нескінченно великих еквівалентними до них величинами.

Теорема. Границя відношення двох нескінченно малих або двох нескінченно великих не зміниться, якщо їх замінити еквівалентними величинами.

Приклад. Відшукати

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\operatorname{tg} 3x} = \left| \frac{0}{0} \right| = \left| \frac{\sin 2x \sim 2x}{\operatorname{tg} 3x \sim 3x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

При обчисленні деяких границь, використовують таке твердження: якщо функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ мають границі в точці x_0 , причому $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$,

то й функція $f(x)^{\varphi(x)}$ також має границю, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)}$$

При розкритті невизначеностей інших видів їх спочатку зводять алгебраїчними або тригонометричними перетвореннями до виду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, а потім використовують згадану теорему.

Наприклад, знайти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 2.$$

При розв'язанні цього прикладу взято до уваги, що при $x \rightarrow 0$
 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2}$.

Тут для розкриття невизначеності $|0 \cdot \infty|$ можна використати *першу визначну границю* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$. Проте більш раціонально скористатися еквівалентними нескінченно малими.

При розкритті невизначеності 1^∞ можна скористатися *другою визначною границею*

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

Число $e = 2,71828\dots$ – ірраціональне, воно є основою натурального логарифму: $\ln x = \log_e x$.

Наприклад, знайти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{\frac{k}{x} \cdot mx} = e^{km}.$$

Розв'язування типових прикладів

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1}$

Розв'язання. Для визначення границі елементарної функції досить у вираз цієї функції підставити граничне значення її аргументу і застосувати теорему про границі. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{(\sqrt{3})^2 - 3}{(\sqrt{3})^4 + (\sqrt{3})^2 + 1} = \frac{0}{9 + 3 + 1} = \frac{0}{13} = 0.$$

2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2 - x}$.

Розв'язання. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 2} (2 - x) = 0$, то $(2 - x)$ є величина нескінченно мала, а обернена до неї $\frac{1}{2 - x}$ – нескінченно велика.

Отже можна записати, що

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{2-x} = \frac{2}{0} = \infty.$$

У цьому випадку кажуть, що границя функції нескінченна.

Розкриття невизначеності $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності користуються такими заходами: розкладають чисельник і знаменник на множники, після чого скорочують дріб на нескінченно малий співмножник і потім переходять до границі; б) помножують чисельник і знаменник на вираз, спряжений чисельнику чи знаменнику, після чого одержаний дріб скорочують і переходять до границі; в) використовують першу визначну границю; г) використовують властивість еквівалентності нескінченно малих величин.

3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1}$

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладаючи на множники чисельник за формулами $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$, а знаменник за формулою $ax^2 + bx + c = a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(4x^2 + 2x + 1)}{(2x-1)(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^2 + 2x + 1}{3x-1} = \frac{1+1+1}{\frac{3}{2}-1} = 6.$$

4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

Розв'язання. Після підстановки граничного значення $x=5$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Звільнимися від ірраціональності у чисельнику, помноживши чисельник і знаменник на спряжений чисельнику множник $(\sqrt{x-1}+2)$. Після скорочення дробу на нескінченно малий множник, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2)(\sqrt{x-1}+2)}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-1-4}{(x-5)(\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$$

5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання. Враховуючи, що $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ і при $x \rightarrow 0$ $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$

, матимемо

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{x^2}{4}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Розкриття невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$. Для розкриття цієї невизначеності, заданої відношенням многочленів, чисельник і знаменник ділять на найвищий степінь x , а потім переходять до границі.

6. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 5}{2x^2 - 3x + 1}.$

Розв'язання. При $x \rightarrow \infty$ одержуємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Поділивши чисельник і знаменник на x^4 , тобто на старший степінь x і використавши властивості границь, одержимо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 5}{2x^2 - 3x + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{8}{x^3} + \frac{5}{x^4}}{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \frac{1}{0} = \infty.$$

А це означає, що границі функції не існує. Границю можна відшукати й використавши перехід до еквівалентних нескінченно великих величин

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - 8x + 5}{2x^2 - 3x + 1} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| = \left| \frac{x^4 - 8x + 5 \sim x^4}{2x^2 - 3x + 1 \sim 2x^2} \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{2x^2} = \infty.$$

Нижче наведено приклади застосування деяких стандартних способів розкриття інших невизначеностей.

7. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}].$

Розв'язання

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}] = (0 \cdot \infty) = \left| \begin{array}{l} 1-x = z \\ \text{пу } x \rightarrow 1 \\ z \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{z \rightarrow 0} [z \operatorname{tg} \frac{\pi(1-z)}{2}] =$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} [z \cdot \operatorname{tg} (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot z)] = \lim_{z \rightarrow 0} (z \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2}) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{tg} \frac{\pi z}{2}} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\frac{\pi z}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

8. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) &= |\infty - \infty| = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+x+x^2-3}{1-x^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{1-x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)} = \frac{-(1+2)}{1+1+1} = -1. \end{aligned}$$

При розкритті невизначеності 1^∞ можна скористатися другою визначною границею.

9. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$.

Розв'язання. Після виконання елементарних перетворень і використання другої визначної границі, маємо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} &= |1^\infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-4}{3x+2} - 1 \right)^{\frac{x+1}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x-4-3x-2}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-6}{3x+2} \right)^{\frac{3x+2}{-6}} \right]^{\frac{-6}{3x+2} \cdot \frac{x+1}{3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{-2(x+1)}{3x+2}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(x+1)}{3x+2}} = e^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x}$.

Розв'язання. Використавши властивості логарифмів і другу визначну границю, одержимо

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} &= \left| \frac{0}{0} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \left(\frac{a+x}{a} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{x}} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{1}{x}} = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{x}{a} \right)^{\frac{a}{x}} \right]^{\frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

Не користуючись правилом Лопітала, знайти границі функцій.

1. а) $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x + 1)(x + 2)$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 - 3x - 2}{x^2 + 3x - 10}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3}{4x^2 - 3x + 2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{x^2 - 9}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x^2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 4x)^{\frac{3}{x}}$.

2. а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x - 1}{x^2 + 4x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 3x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 + 2}{x^4 + 2x^3 + x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{\sqrt{2x^2 + 5} - 3}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}$.

3. а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 1}{3x^2 - x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 5x - 12}{x^2 - 2x + 8}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2x + 3}{4x^4 - 3x + 6}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{3-x}}{x-2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{1 - \cos 5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\frac{3}{\sin 3x}}$.

4. а) $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^3 - 3x^2 + 1)(7x + 1)$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 + x - 21}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 4x + 5}{4x^2 + 7x - 1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{4x} - \sqrt[3]{x+6}}{x-2}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^2 x}{x \cdot \sin x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x$.

5. а) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 + 5x - 4}{x + 7}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{6x^2 - 37x + 6}$;

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 4x^4 - 3x + 1}{7x^3 - 2x + 5}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$.

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 2x}$;

е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-5}{x}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Відповіді:

1. а) 0; б) ∞ ; в) ∞ ; г) $-\frac{1}{12}$; д) 4; е) e^{12} . 3. а) $1\frac{1}{8}$; б) 0; в) $\frac{3}{4}$; г) 1; д) $\frac{2}{5}$;
е) e^3 .

4.2. НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

Означення 1. Функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0 , називається *неперервною в точці x_0* , якщо її приріст у цій точці при $\Delta x \rightarrow 0$ є нескінченно мала величина.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Це означення рівносильне такому: функція $f(x)$, визначена в околі точки x_0 , називається *неперервною в точці x_0* , якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для неперервності функції в точці x_0 необхідно і достатньо, щоб $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, де $f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ - ліва границя функції,

$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ - права границя функції, $f(x_0)$ - значення функції

$f(x)$ в точці x_0 . При цьому припускається, що функція $f(x)$ визначена в околі точки x_0 (у тому числі і в самій точці x_0).

Якщо функція неперервна в кожній точці деякої області, то вона неперервна в цій області. Всі елементарні функції неперервні в області їх визначення.

Якщо в точці порушується умова неперервності, така точка називається *точкою розриву* функції. Точки розриву функції можуть належати області визначення функції або знаходитися на границі цієї області.

Класифікація точок розриву.

1. Якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 - *точка усувного розриву*.
2. Якщо $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 - *точка розриву першого роду*, а різниця $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ - стрибок функції $f(x)$ в точці x_0 .
3. Якщо хоча б одна з границь $f(x_0 + 0)$ і $f(x_0 - 0)$ не існує або є нескінченна, то x_0 - *точка розриву другого роду*.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ і $g(x)$ неперервні в точці x_0 , то функції $f(x) + g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$; $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x_0) \neq 0$) також неперервні в точці x_0 .

Зазначимо, що: 1) елементарна функція може мати розрив тільки в тій точці, де вона не є визначена; 2) якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами для різних інтервалів зміни аргументу, вона може мати розриви лише в тих точках, де змінюється її аналітичний вираз.

Приклад. Дослідити на неперервність функцію

$$y = 2x^2 - 3x.$$

Розв'язання. Функція визначена в інтервалі $(-\infty, \infty)$. Покажемо, що в цьому інтервалі вона неперервна. Знайдемо $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y$. Оскільки

$$y(x + \Delta x) = 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= 2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x) - (2x^2 - 3x) = \\ &= 2(x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2) - 3x - 3 \cdot \Delta x - 2x^2 + 3x = 4x \cdot \Delta x - 3\Delta x + 2(\Delta x)^2. \end{aligned}$$

Переходячи до границі при $\Delta x \rightarrow 0$, одержимо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4x \cdot \Delta x - 3 \cdot \Delta x + 2(\Delta x)^2) = 4x \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Таким чином, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, це означає, що функція $y = 2x^2 - 3x$ неперервна при будь-якому значенні x .

Розв'язання типових прикладів

1. Знайти односторонні границі функції $y = f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ при $x \rightarrow 1$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1-0)}} = e^{+\frac{1}{0}} = e^{+\infty} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = e^{\frac{1}{1-(1+0)}} = e^{\frac{1}{1-1-0}} = e^{-\frac{1}{0}} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Отже, $f(1+0) = 0$; $f(1-0) = +\infty$.

1. Дослідити неперервність функції

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x + 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Задана неелементарна функція є неперервною в інтервалах $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$, тому що є елементарною у кожному з них. Вона може бути розривною лише в точці $x = 0$, в якій змінюється її аналітичний вираз. Перевіримо умови неперервності функції у цій точці. Використовуючи означення, одержуємо

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= \frac{x^2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} (x+1) = 1 \end{aligned} \right\} \text{ задана функція в точці } x=0 \text{ має розрив першого} \\ \text{роду}$$

Стрибок дорівнює $f(+0) - f(-0) = 1 - 0 = 1$.

Побудуємо графік функції. На інтервалі $(-\infty; 0]$ її графіком буде парабола, на інтервалі $(0; \infty)$ – пряма $y = x + 1$ (рис.4.1).

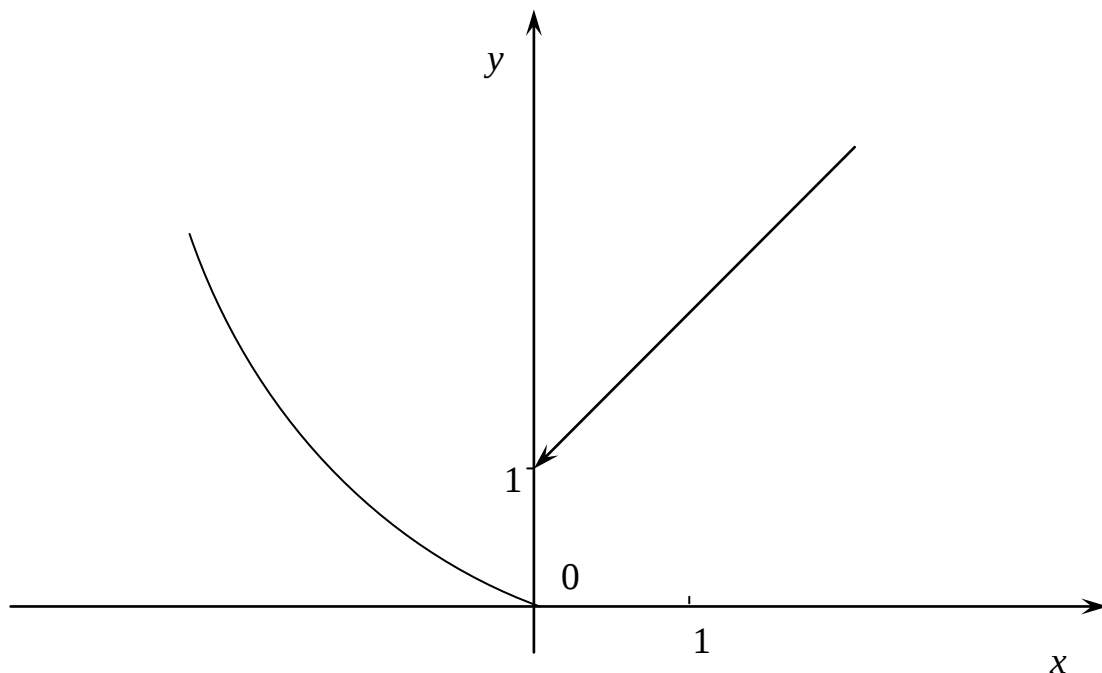


Рис. 4.1

3. Знайти точки розриву функції $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ і дослідити характер розриву.

Розв'язання. Відомо, що частка від ділення двох неперервних функцій є функція неперервна в усіх точках, де знаменник не дорівнює нулю. Через те, що $x^2 - 4 = 0$ при $x = \pm 2$, задана функція має дві точки розриву: $x_1 = 2$ і $x_2 = -2$. Обчислимо односторонні границі:

$$\lim_{x \rightarrow -2+0} y = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2+0}{(-2+0-2)(-2+0+2)} = \frac{-2}{-0} = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} y = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{-2-0}{(-2-0-2)(-2-0+2)} = \frac{-2}{+0} = -\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} y = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2+0}{(2+0-2)(2+0+2)} = \frac{2}{+0} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{(x-2)(x+2)} = \frac{2-0}{(2-0-2)(2-0+2)} = \frac{2}{-0} = -\infty.$$

Таким чином, в точках $x = -2$ і $x = 2$ функція має нескінченний розрив другого роду. Зазначимо, що функція $y = \frac{x}{x^2 - 4}$ непарна, а тому $(0;0)$ є точка асиметрії її графіка (рис. 4.2).

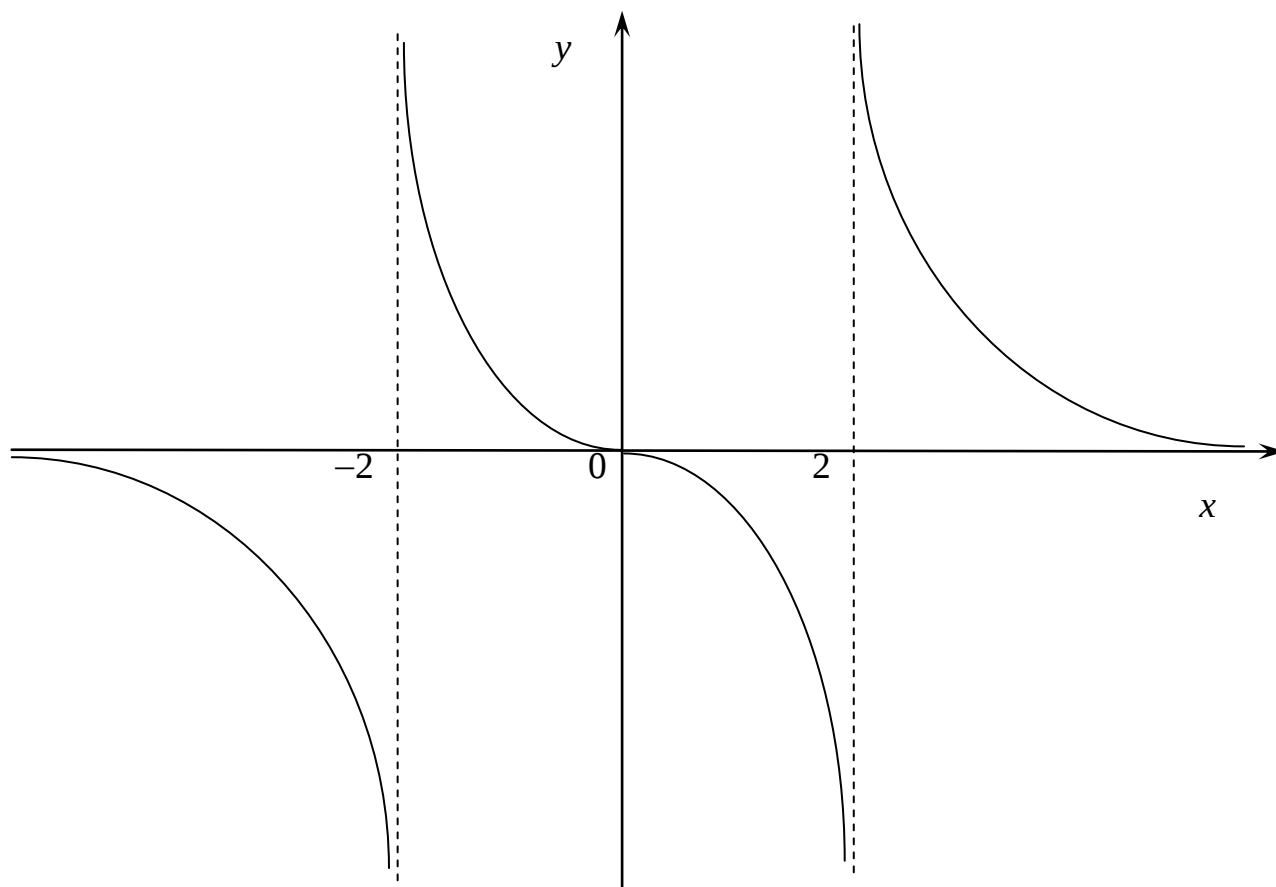


Рис. 4.2

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на неперервність і побудувати ескіз графіка функції.

$$1. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 2x + 3}.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2 - 2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x - 2, & 1 < x < 2. \end{cases}$$

$$5. f(x) = 9^{\frac{1}{2-x}}.$$

4.3. ПОХІДНА І ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

Похідною від функції $y = f(x)$ по незалежній змінній x називається границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx , коли останній прямує до нуля.

Для позначення похідної функції $y = f(x)$ в точці використовують символи y' або $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$ і $\frac{df(x)}{dx}$.

$$\text{Отже } y'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрично похідна $y' = f'(x)$ являє собою тангенс кута нахилу дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці (x, y) .

Рівняння дотичної T до кривої $y = f(x)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 4.3)

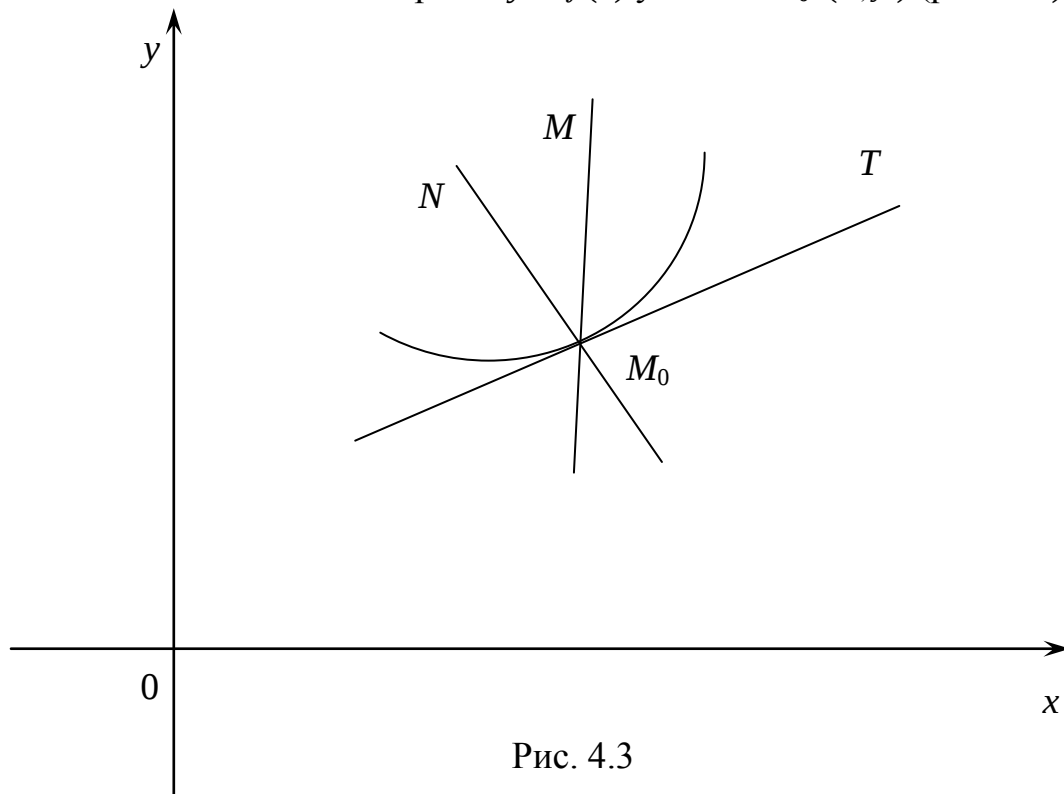


Рис. 4.3

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

а рівняння нормалі у точці $M_0(x_0, y_0)$

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0).$$

В економіці, аналізуючи різні залежності, використовують особливий показник – еластичність.

Еластичністю функції $y = f(x)$ по незалежній змінній x називається границя відношення відносного приросту δy до приросту δx , коли $\delta x \rightarrow 0$.

$$\exists x \quad f' = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\delta y}{\delta x}, \quad \text{де } \delta x = \frac{\Delta x}{x}, \delta y = \frac{\Delta y}{y}.$$

Еластичність показує, на скільки % збільшується значення функції, якщо аргумент x збільшився на 1%

Правила та таблиця відшукування похідних функцій:

1. $c' = 0$;

2. $x' = 1$;

3. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4. $(uv)' = u'v + uv'$; $(cu)' = cu'$,

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$; $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$; $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$;

6. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u'$; $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$; $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$;

7. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$; $(e^u)' = e^u \cdot u'$;

8. $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$; $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;

9. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;

10. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;

11. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

12. $(\operatorname{ctg} u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$;

13. $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

14. $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;

15. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}$;

16. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{u'}{1+u^2}$.

У наведених формулах $u = u(x)$ та $v = v(x)$, а c – стала. Для того, щоб скористатись потрібною формулою, необхідно навчатись визначати найменування складної функції та її проміжний аргумент.

Приклад. Відшукати похідну функції $y = (\sin x + 1)^3$.

Розв'язання. Маємо степеневу функцію з показником 3 і основою $(\sin x + 1)$. Використовуємо правило знаходження похідної складної степеневі функції, потім суми двох функцій $\sin x + 1$:

$$y' = 3(\sin x + 1)^2 \cdot (\sin x + 1)' = 3(\sin x + 1)^2 \cdot \cos x.$$

Якщо функція $y = f(x)$ задана неявно $F(x, y) = 0$, то для відшукування похідних y_x' треба зробити наступне:

- 1) продиференціювати обидві частини цієї рівності по x , пам'ятаючи, що y є функцією від x ;
- 2) розв'язати отримане рівняння відносно y' .

Приклад. Знайти похідну y_x' , якщо $\operatorname{tg} y = xy$.

Розв'язання. Диференціюємо обидві частини цієї рівності

$$\frac{y'}{\cos^2 y} = y + xy'.$$

Знаходимо y' :

$$y' = y \cos^2 y + xy' \cos^2 y; \quad y' (1 - x \cos^2 y) = y \cos^2 y;$$

$$y' = \frac{y \cos^2 y}{1 - x \cos^2 y}.$$

Часто відшукування похідної спрощується за допомогою логарифмічної похідної функції $y = f(x)$, що являє собою похідну від логарифма цієї функції, тобто

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$$

Приклад. Відшукати похідну степеневу-показникової функції.

$$y = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} x}.$$

Розв'язання. Логарифмуючи, отримаємо

$$\ln y = \operatorname{tg} x \cdot \ln(x^3 + 1).$$

Диференціюємо

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos^2 x} \ln(x^3 + 1) + \operatorname{tg} x \frac{3x^2}{x^3 + 1}.$$

Звідки знаходимо y' :

$$y' = (x^3 + 1)^{\operatorname{tg} x} \left(\frac{\ln(x^3 + 1)}{\cos^2 x} + \frac{3x^2 \operatorname{tg} x}{x^3 + 1} \right).$$

Похідну степенєво-показникової функції можна безпосередньо відшукати за формулою

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} u' + u^v \cdot v' \ln u.$$

Диференціал функції

Головна, лінійна відносно Δx , частина приросту Δy функції $y = f(x)$ називається *диференціалом* цієї функції і позначається символом dy або $df(x)$:

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \quad (4.1)$$

Якщо $f(x) = x$, то $dx = x' \cdot \Delta x = \Delta x$,
тому

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (4.2)$$

Означення. Функція $y = f(x)$ називається *диференційованою* в точці x , якщо вона має в цій точці диференціал.

Із формули (2) випливає, що

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Основні властивості диференціалів такі:

1. $dc = 0$, де $c = \text{const}$;
2. $d(cu) = cdu$;
3. $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4. $d(uv) = u dv + v du$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} (v \neq 0)$;
6. $df(u) = f'(u) du$.

Зауважимо, що властивість 6 виражає інваріантність форми диференціала $d(f(u)) = f'(u) du$ незалежно від того, чи змінна є незалежною, чи функцією іншої змінної.

Приклад. Знайти диференціал функції $y = \sqrt{1 + \ln x}$.

Розв'язання. За формулою $dy = y' dx$ матимемо

$$dy = \left(\sqrt{1 + \ln x}\right)' \cdot dx = \frac{1}{2x \cdot \sqrt{1 + \ln x}} \cdot dx$$

Для малих значень Δx , $\Delta y \approx dy$, звідки, враховуючи, що $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а

$dy = f'(x) \cdot \Delta x$, отримаємо формулу

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x,$$

яка використовується в наближених обчисленнях.

Приклад. Обчислити наближено $\sqrt[3]{1.02}$.

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Для цієї конкретної функції формула

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x$$

набуває вигляду

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cdot \Delta x.$$

Поклавши в отриманій формулі $x = 1$, $\Delta x = 0,02$, маємо

$$\sqrt[3]{1,02} \approx \sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}} \cdot 0,02 = 1 + \frac{0,02}{3} \approx 1,0067.$$

Розв'язання типових прикладів

Знайти похідну від функції:

$$\text{а) } y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^3}}; \quad \text{б) } y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. а) Безпосередньо диференціювання даної функції призводить до громіздких обчислень / перевірити /. Тому для знаходження похідної від цієї функції використаємо логарифмічне диференціювання. Прологарифмувавши цю функцію, отримаємо

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) - \frac{3}{2} \ln(x+3).$$

Знаходимо похідну від лівої та правої частини рівності

$$(\ln y)'_x = \left(\frac{1}{2} \ln(x-1) \right)' - \left(\frac{2}{3} \ln(x+2) \right)' - \left(\frac{3}{2} \ln(x+3) \right)',$$

або

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x+2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x+3},$$

Звідки знаходимо y'

$$y' = y \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \right).$$

Замінивши у його виразом, будемо мати

$$y' = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^3}} \cdot \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \right).$$

б) Для знаходження похідної від функції $y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}$ використаємо формулу

$$(u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot v' \ln u.$$

Поклавши

$$u(x) = x^2 + 1, v(x) = \sqrt{x},$$

Знайдемо

$$[(x^2 + 1)^{\sqrt{x}}] = \sqrt{x}(x^2 + 1)^{\sqrt{x}-1} \cdot (x^2 + 1)' + (\sqrt{x}^2 + 1)^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x})' \cdot \ln(x^2 + 1) =$$

$$= (x^2 + 1)^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{2x\sqrt{x}}{x^2 + 1} + \frac{\ln(x^2 + 1)}{2\sqrt{x}} \right).$$

3. Знайти y'_x , $y^3 + 3y = x$.

Розв'язання. Функція $y(x)$ задана неявно. Продиференціюємо по x обидві частини рівняння. Отримаємо

$$1 = 3y^2 \cdot y' + 3y'.$$

$$\text{Звідки } 3y'(y^2 + 1) = 1 \Rightarrow y'_x = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

4. Скласти рівняння дотичної і нормалі до кривої

$$x^2 + 2xy^2 + 3y^4 - 6 = 0 \text{ в точці } M(1; -1).$$

Розв'язання. Дане рівняння визначає функцію $y(x)$ неявно. Диференціюємо це рівняння по x

$$2x + 2y^2 + 4xy \cdot y'_x + 12y^3 \cdot y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = -\frac{x + y^2}{2xy + 6y^3}.$$

Знайдемо значення похідної y'_x в точці $M(1; -1)$

$$y'_{m(1;-1)} = \frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 1 \cdot (-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}.$$

Отже, дотична до даної кривої в точці $M(1; -1)$ має рівняння

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \quad \text{або} \quad x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі у цій точці є

$$y + 1 = -4(x - 1) \quad \text{або} \quad 4x + y - 3 = 0.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти похідні і диференціал функції.

1.a) $y = \left(\frac{1}{2}x^7 + 16\sqrt[7]{x^2} - 5 \right)^3$;

в) $y = \arcsin \sqrt{1 - x^3}$;

2.a) $y = \operatorname{arctg} \sqrt{3x - 1}$;

б) $y = \ln \sqrt[6]{\left(\frac{2x - 3}{x^7 + 1} \right)^5}$;

г) $y = \operatorname{ctg}^3 2x + e^{-\cos x}$.

б) $y = \ln \sqrt{\left(\frac{2x - 5}{x^4 + x^2} \right)^3}$;

$$\begin{array}{ll}
\text{в)} y = \arcsin 2x + \sqrt{1-3x^2}; & \text{г)} y = 2^{\lg 3x} - \sqrt{x} \cdot \sin^3 x. \\
3. \text{а)} y = (5x^3 + 10x^2 \sqrt[3]{x^2 + 10}); & \text{б)} y = \ln \sqrt[5]{\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 1}}; \\
\text{в)} y = \sqrt{4-x^2} - \arcsin \frac{x}{2}; & \text{г)} y = \ln \operatorname{tg} x + e^{3 \cos x}. \\
4. \text{а)} y = \left(\frac{x}{1-4x} \right)^3; & \text{б)} y = \ln \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}; \\
\text{в)} y = \arccos 2x - \sqrt{1-4x^2}; & \text{г)} y = 5^{\sin 2x} + 3 \operatorname{ctg}^2 x. \\
5. \text{а)} y = \left(\frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{x \sqrt{x}} + 5 \right)^3; & \text{б)} y = \ln \sqrt[7]{\left(\frac{x^6 - 2}{4x + 3} \right)^2}; \\
\text{в)} y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; & \text{г)} y = 2^{\cos 3x} + \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg} 3x.
\end{array}$$

Відповіді:

$$\begin{array}{l}
1. \text{ а)} y' = 3 \left(\frac{1}{2} x^7 + 16 \sqrt[7]{x^2} - 5 \right)^2 \left(3 \frac{1}{2} x^6 + 4 \frac{4}{7 \sqrt[7]{x^5}} \right); \quad \text{б)} y' = \frac{5(-12x^7 + 21x^6 + 2)}{6(2x-3)(x^7+1)}; \\
3. \text{ в)} y' = -\frac{x+1}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{г)} y' = \frac{2}{\sin 2x} - 3 \sin x e^{3 \cos x}, \quad dy = \left(\frac{2}{\sin 2x} - 3 \sin x e^{3 \cos x} \right) dx.
\end{array}$$

4.4. ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ ПОХІДНИХ

- Нехай функція $f(x)$ диференційована на відрізку $[a; b]$. Якщо
 - $f(x)$ – зростає на $[a; b]$, то $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$;
 - $f(x)$ – спадає на $[a; b]$, то $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a; b]$.
- Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$ і диференційована в кожній його внутрішній точці. Якщо
 - $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ зростає на $[a; b]$;
 - $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$, то $f(x)$ спадає на $[a; b]$.

Таким чином, інтервали знакосталості похідної $f'(x)$ є інтервалами монотонності цієї функції.

Точка x_0 називається *точкою максимуму* функції $f(x)$, якщо $f(x_0) \geq f(x)$ для всіх x із деякого досить малого околу точки x_0 .

Точка x_1 називається *точкою мінімуму* функції $f(x)$, якщо $f(x_1) \leq f(x)$

для всіх x із деякого досить малого околу точки x_1 .

Точки мінімуму і максимуму називаються *точками екстремуму*.

Необхідна умова існування екстремуму.

Якщо точка x є екстремальною точкою диференційованої функції $f(x)$, то
 $f'(x) = 0$.

Точки, в яких похідна перетворюється в нуль або не існує, називаються *критичними*.

Достатні умови існування екстремуму функції.

Нехай функція $f(x)$ неперервна в деякому інтервалі, що містить критичну точку x_1 і диференційована в усіх точках цього інтервалу (крім, можливо, самої точки x_1). Якщо

а) $\left. \begin{array}{l} f'(x) > 0 \quad \text{при } x < x_1, \\ f'(x) < 0 \quad \text{при } x > x_1 \end{array} \right\}$, то x_1 – точка максимуму функції $f(x)$,

б) $\left. \begin{array}{l} f'(x) < 0 \quad \text{при } x < x_1, \\ f'(x) > 0 \quad \text{при } x > x_1 \end{array} \right\}$, то x_1 – точка мінімуму функції $f(x)$.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Функція існує на нескінченному проміжку $(-\infty; \infty)$. У точці $O(0; 0)$ крива перетинає осі координат, асиметрична відносно початку координат. Знаходимо першу похідну і прирівнюємо її до нуля

$$y' = \frac{1 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0.$$

Корені похідної $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ розбили нескінченний проміжок на три: $(-\infty; -1)$; $(-1; 1)$; $(1; \infty)$. Підставляючи конкретне значення аргументу x з кожного інтервалу в похідну, дістаємо її знак на даному інтервалі.

Результати зводимо в табл. 1.

