

УДК 674.058.6.

ПРОГНОЗУВАННЯ КРИТИЧНОГО РАДІУСА ЗГИНУ ЗРАЗКА

Пилипів І.З. аспірант каф. ТСіДБВ

(Національний лісотехнічний університет України)

Проведено аналіз числових характеристик розподілу на основі експериментальних даних мінімально-допустимих радіусів згину волокнистої плити. Застосовано моделі прогнозування на основі нормального та показникового законів розподілу.

1. Аналіз числових характеристик розподілу.

В ході експерименту, що полягав у визначення мінімально-допустимого (критичного) радіуса згину волокнистої плити отримано ряд числових даних (Табл.1).

Табл. 1 Числові значення радіуса згину

Радіус згину (мм.)														
82	76	79	85	77	92	88	87	78	93	80	75	83	77	89
79	93	86	76	91	85	81	94	75	90	87	77	80	78	84

На основі табл.1 згрупуємо емпіричні дані в $s = 4$ групи:

Табл. 2 Згруповані емпіричні дані

Радіус згину	[75-80)	[80-85)	[85-90)	[90-95)
Кількість зразків	12	5	7	6

При заданому обсязі вибірки (кількості зразків) $n = 30$ отримаємо закон розподілу вибірки дисперсної випадкової величини x -радіуса згину у табличній формі (Табл. 3).

Табл. 3 Інтервали значень

Варіанта x_i	77.5	82.5	87.5	92.5
Частота n_i	12	5	7	6

де x_i визначають середні значення утворених інтервалів. При цьому полігон частот має вигляд (Рис.1).

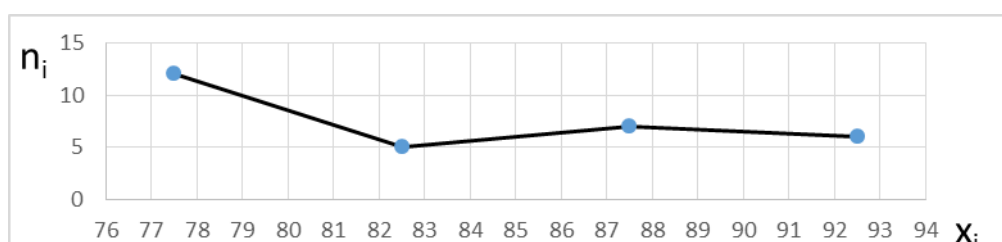


Рис.1 Полігон частот

Основні числові характеристики є такими:

а) середнє квадратичне вибіркове відхилення

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^4 x_i^2 n_i - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^4 x_i n_i \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{30} (77.5^2 \cdot 12 + 82.5^2 \cdot 5 + 87.5^2 \cdot 7 + 92.5^2 \cdot 6) - \frac{1}{30^2} (77.5 \cdot 12 + 82.5 \cdot 5 + 87.5 \cdot 7 + 92.5 \cdot 6)^2} \approx 5.9 \quad (1)$$

Враховавши, що вибіркове середнє дорівнює

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{2497}{30} \approx 83.2$$

при наперед заданій надійності $\gamma = 0,95$ можна побудувати довірчий інтервал для невідомого математичного сподівання

$$a \in \left(\bar{x}_B - \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n}}; \bar{x}_B + \frac{t\sigma_B}{\sqrt{n}} \right), \quad (2)$$

де точність оцінки t обчислюється із формули $2\Phi(t) = \gamma = 0.95$ (3)

$\Phi(t)$ є функцією Лапласа і має вигляд $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Із значень табуляції функції $\Phi(t)$ маємо $t = 1.96$, а отже математичне сподівання невідомого радіуса згину можна взяти із надійного (довірчого) інтервалу

$$83.2 - \frac{1.96 \cdot 5.9}{5.5} < a < 83.2 + \frac{1.96 \cdot 5.9}{5.5},$$

в результаті обчислення отримуємо $a \in (81.1; 85.3)$

Таким чином, із 95% надійністю можемо очікувати, що при радіусі згину $R > 81.1$ мм. зразок не зламається. Завдяки обчисленню при застосуванні інших умов, таких як товщина плити та час витримки після нанесення клейової композиції, отримуємо очікуваний діапазон мінімальних радіусів згину.

Табл. 3 Мінімальний радіус згину з ймовірністю 95%.

Час витримки (хв.)	Товщина плити (мм.)									
	2,5					3,2				
	мін.	<	сер.	<	макс.	мін.	<	сер.	<	макс.
2	71	<	73	<	74	91	<	93	<	94
4	65	<	67	<	69	86	<	87	<	89
6	60	<	62	<	64	81	<	83	<	85
8	62	<	64	<	66	83	<	84	<	86
10	65	<	67	<	68	85	<	87	<	88

2. Використання нормального розподілу до прогнозування критичного радіуса згину зразка.

