

## МЕТОДИКА МОДЕЛИРОВАНИЯ СТРУКТУРЫ МЕТАЛЛОВ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕСТАНОВКИ ПИКСЕЛЕЙ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Скобло Т.С., докт. техн. наук, проф., Клочко О.Ю., Белкин Е.Л.  
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства  
имени Петра Василенко)

*В работе проведено моделирование структуры металлов с помощью перестановки пикселей изображения*

**Введение.** Принято считать, что процессы диффузии лежат в основе структуры металлов. Моделированию процесса диффузии посвящено большое число работ [1-5]. Простейший случай основан на моделировании броуновского движения [1,3]. Однако получающиеся картины далеки от истинной структуры металлов. Делаются попытки моделирования, основанные на физических процессах замещения вакансий и изменениях плотности и упорядочения дислокаций [3,4]. Хотя такой подход более рационален, он, вместе с тем, далек от истинной структуры металлов. В этом подходе перестановки осуществляются на основе рассчитанной вероятности перехода от одного к другому энергетическому уровню. Но, как показал наш опыт расчетов, физические схемы не учитывают коллективные перестановки. Коллективные перестановки в настоящей работе исследовались частично (например, круговая перестановка на один пиксель всех точек, кроме средней по схеме рис.1). Это новое направление исследований.

**Цель и задачи работы.** В настоящей работе перестановки осуществляются на основе минимизации или максимизации функционалов, характеризующих скопления точек. Но и в этом подходе возможны самые разные решения. Можно было бы принять за основу функционалы пространства Соболева [2], в которых обобщенные производные вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Существует достаточно много других подходов к конструированию обобщенных производных. Одному из таких подходов и посвящена данная работа. Он основан на гидродинамических аналогиях и аналогиях теории пластичности [6,7].

**Результат исследования.** В работе [8] было введено понятие вихря, дивергенции и вариации при числовой обработке фотографий. В этой работе для схемы расположения соседних с  $ij$  точкой вводится небольшое, но имеющее принципиальное значение для моделирования структуры, обобщенное понятие абсолютной величины вихря как полусуммы классического и направленного под углом  $45^0$  к нему абсолютных величин лапласианов (3). Аналогично вводится понятие обобщенного градиента (15). Хотя для обобщенного градиента не возникает таких принципиальных трудностей, какие имеют место при моделировании структуры с помощью вихрей.

$$\begin{array}{ccc}
c_{i+1j-1} & c_{i+1j} & c_{i+1j+1} \\
c_{ij-1} & c_{ij} & c_{ij+1} \\
c_{i-1j-1} & c_{i-1j} & c_{i-1j+1}
\end{array}$$

Рис.1. Схема расположения соседних с  $ij$  точкой ( $c_{ij}$  и т.д. с индексами – цвета пикселей).

В дальнейшем для сокращения записей цвета точек этой же схемы вводим обозначения

$$\begin{array}{ccc}
c_3 & c_4 & c_5 \\
c_2 & c_1 & c_6 \\
c_9 & c_8 & c_7
\end{array}$$

Рис.2. Схема расположения соседних с 1-й точкой.

Классическая абсолютная величина лапласиана (вихря)

$$|l_{1ij}| = \left| \frac{c_{ij-1} + c_{ij+1} + c_{i-1j} + c_{i+1j} - 4c_{ij}}{h^2} \right| \quad (1)$$

Абсолютная величина лапласиана, под углом  $45^\circ$  к классическому

$$|l_{2ij}| = \left| \frac{c_{i-1j-1} + c_{i-1j+1} + c_{i+1j-1} + c_{i+1j+1} - 4c_{ij}}{2h^2} \right| \quad (2)$$

В знаменателе множитель 2 потому, что расстояния между пикселями под углом  $45^\circ$  являются диагональю между пикселями классической разностной схемы.

Тогда обобщенная величина вихря выразится формулой

$$|l_{oij}| = \frac{2|l_{1ki}| + |l_{2ki}|}{4} \quad (3)$$

Естественно, во всех трех формулах величина  $h$  - шага между пикселями для удобства принимаем равной единице.

Аналогичный принцип применен при выводе формулы (15).