Таблиця 1

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; \infty)$
$f'(x)$	–	0	+	0	–
$f(x)$	Спадає	$\min$	Зростає	$\max$	Спадає

$\swarrow$ $-1/2$ $\nearrow$ $1/2$ $\searrow$

Отже, на інтервалах $(-\infty; -1)$ та $(1; \infty)$ – функція спадає, а на проміжку $(-1; 1)$ – зростає. Точка $x_1 = -1$ – це точка мінімуму, а точка максимуму – $x_2 = 1$. Значення функції в цих точках:

$$y(-1) = -\frac{1}{2}; \quad y(1) = \frac{1}{2}.$$

Опуклість, угнутість і точки перетину кривої можна знайти за допомогою другої похідної, а саме:

1) Крива $y=f(x)$ називається *опуклою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі ці точки лежать під довільною дотичною до кривої на цьому інтервалі.

2) Крива $y=f(x)$ називається *угнутою* на інтервалі $(a; b)$, якщо всі точки лежать над довільною дотичною до кривої на цьому інтервалі.

Якщо на інтервалі $(a; b)$ друга похідна $f''(x) < 0$, то крива $y=f(x)$ опукла на цьому проміжку; якщо ж $f''(x) > 0$, то крива угнута на цьому проміжку.

Точкою перегину кривої $y=f(x)$ називають точку, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від угнутої чи навпаки.

Якщо в точці x_0 друга похідна $f''(x)=0$ або не існує і при переході через цю точку $f''(x)$ змінює знак, то точка x_0 є точкою перегину.

Приклад. Дослідити на опуклість та угнутість і знайти точки перегину функції

$$y = \frac{x}{1+x^2}.$$

Розв'язання. Прирівняємо до нуля другу похідну функції і знаходимо абсциси точок перегину:

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 3)}{(1+x^2)^3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\sqrt{3}; x_3 = \sqrt{3}.$$

Розглянемо знаки другої похідної у проміжках, на які розбивають проміжок $(-\infty; \infty)$ точки перегину (таблиця 2).

Таблиця 2

X	$(-\infty; -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}; 0)$	0	$(0; \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}; \infty)$
$f''(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	опукла	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	угнута	0	опукла	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	угнута
	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

Графік функції опуклий на проміжку $(-\infty; -\sqrt{3})$ і $(0; \sqrt{3})$; і угнутий на проміжках $(-\sqrt{3}; 0)$ та $(\sqrt{3}; \infty)$

Визначимо значення функції в точках перегину:

$$y(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad y(0) = 0; \quad y(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Щоб визначити поведінку кривої при нескінченному зростанні абсциси або ординати точок кривої, вводять асимптоти.

Асимптота – це пряма, відстань від якої до змінної точки прямої при віддаленні точки на нескінченність прямує до нуля. Вертикальні асимптоти – це точки розриву функції, якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, то пряма $x = a$ є асимптота.

Похилена асимптота має рівняння $y = kx + b$, де

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx]$$

Приклад. Знайти асимптоти графіка функції $y = \frac{x}{1+x^2}$

Розв'язання. Функція $y = \frac{x}{1+x^2}$ не має точок розриву, тому й вертикальних асимптот вона не має. Відшукаємо похилені асимптоти, знайдемо границі.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1+x^2)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\infty} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{1+x^2} - 0 \cdot x \right] = 0,$$

тобто $y = 0$ – горизонтальна асимптота графіка функції.

Щоб обчислити поведінку функції $y = f(x)$ і побудувати її схематичний графік, треба

- 1) визначити область існування функції, встановити точки розриву та інтервали неперервності;
- 2) дослідити функцію на парність чи непарність, на періодичність;
- 3) знайти точки екстремумів функції, інтервали монотонності;
- 4) знайти інтервали опуклості і угнутості графіка, точки перетину;
- 5) знайти асимптоти графіка функції;
- 6) знайти точки перетину графіка з осями координат;
- 7) побудувати графік функції

Об'єднавши результати прикладів, схематично накреслимо графік функції $y = \frac{x}{1+x^2}$ (рис.4.4).

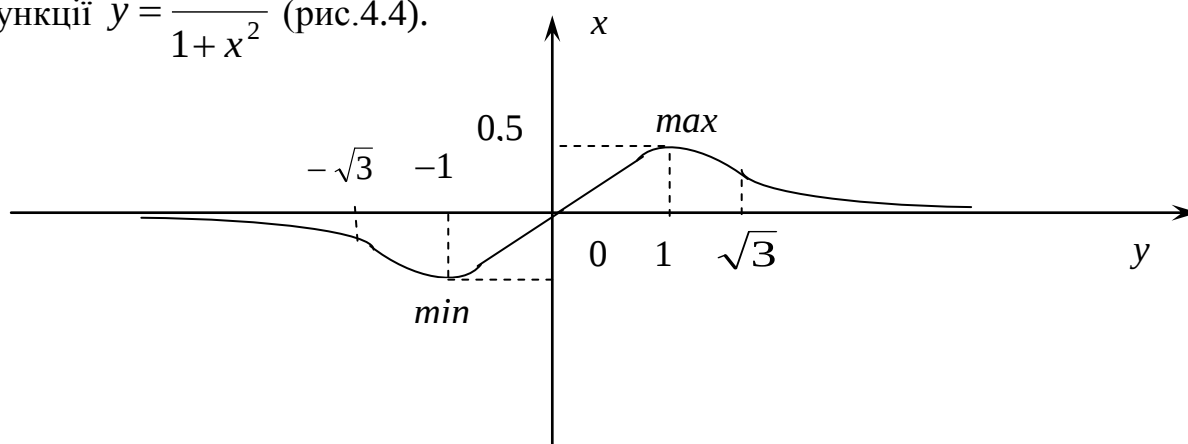


Рис. 4.4

Розв'язання типових прикладів

1. Дослідити функцію $y = e^{\frac{1}{x}}$ і побудувати графік.

Розв'язання. 1. Область існування $D = (-\infty; 0); (0; \infty)$, $x = 0$ – точка розриву функції.

2. Функція ні парна, ні непарна, тому що $y(-x) \neq y(x)$, $y(-x) \neq -y(x)$.

Вона не періодична і не перетинає осі ox , оскільки $e^{\frac{1}{x}} \neq 0$. Точка $x = 0$ не належить до області існування функції. Тому графік функції не перетинає вісь Oy . При довільному $x \neq 0$, $y(x) > 0$. Отже функція приймає тільки додатні значення.

3. Знайдемо критичні точки функції

$$y' = -e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \rightarrow y' \neq 0 \Rightarrow \text{критичних точок немає. Похідна } y' < 0, \forall x \in D.$$

Тому функція спадає на інтервалі $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

3. Знайдемо другу похідну

$$y'' = \left(\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \right)' = \frac{e^{\frac{1}{x}} \cdot (1 + 2x)}{x^4}.$$

Розв'яжемо рівняння $y''=0$. Матимемо:

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} (1 + 2x)}{x^4} = 0 \Rightarrow 1 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2},$$

Заповнимо табл. 3

Таблиця 3

X	$(-\infty; -1/2)$	$x = -1/2$	$(-1/2; 0)$	$(0; \infty)$
$y''(x)$	-	0 точка перегину	+	+
$y(x)$	$\cap$	$y = e^{-2}$	$\cup$	$\cap$

4. Знайдемо асимптоту графіка функції. Вертикальні асимптоти

$$\lim_{x \rightarrow -0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{-1}{\mp 0}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{+0}} = e^{+\infty} = +\infty$$

Отже, пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою.

Похилені асимптоти:

$$y = kx + b,$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Отже, пряма $y = 1$ – горизонтальна асимптота графіка.

5. Будуємо графік функції (рис.4.5).

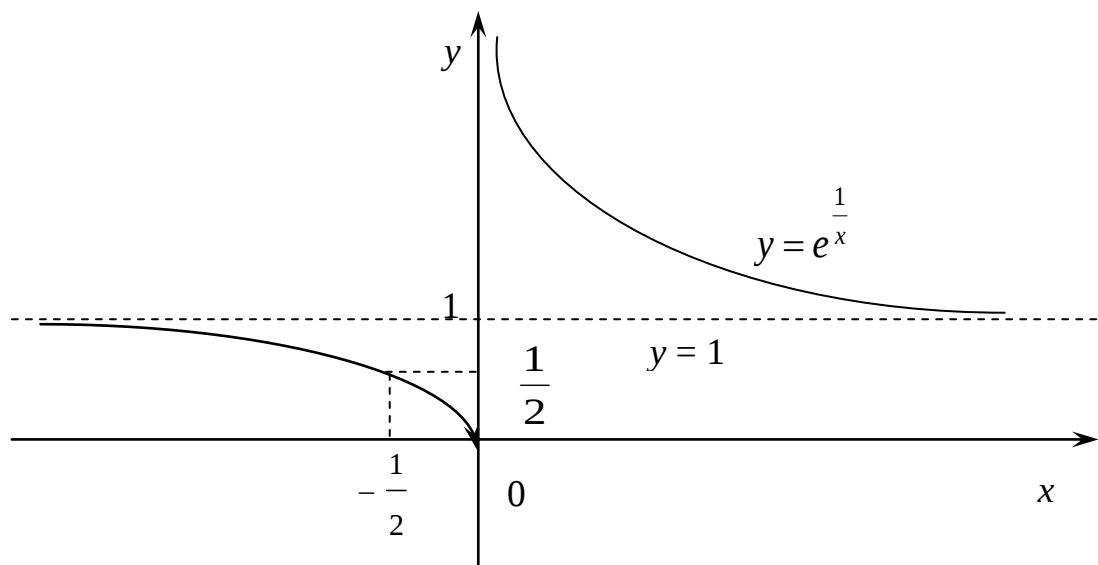


Рис. 4.5

Завдання для самостійної роботи

Дослідити функцію та побудувати графік.

$$1. y = x^3 - 3x^2 + 3, \quad 2. y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2, \quad 3. y = \frac{9}{2}x - \frac{x^3}{6},$$

$$4. y = 1 - x^2 + \frac{x^4}{8}, \quad 5. y = x^5 - \frac{5}{3}x^3, \quad 6.$$

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 16.$$

4.5. ВИЗНАЧЕННЯ ТА СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Поняття функції однієї змінної розповсюджується на випадок багатьох змінних.

Функція z називається *функцією двох незалежних змінних* x і y в області D , якщо кожній парі значень змінних x, y відповідає певне значення величини z і позначається $z = f(x; y)$.

Множина D називається *областю визначення* функції z . Змінні x, y називаються *аргументами* функції z .

Область визначення функції $z = f(x; y)$ може бути подана деякою множиною точок $(x; y)$ площини xOy . Сама функція $z = f(x; y)$ може бути зображається в просторі $xOyz$ у вигляді поверхні і є рівнянням цієї поверхні. Певне уявлення про такі поверхні дають лінії рівня.

Лінія рівня – це множина точок $(x; y)$ площини xOy , в яких функція набуває одного й того ж значення, тобто $f(x; y) = c$, c – довільна стала.

Приклад. Знайти лінії рівня функції $z = \frac{y}{x}$. Лінії рівня даної функції визначаються рівнянням $\frac{y}{x} = c$ або $y = c \cdot x$, де c – довільна стала. Вони являють собою множину всіх можливих прямих, окрім вісі ординат, що проходять через початок координат і не містять його.

4.6. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Число A називається *границею* функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y)$, координати яких задовільняють нерівність

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

виконується нерівність $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

За допомогою символів:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Якщо A – границя функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, то це записується таким чином

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

4.5. ВИЗНАЧЕННЯ ТА СПОСОБИ ЗАВДАННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Поняття функції однієї змінної розповсюджується на випадок багатьох змінних.

Функція z називається *функцією двох незалежних змінних* x і y в області D , якщо кожній парі значень змінних x, y відповідає певне значення величини z і позначається $z = f(x; y)$.

Множина D називається *областю визначення* функції z . Змінні x, y називаються *аргументами* функції z .

Область визначення функції $z = f(x; y)$ може бути подана деякою множиною точок $(x; y)$ площини xOy . Сама функція $z = f(x; y)$ може бути зображається в просторі $xOyz$ у вигляді поверхні і є рівнянням цієї поверхні. Певне уявлення про такі поверхні дають лінії рівня.

Лінія рівня – це множина точок $(x; y)$ площини xOy , в яких функція набуває одного й того ж значення, тобто $f(x; y) = c$, c – довільна стала.

Приклад. Знайти лінії рівня функції $z = \frac{y}{x}$. Лінії рівня даної функції визначаються рівнянням $\frac{y}{x} = c$ або $y = c \cdot x$, де c – довільна стала. Вони являють собою множину всіх можливих прямих, окрім вісі ординат, що проходять через початок координат і не містять його.

4.6. ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Число A називається *границею* функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти $\delta > 0$ таке, що для всіх точок $M(x, y)$, координати яких задовільняють нерівність

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

виконується нерівність $|f(x; y) - A| < \varepsilon$.

За допомогою символів:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta, \\ |f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

Якщо A – границя функції $z = f(x; y)$ у точці $M_0(x_0, y_0)$, то це записується таким чином

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A.$$

Приклад. Знайти $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y}$.

Розв'язання. У точці $M_0(2;0)$ функція $z = \frac{\sin(xy)}{y}$ не визначена.

Помноживши і поділивши дану функцію на $x \neq 0$, матимемо

$$\frac{\sin(xy)}{y} = \frac{x \cdot \sin(xy)}{xy} = x \frac{\sin(xy)}{xy}.$$

Переходячи до границі, одержимо

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \left(x \cdot \frac{\sin(xy)}{xy} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} x \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2 \cdot 1 = 2,$$

$$\text{бо } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Функція $z = f(x; y)$ називається *неперервною у точці* $M_0(x_0; y_0)$, якщо границя функції в ній існує і дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0).$$

Умову неперервності функції $z = f(x, y)$ можна виразити в термінах приростів $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, де Δz – повний приріст функції $z = f(x; y)$ у точці

$M(x; y)$, який визначається формулою

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x; y),$$

а її частинні прирости відповідно по x і y записуються так

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x; y);$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x; y).$$

Функція, неперервна в кожній точці деякої області, називається *неперервною в цій області*. Точки, в яких порушується умова неперервності функції, називаються її *точками розриву*.

Приклад. Довести, що функція $z = x^2 - y^2$ неперервна у будь-якій точці (x_0, y_0) .

Розв'язання. Дана функція визначається в усіх точках площини xOy . Її повний приріст у точці (x_0, y_0) має вигляд

$$\Delta z = [(x_0 + \Delta x)^2 - (y_0 + \Delta y)^2] - (x_0^2 - y_0^2) = 2x_0\Delta x - 2y_0\Delta y + (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2.$$

Переходячи до границі, коли $\Delta x \rightarrow 0$ і $\Delta y \rightarrow 0$, дістанемо $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$ і, отже, дана функція неперервна у будь-якій точці (x_0, y_0) .

4.7. ЧАСТИННІ ПОХІДНІ.

ПОВНИЙ ПРИРІСТ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Частинною похідною функції багатьох змінних по одній із змінних називається границя відношення відповідного частинного приросту функції до приросту цієї змінної, якщо приріст змінної прямує до нуля.

Для функції $z = f(x; y)$ частинні похідні по x і y визначаються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x; y)}{\Delta x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}.$$

При обчисленні частинних похідних функції двох змінних можна користуватися вже відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому іншу змінну сталою.

Приклад. Знайти частинні похідні першого порядку функції

$$z = x^4 - 2x^2y^2 + y^4.$$

Розв'язання. Припускаючи, що y стала, знаходимо

$$z'_x = 4x^3 - 4y^2x = 4x(x^2 - y^2).$$

Припускаючи, що x стала, знаходимо $z'_y = -4x^2y + 4y^3 = 4y(-x^2 + y^2)$.

Частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = f(x; y)$ є деякими функціями x, y і

можуть мати частинні похідні по кожній із змінних, які називаються частинними похідними вищих порядків. Частинні похідні другого порядку функції $z = f(x; y)$ позначаються

$$f''_{xx}(x; y) = (z'_x)'_x; \quad f''_{xy}(x; y) = (z'_x)'_y,$$

$$f''_{yy}(x; y) = (z'_y)'_y; \quad f''_{yx}(x; y) = (z'_y)'_x.$$

Зазначимо, якщо похідні f''_{xy} і f''_{yx} неперервні у даній точці, то вони рівні між собою $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку функції

$$z = xy + \frac{x}{y}.$$

Розв'язання. Маємо послідовно

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

Як бачимо, $f''_{xy}(x; y) = f''_{yx}(x; y)$.

Повний диференціал першого порядку та його застосування у наближених обчисленнях

Повний приріст функції $z = f(x; y)$ в точці $M_0(x; y)$ дорівнює

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y),$$

де $\Delta x, \Delta y$ - довільні прирости аргументів функції.

Якщо функція $z = f(x; y)$ має в точці $M(x; y)$ неперервні частинні похідні, то її повний приріст можна подати у вигляді

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y + \varepsilon \rho,$$

де $\varepsilon \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \rightarrow 0$.

Вираз $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ є головною частиною повного приросту

функції, яка є лінійною відносно приростів аргументів Δx і Δy . Її називають повним диференціалом функції і позначають dz . Отже,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \quad \text{де } \Delta x = dx, \Delta y = dy.$$

Оскільки $\frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z$ і $\frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z$, то $dz = d_x z + d_y z$, тобто повний диференціал функції двох незалежних змінних дорівнює сумі її частинних диференціалів.

При досить малих Δx і Δy , $\Delta z \approx dz$, одержуємо наближену формулу $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$.

Приклад. Знайти повний диференціал функції

$$z = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4.$$

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні

$$z'_x = (xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4)'_x = y^3 - 6xy^2, \\ z'_y = (xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4)'_y = 3xy^2 - 6x^2y + 8y^3.$$

Підставляючи в формулу $dz = z'_x dx + z'_y dy$, маємо

$$dz = (y^3 - 6xy^2)dx + (3xy^2 - 6x^2y + 8y^3)dy.$$

Приклад. Обчислити наближено $0,97^{1,04}$

Розв'язання. Розглянемо функцію $f(x; y) = x^y$. Для обчислення шуканого значення покладемо $x_0 = 1, y_0 = 1, \Delta x = -0,03, \Delta y = 0,04$.

$$\text{Знайдемо } f'_x = yx^{y-1} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 1, f'_y = x^y \ln x \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} = 1^1 \ln 1 = 0.$$

$$\text{Отже, } 0,97^{1,04} \approx 1 + 1 \cdot (-0,03) + 0 \cdot 0,04 = 1 - 0,03 = 0,97.$$

4.8. ДИФЕРЕНЦІОВАННЯ СКЛАДЕНИХ ФУНКЦІЙ. ДОТИЧНА І НОРМАЛЬ ДО ПОВЕРХНІ

Нехай $z = f(x; y)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$ і функції $f(x; y)$, $x(t)$, $y(t)$ диференційовані. Тоді *похідна складеної функції* $z = f[x(t); y(t)]$ обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Якщо функція $z = f(x; y)$, де $y = y(x)$, то *повна похідна* обчислюється за формулою

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Приклад. Знайти повну похідну функції $z = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x-2y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x-2y} \cdot (-2) = -2e^{x-2y}$$

$$\text{і похідні } \frac{dx}{dt} = \cos t; \quad \frac{dy}{dt} = 3t^2.$$

Підставляючи в формулу, для $\frac{dy}{dt}$ матимемо

$$\frac{dz}{dt} = e^{x-2y} \cos t - 2e^{x-2y} \times 3t^2 = e^{x-2y} (\cos t - 6t^2) = e^{\sin t - 2t^3} (\cos t - 6t^2).$$

Якщо $z = f(x; y)$, а $x = x(u; v)$; $y = y(u; v)$ і функції $f(x; y)$, $x(u; v)$ та $y(u; v)$ диференційовані, то *частинні похідні* функції z мають такий вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Приклад. Знайти похідні функції $z = x^2 y - xy^2$, де $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.

Розв'язання. Знайдемо послідовно частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy - y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 2xy; \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \sin v,$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \cos v; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = u \cos v; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -u \sin v.$$

Підставляючи одержані вирази в формули, матимемо

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= (2xy - y^2)\cos v + (x^2 - 2xy)\sin v = (2u^2\cos v \sin v - u^2\sin^2 v)\cos v + \\ &+ (u^2\cos^2 v - 2u^2\cos v \sin v)\sin v = 3u^2\sin v \cos v (\cos v - \sin v); \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= -(2xy - y^2)u \sin v + (x^2 - 2xy)u \cos v = (u^2\sin^2 v - 2u^2\cos v \sin v)u \sin v + \\ &+ (u^2\cos^2 v - 2u^2\cos v \sin v)u \cos v = u^3\sin^3 v - 2u^3\cos v \sin^2 v + u^3\cos^3 v - 2u^3\cos^2 v \sin v \\ &= u^3(\sin^3 v + \cos^3 v) - 2u^3\cos v \sin v (\sin v + \cos v) = \\ &= u^3(\sin v + \cos v)(\sin^2 v - \sin v \cos v + \cos^2 v - 2\cos v \sin v) = \\ &= u^3(\sin v + \cos v)(1 - 3\cos v \sin v). \end{aligned}$$

Неявна функція двох змінних і її диференціювання

Якщо неявна диференційована функція $z = z(x; y)$ визначена рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то її частинні похідні знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні неявної функції, заданої рівнянням

$$x^2 y - y^2 z + zx = 0.$$

Розв'язання. Поклавши $F(x; y; z) = x^2 y - y^2 z + zx$ знаходимо

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy + z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 2yz; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = -y^2 + x.$$

Підставляючи у формули для $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-2xy - z}{-y^2 + x} = \frac{2xy}{y^2 - x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x^2 - 2yz}{-y^2 + x} = \frac{x^2 - 2yz}{y^2 - x}.$$

Дотична площина і нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні у точці M_0 називається площина, в якій лежать всі дотичні у точці M_0 до різних кривих, проведених на поверхні через цю точку.

Нормаллю до поверхні називається пряма, яка проходить через точку дотику M_0 і перпендикулярна до дотичної площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x; y; z) = 0$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ поверхні має вигляд

$$F'_x(x_0; y_0; z_0) \cdot (x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0) \cdot (y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

$$\text{Рівняння нормалі } \frac{x - x_0}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

Якщо ж рівняння поверхні задано у явній формі, тобто рівнянням $z = f(x; y)$, то рівняння дотичної площини у точці $M_0(x_0; y_0; z_0)$ має вигляд

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

і рівняння нормалі

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Приклад. Скласти рівняння дотичної площини і нормалі до еліптичного параболоїда $z = 2x^2 + y^2$ у точці $M_0(1; -1; 3)$.

Розв'язання. Рівняння дотичної площини будемо шукати у вигляді

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f'_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0),$$

$$\text{а рівняння нормалі } \frac{x - x_0}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

бо рівняння поверхні задано у явній формі, тобто рівнянням $z = f(x; y)$.

$$\text{Оскільки, } \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x; y) = (2x^2 + y^2)'_x = 4x + 0 = 4x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x; y) = (2x^2 + y^2)'_y = 0 + 2y,$$

то в точці $M_0(1; -1; 3)$ їх значення

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{M_0} = f'_x(1; -1) = 4 \cdot 1 = 4,$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{M_0} = f'_y(1; -1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Отже, шукане рівняння дотичної площини

$$z - 3 = 4(x - 1) - 2(y + 1),$$

або

$$4x - 2y - z + 1 = 0,$$

$$\text{а рівняння нормалі } \frac{x - 1}{4} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 3}{-1}.$$

4.9. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Функція $z = f(x; y)$ має у точці $M_0(x_0; y_0)$ області D максимум (мінімум), якщо існує такий окіл цієї точки, що для всіх точок $M(x; y)$ цього околу, відмінних від точки M_0 , виконується нерівність $f(M_0) > f(M)$ ($f(M_0) < f(M)$).

Максимуми і мінімуми функції називаються її *екстремумами*, а точки, в яких досягаються екстремуми – *точками екстремуму*.

Якщо диференційована функція $f(x; y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ екстремум, то в цій точці виконуються рівності

$$f'_x(x; y) = 0; \quad f'_y(x; y) = 0,$$

які є необхідними умовами екстремуму.

Точки, в яких перші частинні похідні дорівнюють нулю, називаються *стаціонарними*. Зазначемо достатні умови екстремуму.

Нехай точка $M_0(x_0; y_0)$ - стаціонарна точка функції $f(x; y)$. Позначимо

$$A = f''_{xx}(x_0; y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0; y_0),$$

$C = f''_{yy}(x_0; y_0)$ і покладемо $D = AC - B^2$. Тоді: а) якщо $D > 0$, то точка M_0 – точка екстремуму (при $A < 0$ - точка максимуму, при $A > 0$ – мінімуму);

б) якщо $D < 0$, то в точці M_0 екстремуму немає; в) якщо $D = 0$, функція $f(x; y)$ у стаціонарній точці екстремум може мати або ні.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію

$$f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні функції

$$f'_x = 3x^2 - 3y; \quad f'_y = 3y^2 - 3x$$

і знайдемо стаціонарні точки. Розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Знайдемо стаціонарні точки $M_1(0; 0)$ і $M_2(1; 1)$. Обчислимо частинні похідні другого порядку даної функції.

$$f''_{xx} = 6x; \quad f''_{xy} = -3; \quad f''_{yy} = 3y$$

і знайдемо їх значення в стаціонарних точках

$$A_1 = f''_{xx}(0; 0) = 0; \quad B_1 = f''_{xy}(0; 0) = -3; \quad C_1 = f''_{yy}(0; 0) = 0;$$

$$A_2 = f''_{xx}(1; 1) = 6; \quad B_2 = f''_{xy}(1; 1) = -3; \quad C_2 = f''_{yy}(1; 1) = 3.$$

Обчислимо $D_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = -9 < 0$, отже в точці $M_1(0; 0)$ екстремуму немає.

Далі, $D_2 = A_2 C_2 - B_2^2 = 27 > 0$ і $A_2 = 6 > 0$, а тому в точці $M_2(1; 1)$

дана функція має мінімум, причому $f(1; 1) = -1$.

4.10. СКАЛЯРНЕ ПОЛЕ. ПОХІДНА У ДАНОМУ НАПРЯМІ. ГРАДІЄНТ

Частина простору $xOyz$, кожній точці якого відповідає чисельне значення деякої функції $u = u(x, y, z)$, називається *скалярним полем*.

Нехай задана диференційована функція скалярного поля $u = u(x; y; z)$

Похідна скалярного поля $u(M)$ у напрямі l , заданому вектором

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}; |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

У випадку плоского скалярного поля $z = z(x, y)$ похідна у даному напрямі набуває вигляду

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$

Зазначимо, що коли похідна $\frac{\partial z}{\partial l} > 0$, то функція z у цьому напрямі зростає, якщо ж $\frac{\partial z}{\partial l} < 0$, то функція z у напрямі l спадає.

Приклад. Знайти похідну функції $z = x^3 - y^3$ у точці $M(1;1)$ у напрямі $\vec{l}$, який утворює з віссю Ox кут $\alpha = 60^\circ$.

Розв'язання. За формулою

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha.$$

Враховуючи, що $\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$; $\sin \alpha = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = (3x^2)|_M = 3; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = (-3y^2)|_M = -3,$$

дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3(1 - \sqrt{3})}{2}.$$

Градiєнтом у точці $M(x; y; z)$ скалярного поля, заданого диференційованою функцією $u = u(M) = u(x; y; z)$ називається вектор

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Якщо поле задано функцією $z = f(x; y)$, то

$$\text{grad}z = \frac{\partial z}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \bar{j}.$$

Модуль градієнта функції u обчислюється за формулою

$$|\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2},$$

а його напрям визначається косинусами кутів, утворених цим вектором з вісями координат

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{|\text{gradu}|}; \quad \cos \beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{|\text{gradu}|}; \quad \cos \gamma = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{|\text{gradu}|}.$$

Напрямок вектора gradu у кожній точці M збігається з напрямом нормалі до поверхні (лінії) рівня, яка проходить через цю точку. З усіх похідних функції $u(M)$, узятих по різних напрямом, найбільше значення завжди має похідна у напрямі градієнта функції

$$\frac{\partial u}{\partial l} = |\text{gradu}| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

Градiєнт є вектором швидкості найбільшого зростання функції.

Приклад. Знайти градієнт функції $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ у точці $M_0(2; -1; 1)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні функції $u(x; y; z)$ і їх значення у точці M_0 .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x|_{M_0} = 4; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y|_{M_0} = -4; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2z|_{M_0} = -2.$$

Отже, згідно з формулою

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}.$$

Маємо $\text{gradu}(M_0) = 4\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}$.

Розв'язування типових прикладів

1. Показати, що функція $z = y \ln(x^2 - y^2)$ задовільняє рівнянню

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

Розв'язання. Знаходимо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (y = \text{const}),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \ln(x^2 - y^2) + y \cdot \frac{1}{x^2 - y^2} \cdot (-2y) = \ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2}. \quad (x = \text{const}).$$

Підставляючи вирази частинних похідних у ліву частину рівняння

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \frac{2xy}{x^2 - y^2} + \frac{1}{y} \left(\ln(x^2 - y^2) - \frac{2y^2}{x^2 - y^2} \right) &= \frac{2y}{x^2 - y^2} + \frac{\ln(x^2 - y^2)}{y} - \\ &- \frac{2y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{y} \ln(x^2 - y^2) = \frac{z}{y^2}, \end{aligned}$$

одержали тотожність.

Отже, функція z задовільняє даному рівнянню.

2. Знайти і зобразити геометрично область визначення функції

$$z = \arcsin \frac{y-1}{x}$$

Розв'язання. Функція $z = \arcsin \frac{y-1}{x}$ визначена за умов

$$x < 0 \text{ і } -1 \leq \frac{y-1}{x} \leq 1,$$

що рівносильно розв'язкам двох систем

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1-x \leq y \leq 1+x, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 1-x \geq y \geq 1+x. \end{cases}$$

Зобразимо розв'язки кожної із систем графічно (рис.4.6).

Першій системі задовільняють точки, які розташовані в середині правого вертикального кута, утвореного прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, але без точки $(0;1)$, другій - точки, розташовані в середині лівого вертикального кута, утвореного цими самими прямими і також без точки $(0;1)$.

Отже, областю визначення даної функції є внутрішня частина правого і лівого вертикальних кутів, утворених прямими $y = 1 + x$ і $y = 1 - x$, включаючи ці прямі, але без точки їх перетину $(0;1)$, бо при $x = 0$ задана функція не визначена.

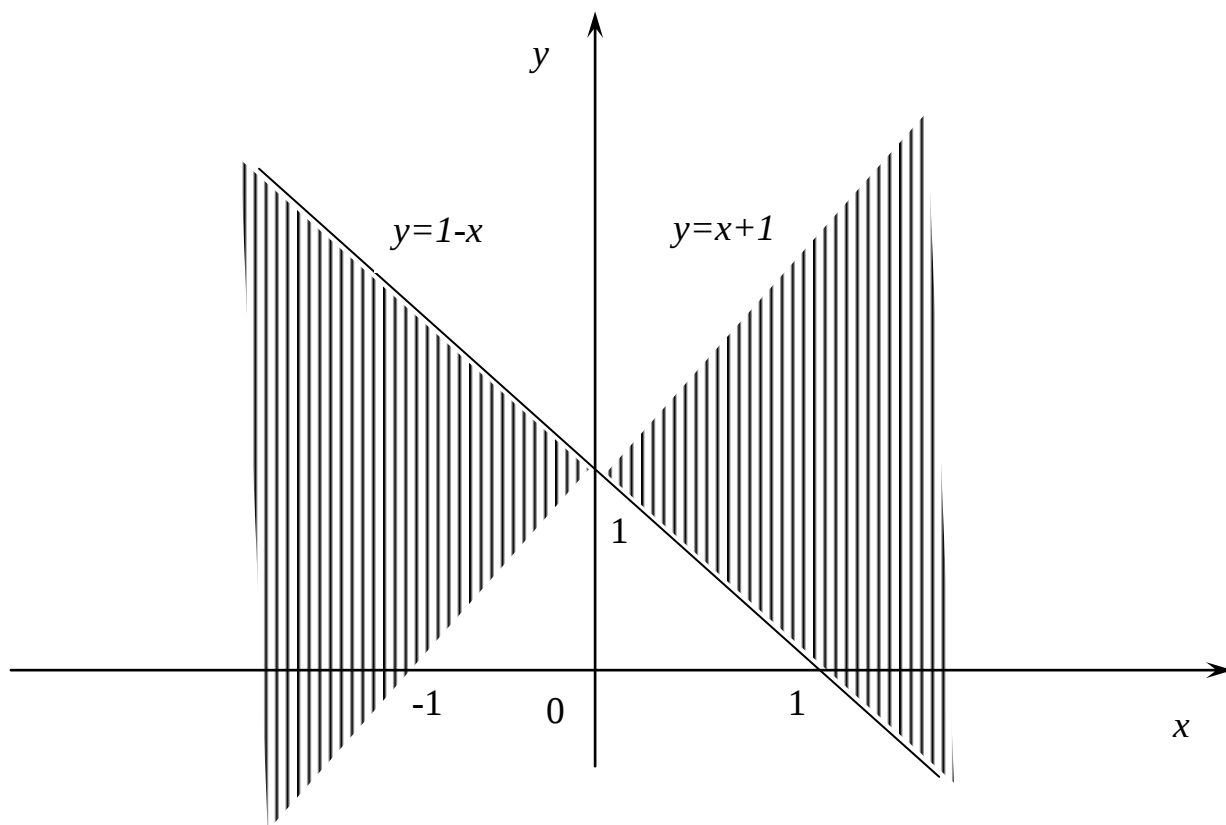


Рис.4.6

3. Знайти повний диференціал функції $z = x^2 \ln t$.

Розв'язання. Задана функція z залежить від двох змінних x і t , тому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial t} dt.$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 \ln t)'_x = 2x \ln t, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = (x^2 \ln t)'_t = x^2 \cdot \frac{1}{t}.$$

Шуканий диференціал

$$dz = 2x \ln t dx + \frac{x^2}{t} dt.$$

4. Обчислити наближено $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

Розв'язання. $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ є частинним значенням функції $f(x; y) = \ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ при $x = 1,03$ і $y = 0,98$. Для знаходження цього значення скористаємося формулою

$$f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx f(x_0; y_0) + f'_x(x_0; y_0) \cdot \Delta x + f'_y(x_0; y_0) \cdot \Delta y$$

Поклавши $x_0 = 1$; $y_0 = 1$, знаходимо

$$f(x_0; y_0) = f(1; 1) = \ln(\sqrt[3]{1} + \sqrt[4]{1} - 1) = 0,$$

$$\Delta x = x - x_0 = 1,03 - 1 = 0,03, \Delta y = y - y_0 = 0,98 - 1 = -0,02.$$

Знаходимо частинні похідні $f'_x(x; y)$ і $f'_y(x; y)$ в точці $(x_0; y_0)$.

$$f'_x(x; y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \bigg|_{\substack{x_0=1 \\ y_0=1}} = \frac{1}{3},$$

$$f'_y(x; y) = \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1} \cdot \frac{1}{4} y^{-\frac{3}{4}} \bigg|_{\substack{x_0=1 \\ y_0=1}} = \frac{1}{4}.$$

Отже,

$$\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1) \approx 0 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + \frac{1}{4} \cdot (-0,02) \approx 0,005.$$

5. Знайти екстремуми функції

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні першого порядку даної функції

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6.$$

У точках екстремуму функції всі її частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю (необхідні умови), тому

$$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + 2y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Звідки $x = 0; y = 3$. Отже, $M_0(0; 3)$ – стаціонарна точка.