Із Рис. 1 випливає, що полігон частот якісно нагадує праву частину симетричної кривої Гауса, яка описує нормальний розподіл.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4)$$

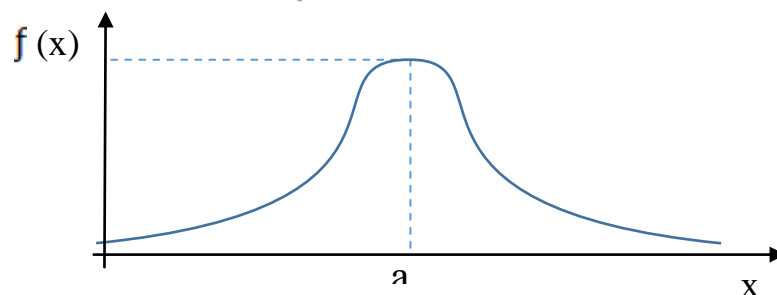


Рис. 2

де вхідні параметри (в системі одиниць SI) згідно п.2 $\mu \in R=0.83$; $\sigma \approx 0.06$

Враховавши, що імовірність попадання в інтервал $(X \text{ і } X)$ для нормального розподілу (4) визначається так

$$P(d < x < \beta) = \left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{d-a}{\sigma}\right) \quad (5)$$

очікуваний радіус R_* , при якому зразок зламається, може бути визначений із співвідношення

$$X\left(\frac{R_*-a}{\sigma}\right) = P = X\left(\frac{R_*-0.83}{0.06}\right) \quad (6)$$

Тобто $R_* = 0.06T + 0.83$, де T визначають із таблиці значень функцій $\Phi(t)$ при наперед заданому значенні ймовірності. Підраховані для трьох випадків імовірності зламу зразка P_i числові значення наведено в таблиці.

Отже, при заданих емпіричних даних (табл.1) при радіусі згину зразка $R_* \leq 83$ мм його ламання можна вважати достовірною подією. Однак, ми бачимо що зменшення відсотку ймовірності з 95 до 80 несуттєво впливає на зміну прогнозованого радіуса згину.

Табл.4 Критичний радіус згину за нормальним розподілом

№	P_i	$T_i = \frac{R_* - 0.83}{0.06}$	R_*
1	0,95	1,96	83,34
2	0,9	1,64	83,32
3	0,8	1,28	83,30

3. Використання показникового розподілу до прогнозування критичного радіуса згину зразка.

Рис.1 можна апроксимувати кривою показникового розподілу [1]

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (7)$$

де характер λ пов'язаний із основними характеристиками розподілу так:

$$M(x) = \frac{1}{\lambda}; D(x) = \frac{1}{\lambda^2}; \sigma(x) = \frac{1}{\lambda}; \quad (8)$$

Взявши з п.2 числове значення вибіркового середнього квадратичного відхилення $\sigma = 0.59$, отримаємо $\lambda = 1.79$ (в системі SI)

Враховавши, що ймовірність досягнення критичного радіуса згину обчислюється за допомогою інтегральної функції розподілу

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \int_{-\infty}^x \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda x}, \quad (9)$$

тоді очікуваний радіус $x = R_*$ при якому зразок зламається, може бути встановлений із співвідношення

$$R = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \text{ тобто } R_* = x = \frac{\ln(1-P)}{-\lambda} \quad (10)$$

Підраховані для трьох випадків імовірностей зламу P_i числові значення радіуса наведено в таблиці

Табл. 5 Критичний радіус згину за показниковим розподілом

№	P_i	$R_* = \frac{\ln(1 - P_i)}{-\lambda}$
1	0.95	167.3
2	0.9	128.6
3	0.8	89.8

Як бачимо, числові значення прогнозованих критичних радіусів згину для нормального (табл.4) та показникового (табл.5) процесу розподілу відрізняється суттєво. Крім того, при використанні показникового розподілу, значення радіусів виходять за межі емпіричних даних отриманих в результаті експерименту, що вказує на неможливість його застосування в даному випадку.

Список літератури:

1. Гаральд К. Математические методы статистики. Изд. второе. / изд. «МИР» Москва 1976. — 625 с.
2. Козлов М. В., Прохоров А. В. Введење в математическую статистику. / М.: Изд-во МГУ, 1987. — 264с.

Аннотация

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ КРИТИЧЕСКОГО РАДИУС ИЗГИБА ОБРАЗЦА Пылыпив И.З.

Проведен анализ числовых характеристик распределения на основе экспериментальных данных минимально-допустимых радиусов изгиба волокнистой плиты. Используются модели прогнозирования на основе нормального и показательного законов распределения.

Abstract

PREDICTION CRITICAL RADIUS BENDS SAMPLE Pylypiv I.Z.

The analysis of the numerical characteristics of the distribution based on experimental data, the minimum allowable bend radius fiber plates. Applied forecasting models based on the normal and exponential distribution laws.