Перевіримо, чи буде точка $M_0(0; 3)$ точкою екстремуму даної функції. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 = A; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 = B; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 = C.$$

Знайдемо $D = AC - B^2 = 4 - 1 = 3 > 0, A > 0$.

Отже, точка $M_0(0; 3)$ – точка мінімуму.

$$z_{\min} = Z(0; 3) = -9.$$

6. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці $M_1(1; 2; -1)$ у напрямі від M_1 до точки $M_2(2; 4; -3)$.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$\frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Знайдемо вектор $\overline{M_1 M_2}$: $\overline{M_1 M_2} = \{1; 2; -2\}$.

Напрямні косинуси $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; $\cos\beta = \frac{2}{3}$; $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Тепер знайдемо частинні похідні функції $u = x^2 - 2xz + y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x - 2z)\Big|_{M_1} = 4; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y\Big|_{M_1} = 4; \frac{\partial u}{\partial z} = (-2x)\Big|_{x=1} = -2.$$

Підставляючи у формулу знайдені значення частинних похідних і напрямних косинусів, одержимо шукану похідну

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = 4 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{2}{3} + (-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

7. Знайти градієнт функції $u = x^2 + 2y^2 - z^2 - 5$ у точці $M_0(2; -1; 1)$.

Розв'язання. За формулою $\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \bar{k}$.

Частинні похідні $\frac{\partial u}{\partial x}$; $\frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial z}$ у точці M_0 відповідно дорівнюють:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (2x)\Big|_{x=2} = 4; \frac{\partial u}{\partial y} = 4y\Big|_{y=-1} = -4; \frac{\partial u}{\partial z} = (-2z)\Big|_{z=1} = -2.$$

Отже, згідно з формулою

$$\text{gradu}(M_0) = 4\bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. а) Дана функція $z = \sin(x + ay)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

б) Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

2. а) Дана функція $z = \cos y + (y - x)\sin y$. Показати, що $(x - y) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}$;

б) Знайти екстремум функції $z = (x - 1)^2 - 2y^2$.

3. а) Дана функція $z = \ln \frac{x}{y}$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

б) Знайти екстремум функції $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

4. а) Дана функція $z = \text{arcctg}(x + 2y)$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$;

б) Знайти екстремум функції $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

5. а) Дана функція $z = \text{arctg} \frac{x}{y}$. Показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$;

б) Знайти екстремум функції $z = x^2 + (y - 1)^2$.

Відповіді: 1. б) мінімум $\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$. 3. б) мінімум $(1; 0)$.

РОЗДІЛ V. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

5.1. ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ, ВЛАСТИВОСТІ ТА ТАБЛИЦЯ ІНТЕГРАЛІВ

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на $(a; b)$, якщо для будь-якого x , яке належить інтервалу $(a; b)$ має місце формула

$$F'(x) = f(x).$$

Сукупність усіх первісних функцій $F(x) + C$ для функції $f(x)$ на деякому інтервалі називається невизначеним інтегралом від функції $f(x)$ і позначається

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

де C – будь-яка стала.

Відомо, що будь-яка неперервна на деякому інтервалі функція має на цьому інтервалі первісну.

Основні властивості невизначеного інтеграла:

1. $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$;
4. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, де $c = \text{const}$;

Таблиця інтегралів:

- | | |
|--|--|
| 1. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$; | 2. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$; |
| 3. $\int \sin u du = -\cos u + C$; | 4. $\int \cos u du = \sin u + C$; |
| 5. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$; | 6. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$; |
| 7. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$; | 8. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$; |
| 9. $\int e^u du = e^u + C$; | 10. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad \left(\begin{matrix} a > 0 \\ a \neq 1 \end{matrix} \right)$; |
| 11. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$; | |

$$12. \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C;$$

$$13. \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C; \quad 14. \int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C.$$

5.2. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Заміна змінної

Якщо $x = \varphi(t)$ – монотонна функція, яка має неперервну похідну $\varphi'(t)$, тоді

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

Функцію $x = \varphi(t)$ необхідно обирати таким чином, щоб після заміни змінної можна було спростити знаходження невизначеного інтеграла.

Наприклад:
$$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln^3 x}} = \left| \frac{\ln x = t}{\frac{dx}{x} = dt} \right| = \int \frac{dt}{t^{\frac{3}{5}}} = \frac{5}{2} t^{\frac{2}{5}} + C = \frac{5}{2} (\ln x)^{\frac{2}{5}} + C.$$

Інтегрування частинами

Нехай $u(x)$ і $v(x)$ мають неперервні похідні $u'(x)$ та $v'(x)$, тоді

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Розглянемо кілька типів підінтегральних виразів і способи визначення функцій u та v в методі інтегрування частинами:

а) $P_n(x) \cos tx \, dx$; $P_n(x) \sin tx \, dx$; $P_n(x) a^{tx} \, dx$;

де a, t – сталі. У цьому випадку позначають

$$u = P_n(x), \quad dv = \begin{cases} \cos tx \\ \sin tx \\ a^{tx} \end{cases} dx;$$

б) $P_n(x) \ln x \, dx$; $P_n(x) \arctg x \, dx$; $P_n(x) \arcsin x \, dx$; у цьому випадку

$$u = \begin{cases} \ln x \\ \arctg x \\ \arcsin x \end{cases} \quad dv = P_n(x) dx;$$

в) $e^{ax} \cos tx \, dx$; $e^{ax} \sin tx \, dx$.

У випадку в інтегрування частинами проводиться двічі до появи в правій частині інтеграла, що збігається із даним з точністю до довільної

сталой.

Наприклад

$$\int (1-x) \cos 5x dx = \left| \begin{array}{l} u = 1-x, \quad du = -dx \\ dv = \cos 5x dx, \quad v = \frac{\sin 5x}{5} \end{array} \right| = \frac{\sin 5x}{5} \cdot (1-x) +$$

$$+ \frac{1}{5} \int \sin 5x dx = \frac{1}{5} \sin 5x \cdot (1-x) - \frac{1}{25} \cos 5x + C;$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \left| \begin{array}{l} e^{2x} = u \quad du = 2e^{2x} dx \\ \cos x dx = dv \quad v = \sin x \end{array} \right| = e^{2x} \sin x - 2 \int \sin x e^{2x} dx =$$

$$= e^{2x} \sin x - 2(-e^{2x} \cdot \cos x + 2 \int \cos x \cdot e^{2x} dx) =$$

$$= e^{2x} \sin x + 2e^{2x} \cos x - 4 \int \cos x e^{2x} dx;$$

$$5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C;$$

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C.$$

5.3. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

При інтегруванні найпростіших раціональних дробів маємо:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \cdot \ln|x-a| + C;$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^n} = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C;$$

3.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} \right) + C.$$

Правильні раціональні дробу вигляду

$$\frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n} \quad (m < n)$$

можна розкласти на суму найпростіших дробів. Так дріб

$$\frac{x^2 + 7x + 8}{(x-3)(x+2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{Dx+F}{x^2+1}$$

Коефіцієнти A, B, C, D, F знаходимо згідно з методом невизначених коефіцієнтів.

Наприклад: Знайти $\int \frac{x^2 + 7x + 9}{(x-2)(x+1)^2} dx$.

$$\frac{x^2 + 7x + 9}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2},$$

$$x^2 + 7x + 9 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2),$$

$$x = -1 \quad \left| \begin{array}{l} 1 - 7 + 9 = C(-1-2), C = -1 \end{array} \right.$$

$$x = 2 \quad \left| \begin{array}{l} 4 + 14 + 9 = A(2+1)^2, A = 3 \end{array} \right.$$

$$x^2 \quad \left| \begin{array}{l} 1 = A + B \Rightarrow B = -2. \end{array} \right.$$

Дістанемо

$$\int \frac{x^2 + 4x + 9}{(x-2)(x+1)^2} dx = 3 \int \frac{dx}{x-2} - 2 \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = 3 \ln|x-2| -$$

$$- 2 \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C = \ln \left| \frac{(x-2)^3}{(x+1)^2} \right| + \frac{1}{x+1} + C.$$

Зауважимо, що неправильна раціональна дріб попередньо перетворюється в суму цілої частини і правильної раціональної дробі.

5.4. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Невизначені інтеграли від тригонометричних функцій можна привести до інтегралів від раціональних функцій за допомогою універсальної тригонометричної підстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Наприклад: Знайти

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \cos x}.$$

$$\int \frac{dx}{5+3\cos x} = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(5+3 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{5((1+t^2)+3(1-t)^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{8+2t^2} = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{2} + C.$$

Універсальна підстановка часто призводить до громіздких викладок.

Розглянемо окремі види підстановок, які ефективні для деяких підінтегральних функцій.

Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\sin x) \cos x dx$, то слід використати заміну $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$ інтеграл матиме вигляд $\int R(t) dt$.

Для знаходження інтегралу $\int R(\cos x) \sin x dx$ слід зробити заміну $\cos x = t$,
 $-\sin x dx = dt$.

Якщо інтеграл має вигляд $\int R(\operatorname{tg} x) dx$, то заміна

$$\operatorname{tg} x = t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \text{ приводить до інтегралу } \int \frac{R(t) dt}{1+t^2}.$$

Цю заміну доцільно використовувати і тоді, коли підінтегральна функція має вигляд $R(\cos^2 x, \sin^2 x)$.

Для інтегралів $\int \sin mx \cdot \cos n x dx$, $\int \cos mx \cdot \cos n x dx$,

$\int \sin mx \cdot \sin n x dx$ слід використати формули із Додатку, а саме:

$$\sin mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x];$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x];$$

$$\sin mx \cdot \sin nx = \frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Наприклад:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \cdot \frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5.5. ІНТЕГРУВАННЯ НАЙПРОСТІШИХ ІРРАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

Розглянемо інтеграл $\int R\left(x, x^{\frac{m}{n}}, \dots, x^{\frac{r}{s}}\right) dx$, де R – раціональна функція своїх аргументів.

В цьому випадку робимо заміну $x = t^k$, $dx = kt^{k-1} dt$, де k – спільний знаменник дробів.

Наприклад:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[4]{x^3} + 1}{\sqrt{x} + a} dx &= \left| \begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{t^3 + 1}{t^2 + t^4} \cdot 4t^3 dt = 4 \int \frac{t(t^3 + 1)}{t^2 + 1} dt = \\ &= 4 \int \left(t^2 - 1 + \frac{t + 1}{t^2 + 1} \right) dt = \frac{4}{3} t^3 - 4t + 2 \ln(t^2 + 1) + 4 \operatorname{arctgt} + C = \\ &= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - 4\sqrt{x} + 2 \ln(\sqrt{x} + 1) + 4 \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x} + C. \end{aligned}$$

При інтегруванні виразів $R\left(x, \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)$ використовують такі заміни змінної:

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx, & \quad \begin{cases} x = a \sin t, & dx = a \cos t dt \\ x = a \cos t, & dx = -a \sin t dt \end{cases} \\ \int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx, & \quad \begin{cases} x = a \cdot \operatorname{tg} t, & dx = \frac{a}{\cos^2 t} dt \\ x = a \cdot \operatorname{ctg} t, & dx = -\frac{a}{\sin^2 t} dt \end{cases} \\ \int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx, & \quad \begin{cases} x = \frac{a}{\cos t}, & dx = \frac{a}{\cos^2 t} \sin t dt \\ x = \frac{a}{\sin t}, & dx = -\frac{a}{\sin^2 t} \cos t dt \end{cases} \end{aligned}$$

Наприклад :

$$\begin{aligned} I = \int \sqrt{4 - x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = 2 \sin t \\ dx = 2 \cos t dt \end{array} \right| = \int \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 4 \int \cos^2 t dt = \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C. \end{aligned}$$

Спростимо: $\sin 2t = 2 \sin t \cdot \cos t = 2 \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} = 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow I = 2 \left(\arcsin \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x}{2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right) + c = 2 \arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \sqrt{4 - x^2} + C.$$

Розв'язування типових прикладів

1. Знайти $\int (3x^2 - 3x + 5)dx$.

Розв'язання

Для інтегрування цього виразу застосуємо елементарні правила інтегрування і табличний інтеграл

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1.$$

$$\text{Тоді } \int (3x^2 - 3x + 5)dx = 3 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx = x^3 - 3 \frac{x^2}{2} + 5x + C.$$

2. Знайти

$$\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx$$

Розв'язання

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx &= \int \frac{x}{1 + x^2} dx + \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1 + x^2)}{1 + x^2} + \\ &+ \int \operatorname{arctg} x \cdot d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C. \end{aligned}$$

3. Знайти

$$I = \int \arcsin x dx$$

Розв'язання. Використаємо формулу інтегрування частинами $\int u dv = u \cdot v - \int v du$. Дістанемо

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} \arcsin x = du; & du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} \\ dx = dv; & v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Інтеграл у правій частині визначаємо, вводячи змінну $z = 1 - x^2$,
 $-x dx = \frac{dz}{2}$.

Одержимо

$$-\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{z^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \sqrt{1-x^2} + C.$$

Отже,

$$I = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

4. Знайти

$$\int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx.$$

Розв'язання. У знаменнику простий корінь $x = -1$ має кратність 2, тому запишемо

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + B(x+1)(x^2+1) + (x+1)^2(Cx+D)}{(x+1)^2(x^2+1)}$$

$$3x^2 + 2x + 1 = A(x^2+1) + Bx^3 + Bx + Bx^2 + B + Cx^3 + 2Cx^2 + Cx + Dx^2 + 2Dx + D.$$

Використаємо для визначення сталих метод невизначених коефіцієнтів. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності, одержимо

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = B + C \\ x^2 & 3 = A + B + 2C + D \\ x & 2 = B + C + 2D \\ x^0 & 1 = A + B + D \end{array} \quad \text{Система має розв'язок } A=1, B=-1, C=1, D=1.$$

Таким чином:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x^2 + 2x + 1}{(x+1)^2(x^2+1)} dx = \int \left[\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+1} \right] dx = \\ &= \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{x+1}{x^2+1} dx = -\frac{1}{x+1} - \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \arctg x + C = \\ &= \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} - \frac{1}{x+1} + \arctg x + C. \end{aligned}$$

5. Знайти

$$\int \cos^4 x dx.$$

Розв'язання. Використаємо формули пониження степені

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2};$$

дістанемо

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \\ &+ \frac{1}{32} \sin 4x + C = \frac{3}{8} x + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

6. Знайти інтеграл

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}} dx = \int \frac{x+1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}} dx.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(3x+1)^{\frac{1}{3}}} dx &= \left| \begin{array}{l} 3x+1 = z^3 \\ x = \frac{z^3-1}{3} \\ dx = z^2 dz \end{array} \right| = \int \frac{\frac{z^3-1}{3} + 1}{z} \cdot z^2 dz = \frac{1}{3} \int (z^4 + 2z) dz = \\ &= \frac{1}{3} \int z^4 dz + \frac{2}{3} \int z dz = \frac{z^5}{15} + \frac{z^2}{3} + C = \frac{(3x+1)^{\frac{5}{3}}}{15} + \frac{(3x+1)^{\frac{2}{3}}}{3} + C. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти невизначені інтеграли. Результати інтегрування перевірити диференціюванням.

1. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^8}}$; б) $\int e^{\cos 5x} \sin 5x dx$; в) $\int x^3 \arctg x dx$; г) $\int \frac{x^3 + 7}{x^2 + 5x + 6} dx$.

2. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int \frac{e^{\ctg x}}{\sin^2 x} dx$; в) $\int x \arctg 2x dx$; г) $\int \frac{x^3 + 5}{x^2 - 6x + 8} dx$.

3. а) $\int \frac{dx}{\arcsin^3 x \sqrt{1-x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; в) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; г) $\int \frac{x^3}{x^2 + x + 1} dx$.

$$4. \text{ a) } \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx; \quad \text{б) } \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}; \quad \text{в) } \int x^3 \ln x dx; \quad \text{г) } \int \frac{x^3-3}{x^2-3x-4} dx.$$

$$5. \text{ a) } \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{б) } \int 2^{\cos x} \sin x dx; \quad \text{в) } \int x\sqrt{x} \ln x dx; \quad \text{г) } \int \frac{x^3-5}{x^2-7x+6} dx.$$

Відповіді:

$$1. \text{ a) } \frac{1}{4} \arcsin \frac{x^4}{2} + C; \quad \text{б) } -\frac{1}{5} e^{\cos 5x} + C.$$

$$3. \text{ в) } -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C; \quad \text{г) } \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

РОЗДІЛ VI. ЕЛЕМЕНТИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ. ВИЗНАЧЕНИЙ ТА НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

6.1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ВЛАСТИВОСТІ

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$. Розділимо відрізок $[a, b]$ довільно на n елементарних частин точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Позначимо через Δx_k довжину елементарного відрізка $[x_{k-1}, x_k]$, тобто

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

На кожному елементарному відрізку виберемо довільну точку

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \text{ та визначимо } \lambda \text{ як}$$

$$\lambda = \max \Delta x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Складемо суму

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Число σ_n називається *інтегральною сумою*.

Будемо шукати границю інтегральної суми, припускаючи, що $\lambda \rightarrow 0$, тобто число нескінченно зростає:

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

Скінчена границя інтегральної суми при $\lambda \rightarrow 0$ називається *визначеним інтегралом* від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і

позначається символом $\int_a^b f(x) dx$:

$$\lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx$$

Якщо функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то вона інтегрована на цьому проміжку й існує інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Числа a та b називають відповідно *нижньою та верхньою межею*

інтеграла.

Властивості визначеного інтеграла

1. Якщо поміняти місцями верхню і нижню границі інтеграла, знак інтеграла змінюється на протилежний :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Сталий множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

3. Адитивність відносно інтервалу в інтегруванні:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad \text{якщо } a < c < b.$$

4. Властивість лінійності:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

5. Якщо $f(x) \leq \varphi(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$.

6. Якщо m і M – найменше і найбільше значення неперервної функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

7. Якщо функція $f(x)$ інтегрована в проміжку $[a,b]$, ($a \leq b$) і в усьому проміжку задовольняє нерівності $m \leq f(x) \leq M$, тоді існує точка $c \in [a,b]$, така, що

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

8. Якщо функція $f(x)$ неперервна у точці $t = x$, то

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Формула Ньютона–Лейбніца

Обчислення визначених інтегралів як границь інтегральних сум вимагає значних зусиль. Застосування *формули Ньютона-Лейбніца* істотно спрощує задачу обчислення інтегралів.

Якщо $F(x)$ – первісна функції $y = f(x)$, неперервної в проміжку $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування.

Приклад. Обчислити $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Розв'язання

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \arcsin 1 - \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

6.2. МЕТОДИ ІНТЕГРУВАННЯ

Теорема. Якщо $\varphi(t)$ і $\varphi'(t)$ – неперервні на відрізку $[\alpha, \beta]$ і $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а складена функція $f[\varphi(t)]$ також неперервна на цьому відрізку, тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt.$$

При застосуванні формули заміни змінної у визначеному інтегралі треба:

- 1) визначити співвідношення між старою і новою змінними та їхніми диференціалами;
- 2) знайти межі границі інтегрування для нової змінної.

Приклад. Обчислити

$$\int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx.$$

Розв'язання. Уведемо нову змінну інтегрування у вигляді підстановки:

$$e^x - 1 = t^2, \text{ тоді}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \cdot \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \Rightarrow e^x dx = 2t dt \\ 0 \leq x \leq \ln 5 \Rightarrow 0 \leq t \leq 2 \end{array} \right| = \int_0^2 \frac{(t^2 + 1) 2t^2 dt}{(t^2 + 4)(t^2 + 1)} = \\ &= 2 \int_0^2 \frac{(t^2 + 4) - 4}{t^2 + 4} dt = 2t \Big|_0^2 - 8 \cdot \frac{1}{2} \arctg \frac{t}{2} \Big|_0^2 = 4 - \pi. \end{aligned}$$

Зауваження. При обчисленні визначеного інтеграла не треба повертатися до старої змінної.

Формула інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

де $u(x)$, $v(x)$ – диференційовані функції на проміжку $[a, b]$. При розбитті підінтегрального виразу на співмножники u і dv слід керуватися тими самими правилами, що й при обчисленні невизначених інтегралів.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int_0^{2\pi} x \cdot \sin 2x dx$.

Розв'язання. Покладено $u = x$, $dv = \sin 2x dx$.

Тоді $du = dx$, $v = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} x \cdot \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2x dx = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \cos 4\pi + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \cos 0 + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{2\pi} = -\pi + \frac{1}{4} (\sin 4\pi - \sin 0) = -\pi. \end{aligned}$$

6.3. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

Обчислення площі. Площа S криволінійної трапеції, обмеженої прямими

$y = 0$, $x = a$, $x = b$ та кривою $y = f(x)$, де $f(x) > 0$ й неперервна на проміжку $[a, b]$, виражається формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$

При обчисленні площі слід переконатися, що на інтервалі інтегрування функція не змінює знак, бо площі фігур, що розміщені вище осі OX , беруться зі знаком “+”, а ті, що розміщені під віссю OX – зі знаком “-”. Якщо область обмежена замкнутою кривою, верхня частина якої $y = f_1(x)$, а нижня $y = f_2(x)$, де $f_2(x) > f_1(x)$ всюди на $[a, b]$, то площу можна обчислити за формулою

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

Якщо рівняння лінії, що обмежує фігуру, дано в параметричній формі $x = \varphi(t)$, $y = \varphi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, тоді для обчислення площі застосовується формула

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t) \varphi'(t) dt.$$

Якщо рівняння неперервної лінії дано в полярних координатах $r = r(\varphi)$; $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, то площа криволінійного сектора визначається за формулою

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад. Обчислити площу еліпса.

Розв'язання.

а) розглянемо на площині фігуру, обмежену еліпсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Із рівняння еліпса знаходимо

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Із симетрії еліпса відносно осей координат випливає, що шукана площа

$S = 4S_1$, де S_1 - чверть шуканої площі, яку знаходимо за формулою

$$S_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Для обчислення цього інтегралу, виконаємо заміну змінної, поклавши

$$x = a \cos t \Rightarrow dx = -a \sin t dt.$$

Тоді при $x = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, а при $x = a$, $t = 0$.

Таким чином

$$S = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = -4 \frac{b}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 a \sin t \times a \sin t dt = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt =$$

$$= 2ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t) dt = 2ab \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab.$$

При $a = b$, коли еліпс перетворюється на коло радіуса a , дістанемо відомий вираз πa^2 для площі круга.

б) розглянемо параметричні рівняння еліпса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, тоді

$$\frac{1}{4} S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot a (-\sin t) dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi ab}{4}.$$

Таким чином $S = \pi ab$.

Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, яке утворюється обертанням навколо осі OX криволінійної трапеції, обмеженої зверху кривою $y = f(x)$, знизу віссю OX , а з боків прямими $x = a$, $x = b$, визначається за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

або

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

Якщо треба знайти об'єм тіла, утвореного обертанням ліній $y_1 = f_1(x)$ і $y_2 = f_2(x)$, то маємо формулу

$$V = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx, \quad (y_1 > y_2).$$

Приклад. Знайти об'єм шара радіуса R з центром в початку координат.

Розв'язання. Шар одержуємо від обертання навколо осі OX кола $x^2 + y^2 = R^2$, тобто $y^2 = R^2 - x^2$. Шуканий об'єм знаходимо за формулою

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^R =$$

$$= 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

Довжина дуги кривої

Довжина дуги кривої $y = f(x)$, яка обмежена прямими $x = a$ та $x = b$, обчислюється за формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

У випадку, коли рівняння кривої задане в параметричній формі: $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), маємо формулу

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt$$

Якщо рівняння кривої задане у полярних координатах $\rho = \rho(\varphi)$, ($\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$), тоді

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi.$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln x$ від $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу $l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$, дістанемо

$$\begin{aligned} l &= \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \left. \begin{aligned} x^2 + 1 &= t^2 \\ x &= \sqrt{t^2 - 1} \\ dx &= \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}} \end{aligned} \right|_{\substack{t=2, \text{ якщо } x=\sqrt{3} \\ t=3, \text{ якщо } x=\sqrt{8}}} = \int_2^3 \frac{t}{\sqrt{t^2 - 1}} \cdot \frac{t dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\ &= \int_2^3 \frac{(t^2 - 1) + 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = \\ &= 1 + \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Розв'язування типових прикладів

1. Обчислити

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{5}{8} - x^4 \right) \cdot \sqrt{\frac{5}{8} - x^4}}.$$

Розв'язання. Обчислимо визначений інтеграл безпосередньо, або під

знаком інтеграла можна виділити повний диференціал виразу, що стоїть у дужках, потім використаємо формулу Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{5}{8} - x^4\right) \cdot \sqrt{\frac{5}{8} - x^4}} &= -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{-4x^3 dx}{\left(\frac{5}{8} - x^4\right) \cdot \sqrt{\frac{5}{8} - x^4}} = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{d\left(\frac{5}{8} - x^4\right)}{\left(\frac{5}{8} - x^4\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{\left(\frac{5}{8} - x^4\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} \bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{8} - x^4}} \bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{9}{16}}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{8} - \frac{1}{16}}} \right] = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

2. Обчислити $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x}$

Розв'язання. Уведемо нову змінну інтегрування за допомогою універсальної тригонометричної підстановки $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2 + \cos x} = \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \right| = \int_0^1 \frac{2dt}{\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \cdot (1+t^2)} =$$

$$2 \int_0^1 \frac{dt}{2 + 2t^2 + 1 - t^2} = 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \cdot \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \bigg|_0^1 = \frac{2}{3} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} 0 \right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Обчислити $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Розв'язання. Проведемо інтегрування частинами

$$\int_a^b u dv = uv \bigg|_a^b - \int_a^b v du.$$

Тоді

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x & du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \bigg|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \arctg 1 - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} (x - \arctg x) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

4. Знайти площу петлі лінії $y^2 = x(x-1)^2$ (рис. 6.1).

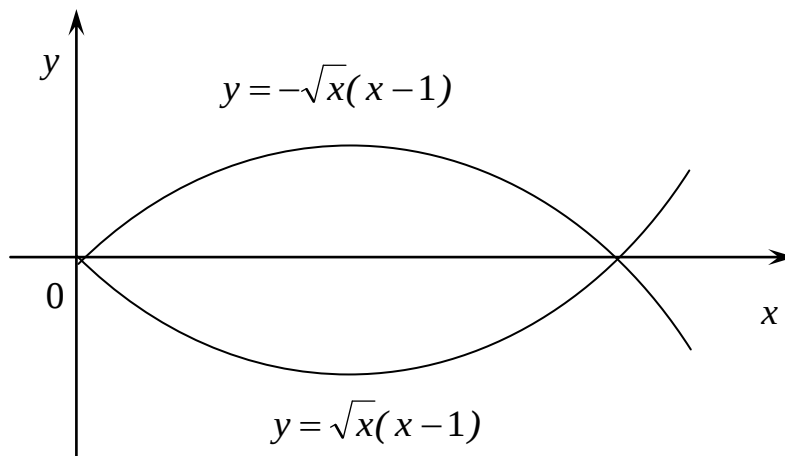


Рис. 6.1

Розв'язання. Використаємо формулу $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$;

фігура розташована симетрично відносно осі Ox , тому $S = 2S_1$, де S_1 – площа верхньої частини. Границі інтегрування такі: $a = 0$, $b = 1$, $f_1(x) = 0$ (вісь Ox); $f_2(x) = \sqrt{x}(x-1)$. Тоді

$$S = 2 \int_0^1 \sqrt{x}(x-1) dx = 2 \int_0^1 x^{\frac{1}{2}} dx - 2 \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{9}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{15}.$$

5. Знайти об'єм тіла, одержаного від обертання фігури, обмеженою віссю Ox і параболою $y = 2x - x^2$ навколо осі Ox (рис. 6.2)

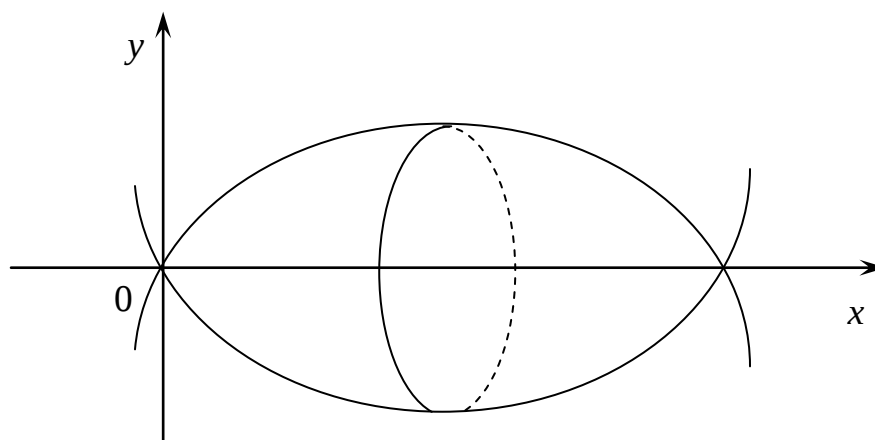


Рис. 6.2

Розв'язання. Застосуємо формулу $V = \pi \int_a^b y^2 dx$ дістанемо

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4}{3} x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - 16 + \frac{32}{5} \right) = \frac{16}{15} \pi$$

6. Обчислити довжину дуги кривої $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (рис. 6.3)

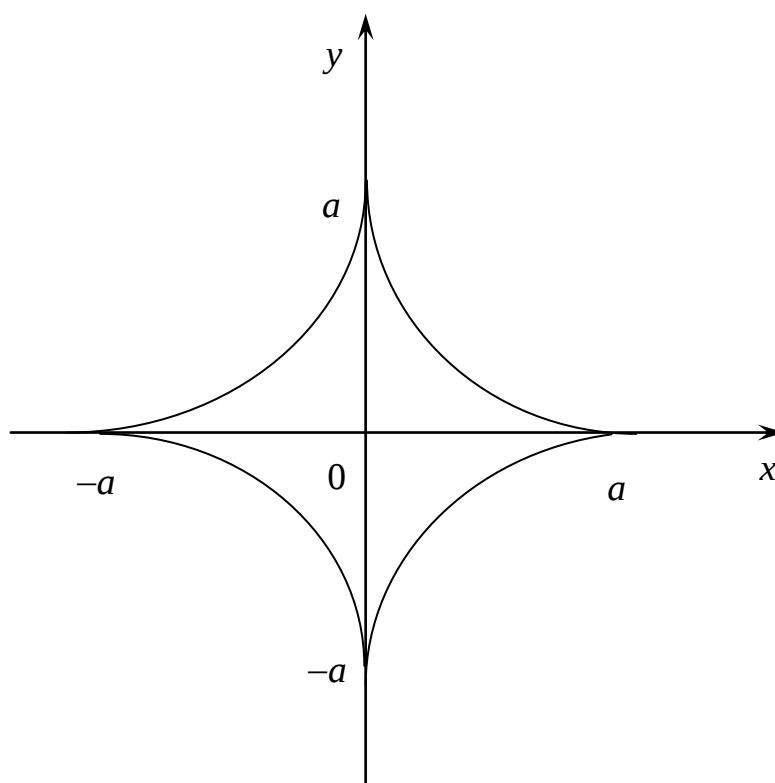


Рис. 6.3

Розв'язання. Крива розташована симетрично відносно осей координат і називається астроїдою. Довжину дуги знаходимо за формулою

$$\frac{1}{4} \ell = \int_0^a \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx.$$

Функція $f(x)$ задана рівнянням явно, тому похідну від неї знайдемо так :

$$\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot y'_x = 0,$$

$$(y'_x)^2 = \frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1.$$

Тоді

$$\frac{l}{4} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1} dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} dx = \int_0^a \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx = a^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_0^a = \frac{3}{2} a.$$

Отже $l = 6a$ (од. довж.).

Завдання для самостійної роботи

В задачах 1 – 5: а) обчислити визначений інтеграл; б) обчислити площі фігур, обмежених графіком функцій.

1. а) $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; б) $y = x^2 - 3x$; $y = 4 - 3x$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$; б) $y = 3 - 2x - x^2$; $y = -2x - 1$.

3. а) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}$; б) $y = -x^2$; $x + y + 2 = 0$.

4. а) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$; б) $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4$; $y = \frac{x}{2}$.

5. а) $\int_0^1 \frac{x dx}{1 + x^4}$; б) $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + 3$; $y = \frac{x}{3} + 1$.

Відповіді:

1. а) $\arctg e - \frac{\pi}{4}$; б) $10\frac{2}{3}$. 3. а) $-1 + 2\ln 2$; б) 4,5.

Невласні інтеграли виникають тоді, коли проміжок інтегрування є нескінченним або підінтегральна функція необмежена в деяких точках, що належать інтервалу інтегрування.

6.4. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ З НЕСКІНЧЕНОЮ ГРАНИЦЕЮ

Нехай, функція $f(x)$ визначена у проміжку $[a; +\infty)$, тобто для $x \geq a$, і інтегрована у будь-якій скінченній частині $[a; b]$. Границя даного інтеграла (скінченна або нескінченна) при $b \rightarrow +\infty$ називається *невласним інтегралом* функції $f(x)$ і позначається

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Якщо границя скінченна, то невластний інтеграл є збіжним, а функцію $f(x)$ називають інтегрованою у нескінченному проміжку $[a; +\infty)$. Якщо ж ця границя нескінченна або не існує, то невластний інтеграл є розбіжним.

Геометрично невластний інтеграл при $f(x) > 0$ визначає площу фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, прямою $x = a$ та віссю Ox .

Аналогічно визначають невластний інтеграл функції $f(x)$ на інтервалі від $-\infty$ до b .

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

та інтеграл функції від $-\infty$ до $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx$$

Обчислюють невластний інтеграл у два етапи: спочатку відшуковують інтеграл на скінченному проміжку, потім виконують відповідний граничний перехід.

Якщо для $f(x)$ існує первісна $F(x)$ на всьому проміжку $[a; +\infty)$, то

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{\infty} = F(\infty) - F(a), \text{ де}$$

$$F(\infty) = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$$

і передбачається існування даної границі.

Приклад. При яких значеннях показника $\lambda > 0$ існує невластний інтеграл

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} \quad (a > 0).$$

Розв'язання. Нехай $\lambda \neq 1$, тоді

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda} \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{1-\lambda} (b^{1-\lambda} - a^{1-\lambda}) = \begin{cases} \infty, & \lambda < 1 \\ -\frac{a^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda > 1 \end{cases}$$

$$\text{Якщо } \lambda = 1, \text{ то } \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_a^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\ln b - \ln a] = \infty.$$

Отже, $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^\lambda}$ при $\lambda > 1$ є збіжним (і дорівнює $\frac{1}{\lambda-1} a^{1-\lambda}$), при $\lambda \leq 1$ є розбіжним.

У випадках, коли первісна невідома, керуються ознаками

порівняння, які дозволяють з'ясувати збіжність невластного інтеграла, виходячи з аналізу збіжності іншого інтеграла.

1. Якщо хоча б при $a \leq x < \infty$ має місце нерівність $0 \leq f(x) \leq g(x)$, то із збіжності інтеграла $\int_a^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_a^{\infty} f(x)dx$, або із розбіжності $\int_a^{\infty} f(x)dx$ витікає розбіжність $\int_a^{\infty} g(x)dx$.

2. Якщо існує границя

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \quad (0 < k < \infty, f(x) > 0, g(x) > 0)$, то інтеграли $\int_a^{\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{\infty} g(x)dx$

одночасно або збіжні або розбіжні.

Приклад. Дослідити збіжність інтегралу

$$I = \int_1^{\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} dx$$

$$\text{Розв'язання. } f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^2} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Інтеграл $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ є розбіжним ($\lambda < 1$), отже, згідно з другою теоремою

порівняння, інтеграл I є розбіжним.

6.5. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ ВІД НЕОБМЕЖЕНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянемо необмежену функцію $f(x)$, задану у скінченному проміжку $[a; b]$. Нехай $f(x)$ обмежена й інтегрована у будь-якому проміжку $[a; b - \varepsilon]$ та необмежена у кожному проміжку $[b - \varepsilon; b]$ зліва від точки b . Точку b називають *особливою точкою*.

Границя інтеграла $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (скінчена або нескінчена)

називається *невласним інтегралом* функції $f(x)$ від a до b і позначається

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Якщо ця границя скінченна, то кажуть, що інтеграл є збіжним, а функцію $f(x)$ називають інтегрованою на проміжку $[a; b]$. Якщо ж границя

нескінчена або не існує, то інтеграл є розбіжним.

Аналогічно визначають невластий інтеграл, коли особливою точкою є нижня границя інтеграла (точка a), то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Якщо функція необмежена в точці $c \in [a; b]$, то тоді

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right).$$

Приклад. Дослідити збіжність інтегралу

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Розв'язання. Функція $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ обмежена та інтегрована у

будь-якому проміжку $[0; 1 - \varepsilon]$, ($0 < \varepsilon < 1$) і перетворюється у нескінченність при

$x \rightarrow 1$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin x \Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \arcsin(1-\varepsilon) =$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Отже, невластий інтеграл I є збіжним і його значення дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Розв'язування типових прикладів

1. Дослідити $\int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3}$ на збіжність.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^3} \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{x}; du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}; v = -e^{\frac{1}{x}} \end{array} \right| = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \Big|_{-1}^{0-\varepsilon} - \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1} + e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - e^{-1} \right) = -\frac{2}{e}. \end{aligned}$$

Невластий інтеграл збіжний.

3. Обчислити інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}$ або встановити його розбіжність.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \left(\int_a^0 \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} + \int_0^b \frac{dx}{(x+1)^2 + 1} \right) = \\ &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \left(\arctg(x+1) \Big|_a^0 + \arctg(x+1) \Big|_0^b \right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi. \end{aligned}$$

Невласний інтеграл збіжний.

4. Дослідити на збіжність інтеграл

$$\int_0^1 \ln x dx.$$

Розв'язання. Підінтегральна функція $\ln x$ в межах інтегрування неперервна за виключенням точки $x = 0$, в якій вона має розрив другого

роду $\left(\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \right)$.

Інтегруванням частинами знаходимо первісну:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c = F(x) + c.$$

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln x dx &= F(1) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(\varepsilon) = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) = \\ &= -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} \right) = -1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} \right) = -1 + 0 = -1. \end{aligned}$$

Отже, невластний інтеграл збіжний.

Завдання для самостійної роботи

Дослідити на збіжність.

- | | | | |
|---|--|------------------------------------|---|
| 1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. | 2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$. | 3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$. | 4. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. |
| 5. $\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}, \alpha > 1$. | 6. $\int_1^{+\infty} \cos x dx$. | 7. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$. | 8. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4}$. |

Відповіді:

1. π . 2. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 3. 1. 4. Розбіжний. 5. Розбіжний. 8. Розбіжний.

РОЗДІЛ VII. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РЯДИ.

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Рівняння, яке містить незалежну змінну x , невідому функцію $y=f(x)$ та її похідні $y', y'', \dots, y^{(n)}$, називається *диференціальним*. Символічно диференціальні рівняння n -го порядку можна записати так:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Якщо шукана функція залежить від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається *звичайним*.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної від шуканої функції цього рівняння.

Розв'язком диференціального рівняння $F(x, y, \dots) = 0$ називається така функція (загальний розв'язок рівняння) $y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_n)$, яка при підставленні в рівняння перетворює його на тотожність, де $c_1, c_2, \dots, c_n$ – невизначені сталі, кількість яких визначається порядком диференціального рівняння.

Якщо функція знайдена в неявній формі $\varphi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$, то цей вираз називають *загальним інтегралом* рівняння. Процес відшукування таких функцій називається *інтегруванням* диференціальних рівнянь.

7.1 ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Загальний вигляд диференціального рівняння першого порядку :

$$F(x, y, y') = 0. \quad (7.1)$$

Якщо рівняння розв'язати відносно y' , дістанемо

$$y' = f(x, y).$$

Загальний розв'язок цього рівняння є функція

$$y = \varphi(x, c).$$

Якщо до рівняння (7.1) додається ще і початкова умова

$$y(x_0) = y_0,$$

тоді $c = c_0$ і маємо $y = \varphi(x, c_0)$ – частковий розв'язок.

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду

$$f_1(x)\varphi_2(y)dx + f_2(x)\varphi_1(y)dy = 0$$

називають *диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*, якщо $\varphi_2(y)\varphi_1(x) \neq 0$.

За умови $\varphi_2(y)\varphi_1(x) \neq 0$ складові цього рівняння перемножимо на $1/(\varphi_2(y)\varphi_1(x))$, одержимо

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy = 0.$$

Такі перетворення називаються відокремлюванням змінних, а останнє рівняння називається *рівнянням з відокремленими змінними*.

Загальний інтеграл останнього рівняння має вигляд

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)} dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} dy = c.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(x^2 + 1)(y^2 - 1)dx + xydy = 0.$$

Поділивши обидві частини на $(y^2 - 1)x$, матимемо

$$\frac{x^2 + 1}{x} dx + \frac{y}{y^2 - 1} dy = 0.$$

Після інтегрування

$$\frac{x^2}{2} + \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|y^2 - 1| = \ln|c_0|,$$

або

$$x^2 + \ln x^2 + \ln|y^2 - 1| = \ln|c|,$$

дістанемо

$$y^2 = 1 + \frac{c e^{-x^2}}{x^2}.$$

Однорідні рівняння

Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \text{ або } p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

називається *однорідним*, якщо $p(x, y)$ та $q(x, y)$ є однорідні функції одного й того ж виміру. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією виміру m* , коли виконується рівність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y)$$

для довільного $t \neq 0$.

Вважаючи, що $f(x, y)$ – однорідна функція нульового виміру та з використанням заміन $t = \frac{1}{x}$, $y = zx$, $y' = z + xz'$, $z = z(x)$,

одержимо

$$z + xz' = f(1, z).$$

Тоді

$$\frac{dz}{f(1, z) - z} = \frac{dx}{x},$$

а це вже рівняння з відокремленими змінними відносно z . Розв'язавши його, знаходимо $y = zx$.

Приклад. $y^2 dx + (x^2 - xy)dy = 0.$

Замінюємо $y = tx$, $dy = tdx + xdt$. Тоді $x^2 t^2 dx + (x^2 - x^2 t) (tdx + xdt) = 0$

або $\frac{dx}{x} + \frac{1-t}{t} dt = 0$. Після інтегрування маємо

$$\ln|x| + \ln|t| - t = \ln|c|.$$

Остаточно загальний розв'язок

$$y = c \cdot e^{\frac{y}{x}}.$$

Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається *лінійним*, якщо воно першого ступеня відносно шуканої функції та її похідної. Загальний вигляд лінійного рівняння

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Зробимо підстановку $y = u(x) \cdot v(x)$, де u та v – деякі диференційовані функції. Тоді $y' = u'v + uv'$.

Підставляючи праві частини для y і y' в рівняння, маємо

$$vu' + uv' + p(x) \cdot uv = q(x)$$

або
$$v \left(\frac{du}{dx} + p(x)u \right) + u \frac{dv}{dx} = q(x).$$

Цілком зрозуміло, що одну із функцій u або v можна вибрати довільно. Отже, підберемо $u(x)$ так, щоб вона була розв'язком рівняння $u' + p(x) \cdot u = 0$. Звідки $u = e^{-\int p(x)dx}$.

Вибравши так $u(x)$, одержимо рівняння відносно функції v

$$e^{-\int p(x)dx} \cdot \frac{dv}{dx} = q(x) \quad \text{або} \quad dv = e^{\int p(x)dx} \cdot q(x) dx.$$

Отже
$$v(x) = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c.$$

Тому загальний розв'язок лінійного рівняння буде

$$y = u \cdot v = e^{-\int p(x)dx} \left(\int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \right).$$

Викладений спосіб вперше застосував Йоган Бернуллі в 1697р.

Приклад. Знайти загальний розв'язок лінійного рівняння

$$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = 1 + x^2$$

Розв'язання. Тут $p(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $q(x) = 1 + x^2$ (q). Нехай $y = uv$,

$$y' = u'v + uv'. \quad u'v + uv' + \frac{2x}{1+x^2} \cdot uv = 1 + x^2 \text{ або}$$

$$\left(u' + \frac{2x}{1+x^2}u\right)v + uv' = 1 + x^2.$$

Для визначення u маємо рівняння

$$u' + \frac{2x}{1+x^2}u = 0 \text{ або } \frac{du}{u} = -\frac{2xdx}{1+x^2}.$$

Інтегруємо його $\ln|u| = -\ln(1+x^2)$. Тоді $u = \frac{1}{1+x^2}$.

Запишемо рівняння $uv' = 1 + x^2$ або $\frac{1}{1+x^2}v' = 1 + x^2$, звідси $v' = (1+x^2)^2$.

Тоді $dv = (1+x^2)^2 dx$, $dv = (1+2x^2+x^4)dx$, $v = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$y = uv = \frac{1}{1+x^2} \left(x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + C \right).$$

Рівняння Бернуллі

До лінійного рівняння зводиться так зване *рівняння Бернуллі*, яке має вигляд

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \cdot y^n$$

Поклавши $y = u(x) \cdot v(x)$, $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.

зводимо рівняння до двох рівнянь

1) $u' + p(x)u = 0$,

2) $uv' = q(x) \cdot u^n v^n$.

З першого рівняння знаходимо u . Цей розв'язок підставляємо в друге рівняння і з нього знаходимо v .

Приклад. Розв'язати рівняння $y' - \frac{4y}{x} = x\sqrt{y}$

Покладемо $y = u \cdot v$; $y' = u'v + v'u$. Тоді $u'v + v'u - \frac{4uv}{x} = x\sqrt{uv}$

або
$$v \left(u' - \frac{4u}{x} \right) + uv' = x \cdot \sqrt{uv}.$$

З цього рівняння одержуємо два:

1) $u' - \frac{4u}{x} = 0$, 2) $uv' = x \cdot \sqrt{uv}$. Розв'язуємо перше і знаходимо u :

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dx}{x},$$

$\ln|u| = 4 \ln|x|$, $u = x^4$. Одержаний вираз для u підставляємо у друге, одержимо

$$x^4 v' = x \cdot \sqrt{x^4 v} \quad \text{або} \quad x v' = \sqrt{v}.$$

Після перетворень одержимо рівняння з відокремленими змінними

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = \frac{dx}{x}. \quad \text{Його розв'язок} \quad \sqrt{v} = \frac{1}{2} \ln|x| + c \quad \text{або} \quad v = \left(\frac{1}{2} \ln|x| + c \right)^2.$$

Загальний розв'язок вихідного рівняння має вигляд:

$$y = x^4 \left(\frac{1}{2} \ln \sqrt{x} + c \right)^2.$$

7.2 ЛІНІЙНІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння другого порядку

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Якщо $f(x) = 0$ рівняння називають *однорідним*, якщо ж $f(x) \neq 0$ – *неоднорідним*. Будемо вважати, що $y_1(x)$, $y_2(x)$ лінійно незалежні розв'язки однорідного рівняння, тоді його загальний розв'язок буде $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

Нагадаємо, що функції $y_1(x)$, $y_2(x)$ називаються *лінійно незалежними*, якщо їх лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$ (де α_1, α_2 – сталі) дорівнює нулю лише тоді, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Якщо ж вказана лінійна комбінація дорівнює нулю при $\alpha_1 \neq 0$, або $\alpha_2 \neq 0$, то функції y_1 і y_2 називають *лінійно залежними*.

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сума будь-якого його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного однорідного рівняння.

Рівняння вигляду

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

де a_0, a_1, a_2 – сталі, називають *лінійним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо однорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Будемо шукати частинний розв'язок цього рівняння у вигляді $y = e^{kx}$. Підставляючи в ліву частину рівняння, матимемо *характеристичне рівняння*

$$a_0 k^2 + a_1 k + a_2 = 0.$$

Розв'язавши його, знайдемо два частинних розв'язки вихідного рівняння. Розглянемо три випадки.

- 1) Корені характеристичного рівняння дійсні, різні. Тоді маємо два лінійно незалежних частинних розв'язків

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}.$$

Отже вираз $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ буде загальним розв'язком вихідного однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами. Тут C_1, C_2 – довільні сталі.

- 2) Корені характеристичного рівняння дійсні, кратні. Якщо є двократний корінь характеристичного рівняння, то йому відповідають два різних частинних розв'язки рівняння, а саме

$$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = x e^{kx}.$$

Тобто загальний розв'язок буде

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x).$$

- 3) Корені характеристичного рівняння комплексні.

Якщо $k_1 = \alpha + \beta i$ ($i = \sqrt{-1}$), то повинен бути обов'язково спряжений з ним корінь $k_2 = \alpha - \beta i$.

Тоді розв'язки $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x$, $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x$ – лінійно незалежні.

Отже, загальний розв'язок

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Приклади. Знайти загальні розв'язки рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

- а) $y'' - y' - 2y = 0$. Характеристичне рівняння його $k^2 - k - 2 = 0$. Звідки $k_1 = 2$, $k_2 = -1$ – корені дійсні і різні.

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x};$$

- б) $y'' - 6y' + 9y = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0$, $k_1 = k_2 = 3$ – корені рівні, тобто

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{3x};$$

- в) $y'' - 2y' + 5y = 0$,

$k^2 - 2k + 5 = 0$, $k_{1,2} = 1 \pm 2i$ – корені комплексні, тобто

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Лінійне неоднорідне рівняння зі сталими коефіцієнтами

Як було вже зазначено, таке рівняння має вигляд

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x),$$

де a_i ($i = 0, 1, 2$) – стала.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння є сума загального розв'язку відповідно однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння $y = \bar{y} + y^*$, де

$\bar{y} = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, а y^* – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Для того, щоб знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння вдаються до методу неозначених коефіцієнтів, який дозволяє, при певній структурі правої частини рівняння ($f(x)$), знайти його частинний розв'язок.

$$\text{Якщо } f(x) = e^{\alpha x} (p_n(x) \cos \beta x + q_m(x) \sin \beta x)$$

а $p_n(x)$ і $q_m(x)$ – многочлени степеня n та m відповідно, то частинний розв'язок знайдемо у вигляді

$$y^*(x) = x^r e^{\alpha x} (p_e(x) \cos \beta x + q_e(x) \sin \beta x),$$

де $\alpha + \beta i \in r$ – кратним коренем характеристичного рівняння відповідного однорідного диференціального рівняння.

Якщо $\alpha + \beta i$ не є коренем характеристичного рівня, то слід покласти $r = 0$. Тут $p_e(x)$, $q_e(x)$ – многочлени степеня $e = \max(m; n)$ з невизначеними коефіцієнтами, а іменно

$$p_e(x) = A_0 x^e + A_1 x^{e-1} + \dots + A_e; \quad q_e(x) = B_0 x^e + B_1 x^{e-1} + \dots + B_e.$$

Якщо $f(x)$ – сума кількох перелічених вище виразів, то y^* слід шукати у вигляді суми всіх відповідних виразів з неозначеними коефіцієнтами.

Приклад. Розв'язати неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку

$$y'' + y = 3 \sin x.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $y'' + y = 0$

має вигляд $k^2 + 1 = 0$, а $k_{1,2} = \pm i$ – його корені.

Загальний розв'язок однорідного рівняння

$$\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

З огляду на вид правої частини неоднорідного рівняння та враховуючи форму загального розв'язку відповідного однорідного рівняння частинний розв'язок будемо представляти так

$$y^* = x(A \cos x + B \sin x).$$

Довільні сталі A , B знаходимо методом невизначених коефіцієнтів. Послідовно записуємо $y^* = x(A \cos x + B \sin x)$,

$$y^{*'} = x(-A \sin x + B \cos x) + (A \cos x + B \sin x),$$

$$y^{*''} = 2(-A \sin x + B \cos x) + x(-A \cos x - B \sin x)$$

$$y'' + y = -2A \sin x + 2B \cos x,$$

що приводить до рівності

$$-2A \sin x + 2B \cos x = 3 \sin x.$$

Звідки $-2A = 3$, $A = -\frac{3}{2}$, $2B = 0$, $B = 0$.

Тобто, загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2} x \cos x.$$

Розв'язування типових прикладів

1. Розв'язати рівняння: $y dy + x e^y dx = 0$, $y(1) = 0$.

Розв'язання. Маємо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$f_1(x) \cdot f_2(y) dy + \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(y) dx = 0,$$

де $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(y) = e^y$, $f_1(x) = 1$, $f_2(y) = y$.

Відокремимо змінні і проінтегруємо

$$\int y e^{-y} dy = -\int x dx,$$

$$y e^{-y} + e^{-y} = \frac{x^2}{2} + c \text{ — загальний інтеграл.}$$

Знайдемо частинний розв'язок рівняння, який задовільняє початковій умові. для цього в загальному інтегралі покладемо $x = 1$, $y = 0$. Одержимо

$$\frac{1}{2} + c = e^0, \quad c = \frac{1}{2}.$$

Тоді $(x^2 + 1) = 2e^{-y}(y + 1)$ — частинний інтеграл.

2. Розв'язати рівняння $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 - y^2}$

Розв'язання. Задане рівняння можна записати у вигляді $y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$,

тобто маємо однорідне рівняння.

Зробимо заміну $\frac{y}{x} = t$, $y = tx$, $y' = t + t'x$.

$$\text{Дістанемо рівняння } t + xt' = \frac{t}{1 - t^2} \text{ або } xt' = \frac{t^3}{1 - t^2}.$$

Після відокремлення змінних маємо

$$\frac{(1-t^2)dt}{t^3} = \frac{dx}{x}, \quad \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t}\right)dt = \frac{dx}{x}.$$

Інтегруємо його та знаходимо

$$-\frac{1}{2t^2} - \ln|t| = \ln|x| + \ln|c| \quad \text{або} \quad -\frac{1}{2t^2} = \ln|txc|.$$

Підставляючи $t = \frac{y}{x}$ знайдемо загальний інтеграл однорідного рівняння:

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|c \cdot y|.$$

3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 4y' + 3y = (x+1) \cdot e^{-x}.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Характеристичне рівняння $k^2 - 4k + 3 = 0$ має корені $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Вони дійсні та різні, тому $\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{3x}$.

Знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

У цьому разі $\alpha = -1$ і не збігається з $k_1 = 1$ та $k_2 = 3$. Тому частинний розв'язок запишемо так $y^* = (A_0 + A_1 x)e^{-x}$.

Знайдемо похідні

$$(y^*)' = A_1 e^{-x} - (A_0 + A_1 x)e^{-x} = (A_1 - A_0 - A_1 x)e^{-x}$$

$$(y^*)'' = -A_1 e^{-x} - (A_1 - A_0 + A_1 x)e^{-x} = (A_0 + A_1 x - 2A_1)e^{-x}.$$

Значення $y^*, y^{*'}, y^{*''}$ підставимо у вихідне рівняння. В результаті маємо

$$8A_1 x + 8A_0 - 6A_1 = x + 1.$$

Зрівняємо коефіцієнти при однакових степенях x :

$$\begin{cases} 8A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = \frac{1}{8}; \\ 8A_0 - 6A_1 = 1 \Rightarrow A_0 = \frac{7}{32} \end{cases}$$

$$\text{Дістанемо } y^* = \left(\frac{7}{32} + \frac{1}{8}x\right) \cdot e^{-x}.$$

Загальний розв'язок має вигляд

$$y = \bar{y} + y^* = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + \frac{1}{8} \left(x + \frac{7}{4}\right) \cdot e^{-x}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти загальний інтеграл, а у випадках, де задано початкові умови, частинний інтеграл.

1. а) $dx - xdy = 0$. б) $y' \cos x + y \sin x = 1, y(0) = 0$.
в) $y'' + 3y' + 2y = 0$. г) $y'' - y = e^{2x}$.
2. а) $y' = e^{x+y}$. б) $y'' = \sin x$.
в) $y'' + y' = 0, y(2) = 0, y'(-1) = 0$. г) $y'' - 5y' + 6y = x^2$.
3. а) $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$. б) $y' + 2xy = 2x^3y^3$.
в) $y'' + y' + y = 0$. г) $y'' + 4y = \sin x$.
4. а) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$. б) $y'' = -y$. в) $y'' = y' - 0,25y$.
г) $y'' - 2y' + 2y = 2x, y(0) = 0, y'(0) = 0$.
5. а) $(x + y^2)y' = 1$. б) $2yy'' = 1 + (y')^2$. в) $xy' = x^3 + y$.
г) $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3), y(0) = 2, y'(0) = 2$.

Відповіді:

1. а) $y = C + \ln x$, б) $y = \sin x$, в) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}$.
3. в) $y = e^{-\frac{x}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$, г)
- $y = \frac{1}{3} \sin x + C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

Р Я Д И

7.3. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ. НЕОБХІДНА ОЗНАКА ЗБІЖНОСТІ РЯДУ

Розглянемо нескінченну послідовність чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$.

Вираз $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ називають *числовим рядом*, числа $u_1, u_2, \dots$ – *членами ряду*, u_n – *загальним членом ряду*. Для означення рядів використовують запис

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Ряд вважається заданим, якщо його загальний член є функцією номеру n .

Приклад. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} + \dots$ - числовий ряд.

Загальний член цього ряду $u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$, сам ряд можна записати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}.$$

Сума n перших членів ряду називається n -ю частковою сумою ряду і позначається $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Ряд називається *збіжним*, якщо послідовність його часткових сум при необмеженому зростанні n прямує до скінченної границі, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Число S називають *сумою ряду*. Якщо при $n \rightarrow \infty$ послідовність часткових сум не прямує до скінченної границі, тоді ряд називають *розбіжним*.

Приклад. Дослідити збіжність рядів.

$$1. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$$

Розв'язання. Запишемо загальний член ряду у вигляді

$$U_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

Складемо n -ні часткові суми ряду

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right), \\ S_2 &= \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{5} \right) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ S_n &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

Ряд збіжний, його сума дорівнює

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

$$2. \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$$

Запишемо n -ну часткову суму ряду

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n,$$

яка становить суму чисел натурального ряду і дорівнює

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Перевіримо збіжність цього ряду за формулою

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n(n+1)) = \infty.$$

Таким чином, ряд, який розглядається, розбіжний.

Залишок ряду $r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$, називається *n-им залишком ряду*. Якщо ряд збіжний, залишок ряду r_n прямує до нуля зі зростанням n .

При дослідженні рядів треба знати: ряд збіжний чи розбіжний. *Необхідна ознака збіжності ряду* формулюється так: якщо ряд збіжний, то загальний член ряду прямує до нуля при нескінченному зростанні n , тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

Невиконання цієї ознаки є достатньою умовою для розбіжності ряду: якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити збіжність рядів.

$$1. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

Розв'язання. Загальний член цього ряду

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Перевіримо виконання необхідної ознаки збіжності цього ряду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0.$$

Необхідна ознака виконується і ряд може бути збіжним.

$$2. \frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{3n-1} + \dots; u_n = \frac{n}{3n-1}$$

Розв'язання. Скористаємось необхідною ознакою

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n-1} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

тобто ряд розбіжний.

Наведена ознака є необхідною, але недостатньою умовою для ствердження, що досліджуваний ряд збіжний. Наприклад, гармонічний ряд

з загальним членом $u_n = \frac{1}{n}$ є розбіжним, незважаючи на те, що

виконується необхідна ознака

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

7.4. ДОСТАТНІ ОЗНАКИ ЗБІЖНОСТІ ЗНАКОПОСТІЙНИХ РЯДІВ

При дослідженні збіжності або розбіжності рядів, по-перше, перевіряють необхідну ознаку, а потім достатню. Наведемо найвживаніші з достатніх ознак.

Ознаки порівняння

Задані два ряди з членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (7.2)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (7.3)$$

а) якщо члени ряду (7.2) не перевершують відповідних членів ряду (7.3) ($u_n \leq v_n$) і ряд (7.2) розбіжний, то й ряд (7.3) розбіжний; якщо ряд (7.3) збіжний, то й ряд (7.2) збіжний;

б) якщо для рядів з загальними членами u_n та v_n відношення $\frac{u_n}{v_n}$ має скінченну границю при необмеженому зростанні n , то ряди збіжні або розбіжні одночасно

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \text{const} \right).$$

Щоб дослідити ряд за допомогою однієї з ознак порівняння, необхідно вибрати інший відомий ряд, з яким можна було б його порівняти. Найчастіше це розбіжний гармонічний ряд із загальним членом

$v_n = \frac{1}{n}$; збіжна нескінченно спадна геометрична прогресія

$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots$ для довільного

$|q| < 1$ та збіжні ряди з загальним членом $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$u_n = \frac{2n+1}{n^2+3}.$$

Розв'язання. Необхідна ознака виконана

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2+3} = 0.$$

Достатня ознака: порівняємо цей ряд із розбіжним гармонічним рядом

$v_n = \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n+1)}{(n^2+3)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)n}{n^2+3} = 2.$$

Таким чином, досліджуваний ряд розбіжний.

Ознака Даламбера

Якщо для ряду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ існує границя відношення наступного члена до попереднього при необмеженому зростанні n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$

тоді при $\rho < 1$ ряд збіжний, при $\rho > 1$ – розбіжний. При $\rho = 1$ ознака відповіді не дає.

Приклад. Дослідити збіжність ряду, який задано загальним членом

$$u_n = \frac{n+1}{2^n \cdot n}.$$

Розв'язання. Знаходимо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2^n \cdot n} = 0.$$

Як бачимо, необхідна ознака виконана. Знаходимо наступний член ряду

$$u_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n+1}(n+1)}.$$

Перевіримо виконання ознаки Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+2)}{2^{n+1}(n+1)}}{\frac{n+1}{2^n \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \cdot 2^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд із загальним членом $u_n = \frac{n+1}{2^{n \cdot n}}$ – збіжний.

Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$ величина $\sqrt[n]{u_n}$ має кінцеву границю при $n \rightarrow \infty$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$, тоді при $\rho < 1$ ряд збіжний, при $\rho > 1$ – розбіжний. При $\rho = 1$ ознака відповіді не дає.

Приклад. Дослідити збіжність ряду

$$u_n = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Розв'язання. Перевіримо необхідну ознаку:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 0 \cdot e = 0.$$

Необхідна ознака виконана.

Згідно з радикальною ознакою Коші дістанемо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збіжний.

Інтегральна ознака Коші

Якщо $f(x)$ при $x \geq 1$ неперервна, додатня й монотонно спадаюча функція, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де $u_n = f(n)$, збіжний або розбіжний в залежності від того, збіжний чи розбіжний невласний інтеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Приклад. Дослідити збіжність рядів.

1. $u_n = \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$

Розв'язання. Неважко переконалось, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = 0$, тобто необхідна ознака виконана. В якості достатньої ознаки використаємо інтегральну ознаку Коші. Функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}.$$

Дослідимо збіжність невласного інтеграла:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+1)\ln(x+1)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln \ln(x+1) \Big|_1^b = \infty.$$

Інтеграл розбіжний, отже розбіжний і ряд.

2. $u_n = \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha > 0).$

Розв'язання. За функцію $f(x)$ візьмемо функцію $\frac{1}{x^{\alpha}} (x \geq 1).$

Розглянемо невласний інтеграл ($\alpha \neq 1$):

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{коли } \alpha > 1 \\ \infty, & \text{коли } \alpha < 1 \end{cases}.$$

При $\alpha = 1$ маємо

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b \rightarrow \infty} \ln|x| \Big|_1^b = \infty.$$

Нагадаємо: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ збіжний при $\alpha > 1$, розбіжний при $\alpha \leq 1$.

7.5. ЗНАКОПЕРЕМІЖНІ РЯДИ. ЗНАКОЗМІННІ РЯДИ

Числовий ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots,$$

де $u_n > 0, n=1,2,\dots$ називається *знакозмінним рядом*.

Достатньою ознакою збіжності знакозмінного ряду є *теорема Лейбниця*: якщо в знакозмінному ряді члени ряду складають спадну послідовність $(u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots)$ і загальний член ряду при необмеженому зростанні n прямує до нуля $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, тоді ряд збіжний, його сума додатня і не перевищує першого члена.

Наприклад, ряд

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

згідно з ознаки Лейбниця є збіжним і його сума не перевищує одиниці.

Достатню ознаку знакопереміжного ряду становить

Теорема: якщо ряд, складений із абсолютних величин членів знакопереміжного ряду збіжний, тоді і початковий ряд збіжний і називається *абсолютно збіжним*. Якщо знакопереміжний ряд збіжний, а ряд із абсолютних величин його членів розбіжний, тоді він називається *умовно збіжним*.

Знакозмінні ряди є частковим випадком знакопереміжних рядів.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $u_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n}{n^2 + 1}$.

Згідно з ознакою Лейбниця маємо:

$$\text{а) } |u_1| > |u_2| > \dots > |u_n| > \dots, \quad \frac{1}{2} > \frac{2}{5} > \frac{3}{10} > \dots$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0.$$

Отже, ряд збіжний.

Складемо ряд із модулів

$$|u_n| = \frac{n}{n^2 + 1}.$$

Цей ряд знакододатний. Для нього необхідна ознака виконана. Згідно

з ознакою порівняння (порівнюємо з розбіжним рядом $v_n = \frac{1}{n}$) маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot n}{n^2+1} = 1.$$

Отже ряд з загальним членом $u_n = \frac{n}{n^2+1}$ розбіжний. Таким чином, ряд з загальним членом

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \text{ умовно збіжний.}$$

7.6. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Ряд, члени якого становлять функції змінної x , називається *функціональним рядом*.

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Сукупність значень змінної x , для яких функції $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ визначені і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збіжний, називають *областю збіжності* функціонального ряду. В області збіжності ряду його сума становить функцію змінної $x : S(x)$.

Для збіжного функціонального ряду його n -й залишок задовольняє формулі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Функціональний ряд у вигляді

$$C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots + C_{n-1}x^{n-1} + C_nx^n + \dots \quad (10.3)$$

називають *степеневим рядом*, сталі $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$ – коефіцієнтами ряду.

Ряд $C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n + \dots$ також є степеневим, він може бути зведений до ряду (10.3) заміною $x-a = x_1$.

Основу дослідження степеневих рядів складає **теорема Абеля**: якщо степеневий ряд (10.3) збіжний для деякого $x = x_0$, тоді він збіжний абсолютно для всіх значень x , для яких

$$|x| < x_0;$$

якщо ж ряд (10.3) розбіжний для $x = x_0$, то він розбіжний для всіх значень x , для яких $|x| > x_0$.

Якщо степеневий ряд абсолютно збіжний для усіх значень x із інтервалу $[-R, R]$, то такий інтервал є інтервалом збіжності. Іншими словами, ряд збіжний для усіх $|x| < R$.

Питання збіжності для $x = -R$, $x = R$ вирішується конкретно для кожного ряду.

Радіус збіжності степеневого ряду визначається за формулою

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|.$$

Основні властивості степеневих рядів

1. Якщо степеневий ряд збіжний, то його сума неперервна функція від x .

2. Степеневий ряд можна почленно диференціювати, при цьому сума знайденого ряду дорівнює похідній від суми початкового ряду.

3. Степеневий ряд в області збіжності можна почленно інтегрувати, при цьому сума знайденого ряду дорівнює інтегралу від суми початкового ряду.

Приклад. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{x^n}{n(n+1)} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Розв'язання. Запишемо

$$C_n = \frac{1}{n(n+1)}; \quad C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Знайдемо радіус збіжності

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = 1.$$

Таким чином, ряд збіжний для усіх значень x , для яких $|x| < 1$. Дослідимо збіжність ряду для $x = 1$ та $x = -1$;

а) $x = 1$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Цей ряд збіжний, тому для нього виконана необхідна ознака і достатня ознака порівняння (порівняти із збіжним рядом $V_n = \frac{1}{n^2}$);

б) $x = -1$, маємо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}.$$

Згідно з ознакою Лейбница цей ряд збіжний. Отже, початковий степеневий ряд збіжний на відрізку $x \in [-1; 1]$.

7.7. РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЙ У СТЕПЕНЕВІ РЯДИ. ЗАСТОСУВАННЯ РЯДІВ ДО НАБЛИЖЕНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Основними для розвинення функції в степеневі ряди є

формула Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \dots,$$

формула Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

На основі цих формул можна знайти розвинення в степеневий ряд функцій: e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\arctg x$, $\arcsin x$, $(1+x)^m$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\arctg x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \quad (-1 < x < 1),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

Використавши наведені формули для розвинення функцій у степеневий ряд,

можна обчислити значення цих функцій з яким завгодно ступенем точності.

Приклади 1. Обчислити $\sin 20^\circ$ з точністю до 10^{-4} .

Розв'язання. Запишемо ряд для функції

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$$

За умовою $x = 20^\circ = \frac{\pi}{9}$. Отже, маємо:

$$\sin 20^\circ = \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^3 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n-1} + \dots$$

Цей знакзмінний ряд збігається і має суму

$$S = S_n + R_n.$$

Тут S_n – n -на часткова сума, R_n – n -й залишок ряду і

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1}.$$

Треба знайти необхідне значення n , щоб

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{9}\right)^{2n+1} < 10^{-4}$$

Так при $n = 2$ залишок

$$R_2 \leq \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^5}{120} \approx 4,3 \cdot 10^{-5} < 10^{-4}.$$

Тому

$$\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{\left(\frac{\pi}{9}\right)^3}{6} \approx 0,349066 - 0,007088 \approx 0,341978.$$

2. Обчислити $\ln(1,04) = \ln(1+0,04)$

Розв'язання. Скористаємось рядом для функції

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$$

Для $x = 0,04$ маємо

$$\ln(1,04) = \ln(1+0,04) \approx 0,04 - \frac{(0,04)^2}{2} \approx 0,04 - 0,008 = 0,0392,$$

$$R_2 < \frac{(0,04)^3}{3} \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

Таким чином ми провели обчислення з точністю до 0,0001.

3. Обчислити $\sqrt[5]{40}$

Розв'язання. Зазначене число представимо

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{32+8} = 2 \sqrt[5]{1+\frac{1}{4}} = 2(1+0,25)^{\frac{1}{5}}.$$

Використаємо біноміальний ряд

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Для $x = 0,25$, $m = \frac{1}{5}$. Одержимо знакзмінний ряд

$$\sqrt[5]{40} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = 2 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{42} + \dots\right).$$

Третій член ряду

$$\frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5}}{2!} \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{1}{2 \cdot 100} < \frac{1}{100}.$$

Тому

$$\sqrt[5]{40} \approx 2 \left(1 + \frac{1}{5} \cdot 0,25 \right) = 2 \cdot 1,05 = 2,1.$$

Таким чином обчислення проведено з точністю до 0,01.

4. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{0,1}^{0,25} \frac{\sin x}{x} dx$$

Розв'язання. Використаємо розвинення функції $\sin x$ в ряд

$$\begin{aligned} \int_{0,1}^{0,25} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots \right) dx &= \int_{0,1}^{0,25} \left(1 - \frac{x^2}{6} + \dots \right) dx \approx \left(x - \frac{x^3}{18} \right) \Big|_{0,1}^{0,25} = \\ &= 0,25 - \frac{(0,25)^3}{18} - 0,1 + \frac{(0,1)^3}{18} \approx 0,1414. \end{aligned}$$

Врахуванням тільки перших двох членів ряду, з огляду на оцінку наступного члена

$$\frac{(0,25)^5}{5!} - \frac{(0,1)^5}{5!} = \frac{1}{4^5 \cdot 120} - \frac{1}{10^5 \cdot 120} < 10^{-5},$$

можна гарантувати точність записаних цифр в результаті.

Розв'язування типових прикладів

1. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{3n+4}$, скориставшись необхідною ознакою збіжності.

Розв'язання. Обчислимо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-3}{3n+4} = \frac{2}{3} \neq 0 \Rightarrow \text{ряд розбіжний}$$

(не виконується необхідна ознака збіжності рядів).

2. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою порівняння рядів.

Відомо, що $\ln(n+1) < n, \quad \forall n \in N \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n}$. Позначаючи

$u_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$; $v_n = \frac{1}{n}$ і маючи на увазі, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний (гармонійний ряд), на основі порівняльної ознаки робимо висновок, що

досліджуваний ряд теж розбіжний.

3. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера. Записуємо

$$a_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}},$$

а потім обчислюємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} > 1 \Rightarrow$$

ряд розбіжний.

4. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Розв'язання. Даний ряд знакопереміжний, він задовольняє умовам теореми Лейбніца: його члени за абсолютною величиною монотонно спадають,

коли n зростає, і, крім того, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} = 0$.

Таким чином, цей ряд за теоремою Лейбніца збігається. Розглянемо ряд, який складено із модулів членів досліджуваного ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

Ураховуючи, що $\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \sim \frac{1}{n}$ при $n \rightarrow \infty$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ розбіжний, то ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ також розбігається, а вихідний ряд збігається умовно.

5. Обчислити з точністю $\delta = 10^{-3}$ значення $e^{0,1}$.

Розв'язання. Скористаємося рядом Маклорена функції $y = e^x$, поклавши $x = 0,1$:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{0,01}{2!} + \frac{0,001}{3!} + \dots$$

Залишковий член $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\theta \cdot x} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!},$

де $0 < \theta < 1$; при $x = 0,1$

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta \cdot 0,1} \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{0,1} \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{3 \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}, \quad \frac{3 \cdot (0,1)^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

Вирішуємо цю нерівність підбором; при $n = 2$ маємо: $\frac{3 \cdot 0,001}{1 \cdot 2 \cdot 3} < 10^{-3}$.

Таким чином, для обчислення із заданою ступінню точності достатньо залишити в ряді 2 члени (не рахуючи $u_0 = 1$):

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + 0,005 = 1,105.$$

6. Обчислити $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$ з точністю $\delta = 10^{-3}$.

Розв'язання. Розклавши $\frac{1}{1-x^4}$ в ряд Маклорена та почленно проінтегрувавши отриманий ряд, можна обчислити даний інтеграл з будь-яким ступенем точності:

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots, \quad |x| < 1,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \dots) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \frac{1}{2^9 \cdot 9} - \dots$$

Оскільки даний ряд знакопереміжний, скористаємося оцінкою залишку:

$$u_3 = \frac{1}{64 \cdot 72} = \frac{1}{4,508} \cdot 10^{-3} < 10^{-3}.$$

Отже, достатньо взяти 2 члени:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{160} = 0,5000 - 0,0060 \approx 0,494.$$

Завдання для самостійної роботи

В задачах знайти інтервал збіжності степеневого ряду.

$$\begin{array}{lll} 1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n^2}. & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n \cdot x^n}{n+1}. & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} x^n}{n!}. \\ 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{3^n \cdot (n+1)}. & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) \cdot x^n}{2^n \cdot (n^2+1)}. & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n n}. \end{array}$$

Відповіді: 1. $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$. 3. $-\infty < x < \infty$.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

РОЗДІЛ VIII. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА ДОБУТКУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

8.1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ ТА ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

Події (явища) що спостерігаються нами можна поділити на вірогідні, неможливі та випадкові.

Вірогідною називають подію, яка обов'язково відбудеться, якщо буде виконана певна сукупність умов S . Наприклад, якщо урна містить тільки білі кулі, то вилучення з урни білої кулі – вірогідна подія.

Неможливою називають подію, яка заздалегідь не відбудеться, якщо буде виконана певна сукупність умов S . Наприклад, урна містить тільки білі кулі. Вилучення з урни чорної кулі – подія неможлива.

Випадковою називають подію, яка при виконанні певної сукупності умов S може відбутися або не відбутися. Наприклад, якщо підкинуто монету, то вона може впасти так, що з'явиться або герб, або число. Подія “при киданні монети з'явився герб” – випадкова.

Теорія ймовірностей є розділ математики, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових подій.

Подальше ми будемо розглядати подію як результат випробування.

Випадкові події прийнято позначати прописними (великими) літерами латинського алфавіту: $A, B, C, \dots$

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *несумісними*, якщо поява однієї з них виключає появу інших подій в одному і тому ж випробуванні. Наприклад, якщо кинуть монету, то поява герба виключає появу числа.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ називають *єдино можливими*, якщо при випробуванні обов'язково з'явиться хоча б одна з них. Наприклад, нехай в урни містяться білі, чорні та червоні кулі. Добуваємо з урни кулю, вона може виявитися білою (подія A_1), чорною (подія A_2) або червоною (подія A_3). За визначенням події A_1, A_2, A_3 – єдино можливі.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ єдино можливі та несумісні утворюють *повну групу подій*. Наприклад, при підкиданні грального кубика може випасти одно, два, три, чотири, п'ять або шість очок (відповідно події $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$). Ці події єдино можливі та несумісні, отже, вони утворюють повну групу подій.

Дві події, що утворюють повну групу подій називаються *протилежними подіями*. Якщо A – деяка подія, то протилежну їй подію

позначають $\bar{A}$. Наприклад, якщо підкидають монету, то може випасти або герб, або число. Ці події протилежні.

Події називають *рівноможливими*, якщо є підстава вважати, що одна з цих подій не є більш можливою, чим інші. Наприклад, поява того чи іншого числа очок при підкиданні грального кубика є подіями рівноможливими.

8.2. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

При розв'язанні деяких задач з теорії ймовірностей часто використовують поняття розділу елементарної математики – комбінаторики. Наведемо деякі відомості з цієї теорії.

Розглянемо множини (групи), які мають скінченну кількість елементів n .

Перестановками з n елементів називають групи, що містять всі n елементів і відрізняються між собою лише порядком елементів.

Число перестановок з n елементів знаходять за формулою

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!,$$

де $n!$ (читається “ен – факторіал”) – добуток натуральних чисел від 1 до n включно, тобто

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n = n!.$$

Наприклад, $P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$.

Розміщеннями з n елементів по k в кожному ($n \geq k$) називаються такі групи, в кожному з яких входить k елементів, вибраних з даних n елементів, і які відрізняються друг від друга або самими елементами, або порядком їх розташування.

Число розміщень з n елементів по k знаходять за формулою

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Наприклад, $A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$

Сполученнями (комбінаціями) з n елементів по k ($n \geq k$) називають групи, в кожному з яких входить k елементів, обраних з даних n елементів, які відрізняються один від одного лише самими елементами (порядок не враховується).

Число сполучень з n елементів по k знаходять за формулою

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{або} \quad C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Для спрощення обчислень при $k > \frac{1}{2}$ корисно застосовувати властивість сполучень:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Наприклад, $C_{20}^{18} = C_{20}^2 = \frac{A_{20}^2}{P_2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190;$

8.3. КЛАСИЧНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ.

Нехай кожен з можливих результатів випробування, тобто кожен подію, яка може відбутися у випробуванні, назвемо *елементарною подією* або *випадком* і нехай мають місце наступні умови:

1. Число випадків (елементарних подій), що утворюють повну групу, кінцеве і дорівнює n (позначимо ці випадки $E_1, E_2, \dots, E_n$).

2. Всі ці випадки рівноможливі.

Нехай наступні m подій $E_{i_1}, E_{i_2}, \dots, E_{i_m}$ – елементарні події (випадки), що сприяють появі деякої події A

Тоді ймовірністю події A називається відношення числа m випадків, що сприяють появі цієї події до загального числа n усіх єдино можливих і рівноможливих випадків.

Ймовірність події A позначається символом $P(A)$. Таким чином

$$P(A) = \frac{m}{n}. \quad (8.1)$$

Таке визначення ймовірності називається класичним, воно було сформульовано французьким математиком Лапласом.

З визначення ймовірності витікають наступні властивості.

1. Ймовірність вірогідної події дорівнює одиниці.
2. Ймовірність неможливої події дорівнює нулю.
3. Ймовірність випадкової події є додатне число, що міститься між нулем та одиницею, тобто

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Для обчислення ймовірностей за формулою (8.1) необхідно вміти обчислювати загальне число елементарних подій (випадків) у випробуванні, а також число подій, що сприяють появі даної події A .

8.4 ВІДНОСНА ЧАСТОТА. СТАТИСТИЧНА ЙМОВІРНІСТЬ

Розглянемо випробування, у якому може з'явитися подія A . Нехай це випробування виконується n разів за одних і тих же постійних умов, тобто проводиться серія з n однакових випробувань і нехай подія A з'явилася в серії m разів.

Відносною частотою появи події A називають відношення числа випробувань, у яких подія з'явилася, до загального числа фактично проведених випробувань.

Таким чином, відносна частота події A визначається формулой

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Порівнюючи визначення ймовірності та відносної частоти приходимо до висновку, що визначення ймовірності не потребує, щоб випробування відбувались в дійсності, а визначення відносної частоти припускає, що випробування були проведені фактично. Іншими словами, ймовірність обчислюють до випробування, а відносну частоту – після випробування.

Наприклад, в партії, що містить 100 випадково відібраних виробів, товаровознавець виявив 4 нестандартних вироби. Відносна частота появи нестандартних виробів

$$W(A) = \frac{4}{100} = 0,04.$$

Тривалі спостереження показали, якщо випробування відбуваються в однакових умовах, в кожній з яких число випробувань є достатньо великим, то *відносна частота виявляє властивість стійкості*. Ця властивість полягає в тому, що в різних випробуваннях відносна частота змінюється мало (тим менш, чим більш проведено випробувань), коливаючись навколо деякого постійного числа, яке і є ймовірністю появи випадкової події. Наприклад, якщо багато разів підряд підкидати монету, то виявляється, що частота появи герба згодом стабілізується, наближаючись до $\frac{1}{2}$, при умові збільшення числа підкидань монети.

Отже, нарівні з класичним визначенням ймовірності користуються також *статистичним визначенням*, приймаючи за ймовірність події відносну частоту або число, близьке до неї.

Приклади безпосереднього обчислення ймовірностей.

Приклад 1. Підкидають монету один раз. Яка ймовірність, що випаде герб?

► Позначимо через A подію “випав герб”. Загальне число рівноможливих випадків $n=2$, а сприяє події A тільки один випадок, тобто $m=1$. Отже, маємо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 2. З урни, яка містить три білих і чотири чорних куль, навмання взяли одну кулю. Яка ймовірність того, що ця куля біла?

► Позначимо через A подію “взято білу кулю”. Загальна кількість рівноможливих випадків $n = 7$. Сприяє події A три випадки (кількість білих куль), тобто $m = 3$. Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{7}. \blacktriangleleft$$

Приклад 3. Гральний кубик підкидають один раз. Яка ймовірність появи п’яти очок?

► Позначимо через A подію “випало п’ять очок”. Загальне число рівноможливих випадків $n = 6$, тому що цей кубик має шість граней, які перенумеровані 1,2,3,4,5,6. Сприяє події A тільки один випадок, тобто $m = 1$. Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}. \blacktriangleleft$$

Приклад 4. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що сума очок, що випали, дорівнює чотирьом.

► Нехай A – подія “сума очок дорівнює чотирьом”. Загальне число рівноможливих випадків дорівнює $6 \cdot 6 = 36$, тому що кожне число очок, що випали на одному кубіку може сполучатися з усіма числами очок другого кубіка. Серед цих випадків сприяють події A тільки три: (1; 3), (3; 1), (2; 2). Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}. \blacktriangleleft$$

Приклад 5. З партії, що містить 10 виробів, серед яких є 3 бракованих, взято 6 виробів. Знайти ймовірність події A – серед узятих виробів 2 бракованих.

► Загальне число рівноможливих випадків випробування дорівнює числу способів, за допомогою яких можна вилучити 6 виробів з 10,

тобто числу сполучень з 10 елементів по 6 (C_{10}^6).

Підрахуємо число випадків, що сприяють події A : - серед шести узятих виробів два бракованих, які можна вилучити з трьох бракованих, це можна виконати C_3^2 засобами; при цьому решта $6-2=4$ виробів повинна бути небракованими; вилучити 4 небракованих виробів з загальної кількості $10-3=7$ небракованих виробів можна C_7^4 засобами.

Отже, число випадків, що сприяють події A , дорівнює $C_3^2 \cdot C_7^4$, а шукана ймовірність дорівнює

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_3^2 \cdot C_7^4}{C_{10}^6} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Приклад 6. На кожній з п'яти однакових карток надруковано 5 літер: a, k, m, n, p . Картки ретельно перемішані. Знайти ймовірність того, що на чотирьох вилучених по одній і розташованих “в одну лінію” картках можна прочитати слово “кран”.

► Загальне число рівноможливих випадків випробування дорівнює числу способів, за допомогою яких можна вилучити 4 картки з 5, тобто дорівнює числу розміщень з 5 елементів по 4 – A_5^4 . Сприяє появі слова “кран” лише один випадок. Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^4} = \frac{1}{120}. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Монету підкидують двічі. Знайти ймовірність того, що: принаймні один раз з'явиться герб (подія A); при другому підкиданні з'явиться герб (подія B).

2. Гральний кубик підкидують один раз. Знайти ймовірність того, що: число очок, що з'явилися, ділиться на 2 (подія A); з'явилося число очок не більше 3 (подія B).

3. Гральний кубик підкидають двічі. Знайти ймовірність того, що: сума очок, що випали, дорівнює 8 (подія A); при другому підкиданні з'явилося 6 очок (подія B).

4. З урни, що містить п'ять білих і чотири чорних кулі, навмання взято одну. Знайти ймовірність того, що ця куля: а) біла; б) чорна.

5. Набираючи номер телефону, абонент забув дві останні цифри, пам'ятаючи, що вони різні. Знайти ймовірність того, що перший навмання набраний номер є правильним.

6. З партії, що містить N виробів, серед яких є n бракованих, взято m виробів. Знайти ймовірність того, що серед узятих виробів k бракованих ($n < N$; $k \leq m$).

7. У партії із десяти виробів знаходиться сім стандартних. Навмання взято шість виробів. Яка ймовірність того, що: а) серед них чотири стандартних; б) серед них більше чотирьох стандартних.

8. Із семи карток з буквами $M, H, O, П, P, C, T$ навмання одна за одною обираються п'ять і розташовуються в порядку появи. Знайти ймовірність того, що з'явиться слово „спорт”

В і д п о в і д і:

$$\begin{aligned} 1. P(A) = \frac{3}{4}; \quad P(B) = \frac{1}{2}. \quad 2. P(A) = \frac{1}{2}; \quad P(B) = \frac{1}{2}. \quad 3. P(A) = \frac{5}{36}; \\ P(B) = \frac{1}{6}. \quad 4. \text{ а) } \frac{5}{9}; \quad \text{ б) } \frac{4}{9}. \quad 5. \frac{1}{90}. \quad 6. \frac{C_3^2 \cdot C_7^4}{C_{10}^6} \quad 7. \text{ а) } \frac{1}{2}; \quad \text{ б) } \frac{1}{3}. \quad 8. \frac{1}{2520}. \end{aligned}$$

8.5. ТЕОРЕМИ ДОДАВАННЯ ТА ДОБУТКУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Сумою двох сумісних подій A і B називається подія C , яка полягає в появі хоча б однієї з подій A або B . Аналогічно, сумою кількох сумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$ називається подія, яка полягає в появі хоча б однієї з цих подій.

Сумою двох несумісних подій A і B називається подія C , яка полягає в появі або події A , або події B .

Теорема. Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Методом математичної індукції теорему можна узагальнити на будь-яке кінцеве число попарно несумісних подій $A_1, A_2, \dots, A_n$:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) \quad (8.2)$$

Наслідок 1. Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу подій, дорівнює одиниці, тобто, якщо $A_1, A_2, \dots, A_n$ – повна група, то

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1 \quad (8.3)$$

Наслідок 2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці, тобто

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1. \quad (8.4)$$

Звідси

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A). \quad (8.5)$$

Якщо позначити $P(A)$ через p , а $P(\bar{A})$ через q , то рівність (8.4) можна записати у вигляді

$$p + q = 1. \quad (8.6)$$

Приклад. Стрілець робить один постріл по мішені, яка поділена на дві частини. Ймовірність влучення в першу частину дорівнює 0,45, у другу – 0,35. При влученні в першу або другу частини загоряється лампочка. Знайти ймовірність загоряння лампочки.

► Події A – “стрілець влучив в першу частину” і B – “стрілець влучив у другу частину” – несумісні (влучення в одну частину виключає влучення в другу), тому може бути застасована теорема додавання.

Отже, шукана ймовірність

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0,45 + 0,35 = 0,8. \blacktriangleleft$$

Подія A називається *незалежною від події B* , якщо ймовірність події A не залежить від того, відбулася чи не відбулася подія B .

Приклад. Два стрільця роблять постріл в ціль. Нехай A – “влучення в ціль першим стрільцем”, B – “влучення в ціль другим стрільцем”. Очевидно, що ймовірність влучення в ціль першим стрільцем не залежить від того, влучив чи не влучив другий стрілець. Отже, подія A не залежить від події B .

Подія A називається *залежною від події B* , якщо ймовірність події A залежить від того, відбулася чи не відбулася подія B .

Приклад. Урна містить 3 білі і 2 чорні кулі. Очевидно, що ймовірність вилучення навмання білої кулі (подія A) дорівнює $\frac{3}{5}$.

Припустимо, що з урни вилучили одну кулю, яка виявилася чорною (подія B). Тоді ймовірність вилучення білої кулі після того, як відбулася подія B , стала іншою і дорівнює $\frac{3}{4}$.

Отже, подія A залежить від події B .

Ймовірність появи події A при умові, що подія B вже відбулася, називається *умовною* і позначається символом $P_B(A)$.

Якщо подія A не залежить від події B , то має місце рівність

$$P_B(A) = P(A). \quad (8.7)$$

Добутком двох подій A і B називають подію AB , яка полягає в сумісній появі (суміщенні) цих подій.

Теорема (без доказу). Ймовірність сумісної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \quad (8.8)$$

Наслідок. Ймовірність сумісної появи кількох подій, незалежних в сукупності, дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n). \quad (8.9)$$

Приклад. Два стрільці незалежно один від одного стріляють по цілі. Ймовірність влучення для першого 0,7, а для другого 0,8. Знайти ймовірність того, що обидва влучать у ціль.

► Нехай подія A - “перший стрілець влучив в ціль”, $P(A) = 0,7$; B - “другий стрілець влучив в ціль”, $P(B) = 0,8$; C - “обидва стрільці влучили в ціль”. Подія C полягає в сумісній появі події A і B , отже $C = AB$. А так, як події A і B - незалежні, то

$$P(C) = P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56. \blacktriangleleft$$

Теорема. Ймовірність сумісної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність другої, обчисленої в припущенні, що перша подія вже мала місце:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B). \quad (8.10)$$

Відмітимо, що справедлива рівність:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A). \quad (8.11)$$

Наслідок. Ймовірність сумісної появи кількох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовні ймовірності усіх інших, причому ймовірність кожної наступної події обчислюється в припущенні, що усі попередні події вже мали місце:

$$P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n). \quad (8.12)$$

Приклад. Урна містить 5 білих та 4 чорних кулі. Із урни навмання виймають одну за одною три кулі, не повертаючи вийняту кулю в урну

(вибірка без повернення). Знайти ймовірність того, що всі вони білі.

► Нехай подія A – “перша куля біла”; B – “друга куля біла”; C – “третья куля біла”. Тоді суміщення цих подій ABC – “всі кулі білі”.

Ймовірність появи білої кулі в першому випробуванні

$$P(A) = \frac{5}{9}.$$

Ймовірність появи білої кулі у другому випробуванні обчислена в припущенні, що в першому випробуванні з’явилась біла куля, тобто умовна ймовірність

$$P_A(B) = \frac{4}{8}.$$

Ймовірність появи білої кулі в третьому випробуванні обчислена в припущенні, що в першому і другому випробуваннях з’явилися дві білі кулі.

$$P_{AB}(C) = \frac{3}{7}.$$

Отже, шукана ймовірність

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{5}{42}. \blacktriangleleft$$

8.6. ЙМОВІРНІСТЬ ПОЯВИ ХОЧА Б ОДНІЄЇ ВИПАДКОВОЇ ПОДІЇ

Нехай події $A_1, A_2, \dots, A_n$ незалежні в сукупності, причому $P(A_1) = p_1$, $P(A_2) = p_2, \dots, P(A_n) = p_n$; нехай в результаті випробування можуть відбутися всі події або частина з них, або жодна з них.

Ймовірність появи події A , що складається з появи хоча б однієї з подій $A_1, A_2, \dots, A_n$, незалежних у сукупності, дорівнює різниці між одиницею і добутком ймовірностей протилежних подій $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n, \quad (8.13)$$

де $q_i = P(\bar{A}_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Зокрема, якщо усі n подій мають однакову ймовірність, то ймовірність появи хоча б однієї з цих подій дорівнює:

$$P(A) = 1 - q^n. \quad (8.14)$$

Приклад. Ймовірність влучення у мішень першого стрільця дорівнює 0,9, другого стрільця – 0,8, третього – 0,7. Усі стрільці роблять по одному пострілу. Знайти ймовірність влучення в мішень хоча б одного стрільця.

► Позначимо події

A – перший стрілець влучив у мішень; B – другий стрілець влучив у мішень;

C – третій стрілець влучив у мішень; D – хоча б один стрілець влучив у мішень.

Згідно формули (8.13) маємо

$$P(D) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}).$$

Очевидно, що

$$P(\bar{A}) = q_1 = 1 - 0,9 = 0,1; \quad P(\bar{B}) = q_2 = 1 - 0,8 = 0,2;$$

$$P(\bar{C}) = q_3 = 1 - 0,7 = 0,3.$$

Отже, маємо

$$P(D) = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,3 = 0,994. \blacktriangleleft$$

Приклад. Ймовірність хоча б одного влучення у мішень стрільцем при трьох пострілах дорівнює 0,875. Знайти ймовірність влучення при одному пострілі.

► Ймовірність влучення у мішень хоча б при одному з трьох пострілів (подія A) дорівнює

$$P(A) = 1 - q^n,$$

де q – ймовірність промаху.

За умови $P(A) = 0,875$, отже

$$0,875 = 1 - q^3,$$

або

$$q^3 = 1 - 0,875 = 0,125.$$

Звідси

$$q = \sqrt[3]{0,125} = 0,5.$$

Отже, шукана ймовірність дорівнює

$$p = 1 - q = 1 - 0,5 = 0,5. \blacktriangleleft$$

8.7. ТЕОРЕМА ДОДАВАННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ СУМІСНИХ ПОДІЙ

Теорема. Ймовірність появи хоча б однієї з двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій без ймовірності їх сумісної появи, тобто

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (8.15)$$

Зауваження. Якщо події A та B незалежні, то формула (8.15) має вигляд

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B).$$

Для залежних подій маємо

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Завдання для самостійної роботи

1. Відділ технічного контролю перевіряє вироби на стандартність. Ймовірність того, що виріб є стандартним, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з двох перевірених виробів тільки один є стандартним.

2. Два стрільці роблять по одному пострілу по мішені. Ймовірність влучення у мішень для першого стрільця складає 0,8, а для другого – 0,7. Знайти ймовірність того, що тільки один з стрільців влучить у мішень.

3. З партії виробів товаровознавець відбирає вироби вищого сорту. Ймовірність того, що навмання вибраний виріб є вищого ґатунку, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що з трьох перевірених виробів тільки два будуть вищого ґатунку.

4. Робітник обслуговує три верстати. Ймовірність того, що на протязі години верстат не потребує уваги робітника, для першого верстата дорівнює 0,9, для другого – 0,8 і для третього – 0,95. Знайти ймовірність того, що: а) на протязі деякої години жоден з верстатів не буде вимагати уваги робітника;

б) хоча б один з верстатів не буде вимагати уваги робітника.

5. В урні 7 білих та 3 чорних кульки. З урни навмання вилучили дві кульки. Знайти ймовірність того, що обидві кульки є білими.

6. Студент прийшов на іспит, вивчивши лише 20 з 25 питань програми. Знайти ймовірність того, що студент відповів на всі три запитання, що задав йому екзаменатор.

7. Стрілець влучає у “десятку” з ймовірністю 0,1, в “дев’ятку” – з ймовірністю 0,25, у “вісімку” – з ймовірністю 0,45. Знайти ймовірність того, що при одному пострілі вибито: а) не менше 8 очок; б) більше 8 очок.

8. З повної колоди карт (52 карти) навмання виймають три карти (без повернення). Знайти ймовірність того, що серед цих карт не з’явиться жодного туза.

9. Студент вивчив 24 з 30 питань програми. Знайти ймовірність скласти залік, якщо після неправильної відповіді викладач задає ще одне запитання.

Відповіді:

1. 0.32. 2. 0,38. 4. а) 0,684; б) 0.999. 5. $\frac{7}{15}$. 6. $\frac{57}{115}$. 7. а) 0,8; б) 0,35. 8. 0,783. 9. $1 - \frac{6}{30} \cdot \frac{5}{29} = \frac{28}{29}$.

РОЗДІЛ ІХ. НАСЛІДКИ ТЕОРЕМ ДОДАВАННЯ ТА ДОБУТКУ ЙМОВІРНОСТЕЙ. ПОВТОРНІ НЕЗАЛЕЖНІ ВИПРОБУВАННЯ.

9.1. ФОРМУЛА ПОВНОЇ ЙМОВІРНОСТІ. ФОРМУЛА БЕЙЄСА

Нехай подія A може відбутися лише сумісно з появою однієї з несумісних подій $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу подій. Нехай відомі ймовірності цих подій, а також умовні ймовірності $P_{H_1}(A), P_{H_2}(A), \dots, P_{H_n}(A)$.

Тоді ймовірність події A може бути задана за так званою *формулою повної ймовірності*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A),$$

або

$$P(A) = \sum_i^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Помітимо, що події $H_1, H_2, \dots, H_n$ називають *гіпотезами*, тому що заздалегідь невідомо, яка з цих подій буде мати місце.

Приклад. Електричні лампи виготовляються на двох підприємствах. Перше підприємство виготовляє 60 % загальної кількості електроламп, друге – 40 %. Продукція першого підприємства містить 70 % стандартних ламп, другого – 80 %. До магазину надходить продукція обох підприємств. Знайти ймовірність того, що лампа, яку куплено в магазині, є стандартною.

► Нехай подія A – “куплено стандартну лампу”; H_1 – “лампу виготовлено на першому підприємстві”; H_2 – “лампу виготовлено на другому підприємстві”.

За умовою задачі:

$$P(H_1) = 0,6; \quad P_{H_1}(A) = 0,7; \quad P(H_2) = 0,4; \quad P_{H_2}(A) = 0,8.$$

За формулою повної ймовірності маємо:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A) = \\ &= 0,6 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,8 = 0,74. \end{aligned}$$

Нехай подія A може наступити лише сумісно з появою однієї з несумісних подій (гіпотез) $H_1, H_2, \dots, H_n$, що утворюють повну групу

подій. Якщо подія A вже відбулася, причому ймовірність появи події A визначається за формулою повної ймовірності, тобто

$$P(A) = \sum_i^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A),$$

то ймовірності гіпотез можуть бути переоцінені за формулами Бейєса (або формулами гіпотез):

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Приклад. Нехай виконуються умови попереднього прикладу. Припустимо, що електричну лампу куплено. Вона виявилась стандартною. Знайти ймовірність того, що лампа виготовлена на першому підприємстві.

► Користуючись формулами Бейєса та результатами попереднього прикладу, маємо

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,6 \cdot 0,7}{0,74} = 0,57. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. На конвейєр надходять вироби, виготовлені на трьох верстатах. На першому верстаті виготовляється в середньому 0,2 % бракованих виробів, на другому – 0,3 %, на третьому – 0,5 %. Знайти ймовірність попадання на конвейєр бракованого виробу, якщо на першому верстаті вироблено 3000, на другому – 6000, на третьому – 1000 виробів.

2. В урну, що містить три кульки, поклали білу кульку, після чого навмання вилучили одну кульку. Знайти ймовірність того, що вилучена кулька виявиться білою, якщо рівноможливі усі можливі припущення про первісний склад кульок за кольором.

3. У першій з двох однакових урн міститься дві білі та одна чорна кулька, у другій – одна біла та чотири чорних кульки. З навмання обраної урни вилучають одну кульку. 1) Знайти ймовірність того, що вилучено білу кульку. 2) З навмання обраної урни вилучено білу кульку. Знайти ймовірність того, що її вилучено з першої урни.

4. У першій урні знаходиться 6 білих та 4 чорних кульки, у другій – 4 білих та 6 чорних. З першої урни навмання вилучають одну кульку і перекладають в другу. Після цього з другої урни навмання вилучають одну

кульку. 1). Знайти ймовірність того, що ця куля біла. 2). Кулька, вилучена з другої урни, виявилася білою. Знайти ймовірність того, що з першої урни було перекладено білу кульку.

5. В урні чотири кульки. Усі можливі припущення про кількість білих кульок в урні рівноможливі. Навмання з урни вилучають одну кульку. Знайти ймовірність того, що ця кулька біла.

6. На конвеєр надходять вироби, виготовлені на двох верстатах. Продуктивність першого верстату вдвічі більша за продуктивність другого. Перший верстат виробляє в середньому 75 % виробів вищого гатунку, другий – 90 %. 1) Знайти ймовірність того, що обраний навмання з конвеєра виріб є вищого гатунку. 2) Обраний навмання з конвеєра виріб є вищого гатунку. Знайти ймовірність того, що його вироблено першим верстатом.

7. Три мисливці зробили одночасно по одному пострілу по кабану, якого вбито однією кулею. Знайти ймовірність того, що кабана вбито першим, другим або третім мисливцем, якщо ймовірності влучення для них відповідно є

$$p_1 = 0,5 \quad p_2 = 0,6 \quad p_3 = 0,4.$$

Відповіді:

1. 0,0029. 2. $\frac{5}{8}$. 3. 1) $\frac{13}{30}$; 2) $\frac{10}{13}$. 4. 1) $\frac{23}{55}$; 2) $\frac{15}{23}$. 5. $\frac{1}{2}$. 6. 1) 0,8;
2) $\frac{5}{8} = 0,625$. 7. $\frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{4}{15}$.

9.2. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Якщо відбуваються випробування, в кожному з яких ймовірність появи події A не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називають *незалежними відносно події A* . Розглянемо незалежні випробування, в кожному з яких ймовірність появи події постійна.

Формула Бернуллі. Ймовірність того, що в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p ($0 < p < 1$), подія відбувається рівно k разів (не має значення, в якій послідовності), дорівнює

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

де $q = 1 - p$.

Цю формулу називають *формулою Бернуллі*, або *біномною*, оскільки права частина її є загальним членом розкладу бінома Ньютона $(p + q)^n$.

Ймовірність того, що подія відбудеться: а) менш m разів; б) більш m разів; в) не менш m разів; г) не більш m разів – знаходять відповідно за формулами:

$$а) P_n(k < m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k-1);$$

$$б) P_n(k > m) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + \dots + P_n(n);$$

$$в) P_n(k \geq m) = P_n(k) + P_n(k+1) + \dots + P_n(n);$$

$$г) P_n(k \leq m) = P_n(0) + P_n(1) + \dots + P_n(k).$$

Приклад. Монета підкидається 5 разів. Знайти ймовірність того, що:

а) герб з'явиться 3 рази;

б) герб з'явиться менше трьох разів;

в) герб з'явиться не менш трьох разів.

► а) За умовою $n = 5$; $k = 3$; $p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - p = \frac{1}{2}$. Отже за формулою Бернуллі маємо

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot p^3 \cdot q^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

б) Позначимо подію “герб з'явиться менш трьох разів” буквою C і будемо шукати ймовірності того, що герб не з'явиться жодного разу, або герб з'явиться один раз, або два рази, тобто:

$$\begin{aligned} P(C) &= P_5(0) + P_5(1) + P_5(2) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \\ &= \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

в) Перший варіант розв'язку. Позначимо подію “герб з'явиться не менше трьох разів” буквою D і будемо шукати ймовірності того, що герб з'явиться або три рази, або чотири, або п'ять, тобто

$$\begin{aligned} P(D) &= P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right) + C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \\ &= 10 \cdot \frac{1}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Другий варіант розв'язку. Не важко помітити, що події C і D –

протилежні, тобто
 $D = \bar{C}$. Отже

$$P(D) = P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Досліджуючи попередню задачу, відмічаємо, що ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях k раз ($k=0, 1, 2, \dots, n$) спочатку зростає до певного значення $k = k_0$, а потім спадає.

Найімовірнішим числом k_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається таке число, для якого ймовірність $P_n(k_0)$ перевищує (або хоча б не менш) ймовірності інших можливих подій випробування.

Найімовірніше число k_0 визначається з подвійної нерівності

$$np - q \leq k_0 \leq np + p,$$

причому:

а) якщо число $np - q$ – ціле, то існує два найімовірніших числа;
б) якщо число $np - q$ є дробовим, то існує одне найімовірніше число k_0 ;

в) якщо np – ціле, то $k_0 = np$.

Приклад. Склад містить 30 ящиків скляних виробів. Ймовірність того, що в одному, навмання взятому ящику, вироби виявляться цілими, дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число ящиків, в яких усі вироби виявляться непошкодженими.

► За умовою $n = 30$; $p = 0,9$; $q = 0,1$. Отже, маємо
 $np - q \leq k_0 \leq np + p$, або $30 \cdot 0,9 - 0,1 \leq k_0 \leq 30 \cdot 0,9 + 0,9$, або $26,9 \leq k_0 \leq 27,9$.
Звідси $k_0 = 27$. ◀

9.3. ЛОКАЛЬНА ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Очевидно, що використання формули Бернуллі при достатньо великій кількості повторних незалежних випробувань приводить до необхідності оперувати дуже великими числами. Цих складностей можна позбутися, використовуючи **локальну теорему Лапласа**.

Теорема. Нехай в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A дорівнює p ($p \neq 0$; $p \neq 1$), тоді ймовірність того, що подія A з'явиться рівно k разів, може бути наближено (тим точніше, чим більше n) обчислена за формулою

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x),$$

де функція $\varphi(x)$ має вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{а} \quad x = \frac{\kappa - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції $\varphi(x)$ не обчислюються безпосередньо за формулою, а визначаються за відповідною таблицею.

Слід відмітити властивості функції $\varphi(x)$. Ця функція парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$, а значення функції для $x \geq 4$ є настільки малими, що їх прийнято вважати рівними нулю. Слід також враховувати, що застосування локальної теореми Лапласа замість формули Бернуллі доцільно (не приводить до істотних похибок) у випадку, якщо $npq \geq 20$.

Приклад. Визначити ймовірність того, що при перевірці 400 виробів з партії, що містить 20 % бракованих виробів, 80 виробів виявляться бракованими.

► За умовою $n = 400$; $p = 0,2$; $q = 0,8$. $q = 1 - 0,2 = 0,8$; $\kappa = 80$.

Оскільки $npq = 400 \cdot 0,2 \cdot 0,8 = 64$ то застосовуючи локальну теорему Лапласа, маємо

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x),$$

$$x = \frac{80 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{0}{8} = 0.$$

За таблицею знаходимо, що $\varphi(0) = 0,3989$.

Отже, маємо

$$P_{400}(80) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3989 = 0,04986. \blacktriangleleft$$

9.4. ІНТЕГРАЛЬНА ТЕОРЕМА ЛАПЛАСА

Часто на практиці виникає необхідність в умовах раніш сформульованого експерименту з n незалежних однакових випробувань визначити ймовірність того, що подія, яка нас цікавить, з'явиться не менше κ_1 і не більше κ_2 разів. Відповідь на це питання дає **інтегральна теорема Лапласа**.

Теорема. Нехай в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A дорівнює p ($p \neq 0$; $p \neq 1$). Тоді ймовірність $P_n(\kappa_1, \kappa_2)$ того, що ця подія A з'явиться не менше κ_1 і не більше κ_2 разів приблизно дорівнює

$$P_n(\kappa_1, \kappa_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

де
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$
 – функція Лапласа, значення якої

табульовані і занесені у відповідну таблицю. При користуванні таблицею необхідно пам'ятати деякі властивості функції $\Phi(x)$. Ця функція є непарною, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Для $x > 5$ можна вважати, що $\Phi(x > 5) \approx 0,5$.

Значення x_1 і x_2 визначаються співвідношеннями

$$x_1 = \frac{\kappa_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{\kappa_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Приклад. Партія виробів містить 20 % брака. Знайти ймовірність того, що серед 400 перевірених виробів трапиться не менше 50 і не більше 90 бракованих.

► За умовою $n = 400$; $p = 0,2$; $q = 0,8$; $\kappa_1 = 50$; $\kappa_2 = 90$.

$$x_1 = \frac{50 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{-30}{8} = -3,75;$$

$$x_2 = \frac{90 - 400 \cdot 0,2}{\sqrt{400 \cdot 0,2 \cdot 0,8}} = \frac{10}{8} = 1,25.$$

Застосовуючи інтегральну теорему Лапласа, маємо

$$P_{400}(50,90) = \Phi(1,25) - \Phi(-3,75) = \Phi(1,25) + \Phi(3,75).$$

За таблицею значень функції Лапласа маємо

$$P_{400}(50,90) = 0,3944 + 0,4970 = 0,8924. \blacktriangleleft$$

9.5. ФОРМУЛА ПУАССОНА

У випадках, коли p досить мале (рідкісні події), замість локальної формули Лапласа використовують наближену **формулу Пуассона**

$$P_n(\kappa) \approx \frac{\lambda^\kappa}{\kappa!} e^{-\lambda},$$

яка дає точніші наближення. Отже, якщо кількість випробувань велика, а ймовірність появи події в кожному випробуванні мала, причому $\lambda = np < 10$, то ймовірність появи події A в n незалежних випробуваннях k разів визначається за формулою Пуассона.

Приклад. Виробник відправив споживачу 500 виробів. Ймовірність пошкодження виробу в путі дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що в путі буде пошкоджено:

- а) три вироби;
- б) менше трьох виробів;
- в) більше трьох виробів;
- г) хоча б один виріб.

► Число $n = 500$, ймовірність $p = 0,002$ мала, а добуток $\lambda = np = 1$. Отже, може бути застосована формула Пуассона.

а) Знайдемо ймовірність пошкодження трьох виробів:

$$P_{500}(3) = \frac{e^{-1}}{3!} = \frac{0,36788}{6} = 0,0613.$$

б) Подія „пошкоджено менше трьох виробів” ($k < 3$) означає, що може бути пошкоджено або 0 виробів, або 1 виріб, або 2 вироби. Отже,

$$\begin{aligned} P_{500}(k < 3) &= P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) = e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2} = e^{-1} \left(2 + \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2,5 \cdot 0,36788 = 0,9197. \end{aligned}$$

в) Подія „пошкоджено не більше трьох виробів” протилежна події „пошкоджено більше трьох виробів”. Тоді

$$P_{500}(k \leq 3) + P_{500}(k > 3) = 1,$$

звідси шукана ймовірність є

$$\begin{aligned} P_{500}(k > 3) &= 1 - (P_{500}(0) + P_{500}(1) + P_{500}(2) + P_{500}(3)) = 1 - (0,9197 + 0,0613) = \\ &= 0,019. \end{aligned}$$

г) Події “пошкоджено хоча б один виріб” (її ймовірність позначимо Q) і “не пошкоджено жодного виробу” – протилежні. Отже,

$$Q = 1 - P_{500}(0) = 1 - e^{-1} = 1 - 0,36788 = 0,632. \blacktriangleleft$$

9.5. ВІДХИЛЕННЯ ВІДНОСНОЇ ЧАСТОТИ ВІД ПОСТІЙНОЇ ЙМОВІРНОСТІ У НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПРОБУВАННЯХ

Нехай в n незалежних однакових випробуваннях, в кожному з яких подія A з'являється з ймовірністю p , подія A з'явилась m раз. Тоді, як вже було відмічено, відносна частота появи події A , або, іншими словами, статистична ймовірність появи події A в одному випробуванні дорівнює $\frac{m}{n}$. Відомо, що при збільшенні кількості випробувань, відносна частота

появи події A – $\frac{m}{n}$ повинна наближатися до теоретичної ймовірності

появи події A в одному випробуванні, тобто до p . Існує можливість за допомогою інтегральної теореми Лапласа оцінити ймовірність того, що в

серії з n випробувань відхилення $\left| \frac{m}{n} - p \right|$ відносної частоти $\frac{m}{n}$ від постійної

ймовірності p за абсолютною величиною не перевищує заданого числа $\varepsilon > 0$. Ця ймовірність наближено дорівнює подвоєному значенню функції

Лапласа при $x = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$, тобто

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Приклад 1. Відомо, що серед виробів, що випускає дане підприємство, 10 % – нестандартних. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 225 виробів відносна частота появи нестандартних виробів відхилиться від ймовірності їх виявлення при перевірці одного виробу за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

► За умовою, ймовірність виявлення нестандартного виробу в одному випробуванні $p = 0,1$; тоді $q = 0,9$; число випробувань $n = 225$; $\varepsilon = 0,02$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{225} - 0,1\right| \leq 0,02\right) &\approx 2\Phi\left(0,02 \sqrt{\frac{225}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(0,02 \cdot \frac{15}{0,3}\right) = 2 \cdot \Phi(1) = 2 \cdot 0,3413 = 0,6826. \end{aligned}$$

Зміст одержаної ймовірності полягає в тому, що при достатньо великій кількості повторних перевірок 225 виробів, приблизно у 68.26 % випадків відхилення відносної частоти від постійної ймовірності

виявлення нестандартного виробу в одній перевірці за абсолютною величиною не перевищить 0,02. ◀

В наступному прикладі можна сформулювати питання інакше. Задавши заздалегідь потрібну ймовірність відхилення відносної частоти

$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$, можна визначити необхідне число випробувань.

Приклад 2. Визначити потрібне число випробувань n , в яких з ймовірністю 0,9544 можна очікувати відхилення відносної частоти $\frac{m}{n}$ від постійної ймовірності $p=0,1$ за абсолютною величиною не більше, ніж на 0,02.

► За умовою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,1\right| \leq 0,02\right) \approx 0,9544, \text{ тоді}$$

$$2\Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,1 \cdot 0,9}}\right) = 0,9544 \Rightarrow \Phi\left(0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,09}}\right) = 0,4779.$$

За таблицею знаходимо відповідне значення аргументу функції Лапласа. Так як $\Phi(2) = 0,4772$, то

$$0,02 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,09}} = 2 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{0,3} = 100 \Rightarrow \sqrt{n} = 300 \Rightarrow n = 900. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Ймовірність влучення в ціль під час одного пострілу дорівнює 0,4. Зроблено 4 незалежних постріли. Знайти ймовірність того, що мають місце:
а) два влучення; б) хоча б одне влучення; в) менш двох влучень.

2. Ви граєте у шахи з рівним собі за силою гри партнером. Що більш ймовірно виграти: а) чотири партії з восьми або три партії з п'яти; б) не менш трьох партій з чотирьох або не менш п'яти партій з восьми.

3. Знайти ймовірність того, що з 400 виробів, що надійшли до крамниці, 80 мають брак, якщо відомо, що ймовірність кожного виробу бути бракованим дорівнює 0,2.

4. Монета підкидається 40 разів. Знайти ймовірність того, що герб з'явиться 25 раз.

5. Бюффон підкидав монету 4040 разів, герб при цьому з'явився 2048 разів. З якою ймовірністю можливо було очікувати такий результат?

6. Стрілець зробив 30 пострілів з ймовірністю влучення в ціль при окремому пострілі 0,3. Знайти ймовірність того, що при цьому буде 8 влучень.

7. Знайти ймовірність того, що число бракованих виробів буде не більш 70 в партії, що складає 10000 виробів якщо ймовірність будь-якого виробу бути бракованим дорівнює 0,005.

8. Схожість насіння певного сорту рослин оцінюється ймовірністю 0,7. Посіяно насіння кількістю 700 одиниць. Знайти ймовірність того, що число сходів буде між 460 і 600.

9. Підприємство відправило на базу призначення 5000 виробів. Ймовірність того, що дорогою виріб буде пошкоджено, дорівнює 0,0002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 3 непридатних для використання вироби.

10. Перевіряються на надійність 15 виробів, причому ймовірність, що виріб пройде перевірку дорівнює 0,9. Знайти найімовірніше число виробів, які пройдуть перевірку.

11. Схожість насіння певного сорту рослин оцінюються ймовірністю 0,8. Яку кількість насіння треба посіяти, щоб найімовірніше число сходів становило 20?

12. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Знайти ймовірність того, що серед випадково відібраних 400 деталей відносна частота появи нестандартної деталі відхиляється від ймовірності $p = 0,1$ за абсолютною величиною не більш, ніж на 0,03.

13. Ймовірність того, що деталь нестандартна, дорівнює 0,1. Скільки деталей треба відібрати, щоб з ймовірністю, рівною 0,9544 можна було б стверджувати, що відносна частота появи нестандартної деталі (серед відібраних) відхиляється від ймовірності $p = 0,1$ за абсолютною величиною не більш, ніж на 0,03.

Відповіді:

1. а) $0,36 \cdot 0,36$; 2. а) $P_5(3) = \frac{40}{128} > P_8^4 = \frac{35}{128}$; б)

$$P_8(k \geq 5) = \frac{93}{256} > P_4(k \geq 3) = \frac{5}{16};$$

3. $P_{400}(80) = 0,049$; 4. 0,036; 5. 0,0085; 6. 0,147; 7. 0,9977; 8. 0,993; 9. 0,06; 10. $k_0 = 14$; 11. 23 або 24; 12. 0,9544; 13. $n = 400$.

РОЗДІЛ X. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

10.1. ДИСКРЕТНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ (ДВВ). ФУНКЦІЯ РОЗПОДІЛУ

Випадковою називають величину, яка внаслідок випробувань може прийняти одне із можливих значень, заздалегідь невідоме, яке залежить від випадкових причин.

Дискретною (перервною) називають випадкову величину (ДВВ), яка приймає окремі, ізольовані можливі значення з визначеними ймовірностями. Число можливих значень дискретної випадкової величини може бути скінченим або нескінченим (зліченний).

Приклад 1. Число народившихся хлопчиків зі 100 новонароджених є дискретною випадковою величиною з можливими значеннями від 0 до 100.

Приклад 2. Нехай ведеться стрільба до першого промаху. Тоді число пострілів є дискретною випадковою величиною, яка приймає зліченну кількість значень, яку заздалегідь не можна обмежити.

Будемо позначати випадкові величини великими літерами X, Y, Z , а їх можливі значення відповідними маленькими літерами x, y, z .

Законом (або рядом) розподілу дискретної випадкової величини називають відповідність між можливими її значеннями і їх ймовірностями. Його можна задавати графічно, аналітично (у вигляді формули) та таблично.

Закон розподілу зручно подавати у вигляді таблиці:

Значення X	x_1	x_2	...	x_n
Ймовірність P	P_1	P_2	...	P_n

Відмітимо, що випадкова величина X при одному випробуванні приймає тільки одне з n можливих своїх значень з відповідною ймовірністю. Інакше кажучи, в результаті випробування обов'язково відбудеться одна з єдино можливих і попарно несумісних подій

$$X = x_1; X = x_2; \dots; X = x_n.$$

Як відомо, ці події утворюють повну групу подій, сума їх є вірогідною подією, а сума ймовірностей цих подій

$$P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1.$$

Приклад. Монету підкидають п'ять разів. Знайти закон розподілу випадкової величини, яка дорівнює числу появ герба.

► Можливі значення шуканої випадкової величини є числа 0; 1; 2; 3; 4; 5. Раніше нами були знайдені ймовірності $P_5(k)$ за допомогою формули Бернуллі ($k = 0, 1, \dots, 5$), тобто $P_5(0) = \frac{1}{32}$; $P_5(1) = \frac{5}{32}$; $P_5(2) = \frac{10}{32}$; $P_5(3) = \frac{10}{32}$; $P_5(4) = \frac{5}{32}$; $P_5(5) = \frac{1}{32}$. Отже, закон розподілу даної випадкової величини має вид:

X	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$



Приклад. Гральний кубик підкидають один раз. Знайти закон розподілу випадкової величини X – числа очок, що з'явилися.

► Випадкова величина X має шість можливих значень 1, 2, 3, 4, 5, 6, ймовірність кожного з них одна й та ж і дорівнює $\frac{1}{6}$. Отже, закон розподілу X має вид:

X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Нехай X – дискретна випадкова величина. Розглянемо подію, яка полягає в тому, що X набуває значення, менше будь-якого довільного числа x , тобто $X < x$. Ця подія має ймовірність $P(X < x)$. При зміні x буде змінюватись і ймовірність, тобто ймовірність можна розглядати як функцію від змінної x або $F(x)$.

Функцією розподілу або інтегральною функцією випадкової величини X називається функція $F(x)$, що визначає для кожного x ймовірність того, що X прийме значення, менше ніж x , тобто

$$F(x) = P(X < x).$$

Функція розподілу задає випадкову величину аналітично.

Властивості функції розподілу:

1. Значення функції розподілу знаходяться між 0 та 1 при зміні x від $-\infty$ до $+\infty$, тобто $0 \leq F(x) \leq 1$; $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;

$$F(\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$$

2. Функція розподілу є неспадною, тобто $F(x_2) \geq F(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.

3. Ймовірність того, що випадкова величина набуває значення, що належить інтервалу (a, b) , дорівнює приросту функції розподілу на цьому інтервалі:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Відмітимо, що функція розподілу – це аналітичне завдання випадкової величини. Знаючи ряд розподілу можна знайти функцію розподілу і побудувати її графік.

Приклад. Дискретна випадкова величина задана рядом розподілу

X	1	2	5
P	0,5	0,2	0,3

Знайти функцію розподілу та побудувати її графік.

► 1. Якщо значення випадкової величини $x \leq 1$, то $F(x) = P(X < 1) = 0$, тому що X не має значень, менших ніж 1.

2. Якщо $1 < x \leq 2$, то $F(x) = 0,5$, тому що X приймає значення 1 з ймовірністю 0,5.

3. Якщо $2 < x \leq 5$, то $F(x) = 0,7$. Дійсно X може приймати значення 1 з ймовірністю 0,5 або значення 2 з ймовірністю 0,2. Звідси за теоремою додавання ймовірностей несумісних подій ймовірність такої події є $0,5 + 0,2 = 0,7$.

4. Якщо $x > 5$, то $F(x) = 1$, тому, що подія $X \geq 5$ є вірогідною.

Отже

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,5 & \text{при } 1 < x \leq 2, \\ 0,7 & \text{при } 2 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5 \end{cases}$$

Графік цієї функції має вигляд (рис.10.1):

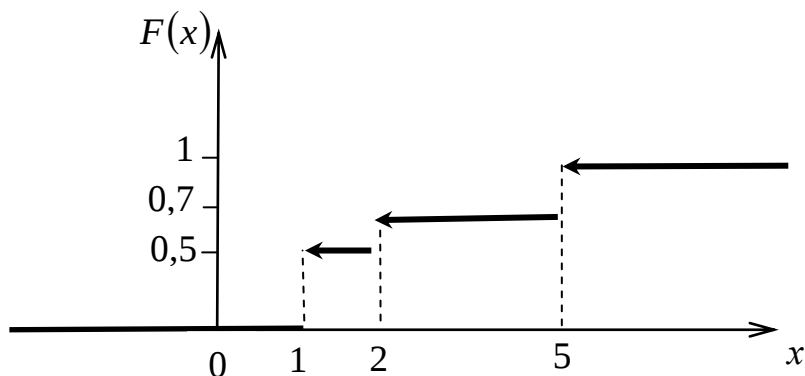


Рис. 10.1
153

10.2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВВ

Математичним сподіванням дискретної випадкової величини X , яка приймає значення $x_1, x_2, \dots, x_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$ називається сума добутків всіх її можливих значень на відповідні ймовірності, тобто

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

або

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

Із визначення випливає, що $M(X)$ – не випадкова стала величина, яка характеризує середнє значення випадкової величини X .

Властивості математичного сподівання:

1) Математичне сподівання сталої дорівнює самій сталій:

$$M(C) = C.$$

2) Сталій множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX) = CM(X).$$

3) Математичне сподівання добутку двох незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

4) Математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Відхиленням випадкової величини X називають різницю між випадковою величиною та її математичним сподіванням, тобто $X - M(X)$, яке в свою чергу є також випадковою величиною, математичне сподівання якої дорівнює 0, тобто

$$M(X - M(X)) = 0.$$

Дисперсією (розсіюванням) випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Оскільки дисперсія має розмірність, рівну квадрату розмірності випадкової величини, замість неї часто розглядають квадратний корінь з дисперсії

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Величину $\sigma(X)$ називають *середнім квадратичним відхиленням*, розмірність якого співпадає з розмірністю X . Як дисперсія, так і середнє квадратичне відхилення, є мірою розсіяння (розкиданості) значень випадкової величини навколо її математичного сподівання.

Дисперсію зручно обчислити за формулою

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2,$$

тобто, як різницю між математичним сподіванням квадрата випадкової величини і квадратом її математичного сподівання.

Властивості дисперсії:

1. Дисперсія сталої дорівнює нулю:

$$D(C) = 0.$$

2. Сталій множник можна винести за знак дисперсії, піднісши його до квадрата:

$$D(CX) = C^2 D(X).$$

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсія різниці двох незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Приклад. Знайти середнє квадратичне відхилення випадкової величини X , яка задана законом розподілу

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

► Знаходимо $M(X)$:

$$M(X) = 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,6 + 5 \cdot 0,3 = 3,5$$

Запишемо закон розподілу величини X^2

X^2	4	9	25
P	0,1	0,6	0,3

і знайдемо $M(X^2) = 4 \cdot 0,1 + 9 \cdot 0,6 + 25 \cdot 0,3 = 13,3$.

Отже, $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 13,3 - 12,25 = 1,05$.

Шукане середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1,05} \approx 1,022. \blacktriangleleft$$

10.3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ ДВВ

Біноміальним називають закон розподілу дискретної випадкової величин X – числа появи подій в n незалежних випробуваннях, в кожному з яких ймовірність появи події дорівнює p (ймовірність не появи $q = 1 - p$). Ймовірність можливого значення $X = k$ (числа k появи події) обчислюють за формулою Бернуллі:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математичне сподівання біноміального розподілу:

$$M(X) = np.$$

Дисперсія:

$$D(X) = npq.$$

Пуассонівським називають закон розподілу дискретної випадкової величини, в якому ймовірності можливих значень випадкової величини визначаються за формулою Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

де k – число появи події в n незалежних випробуваннях, $\lambda = np$.

Числові характеристики розподілу Пуассона:

$$M(X) = D(X) = \lambda = np.$$

Приклад. Знайти середнє квадратичне відхилення числа лотерейних білетів, на які можуть випасти виграші, якщо придбано 30 білетів і ймовірність виграшу на один білет дорівнює 0,3.

► Випадкова величина X – число лотерейних білетів, на які можуть випасти виграші – розподілена за біноміальним законом, де $n = 30$; $p = 0,3$; $q = 1 - 0,3 = 0,7$.

Отже,

$$M(X) = np = 30 \cdot 0,3 = 9 \text{ (білетів);}$$

$$D(X) = npq = 30 \cdot 0,3 \cdot 0,7 = 6,3;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{6,3} \approx 2,5.$$

Тобто, враховуючи, що $M(X) = 9$, можна зробити висновок: власник 30 лотерейних білетів може мати виграші на 9 ± 2 білетів, тобто від 7 до 11 білетів. ◀

Завдання для самостійної роботи

1. В скриньці знаходиться 7 білих і 3 чорних кулі. Навмання виймають одну кулю. Знайти закон розподілу, функцію розподілу числа появи білої кулі. Побудувати графік функції розподілу.

2. Тричі підкидають монету. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини – числа появ герба. Побудувати графік функції розподілу.

3. В партії із 100 виробів 10 нестандартних. Навмання взято п'ять виробів для перевірки їх якості. Знайти закон розподілу і функцію розподілу випадкової величини X – числа нестандартних виробів. Побудувати графік функції розподілу.

4. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення випадкових величин.

а)

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

б)

X	1	3	4	6	7
P	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

5. Задано незалежні випадкові величини

X	X	1	2	3
	P	0,1	0,3	0,6

;

Y	Y	-2	-1	0
	P	0,6	0,3	0,1

Знайти $M(X)$; $M(Y)$; $M(X + Y)$; $M(XY)$; $D(X)$; $D(Y)$; $D(X + Y)$.

6. Мисливець, маючи чотири патрони стріляє до першого влучення в ціль. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа використаних патронів, якщо ймовірність попадання при кожному пострілі дорівнює 0,25. Побудувати також графік функції розподілу.

7. В деякому цеху брак складає 5% всіх виробів. Знайти математичне сподівання і дисперсію випадкової величини – числа бракованих виробів серед 6 відібраних навмання виробів. побудувати також графік функції розподілу.

8. Робітник обслуговує 4 верстати. Ймовірність того, що протягом години верстат не потребує уваги робітника, дорівнює для першого верстата – 0,9; для другого – 0,8; для третього – 0,75; для четвертого – 0,7. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа верстатів, що не потребують уваги робітника протягом години.

9. Монету підкидають 6 разів. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа появи герба.

10. Гральний кубик підкидають 12 разів. Знайти математичне сподівання і дисперсію числа появи п'ятірки.

Відповіді:

1.

X	0	1
P	0,3	0,7

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,3 & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

2.

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{8}, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{4}{8} & 1 < x \leq 2, \\ \frac{7}{8}, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

3.

X	0	1	2	3	4	5
P	0,583	0,340	0,070	0,007	0	0

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,583, & 0 < x \leq 1, \\ 0,923, & 1 < x \leq 2, \\ 0,993, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

5. $M(X) = 2,5$; $M(Y) = -1,5$; $D(X) = 0,45$; $D(Y) = 0,45$; **6.** 2,734; 1,57;
7. 0,3; 0,285; **8.** 3,15; 0,65; **9.** 3; 1,5; **10.** 10; 1,67,

РОЗДІЛ XI. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

11.1. НЕПЕРЕРВНІ ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ (НВВ). ЩІЛЬНІСТЬ РОЗПОДІЛУ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Випадкові величини, можливі значення яких неперервно заповнюють деякий інтервал (скінчений або нескінченний) числової осі, називаються *неперервними* (НВВ). Очевидно, що число можливих значень неперервної величини нескінченно.

Приклади.

1. Час запізнення студента на лекцію (інтервал можливих значень тут від 0 до 135 хвилин).

2. Помилка при зважуванні товару (інтервал можливих значень – мінімальне значення шкали вагів).

Очевидно, що закон розподілу неперервної випадкової величини неможливо задати у вигляді таблиці, що містить її можливі значення, тому неперервна випадкова величина, як правило, задається за допомогою інтегральної або диференціальної функцій розподілу її ймовірностей. Функцію розподілу (інтегральну функцію) було визначено раніше (розділ 10.1), вона зберігає як визначення, так і всі властивості і для неперервної випадкової величини.

Слід відмітити, що функція розподілу неперервної випадкової величини є неперервною, в той час як для дискретної випадкової величини вона є розривною ступінчатою.

Неперервну випадкову величину, крім функції розподілу, можна задати функцією щільності (диференціальною функцією).

Щільністю розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини називають функцію $f(x)$ – першу похідну від інтегральної функції $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Щільність розподілу має наступні властивості.

1. Щільність розподілу – невід’ємна функція

$$f(x) \geq 0.$$

Ця властивість безпосередньо витікає з того, що $f(x)$ є похідною від неспадної функції розподілу $F(x)$.

2. Інтегральна функція розподілу випадкової величини дорівнює інтегралу від щільності розподілу ймовірностей в інтервалі від $-\infty$ до x :

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

3. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X набуде значення, яке належить інтервалу (a, b) , дорівнює

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Відмітимо, що $P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$.

4. Невласний інтеграл від щільності розподілу в межах від $-\infty$ до ∞ дорівнює одиниці

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Геометрично це означає, що вся площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю Ox і кривою щільності розподілу, дорівнює одиниці.

Зауважимо, що графік диференціальної функції $f(x)$ випадкової величини називається *кривою розподілу*.

Приклад. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ a \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

1. Знайти коефіцієнт a .

2. Побудувати криву розподілу.

3. Знайти функцію розподілу $F(x)$ і побудувати її графік.

4. Знайти ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення, яке належить інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

► 1. Для визначення коефіцієнта a скористаємось однією з властивостей щільності розподілу $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$.

$$\text{Маємо } \int_{-\infty}^{\infty} a \cos x dx = a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = a \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2a = 1. \text{ Звідси } a = \frac{1}{2}.$$

2. Отже щільність розподілу має вигляд
$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2} \\ a \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Крива розподілу – графік щільності розподілу (рис. 11.1)

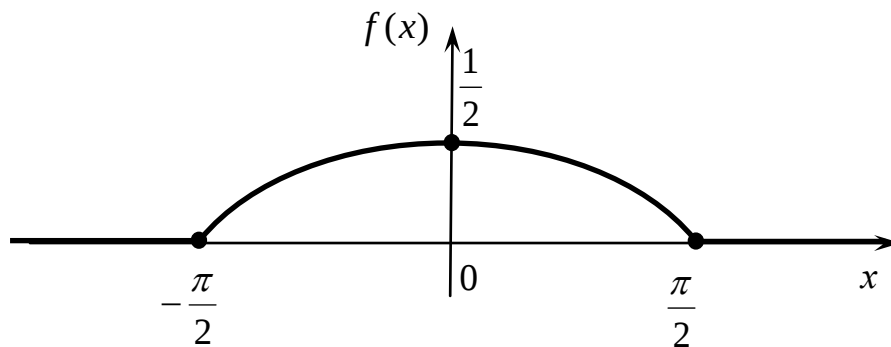


Рис. 11.1

3. Шукаємо функцію розподілу за формулою

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

При $x < -\frac{\pi}{2}$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0.$$

При $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2} (\sin x + 1).$$

При $x > \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos x dx = \\
 &= \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 1.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Графік функції розподілу $F(x)$ має вигляд (рис. 11.2)

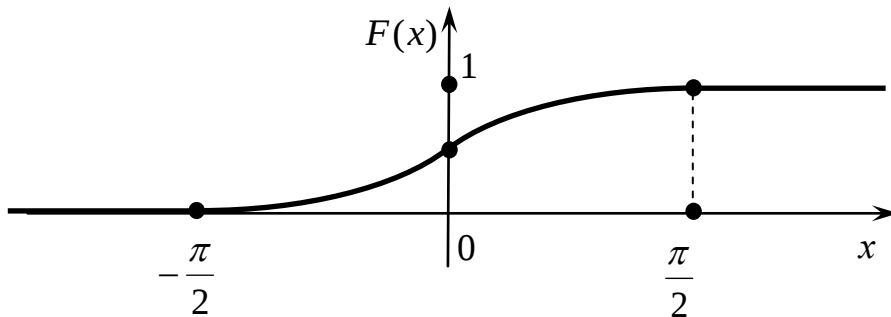


Рис. 11.2

4. Знайдемо ймовірність того, що X набуде значення, яке належить інтервалу $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Скористаємось формулою

$$P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - 1\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

.

11.2. ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НВВ

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X визначається за формулою

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Зокрема, якщо всі можливі значення X належать інтервалу (a, b) , то

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Всі властивості математичного сподівання для дискретних випадкових величин мають місце і для неперервних випадкових величин.

Дисперсія неперервної випадкової величини X визначається рівністю

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx,$$

або рівнозначною рівністю

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Якщо всі можливі значення X належать інтервалу (a, b) , то

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини визначається формулою

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Приклад. Неперервна випадкова величина X задана диференціальною функцією розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

$$\blacktriangleright M(X) = \int_a^b xf(x)dx; a = 0; b = 1 \Rightarrow \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

$$D(X) = \int_0^1 x^2 f(x) - (M(X))^2 = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^1 - \frac{4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = \frac{1}{3\sqrt{2}}. \blacktriangleleft$$

11.3. ЗАКОНИ РОЗПОДІЛУ НВВ

Випадкова величина X має *рівномірний розподіл* на відрізку $[a, b]$, якщо її щільність розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Приклад. Маршрутне таксі рухається рівномірно з інтервалом 10 хвилин. Знайти ймовірність того, що рівномірно розподілена випадкова величина X – час очікування таксі буде менше п'яти хвилин.

► Випадкова величина X рівномірно розподілена на інтервалі $[0, 10]$, звідси щільність розподілу має вигляд $f(x) = \frac{1}{10-0}$, тобто $f(x) = \frac{1}{10}$.

Для того, щоб час очікування не перевищував п'яти хвилин, пасажир повинен з'явитися на зупинці в інтервалі від п'яти до десяти хвилин після відходу попереднього таксі, тобто випадкова величина X повинна набувати будь-яке значення з інтервалу $(5, 10)$.

Тому шукана ймовірність

$$P(5 < X < 10) = \int_5^{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} x \Big|_5^{10} = \frac{1}{10} (10 - 5) = \frac{1}{2}. \blacktriangleleft$$

Випадкова величина X має *показниковий розподіл* з параметром $\lambda > 0$, якщо щільність її розподілу

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Слід відмітити, що числові характеристики випадкової величини, що розподілена за показниковим законом є такими:

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад. Випадкова величина X – час роботи лампи – має

показниковий розподіл. Знайти ймовірність того, що час роботи лампи буде не менш, ніж 600 годин, якщо середній час роботи 400 годин.

► За умовою задачі математичне сподівання випадкової величини

$$M(X) = 400, \text{ отже } \lambda = \frac{1}{400}.$$

Шукана ймовірність

$$\begin{aligned} P(X \geq 600) &= 1 - P(X < 600) = 1 - (F(600) - F(0)) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 600} \right) = \\ &= e^{-1,5} \approx 0,2231. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Серед розподілів неперервної випадкової величини центральне місце займає *нормальний закон (закон Гаусса)*, щільність розподілу якого має вигляд

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Очевидно, що нормальний розподіл цілком визначається двома параметрами a і σ , де $a = M(X)$ – математичне сподівання, $\sigma = \sigma(X)$ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини X .

Графік щільності нормального розподілу називають *нормальною кривою (кривою Гаусса)* (рис. 11.3).

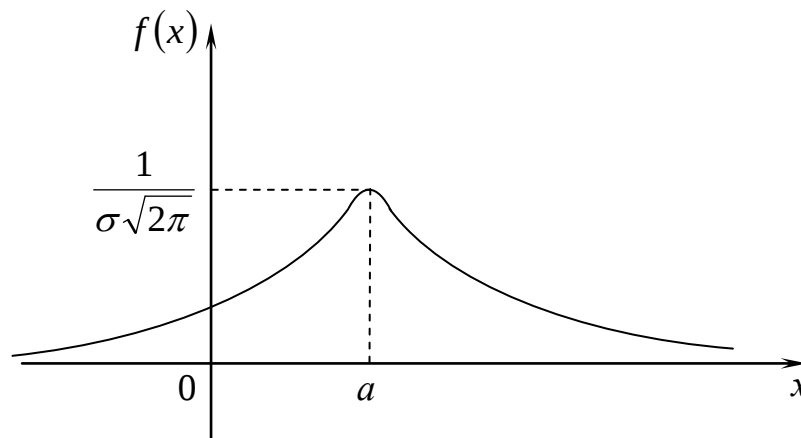


Рис. 11.3

Ймовірність попадання нормальної випадкової величини в заданий інтервал (α, β) може бути знайдена за формулою

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

де $\Phi(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – функція Лапласа.

Ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від свого математичного сподівання за абсолютною величиною менше заданого додатнього числа δ , визначається формулою

$$P(|x - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Використовуючи останню формулу, можна отримати так зване *правило трьох сигм*, яке стверджує, що нормально розподілена випадкова величина практично не приймає значень поза інтервалом $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$, тобто

$$P(|x - a| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma}{\sigma}\right) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0,49865 = 0,9973.$$

Приклад. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення цієї величини відповідно дорівнює 30 і 10. Знайти ймовірність того, що:

- а) X набуде значення, яке належить інтервалу (10, 50);
- б) відхилення X від її математичного сподівання за абсолютною величиною буде менше 3.

► а) За умовою $a = 30$; $\sigma = 10$; $\alpha = 10$; $\beta = 50$;
маємо

$$\begin{aligned} P(10 < X < 50) &= \Phi\left(\frac{50 - 30}{10}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 30}{10}\right) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = \\ &= 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544, \end{aligned}$$

оскільки функція Лапласа $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

б) Маємо $a = 30$; $\sigma = 10$; $\alpha = 10$; $\delta = 3$.

Отже,

$$P(|x - 30| < 3) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{3}{10}\right) = 2\Phi(0,3) = 2 \cdot 0,1179 = 0,2358. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Випадкова величина X має функцію розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 2, \\ (x-2)^2, & 2 \leq x \leq 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Знайти: а) щільність розподілу; б) $P(1 < X < 2,5)$; в) $P(2,5 < X < 3,5)$; г) побудувати графіки функції розподілу і щільності розподілу.

2. Неперервна випадкова величина X задана щільністю розподілу

$$f(x) = \frac{C}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Знайти величину параметра C і визначити ймовірність того, що X набуде значення, яке належить інтервалу $(-1; \sqrt{3})$.

3. Випадкова величина задана щільністю розподілу

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\sin x}{2}, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$ і $P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right)$.

4. Функція розподілу неперервної випадкової величини X задана у вигляді

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ ax^2, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases}$$

Знайти параметр a та щільність розподілу.

5. Диференціальна функція розподілу випадкової величини X – прибутку підприємства має вигляд

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & x \in (0,4), \\ 0, & x \notin (0,4). \end{cases}$$

Знайти $M(X)$; $D(X)$, $\sigma(X)$ та $P(3 < x < 4)$.

6. Функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{x}{4} + \frac{1}{2}, & -2 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти $D(X)$; $\sigma(X)$.

7. автобус деякого маршруту рухається рівномірно з інтервалом 5 хвилин. Знайти ймовірність того, що рівномірно розподілена випадкова величина X – час очікування автобусу – буде менше трьох хвилин.

8. Випадкова величина X – час роботи духової шафи – має показниковий розподіл. Знайти ймовірність того, що час роботи духової шафи буде не менш, ніж 3000 годин, якщо середній час її роботи складає 2000 годин.

9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. математичне сподівання і середнє квадратичне відхилення відповідно дорівнює 3 і 2. Знайти ймовірність того, що X набуде значення, яке: а) належить інтервалу $(-1; 5)$; б) не більше 8; в) не менше 5; г) належить інтервалу $(-3; 9)$.

10. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом. Математичне сподівання і дисперсія цієї величини відповідно дорівнюють 7 і 16. Знайти ймовірність того, що відхилення величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною не перевищить двох.

11. Вага окремого яблука даної партії є випадковою величиною X , що розподілена за нормальним законом з математичним сподіванням $a = 140$ г і середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 16$ г. Визначити ймовірність того, що вага взятого навмання з цієї партії яблука: а) знаходиться в межах від 124г до 148г; б) відхиляється від середньої ваги $a = 140$ г не більш, ніж на ± 8 г.

Відповіді:

1. а) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [2,3], \\ 2(x-2), & x \in [2,3] \end{cases}$; б) 0,25; в) 0,75;

2. $C = \frac{1}{\pi}$; $P(-1 < x < \sqrt{3}) = \frac{7}{12}$;

$$3. f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1 - \cos x}{2}, & 0 < x \leq \pi, \\ 1, & x > \pi. \end{cases} \quad P\left(0 < X < \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$4. a = 1, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 2x, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases} \quad 5. M(X) = \frac{8}{3}; \quad D(X) = \frac{8}{9};$$

$$P(3 < x < 4) = \frac{7}{16};$$

$$6. D(X) = \frac{4}{3}; \quad \sigma(X) = \frac{2\sqrt{3}}{3}; \quad 7. \frac{3}{5}; \quad 8. 0,2231; \quad 9. a) 0,8186; \quad б) 0,9938; \quad в) 0,1586; \quad г) 0,9973; \quad 10. 0,3829; \quad 11. a) 0,5328; \quad б) 0,383;$$

11.4. ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ. ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА

Група теорем, що встановлює відповідність між теоретичними та експериментальними характеристиками випадкових величин та випадкових подій при великій кількості випробувань, має назву граничних теорем теорії ймовірностей.

Якщо ми маємо одну випадкову величину, то попередньо визначити, яке можливе значення вона здобуде, ми не маємо змоги. У той же час для достатньо великої кількості випадкових величин їх сумарна дія втрачає випадковий характер і стає закономірною. На практиці є важливим знання умов, при виконанні яких сукупна дія великого числа випадкових причин приводить до результату, який майже не залежить від випадку, оскільки дозволяє передбачити хід явища.

Ці умови і вказуються в теоремах, які мають загальну назву **закону великих чисел**. До них відносяться *теорема Чебишева, Бернуллі, Ляпунова* та ін.

Нехай випадкова величина X має математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. *Нерівність Чебишева* стверджує, що ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її математичного сподівання за абсолютною величиною менше як завгодно малого додатнього числа ε , не менша ніж $1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, тобто

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебишева стверджує, що якщо розглядати достатньо велике число взаємно незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, що мають обмежені дисперсії, то можна вважати майже достовірною подію, яка полягає в тому, що відхилення середнього арифметичного їх математичних сподівань за абсолютною величиною буде як завгодно малим, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + \dots + M(X_n)}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де ε – як завгодно мале достатнє число.

Теорема Бернуллі встановлює зв'язок між частотою події та її ймовірністю, тобто якщо в кожному з n незалежних випробувань ймовірність появи події A постійна, то як завгодно близька до одиниці ймовірність того, що відхилення відносної частоти від ймовірності p за абсолютною величиною буде як завгодно малим, якщо число випробувань достатньо велике.

Іншими словами, якщо $\varepsilon > 0$ як завгодно мале, то має місце нерівність

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Центральна гранична теорема (теорема Ляпунова) показує, що при достатньо великій кількості n незалежних випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n$, що розподілені за якими завгодно законами розподілу (при додержанні деяких обмежень) їх сума буде мати закон розподілу як завгодно близький до нормального закону.

Приклад 1.

Скільки треба провести дослідів, щоб ймовірність нерівності $\left|\frac{m}{n} - 0,85\right| < 0,001$ була не менше за 0,99,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,85\right| < 0,001\right) = 0,99.$$

► Нерівність Чебишева для умов теореми Бернуллі

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{npq}{h^2 \varepsilon^2} = 1 - \frac{pq}{n \varepsilon^2}.$$

Тому $1 - \frac{pq}{n \varepsilon^2} = 0,99$.

$$n = \frac{pq}{0,01\varepsilon^2} = \frac{0,85 \cdot 0,15}{0,01 \cdot 0,000001} = 12450000 . \blacktriangleleft$$

Приклад 2.

Робітник виготовляє стандартну деталь з ймовірністю 0,95. Перевірці підлягає 400 деталей. Оцінити ймовірність нерівності $\left| \frac{m}{n} - 0,95 \right| < 0,02$.

$$\blacktriangleright P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,95\right| < 0,02\right) \geq 1 - \frac{0,95 \cdot 0,05}{400 \cdot (0,02)^2} = 1 - 0,2969 = 0,7031. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. Користуючись нерівністю Чебишева, оцінити ймовірність того, що $|X - M(X)| < 0,1$, якщо $D(X) = 0,001$.
2. Користуючись нерівністю Чебишева, знайти ε , якщо $P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 0,9$; $D(X) = 0,004$.

Відповіді:

1. $P > 0,9$; 2. 0,2.

РОЗДІЛ XII. МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

12.1. ВИБІРКОВИЙ МЕТОД. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

Математична статистика – розділ математики, присвячений математичним методам систематизації, обробки і використанні статистичних даних для наукових і практичних висновків. Статистичними даними називають відомості про число об'єктів у будь-якій більш або менш великій сукупності, що має ті або інші ознаки. Предметом математичної статистики є формальна математична сторона статистичних методів дослідження, байдужа до специфічної природи об'єктів, що вивчаються. Саме слово „статистика” походить від латинського слова „status”, що в перекладі на українську означає „стан”.

Задачі математичної статистики:

1. Зазначити засоби збору і групування статистичних даних.
2. Розробити методи аналізу статистичних даних в залежності від мети дослідження.

В основі задач, що вирішуються методами математичної статистики, лежить необхідність вивчення сукупності однорідних об'єктів відносно деякої якісної або кількісної ознаки.

Наприклад, при вивченні партії однорідних товарів, що зберігаються на складі, якісною ознакою можуть служити сортови, а кількісною – вагові характеристики, що змінюються в процесі зберігання.

Сукупність всіх об'єктів, що підпорядкована даній ознаці, називається *генеральною сукупністю*. Кількість таких об'єктів називається *об'ємом генеральної сукупності* і позначається літерою N .

На практиці, як правило, обмеження усіх об'єктів генеральної сукупності не ведеться з огляду на трудомісткість такого процесу. Звичайно з усієї сукупності відбирають обмежену кількість об'єктів, яка підлягає вивченню. Таку випадково відібрану сукупність називають *вибірковою сукупністю* або *вибіркою*.

Вибірка, яка достатньо повно представляє генеральну сукупність, називається *репрезентативною* (*представницькою*) *вибіркою*. Для отримання репрезентативної вибірки необхідно, щоб усі відібрані елементи мали однакову ймовірність потрапити у вибірку.

При формуванні вибірки відібрані об'єкти можна повертати в генеральну сукупність, а можна не повертати. *Повторною* називають вибірку, коли відібраний об'єкт повертається в генеральну сукупність,

безповторною – коли відібраний об’єкт не повертається.

Елементи $x_1, x_2, \dots, x_n$, які потрапили у вибірку називають *варіантами*, а їх кількість n – *об’ємом вибірки*. Відібрані елементи звичайно розташовують у порядку їх зростання

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n.$$

Таку послідовність варіант називають *варіаційним рядом*. Різницю z між максимальним і мінімальним елементами вибірки називають *розмахом вибірки*.

Серед n елементів вибірки можуть зустрічатись такі, що повторюються. Якщо, наприклад, елемент x_1 зустрічається n_1 раз, $x_2 - n_2$ раз, ..., $x_k - n_k$ раз, то числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ називаються *частотами* варіант $x_1, x_2, \dots, x_k$.

Очевидно, що сума усіх частот дорівнює об’єму вибірки, тобто

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n, \text{ або } \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

Розташована у порядку зростання варіант послідовність пар чисел, складених з варіант та їх частот, називається *статистичним розподілом* або *статистичним рядом* і записується, як правило, у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Іноді замість частоти варіанти n_i є потреба використання *відносної частоти* $W_i = \frac{n_i}{n}$. Очевидно, що сума відносних частот усіх елементів вибірки дорівнює одиниці

$$\sum_{i=1}^k W_k = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} = 1.$$

Приклад. Написати варіаційний ряд і статистичний розподіл елементів вибірки 5, 0, 3, 7, 0, 10, 5, 0, 5, 2, 10, 2, 0, 7, 2, 0, 4, 7, 7, 4 – з числа робочих днів року, пропущених за хворобою працівниками крамниці. Визначити розмах вибірки.

► Об’єм вибірки $n = 20$. Розташовуючи елементи вибірки у порядку їх зростання, отримаємо варіаційний ряд

0, 0, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10.

Розмах вибірки $z = 10 - 0 = 10$.

Статистичний розподіл:

x_i	0	2	3	4	5	7	10
n_i	5	3	1	2	3	4	2



Нехай є статистичний розподіл частот деякої ознаки X . Позначимо

через n_x – число спостережень, при яких мало місце значення ознаки X менше x , n – загальне число спостережень, або об'єм вибірки.

Очевидно, що відносна частота події $X < x$ дорівнює $\frac{n_x}{n}$. Якщо x змінюється, то $\frac{n_x}{n}$ також буде змінюватись, тобто відносна частота $\frac{n_x}{n}$ є функцією від x .

Емпіричною функцією розподілу називають функцію $F^*(x)$, що визначає для кожного значення x відносну частоту події $X < x$

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}.$$

Емпірична функція розподілу (або функція розподілу вибірки) $F^*(x)$ має такі властивості:

- 1) $0 \leq F^*(x) \leq 1$;
- 2) $F^*(x)$ є неспадною функцією;
- 3) $F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_{\min}; \\ 1, & x > x_{\max}. \end{cases}$

де $x_{\min}$ – найменша варіанта, $x_{\max}$ – найбільша варіанта.

Приклад. Знайти емпіричну функцію розподілу за даним статистичним розподілом вибірки і побудувати її графік.

x_i	1	4	7	10
n_i	2	5	10	3

► Знаходимо об'єм вибірки $n = 2 + 5 + 10 + 3 = 20$. Найменша варіанта $x_{\min} = 1$, тому $F^*(x) = 0$ для $x \leq 1$. Значення $x < 4$, а саме $x = 1$ спостерігалось два рази, отже $F^*(x) = \frac{2}{20} = 0,1$ при $1 < x \leq 4$.

Значення $X < 7$, а саме $x = 1$, або $x = 4$ спостерігалось $2 + 5 = 7$ раз, отже

$$F^*(x) = \frac{7}{20} = 0,35, \text{ при } 4 < x \leq 7.$$

Значення $X < 10$, а саме $x = 1$, або $x = 4$, або $X = 7$ спостерігалось $2 + 5 + 10 = 17$ раз, отже

$$F^*(x) = \frac{17}{20}, \text{ при } 7 < x \leq 10.$$

Найбільше варіанта дорівнює 10, тому

$$F^*(x) = 1 \text{ при } x > 10.$$

Отже, шукана емпірична функція

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leq 1, \\ \frac{2}{20}, & \text{при } 1 < x \leq 4, \\ \frac{7}{20}, & \text{при } 4 < x \leq 7, \\ \frac{17}{20}, & \text{при } 7 < x \leq 10, \\ 1, & \text{при } x > 10 \end{cases}$$

Будуємо графік емпіричної функції (рис 12.1)

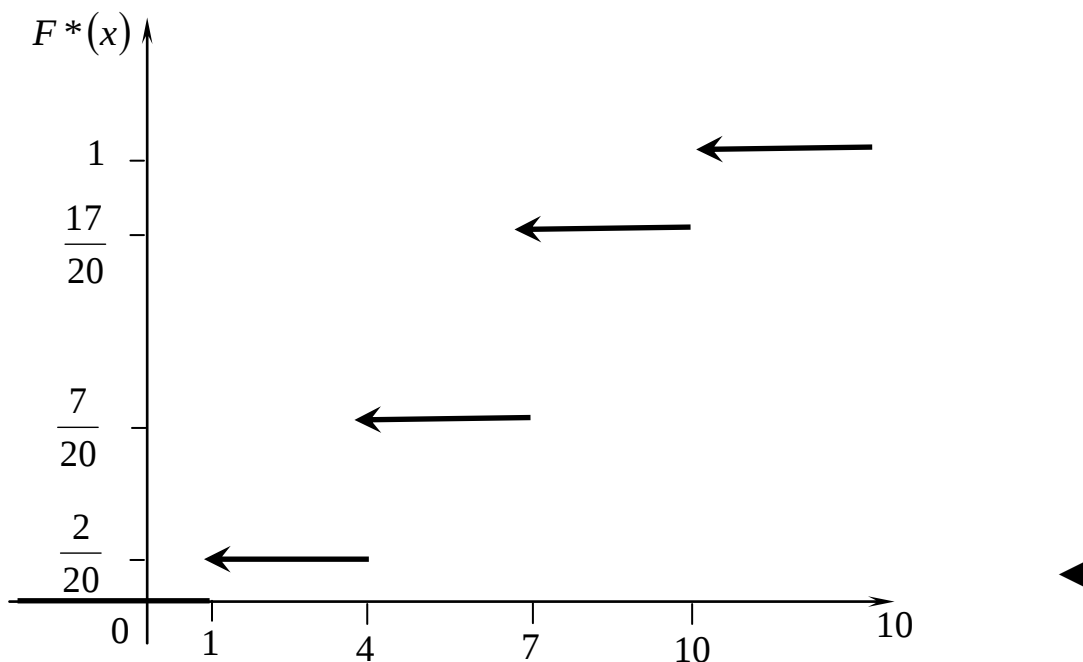


Рис. 12.1

Полігоном частот називають ламану лінію, вершинами якої є точки з координатами $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \dots, (x_k, n_k)$. Для його побудови на осі абсцис відкладають варіанти x_i , а на осі ординат – відповідні їм частоти n_i . Побудовані точки (x_i, n_i) з'єднуються відрізками прямих і отримують полігон частот.

Приклад. Побудувати полігон частот за даним статистичним розподілом (рис 12.2)

x_i	1	2	4	5
n_i	2	3	1	4

На рис. 12.2 зображено відповідний полігон

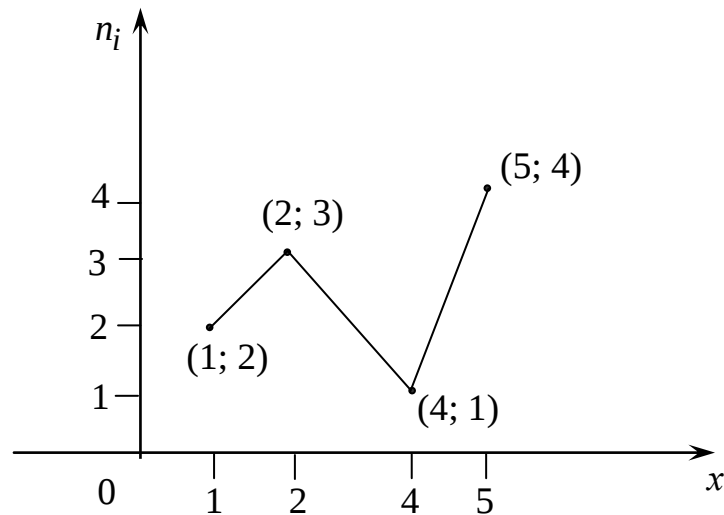


Рис. 12.2

У випадку неперервної ознаки будують *гістограму частот*, яка є статистичним наближенням щільності розподілу $f(x)$. Інтервал, в якому знаходяться варіанти, тобто проміжок варіант від $x_{\min}$ до $x_{\max}$, розбивають на декілька часткових інтервалів рівної довжини h і знаходять для кожного часткового інтервалу n_i – суму частот варіант, що потрапили в даний інтервал.

Гістограмою частот називають ступінчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є частинні інтервали варіант довжиною $h = x_{i+1} - x_i$, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{n_i}{h}$ (щільність частоти).

Площа i -го часткового прямокутника дорівнює $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$ – сумі частот варіант i -го інтервалу, отже площа гістограми частот дорівнює сумі усіх частот, тобто об'єму вибірки.

Іноді замість полігона і гістограми частот будують полігон і гістограму відносних частот, побудова яких відрізняється лише тим, що на осі ординат відкладається n_i , а відносна частота $W_i = \frac{n_i}{n}$, висоти прямокутників гістограми будуть дорівнювати відповідно $\frac{W_i}{h}$ (щільність відносної частоти), а площа всієї гістограми відносних частот буде дорівнювати одиниці.

Приклад. Побудувати гістограму частот за даним статистичним розподілом

x_i	-2	0	1	2	3	5	7
n_i	4	5	7	8	6	2	1

► Найменша варіанта $x_{\min} = -2$, найбільша варіанта $x_{\max} = 7$, довжина цього проміжку дорівнює 9. Розіб'ємо його на чотири проміжки рівних довжин $\left(h = \frac{9}{4}\right) = 2,25$. У перший проміжок $[-2; 0,25]$ потрапило 9 спостережень значень (-2 чотири рази і 0 п'ять раз), у другий проміжок $[0,25; 2,5]$ – 15 значень, у третій $[2,5; 4,75]$ – 6 значень, і у четвертий проміжок $[4,75; 7]$ – 3 значення.

Для побудови гістограми зручно скласти таблицю

Межі інтервала	$[-2; 0,25]$	$[0,25; 2,5]$	$[2,5; 4,75]$	$[4,75; 7]$
n_i	9	15	6	3
$\frac{n_i}{h}$	4	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$

На рис. 12.3 зображена відповідна гістограма

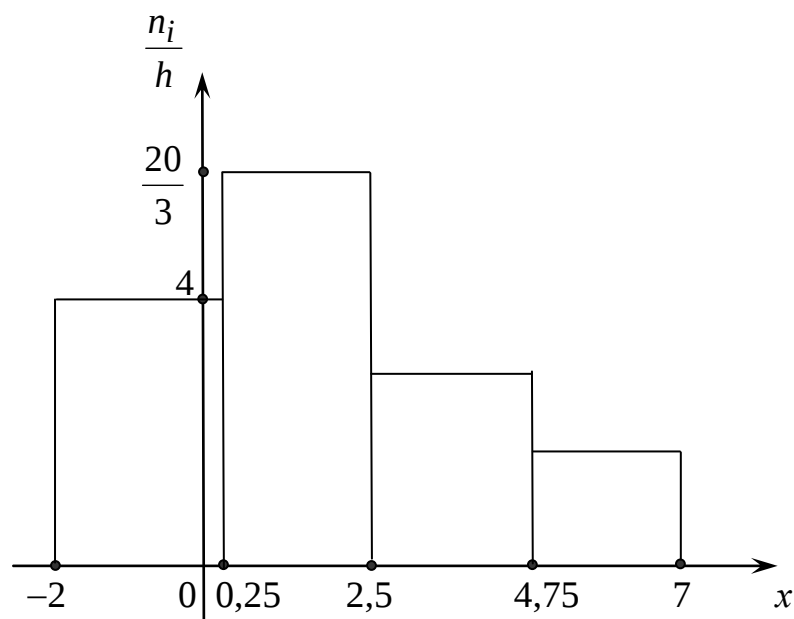


Рис. 12.3

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти варіаційний ряд та статистичний розподіл вибірки

а) $-3; +2; -1; -3; 5; -3; +2;$

б) $6; 1; 4; 4; 6; 1; 4; 6; 6; 6.$

Побудувати полігон частот. Знайти також емпіричну функцію розподілу і побудувати її графік.

2. На вступних іспитах вибірка серед абітурієнтів дала слідуєчі набрані ними бали 20 19 22 24 21 18 23 17 20 16 15 23 21 24 21

18 23 21 19 20 24 21 20 18 17 22 20 16 22 18

20 17 21 17 19 20 20 21 18 22 23 21 25 22 20

19 21 24 23 21 19 22 21 19 20 23 22 25 21 21

Знайти варіаційний ряд і статистичний розподіл. Побудувати полігон частот, гістограму частот і графік емпіричної функції розподілу.

3. Побудувати гістограму частот за таблицею

а)

Межі інтервала	$[-8; -3]$	$[-3; 2]$	$[2; 7]$	$[7; 12]$	$[12; 17]$
n_i	3	8	15	6	2

б)

Межі інтервала	$[0; 2]$	$[2; 4]$	$[4; 6]$
n_i	20	30	50

4. Знайти розмах, варіаційний ряд та статистичний розподіл вибірки. Побудувати полігон частот і графік емпіричної функції.

а) $0; 1; 2; 2; 0; 1; 2; 3; -1; 2;$ б) $4; 0; 3; 4; 3; 2; 4; 4; 1; 0.$

5. Побудувати гістограму частот за таблицею

а)

Межі інтервала	10; 20	0; 30	30; 40	40; 50	50; 60	60; 70	70; 80
n_i	1	2	7	18	12	8	2

б)

Межі інтервала	18; 20	20; 22	22; 24	24; 26	26; 28	28; 30	30; 32	32; 34
n_i	4	3	3	2	4	7	12	5

Відповіді:

$$1. a) F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3; \\ \frac{3}{7}, & -3 < x \leq -1; \\ \frac{4}{7}, & -1 < x \leq 2; \\ \frac{6}{7}, & 2 < x \leq 5; \\ 1, & x > 5. \end{cases} \quad б) F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1; \\ 0,2, & 1 < x \leq 4; \\ 0,5, & 4 < x \leq 6; \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$

$$4. a) F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ 0,1, & -1 < x \leq 0; \\ 0,2, & 0 < x \leq 1; \\ 0,5, & 1 < x \leq 5; \\ 0,9, & 2 < x \leq 3; \\ 1, & x > 3. \end{cases} \quad б) F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ 0,2, & 0 < x \leq 1; \\ 0,3, & 1 < x \leq 2; \\ 0,4, & 2 < x \leq 3; \\ 0,6, & 3 < x \leq 4; \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

12.2. СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ПАРАМЕТРІВ РОЗПОДІЛУ

При вивченні генеральної сукупності деякої ознаки з якихось теоретичних міркувань або апіорних відомостей робиться припущення про закон її розподілу. В зв'язку з цим відразу виникає задача оцінки параметрів, якими визначається цей розподіл. Так, якщо маємо припущення про нормальний закон розподілу досліджуваної ознаки, то необхідно оцінити його математичне сподівання μ і середнє квадратичне відхилення σ ; у випадку розподілу Пуассона оцінюванню підлягає параметр λ тощо. При цьому, оскільки при дослідженні генеральної сукупності ознаки використовуємо лише деяку вибірку сукупності, то оцінку невідомого параметра теоретичного розподілу ознаки будемо шукати за вибіркою $x_1, x_2, \dots, x_n$, вважаючи варіанти незалежними випадковими величинами.

Статистичною оцінкою невідомого параметра випадкової величини X генеральної сукупності (теоретичного розподілу X) називають функцію від випадкових величин (результатів вибірки), що спостерігаються.

Для того, щоб шукані статистичні оцінки давали достатньо хороші наближення параметрів, що оцінюються, вони повинні задовольняти наступним вимогам:

- *незсунутості* (тобто математичне сподівання такої оцінки повинно бути рівним оцінюваному параметру при будь-якому

- об'єму вибірки);
- *ефективності* (тобто при заданому об'єму вибірки n така оцінка повинна мати найменшу з можливих дисперсію);
- *спроможності* (тобто при $n \rightarrow \infty$ статистична оцінка за ймовірністю повинна прямувати до оцінюваного параметра).

Якщо досліджувану ознаку X генеральної сукупності розглядати як випадкову величину, то її математичне сподівання $M(X)$ дорівнює генеральному середньому $\bar{x}_\Gamma$.

$$\bar{x}_\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k x_i N_i = M(X) = a,$$

де N – об'єм генеральної сукупності;

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – значення ознаки X генеральної сукупності;

$N_1, N_2, \dots, N_k$ – відповідні частоти, $\sum_{i=1}^k N_i = N$.

Незсунутою оцінкою генеральної середньої (математичного сподівання) є вибіркове середня

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i,$$

де x_i – варіанта вибірки;

n_i – частота варіанти;

$n = \sum_{i=1}^k n_i$ – об'єм вибірки.

Ступінь розсіювання значень ознаки X генеральної сукупності навколо середнього значення $\bar{x}_\Gamma$ визначається величиною генеральної дисперсії, що обчислюється за формулою:

$$D_\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i (x_i - \bar{x}_\Gamma)^2.$$

Вибіркова дисперсія є зсунутою оцінкою генеральної дисперсії:

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2,$$

тобто, ця оцінка є зсунутою, тому що

$$M(D_B) = \frac{n-1}{n} D_{\Gamma}.$$

Незсунутою оцінкою генеральної дисперсії є “виправлена” дисперсія

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_B,$$

або

$$S^2 = \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2.$$

“Виправлена” дисперсія є незсунутою оцінкою, бо $M(S^2) = D_{\Gamma}$.

Для оцінки середнього квадратичного відхилення генеральної сукупності використовують “виправлене” середнє квадратичне відхилення, яке дорівнює квадратному кореню з “виправленої” дисперсії:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum n_i (x_i - \bar{x}_B)^2}.$$

Відмітимо, що S – не є незсунутою оцінкою.

Обчислення дисперсії як вибіркової так і генеральної можна спростити, використовуючи формулу:

$$D = \bar{x}^2 - [\bar{x}]^2,$$

тобто, дисперсія дорівнює різниці між середньою квадратів значень ознаки і квадратом загальної середньої.

Слід відмітити, що формули

$$D_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 \text{ та } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2$$

відрізняються лише знаменниками. Очевидно, що при достатньо великих значеннях n об’єму вибірки, вибіркова дисперсія і “виправлена” дисперсія відрізняється мало. На практиці користуються “виправленою” дисперсією при $n < 30$.

Приклад. За даними прикладу 1 попереднього параграфа знайти середнє число днів року, пропущених за хворобою працівниками крамниці. Знайти також “виправлену” дисперсію S^2 .

► Раніше було отримано статистичний розподіл

x_i	0	2	3	4	5	7	10
n_i	5	3	1	2	3	4	2

тоді

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^7 n_i x_i = \frac{1}{20} (5 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 10) = \frac{80}{20} = 4$$

“Виправлена” дисперсія:

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (x_i - \bar{x}_B)^2 = \frac{1}{20-1} (5 \cdot (0-4)^2 + 3 \cdot (2-4)^2 + 1 \cdot (3-4)^2 + 2 \cdot (4-4)^2 + 3 \cdot (5-4)^2 + 4 \cdot (7-4)^2 + 2 \cdot (10-4)^2) = \frac{204}{19} \approx 10,73.$$

“Виправлене” середнє квадратичне відхилення:

$$S = \sqrt{10,73} \approx 3,28. \blacktriangleleft$$

Наряду з переліченими вище числовими характеристиками параметрів генеральної сукупності часто зустрічаються і інші характеристики.

Модой M_0 називається варіанти вибірки, яка має найбільшу частоту.

Приклад. За даним статистичним розподілом вибірки

x_i	1	3	5	7	9
n_i	1	5	6	5	3

Знайти величину моди M_0 .

► Оскільки найбільша частота $n_3 = 6$ належить елементу $x_3 = 5$.
Отже, величина моди $M_0 = 5$. ◀

Медіаною m_e називається варіанта вибірки, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, рівні за кількістю варіант. Якщо об’єм вибірки є числом непарним, тобто $n = 2k + 1$, то медіаною буде середній елемент варіаційного ряду $m_t = x_{k+1}$; якщо n – число парне, тобто $n = 2k$, то медіаною буде величина, що дорівнює півсумі варіант, розташованих в середині варіаційного ряду, тобто

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2},$$

Приклад. За даним варіаційним рядом 2, 4, 5, 8, 10, 11 визначити

величину медіани

$$\blacktriangleright m_e = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{5+8}{2} = 6,5. \blacktriangleleft$$

Завдання для самостійної роботи

1. За даним статистичним розподілом вибірки – середньомісячної заробітної плати робітників деякого підприємства

x_i	285	295	305	315	325	335	345	355	365	375	385
n_i	1	10	14	14	25	16	7	4	7	0	2

знайти вибіркове середнє та вибіркове середнє квадратичне відхилення.

2. При обстеженні десяти крамниць отримано такі дані про виробку на одного працівника за звітний період (тис. грн.): 4,2; 4,8; 4,7; 5,0; 4,9; 4,3; 3,9; 4,1; 4,3; 4,8. Визначити вибіркове середнє $\bar{x}_v$ та “виправлене” середнє квадратичне відхилення S .

3. Витрати на обід у 100 відвідувачів кафе виявилися такими (грн.):

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

Визначити середню величину затрат ($\bar{x}_v$) і середню величину розсіювання навколо середнього (D_v, σ_v).

4. За вибіркою об’єму $n = 31$ знайдено зсунуту оцінку $D_v = 6$ генеральної дисперсії. Знайти незсунуту оцінку дисперсії генеральної сукупності.

5. Дані про товарообіг 50 обстежених крамниць за звітний період виявилися такими (тис. грн.):

x_i	65	70	75	80	85
n_i	2	5	25	15	3

Визначити середню величину товарообігу ($\bar{x}_v$) і середню величину розсіювання навколо середнього (D_v, σ_v)

6. Дані про відсутність на заняттях студентів 10 груп є такими: 3, 7, 7, 1, 2, 1, 2, 3, 5, 4. Знайти вибірккову дисперсію S^2 і вибірккове середнє квадратичне відхилення S .

7. За вибіркою об'єму $n = 21$ знайдено зсунуту оцінку $D_B = 4$ генеральної дисперсії. Знайти незсунуту оцінку дисперсії генеральної сукупності.

8. Отримано статистичний розподіл часу обслуговування (у секундах) одного покупця касиром супермаркету.

x_i	30	34	38	42	46	50	54
n_i	6	8	15	32	21	11	7

Знайти $\bar{x}_B$, D_B , σ_B .

Відповіді:

1. $\bar{x}_B = 325,6$ грн; $\sigma_B = 20,97$; 2. $\bar{x}_B = 4,5$; $S = 0,38$; 3. $\bar{x}_B = 16,48$; $D_B = 4,87$;

4. $S^2 = 6,2$; 5. $\bar{x}_B = 76,2$; $D_B = 18,56$; 6. $S^2 = 5,05$; $S = 2,25$; 7. $S^2 = 4,2$;

8. $\bar{x}_B = 42,6$; $D_B = 36,28$; $\sigma_B = 6,024$.

Розділ XIII. ІНТЕРВАЛЬНІ СТАТИСТИЧНІ ОЦІНКИ ГЕНЕРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Середнє вибіркове, вибіркова дисперсія і середнє квадратичне відхилення є оцінками параметрів генеральної сукупності, що виражається одним числом. Такі оцінки носять назву точкових. Очевидно, що точкова оцінка залежить від об'єму вибірки і може відрізнятися від істинної величини параметру, що оцінюється, тобто приводить до грубих помилок. Це викликає необхідність оцінювати точність і надійність точкових оцінок, отриманих за даною вибіркою, за допомогою так званих інтервальних оцінок.

Відомо, що оцінкою математичного сподівання a (або, що теж саме, генеральної середньої $\bar{x}_Г$) деякої кількісної ознаки X генеральної сукупності є вибіркова середня $\bar{x}_В$. Очевидно, що $\bar{x}_В$ тим точніше, чим менша величина відхилення $|\bar{x}_В - a| < \delta$, то $\bar{x}_В$ тим точніше буде оцінювати a , чим менше δ . У такому випадку, число δ можна вважати *точністю оцінки*. Внаслідок випадковості того, що та чи інша варіанта потрапляє до вибірки, говорити про виконання нерівності $|\bar{x}_В - a| < \delta$ можна лише з деякою γ , яка називається *надійністю* або *надійною ймовірністю* оцінки, тобто

$$P(|\bar{x}_В - a| < \delta) = \gamma,$$

або

$$P(\bar{x}_В - \delta < a < \bar{x}_В + \delta) = \gamma.$$

Це означає, що ймовірність того, що інтервал $(\bar{x}_В - \delta; \bar{x}_В + \delta)$ містить (покриває) невідоме математичне сподівання a дорівнює γ , а сам інтервал $(\bar{x}_В - \delta; \bar{x}_В + \delta)$ називається *надійним інтервалом*.

Особливий інтерес викликає надійний інтервал для оцінки математичного сподівання кількісної ознаки X генеральної сукупності розподіленої за *нормальним* законом. Тут можливі такі випадки:

1. Якщо заздалегідь відома величина середнього квадратичного відхилення σ , то межі надійного інтервала для оцінки математичного сподівання a мають вигляд

$$\left(\bar{x}_В - t \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x}_В + t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right),$$

де $\bar{x}_В$ – середня вибіркова;

n – об'єм вибірки;

σ – відоме середнє квадратичне відхилення генеральної сукупності;

t – величина, що визначається за таблицею значень функції Лапласа

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad \text{з співвідношення} \quad 2\Phi(t) = \gamma, \quad \text{де } \gamma - \text{заздалегідь}$$

обрана надійна ймовірність.

Приклад. Вибіркове обстеження бюджету 36 сімей виявило середньомісячний дохід на одну сім'ю 1286 грн. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a – середньомісячного доходу всіх 10 тисяч обстежених сімей, якщо відомо, що він розподілений за нормальним законом з середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 25$ грн. і задана надійність оцінки $\gamma = 0,9$.

► З співвідношення $\gamma = 0,9$ витікає, що $2\Phi(t) = 0,9 \Rightarrow \Phi(t) = 0,45$. За таблицею значень функції Лапласа знаходимо, що $t = 1,645$. Звідси точність оцінки

$$b = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1,645 \cdot 25}{\sqrt{36}} = 6,85.$$

Нижня межа надійного інтервала: $1286 - 6,85 = 1279,15$; а верхня межа: $1286 + 6,85 = 1292,85$. Таким чином, значення невідомого параметра a , що узгоджується з даними вибірки, задовольняють нерівності $1279,15 < a < 1292,85$. Слід розуміти, що надійна ймовірність пов'язана тут не з величиною параметра a , а лише з межами інтервала, які змінюються при зміні вибірки. Надійність γ свідчить про те, що якщо зроблено достатньо велике число вибірок, то 90% з них визначають такі інтервали, в яких параметр a дійсно міститься, і лише в 10% випадків він може вийти за границі надійного інтервала. ◀

2. Якщо середнє квадратичне відхилення τ досліджуваної ознаки заздалегідь невідомо, то використовується його вибіркова оцінка S – „виправлене” середнє квадратичне відхилення, що визначається за даними вибірки. У цьому випадку надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a має вигляд

$$\left(\bar{x}_v - t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}; \bar{x}_v + t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}} \right),$$

де $\bar{x}_v$ – вибіркова середня;

S – „виправлене” середнє квадратичне відхилення;

n – об'єм вибірки;

t_γ – величина, що визначається за таблицею розподілу Стюдента для заданих об'єму n і надійної ймовірності γ , $t_\gamma = t(\gamma, n)$.

Приклад. За даними вибіркового обстеження 16 студентських їдалень середня виробка на одного працівника кухні складає 10,6 блюд на

годину при вибіркового середньому квадратичному відхиленні $S = 1,4$ бл./год. Знайти надійний інтервал для оцінки математичного сподівання a нормально розподіленої ознаки X – виробки на одного працівника, якщо надійна ймовірність $\gamma = 0,95$.

► Знаходимо величину t_γ . За таблицею розподілу Стюдента для $n = 16$ і $\gamma = 0,95$ невідомий параметр a середнього динної виробки міститься в інтервалі $9,6 < a < 11,34$ блюд на годину. ◀

В деяких підручниках наряду з надійною ймовірністю використовується поняття рівня значущості, що позначається звичайно через α . Зв'язок між цими величинами визначається співвідношенням $\gamma = 1 - \alpha$.

Завдання для самостійної роботи

В задачах 1, 2, 4, 5 передбачається, що розподіл генеральних сукупностей є нормальним (або близьким до нормального). Вибіркові оцінки визначались за результатами n спостережень. Використовуючи ці дані, а також значення заданої надійності, знайти надійні інтервали для оцінки математичного сподівання слідуєчи ознак:

1. Часу безвідмовної роботи електронних ваг, якщо $\bar{x}_B = 2000$; $n=1600$; $\sigma = 40$; $\gamma = 0,95$.

2. Вартості покупки (грн.), якщо $\bar{x}_B = 12,7$ грн.; $n = 25$; $S = 50$ коп.; $\gamma = 0,25$.

3. Час, що витрачає касир супермаркету на обслуговування одного покупця, розподілений за нормальним законом.

а) Вважаючи, що $\sigma = 1,5$ с знайти ймовірність того, що час обслуговування знаходиться в межах $25 \pm 0,3$ с, якщо при обстеженні 81 покупця $\bar{x}_g$ виявилось рівним 25с;

б) Скільки покупців необхідно обстежити, щоб з ймовірністю 0,925 стверджувати, що для всіх відвідувачів час обслуговування знаходиться в межах $25 \pm 0,2$ с.

4. Наявності вітаміну С в одиниці продукту, якщо $\bar{x}_B = 16,8$ г, $n = 25$, $\sigma = 5$ г.

5. Терміну безвідмовної роботи духової шафи, якщо $\bar{x}_B = 3000$ год, $S = 20$ год, $\gamma = 0,9$.

6. Для ознаки, поданої в задачі 5, знайти ймовірність, з якою можна стверджувати, що точність у визначенні $\bar{x}_g$ не перебільшить 10 год.

7. Знайти мінімальний об'єм вибірки, при якому з надійністю $\gamma = 0,9544$ можна стверджувати, що точність оцінки математичного

сподівання нормально розподіленої генеральної сукупності $\delta = 0,25$, якщо $\sigma = 3$.

Відповіді:

1. (1998,04;2001,96); 2. (12,5;12,9); 3. а) $p = 0,928$; б) $n = 179$; 4. (14,23;19,37);
5. (2991,8;3008,2); 6. $\gamma = 0,93$; 7. $n = 576$.

Розділ XIV. ЕЛЕМЕНТИ РЕГРЕСІЙНОГО ТА КОРЕЛЯЦІЙНОГО АНАЛІЗУ

14.1. ЛІНІЙНА ТА НЕЛІНІЙНА РЕГРЕСІЇ

Функціональною залежністю називається такий зв'язок між змінними величинами, при якому залежна величина (функція) повністю визначається значеннями (впливаючих) незалежних величин (аргументів). Вид залежності між аргументами і функцією як правило задається у вигляді формули, яка дає можливість однозначно обчислити значення функції, якщо підставити у формулу значення аргументів.

Статистичною називають залежність, коли змінювання однієї з величин викликає змінювання розподілу іншої. Якщо при змінюванні однієї з величин змінюється середнє значення іншої, має місце *кореляційна залежність*.

Наприклад, чим більше товарообіг X деякої крамниці, тим більшою повинна бути сума витрат обігу Y , проте якщо фактичні дані про товарообіг, якщо фактичні дані про товарообіг і витрати, які отримано від різних крамниць, нанести у вигляді точок на координатну площину xOy , то вони можуть мати вигляд деякої хмари, витягнутої вздовж прямої, або, як говорять, кореляційного поля даних (рис. 14.1).

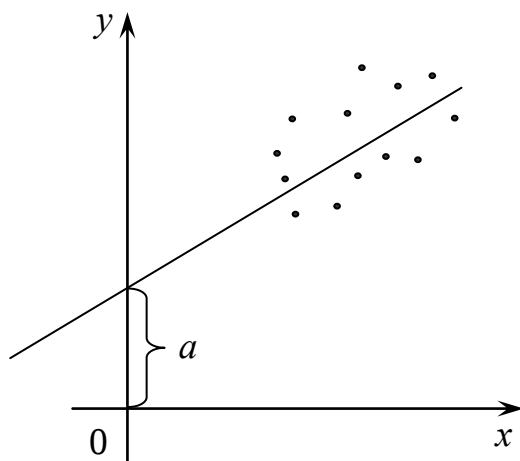


Рис. 14.1

Зріст товарообігу не викликає строго визначених і однозначних змін витрат, а виявляє лише загальну тенденцію їх змін. Разом з тим, лінія середніх значень витрат $\bar{y}(x)$ як графік функціональної залежності наближено (в середньому) описує кореляційний зв'язок.

Якщо за умовну середню прийняти середнє арифметичне значень ознаки Y , що відповідають значенню x ознаки X , тобто

$$\bar{y}_x = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_k}{k},$$

то, *кореляційною залежністю* Y від X називають функціональну залежність умовної середньої $\bar{y}_x$ від x :

$$\bar{y}_x = f(x).$$

Таке рівняння називається *рівнянням регресії* Y на X ; функція $f(x)$ називається *регресією* Y на X , а її графік – *лінією регресії* Y на X .

У наведеному вище прикладі залежність $f(x)$ має вигляд лінійної функції $y = ax + b$. У цьому випадку регресія називається лінійною, а її графік – *прямою регресії*.

Наряду з регресією Y на X може бути визначена регресія X на Y з рівнянням $\bar{x}_y = \Phi(y)$ і графіком, що відрізняється від графіка $\bar{y}_x = f(x)$.

При визначенні кореляційної залежності вирішуються дві основні задачі.

Перша задача теорії кореляції – встановити формулу кореляційної залежності, тобто вигляд функції регресії (лінійна, квадратична, показникова і т.і.).

Друга задача теорії кореляції – оцінити тісноту (силу) кореляційного зв'язку, яка оцінюється за величиною розсіювання значень Y навколо умовного середнього $\bar{y}_x$, чим менше розсіювання, тим сильніше кореляційна залежність.

При вирішуванні економічних задач найчастіше зустрічаються лінійні кореляційні залежності. У цьому випадку функція регресії має вигляд лінійної функції

$$\bar{y}_x = kx + b,$$

а її графіком є пряма лінія (пряма регресії). Розглянемо найпростіший випадок, коли різні значення фактора x і відповідні їм значення y спостерігаються по одному разу. У цьому випадку відпадає необхідність використання умовної середньої $\bar{y}_x$ і рівняння можна записати у вигляді

$$y = kx + b.$$

Кутовий коефіцієнт прямої лінії регресії Y на X називають *вибірковим коефіцієнтом регресії* і позначають через ρ_{yx} . Отже, рівняння прямої лінії регресії має вигляд

$$y = \rho_{yx}x + b.$$

Далі виникає питання про вибір найкращих параметрів рівняння, тобто таких значень ρ_{yx} , b , при яких обраний вигляд залежності як можна точніше описував би залежність y від x . Частіше всього для визначення ρ_{yx} і b використовують метод найменших квадратів відхилень (МНК). При цьому параметри обчислюються таким чином, щоб сума квадратів

відхилень емпіричних значень $\hat{y}_i$

$$\hat{y}_i = \rho_{yx}x + b,$$

які розраховуються за обраною функцією регресії, була найменшою.

Визначення параметрів k і b у цьому випадку зводиться до розв'язання добре відомої задачі знаходження мінімуму функції двох змінних $F(\rho_{yx}, b)$.

Розв'язок цієї задачі дозволяє отримати формули для обчислення параметрів лінійного рівняння регресії

$$\rho_{yx} = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2};$$

$$b = \frac{\sum x^2 \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}.$$

Шляхом перетворень можна довести, що

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2},$$

$$b = \bar{y} - \rho_{yx} \bar{x}.$$

$$\text{Нагадаємо, що } \sigma_x^2 = D_x = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \bar{x}^2 - (\bar{x})^2.$$

14.2. ПОБУДОВА РІВНЯННЯ ЛІНІЙНОЇ РЕГРЕСІЇ ТА ОЦІНКА АДЕКВАТНОСТІ МОДЕЛІ РЕАЛЬНОМУ ПРОЦЕСУ

Розглянемо приклад. За даними вибіркового обстеження п'яти крамниць залежність товарообігу X (млн. грн.) і чисельності працівників Y має вигляд

x_i	1	3	4	5	7
y_i	55	85	100	145	115

Припускаючи, що між X і Y має місце лінійний кореляційний зв'язок, визначити вибіркове рівняння лінійної регресії.

► Вихідні дані і проміжні розрахунки заносимо в таблицю

x_i	y_i	$x_i \cdot y_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	55	55	-3	9	-45	2025
3	85	255	-1	1	-15	225

4	100	400	0	0	0	0
5	145	725	1	1	45	2025
7	115	805	3	9	15	225
$\bar{x} = 4$	$\bar{y} = 100$	$\overline{xy} = 448$		$\sigma_x^2 = 4$ $\sigma_x = 2$		$\sigma_y^2 = 900$ $\sigma_y = 30$

Отже, маємо

$$\rho_{yx} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x^2} = \frac{448 - 4 \cdot 100}{4} = 12.$$

$$b = \bar{y} - \rho_{yx} \bar{x} = 100 - 12 \cdot 4 = 52.$$

Отже, шукане рівняння регресії має вигляд

$$\bar{y}_x = 12x + 52. \blacktriangleleft$$

Оцінка сили лінійної кореляційної залежності визначається за допомогою *коефіцієнта лінійної кореляції*. Його величина визначається за формулою

$$r_B = \rho_{yx} \frac{\sigma_x}{\sigma_y},$$

або неважко довести, що

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}.$$

Слід пам'ятати *властивості коефіцієнта кореляції*:

1. Абсолютна величина коефіцієнта кореляції не перевищує одиниці, тобто $|r_B| \leq 1$, або $-1 \leq r_B \leq 1$.

2. Якщо коефіцієнт кореляції дорівнює нулю, тобто $r_B = 0$, то лінійний кореляційний зв'язок відсутній, при цьому нелінійний кореляційний зв'язок є можливим.

3. Якщо абсолютна величина коефіцієнта кореляції дорівнює одиниці, тобто $|r_B| = 1 \Rightarrow r_B = \pm 1$, то між X і Y існує функціональний зв'язок.

Слід відмітити, що знак коефіцієнта кореляції співпадає зі знаком ρ_{yx} лінійного рівняння регресії.

Для якісної оцінки тісноти кореляційного зв'язку між X і Y можна користуватись таблицею Чеддока.

Діапазон змін $ r_B $	0,1 ÷ 0,3	0,3 ÷ 0,5	0,5 ÷ 0,7	0,7 ÷ 0,9	0,9 ÷ 0,99
Характер тісноти зв'язку	слабкий	помірний	помітний	високий	надто високий

Приклад. За даними попереднього прикладу знайти силу лінійного кореляційного зв'язку товарообігу X і чисельності робітників Y .

$$\blacktriangleright r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{448 - 4 \cdot 100}{2 \cdot 30} = 0,8.$$

Розрахунки підтвердили, що між товарообігом і чисельністю робітників обмеженої групи крамниць спостерігається додатний лінійний кореляційний зв'язок, який відповідно таблиці Чеддока можна вважати високим ($r_B = 0,8$). ◀

Завдання для самостійної роботи

1. За даними обстеження шести крамниць залежність витрат обігу Y (тис. грн.) від величини товарообігу X (млн. грн) наведена у таблиці

x_i	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	6,5
y_i	4	6	5,5	7,0	8,0	8,5

Припускаючи, що між X і Y має місце лінійний кореляційний зв'язок, знайти рівняння лінійної регресії. Визначити також коефіцієнт кореляції.

Від. $\bar{y}_x = 0,86x + 3,92$.

2. Знайти вибіркве рівняння прямої лінії регресії Y на X за даними спостережень.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	80	75	75	70	65

де y – середнє значення товарних запасів у днях, x – величина товарообігу (млн. грн.) мережі крамниць. Визначити також тісноту лінійного кореляційного зв'язку.

3. Знайти вибіркве рівняння прямої лінійної регресії Y на X , де y – середнє значення рівняння витрат, x – товарообіг мережі їдалень (млн. грн.)

x_i	5	5,5	6	7
y_i	2,5	3,5	2,5	1,5

Оцінити також тісноту зв'язку.

14.3. ПЕРЕВІРКА СТАТИСТИЧНИХ ГІПОТЕЗ ПРО ЗАКОН РОЗПОДІЛУ

При дослідженні деякої ознаки X генеральної сукупності за основу приймається припущення про те, що вона розподілена за певним законом. Іншими словами висувається гіпотеза про передбачаємий закон розподілу, яка, власно кажучи, потребує перевірки. Така перевірка здійснюється за допомогою критеріїв, які називаються критеріями згоди. Інакше кажучи, статистична гіпотеза – це припущення про тип або властивості розподілу випадкової величини, які спостерігаються під час експерименту.

Загального підходу стосовно висунення гіпотези про закон розподілу не існує. Проте, виходячи з емпіричного розподілу досліджуваної ознаки, одержують полігони, гістограми, обчислюють різні числові характеристики, аналізують їх і в залежності від отриманого, висувається та або інша гіпотеза про закон розподілу.

Законами розподілу випадкової величини, які найчастіше зустрічаються при дослідженні проблем галузі, є нормальний, показниковий, пуассонівський.

Критерієм перевірки гіпотез (критерієм згоди) називається правило, у відповідності з яким робиться висновок про те, що результати спостережень не суперечать, узгоджуються із сформульованою гіпотезою, і гіпотеза залишається, або навпаки – результати спостережень суперечать гіпотезі, і гіпотеза відкидається.

Розглянемо критерій, який найчастіше зустрічається в практиці розв'язання економічних задач засобами математичної статистики – *критерій згоди Пірсона* при застосуванні його до перевірки гіпотези про *нормальний розподіл* генеральної сукупності.

Суть критерію полягає в порівнянні емпіричних (які одержані дослідним шляхом, які спостерігають) частот n_i і теоретичних частот n'_i , обчислених у припущенні нормального розподілу генеральної сукупності. Критерій Пірсона відповідає на питання: чи випадкове розходження (незначуще) або не випадкове (значуще). При цьому критерій Пірсона не підтверджує однозначно правильність або неправильність гіпотези, а тільки встановлює її згоду або незгоду з даними спостережень при обраному рівні значущості.

За критерій перевірки обирають випадкову величину

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i}.$$

Обчислене за даною формулою значення величини χ^2 (хі квадрат) порівнюють з критичним значенням χ^2_{kp} , що визначається за

відповідною таблицею. Табличне значення χ^2_{kp} визначається за обраним рівнем значущості α і числу ступіней волі k , яке визначається за формулою

$$k = S - 1 - r,$$

де S – число груп (інтервалів групування) вибірки;

r – число параметрів передбачаємого закону розподілу.

У випадку припущення про нормальний закон розподілу

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

такими параметрами є математичне сподівання a і середнє квадратичне відхилення σ , а точніше їх вибіркові оцінки. Таким чином, число r параметрів розподілу дорівнює двом, а число ступіней волі

$$k = S - 1 - 2 = S - 3.$$

Якщо в результаті обчислень виконується нерівність $\chi^2 < \chi^2_{kp}$, то гіпотеза про нормальний розподіл генеральної сукупності приймається з ймовірністю $\gamma = 1 - \alpha$. якщо $\chi^2 > \chi^2_{kp}$, гіпотезу відкидається з тою ж ймовірністю.

Теоретичні частоти n'_i визначаються співвідношенням $n'_i = n \cdot p_i$, в якому ймовірність p_i влучення випадкової величини в i -й інтервал у випадку гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності визначається за формулою

$$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i),$$

де

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}^*}{S};$$

x_i – i -а варіанта;

$\bar{x}^*$ – вибіркова середня групуваної вибірки;

S – емпіричне (вибіркове) середнє квадратичне відхилення;

$\Phi(z)$ – функція Лапласа.

Приклад. Величина черги (кількість осіб) до кас у 200 обстежених у годину пік продовольчих крамницях виявилася такою

Кількість осіб	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20	20 – 22
Частота	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Перевірити гіпотезу про те, що величина черги розподілена за нормальним законом, прийнявши за рівень значущості $\alpha = 0,05$.

► Знаходимо середини інтервалів

$$x_i^* = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \text{ тобто}$$

$$x_1^* = \frac{4+6}{2} = 5; x_2^* = \frac{6+8}{2} = 7; \dots; x_9^* = \frac{20+22}{2} = 21.$$

Подальші обчислення заносимо у таблицю

i	x_i^*	n_i	$z_i = \frac{x_i^* - \bar{x}^*}{S}$	$z_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}^*}{S}$	$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n'_i
1	5	15	$-\infty$	-1,41	-0,5	-0,4207	0,0793	15,86
2	7	26	-1,41	-0,99	-0,4207	-0,3381	0,0818	16,36
3	9	25	-0,99	-0,156	-0,3389	-0,2123	0,1266	25,32
4	11	30	-0,156	-0,13	-0,2123	-0,0517	0,1606	32,16
5	13	26	0,13	0,29	-0,0517	0,1141	0,1658	33,16
6	15	21	0,29	0,72	0,1141	0,2642	0,1501	30,02
7	17	24	0,72	1,14	0,2642	0,3729	0,1087	21,74
8	19	20	1,14	1,57	0,3729	0,4418	0,0689	13,78
9	21	13	1,57	∞	0,4418	0,5	0,0582	11,64
		$\sum n_i = 200$					$\sum p_i = 1$	$\sum n'_i = 200$

$$\bar{x}^* = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^9 n_i x_i^* = \frac{5 \cdot 15 + 7 \cdot 26 + 9 \cdot 25 + 11 \cdot 30 + 13 \cdot 26 + 15 \cdot 21 + 17 \cdot 24 + 19 \cdot 20 + 21 \cdot 13}{200} = 12,63;$$

$$S^2 = \frac{1}{200} \sum_{i=1}^9 n_i (x_i^* - \bar{x}^*)^2 = \frac{1}{200} (15(5-12,63)^2 + 26(7-12,63)^2 + 25(9-12,63)^2 + 30(11-12,63)^2 + 26(13-12,63)^2 + 21(15-12,63)^2 + 24(17-12,63)^2 + 20(19-12,63)^2 + 13(21-12,63)^2) = 22,04.$$

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{22,04} = 4,695.$$

Обчислимо кінці інтервалів $(z_i; z_{i+1})$, покладаючи найменше значення $z_1 = -\infty$, а найбільше значення $z_{10} = \infty$.

Тоді

$$z_2 = \frac{x_1 - \bar{x}^*}{S} = \frac{6-12,63}{4,695} = -1,41; \quad z_3 = \frac{8-12,63}{4,695} = -0,99;$$

$$z_4 = \frac{10-12,63}{4,695} = -0,156; \quad z_5 = \frac{12-12,63}{4,695} = -0,13;$$

$$z_6 = \frac{14 - 12,63}{4,695} = 0,29; \quad z_7 = \frac{16 - 12,63}{4,695} = 0,72;$$

$$z_8 = \frac{18 - 12,63}{4,695} = 1,14; \quad z_9 = \frac{20 - 12,63}{4,695} = 1,57.$$

(очевидно, що стовпець z_{i+1} отримаємо з стовпця z_i шляхом зміщення його значень на одиницю вверх).

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(z_i)$ і $\Phi(z_{i+1})$:

$$\Phi(z_1) = \Phi(\infty) = -0,5; \quad \Phi(z_2) = \Phi(-1,41) = -\Phi(1,41) = -0,4207 \text{ і т. ін.}$$

Далі знаходимо ймовірності P_i влучення випадкової величини в інтервал $(z_i; z_{i+1})$:

$$P_1 = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) = -0,4207 + 0,5 = 0,0793 \text{ і т.ін.}$$

Додаючи всі числа стовпця P_i , легко переконатись, що їх сума дорівнює $\left(\sum_{i=1}^9 p_i = 1 \right)$.

Визначимо теоретичні частоти n'_i за формулою $n'_i = n \cdot p_i$

$$n'_1 = n \cdot p_1 = 200 \cdot 0,0793 = 15,86; \quad n'_2 = 200 \cdot 0,0818 = 16,36 \text{ і т. ін.}$$

$$\text{Очевидно, що } \sum_{i=1}^9 n'_i = n = 200.$$

Обчислимо

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^9 \frac{(n_i - n'_i)^2}{n'_i} = \sum_{i=1}^9 \frac{n_i^2}{n'_i} - n = \frac{15^2}{15,86} + \frac{26^2}{16,36} + \dots + \dots \frac{13^2}{11,64} - 200 \approx 9,3.$$

$$\text{За таблицею для } S = 9, k = 9 - 3 = 6; \alpha = 0,05 \Rightarrow \chi_{kp}^2 = 12,6.$$

Таким чином, $\chi^2 < \chi_{kp}^2$, тобто гіпотеза про нормальний розподіл випадкової величини — довжини черги — приймається з ймовірністю $\gamma = 0,95$.

Завдання для самостійної роботи

У задачах 1 та 3 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомі емпіричні і теоретичні частоти, рівень значущості $\alpha = 0,05$.

1.

емпіричні частоти	6 12 16 40 13 8 5
-------------------	-------------------------------

теоретичні частоти	4	11	15	43	15	6	6
--------------------	---	----	----	----	----	---	---

Відповідь: $\chi^2 = 2,5$; $\chi_{kp}^2 = 9,5$.

У задачах 2 та 4 перевірити гіпотезу про нормальний розподіл по групуваним вибіркам з генеральної сукупності при $\alpha = 0,05$.

2. Є 200 контрольних вимірів відхилень ваги товари на механічних вагах

середина інтервалу	-0,14	-0,12	-0,10	-0,08	-0,06	-0,04	-0,02	0	0,02	0,04	0,06	0,08	0,10	0,12
частота	3	8	11	20	27	36	29	18	17	17	8	4	1	1

3.

емпіричні частоти	5	13	12	44	8	12	6
теоретичні частоти	2	20	12	35	15	10	6

Відповідь: $\chi^2 = 13$; $\chi_{kp}^2 = 9,5$.

4. Величина контрольного розміру 73 деталей, вироблених на одному верстаті:

граничні інтервали	2,9–3,9	3,9–4,9	4,9–5,9	5,9–6,9	6,9–7,9
частота	5	15	28	19	6

Список літератури

1. Вища математика: посібник для самостійного вивчення курсу/ за ред. проф Синєкопа М.С./ В.Г. Гула, М.С. Синєкоп та ін. ХДУХТ, Харків. – 2007. – 303 с.
2. Вища математика: навчальний посібник: Вступ до математичного аналізу. Диференційне числення функції однієї та багатьох змінних/ В.В. Полевич, Л.О. Пархоменко. ХДУХТ, Харків. – 2010. – 164 с.
3. Вища математика: Навч. посібник: У 4 т. – Т.1: Аналітична геометрія та лінійна алгебра: Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків / Л.В. Курпа, Ж.Б. Кашуба та ін.; За ред. проф. Л.В. Курпа. – Харків: НТУ „ХПІ”, 2006. – 344с. – Рос. та англ. мовами.
4. Корж О.П. Елементи аналітичної геометрії і лінійної алгебри. Навч. посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навч. закладів. – Харків: Студцентр, 2001. – 200с.
5. Полевич В.В. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики – Х.: 2007
6. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика – К.: ВАТ “Книжкова друкарня наукової книги”, 2006.
7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М.: Высшая школа, 2010.

ЗМІСТ

Передмова	3
Частина 1. Вища математика	4
Розділ I. Елементи лінійної алгебри	4
1.1. Матриці та визначники	4
1.2. Системи лінійних рівнянь	10
Розділ II. Елементи векторної алгебри	17
2.1. Основні визначення	17
2.2. Скалярний добуток двох векторів	20
2.3. Векторний добуток двох векторів	20
2.4. Мішаний добуток трьох векторів	21
Розділ III. Елементи аналітичної геометрії	24
3.1. Пряма на площині	24
3.2. Площина і пряма у просторі	27
3.3. Криві другого порядку	31
Розділ IV. Вступ до математичного аналізу.	
Елементи диференціального числення	40
4.1. Границя функції однієї змінної	40
4.2. Неперервність функції однієї змінної	48
4.3. Похідна і диференціал функції однієї змінної	52
4.4. Дослідження функцій із застосуванням похідних	58
4.5. Визначення та способи завдання функції багатьох змінних	64
4.6. Границя і неперервність функції багатьох змінних	64
4.7. Частинні похідні. Повний приріст функції багатьох змінних	66
4.8. Диференціювання складених функцій. Дотична і нормаль до поверхні	68
4.9. Екстремум функції двох змінних	71
4.10. Скалярне поле. Похідна у даному напрямі. Градієнт	72
Розділ V. Елементи інтегрального числення.	
Невизначений інтеграл	79
5.1. Основні означення, властивості та таблиця інтегралів	79
5.2. Методи інтегрування	80
5.3. Інтегрування раціональних дробів	81
5.4. Інтегрування тригонометричних функцій	82
5.5. Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів	84
Розділ VI. Елементи інтегрального числення.	
Визначений та невластні інтеграли	89
6.1. Основні поняття та властивості	89
6.2. Методи інтегрування	91
6.3. Застосування визначеного інтеграла	92

6.4. Невласні інтеграли з нескінченною границею	99
6.5. Невласні інтеграли від необмежених функцій	101
Розділ VII. Диференціальні рівняння. Ряди	104
7.1. Диференціальні рівняння першого порядку	104
7.2. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку	108
7.3. Ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності ряду	113
7.4. Достатні ознаки збіжності знакопостійних рядів	115
7.5. Знакопереміжні ряди. Знакозмінні ряди	119
7.6. Степеневі ряди	120
7.7. Розвинення функцій у степеневі ряди. Застосування рядів до наближених обчислень	122
Частина 2. Теорія ймовірностей та математична статистика	121
Розділ VIII. Випадкові події.	
Теореми додавання та добутку ймовірностей	127
8.1. Випадкові події та їх класифікація	127
8.2. Елементи комбінаторики	128
8.3. Класичне визначення ймовірності	129
8.4. Відносна частота. Статистична ймовірність	130
8.5. Теореми додавання та добутку ймовірностей	133
8.6. Ймовірність появи хоча б однієї випадкової події	136
8.7. Теорема додавання ймовірностей сумісних подій	138
Розділ IX. Наслідки теорем додавання та добутку ймовірностей.	
Повторні незалежні випробування	140
9.1. Формула повної ймовірності. Формули Бейєса	140
9.2. Формула Бернуллі	142
9.3. Локальна теорема Лапласа	144
9.4. Інтегральна теорема Лапласа	145
9.5. Формула Пуассона	146
9.6. Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності у незалежних випробуваннях	148
Розділ X. Дискретні випадкові величини	151
10.1. Дискретні випадкові величини (ДВВ). Функція розподілу	151
10.2. Числові характеристики ДВВ	154
10.3. Закони розподілу ДВВ	156
Розділ XI. Неперервні випадкові величини. Закон великих чисел.	
Центральна гранична теорема	160
11.1. Неперервні випадкові величини (НВВ). Щільність розподілу ймовірностей	160
11.2. Числові характеристики НВВ	164
11.3. Закони розподілу НВВ	165
11.4. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема	170
Розділ XII. Математична статистика. Вибірковий метод.	

Статистичні оцінки параметрів розподілу	173
12.1. Вибірковий метод.	
Основні поняття математичної статистики	173
12.2. Статистичні оцінки параметрів розподілу	180
Розділ XIII. Інтервальні статистичні оцінки генеральних характеристик	186
Розділ XIV. Елементи регресійного та кореляційного аналізу	190
14.1. Лінійна та нелінійна регресії	190
14.2. Побудова рівняння лінійної регресії та оцінка адекватності моделі реальному процесу	192
14.3. Перевірка статистичних гіпотез про закон розподілу	195
Список літератури	201
Зміст	202

Навчальне видання

СИНЕСКОП Микола Сергійович
ЖИЛЮК Ніна Олексіївна
СОФРОНОВА Марина Сергіївна

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Частина 1

Вища математика.

Теорія ймовірностей та математична статистика

За редакцією професора М.С. Синєкопа

Навчальний посібник

В авторській редакції

Підп. до друку 08.04.2015 р. Формат 60х84 1/16. Папір офсет. Друк
офсет.

Умов. друк. арк. 12,4. Тираж 80 прим. Зам. № .

Видавець і виготівник

Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.