Для формулы абсолютной величины дивергенции применительно к схеме из 9 соседних пикселей наиболее приемлемой оказалась не какая-то отдельная из (4)-(11), а их среднее значение:

$$r_1 = |c_{ij-1} + c_{i-1j} - 2c_{ij}| \quad (4)$$

$$r_2 = |c_{ij} + c_{i-1j+1} - 2c_{ij+1}| \quad (5)$$

$$r_3 = |c_{i+1j-1} + c_{ij} - 2c_{i+1j}| \quad (6)$$

$$r_4 = |c_{i+1j} + c_{ij+1} - 2c_{i+1j+1}| \quad (7)$$

$$r_5 = |c_{ij-1} + c_{i-1j} - 2c_{i-1j-1}| \quad (8)$$

$$r_6 = |c_{ij} + c_{i-1j+1} - 2c_{i-1j}| \quad (9)$$

$$r_7 = |c_{i+1j-1} + c_{ij} - 2c_{ij-1}| \quad (10)$$

$$r_8 = |c_{i+1j} + c_{ij+1} - 2c_{ij}| \quad (11)$$

$$|d_{oij}| = \frac{r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 + r_8}{8} \quad (12)$$

$$r_1 = \frac{\sqrt{(c_{ij-1} - c_{ij})^2 + (c_{i-1j} - c_{ij})^2 + (c_{ij+1} - c_{ij})^2 + (c_{i+1j} - c_{ij})^2}}{2} \quad (13)$$

$$r_2 = \frac{\sqrt{(c_{i-1j-1} - c_{ij})^2 + (c_{i-1j+1} - c_{ij})^2 + (c_{i+1j+1} - c_{ij})^2 + (c_{i+1j-1} - c_{ij})^2}}{2} \quad (14)$$

$$|v_{oij}| = \frac{2r_1 + r_2}{2} \quad (15)$$

С применением этих формул решалась следующая вариационная задача. При помощи только перестановок пикселей из заданного изображения получить такое возможно в случае, при котором суммарная величина (1) или (3) по всем пикселям достигнет экстремума. Алгоритм решения такой задачи довольно прост. Он состоит из большого числа итераций. На каждой итерации для каждых 9 пикселей, приведенных на схеме, производится 9 расчетов по формуле (3) (или 5 расчетов по формуле 1), в которых поочередно меняются пиксели со средней точкой.

Такая задача, несмотря на кажущуюся сложность математической постановки, довольно естественна. Не так просто, например, получить с помощью только бинарных цветов (черного и белого) любые оттенки серого цвета. В данной работе была сделана попытка преобразования среднего цвета, заданного случайным равномерно распределенным набором черных и белых пикселей, в однотонный цвет. Но с помощью предлагаемого метода это оказалось возможным только в отдельных случаях и то, если начальное поле белых и черных точек было каким-то образом упорядочено. Однако для случайно распределенных черных и белых точек в результате решения задачи получили изображения структур. Было это достигнуто с помощью минимизации (или максимизации) функционалов, к рассмотрению которых переходим.

$$F_1(\alpha) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} [\alpha |l_{oij}| + (1-\alpha) |d_{oij}|] = \min, \max \quad (16)$$

$$F_2(\alpha) = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} [\alpha |v_{oij}| + (1-\alpha) |d_{oij}|] = \min, \max \quad (17)$$

В (16) и (17)  $m$  - число строк пикселей,  $n$  - число столбцов пикселей на изображении.

$|l_{oij}|$  вычисляется по формуле (3)

$|d_{oij}|$  вычисляется по формуле (12)

$|v_{oij}|$  вычисляется по формуле (15)

$\alpha$  - параметр функционала  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Для минимизации (или максимизации) (16) или (17) был использован метод локальной вариации. Он состоит в том, что оптимизация производится для каждых 9 пикселей, приведенных на схемах, путем расчета не полного функционала, а только фрагмента из 9 пикселей. То есть, только для одного какого-то слагаемого с индексом  $ij$  в указанных выше формулах. Но для одного слагаемого нужно так переставить пиксели на схеме рис. 1 или рис. 2, чтобы достигнуть минимума или максимума. Для сокращения записей обозначим через

$$F_{k1ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (18)$$

значение одного слагаемого (16) или (17). Индекс  $k$  относится к типу функционала:  $k = 1$  относится к (16), а  $k = 2$  относится к (17). Следующий индекс 1 после  $k$  перед  $ij$  относится к номеру перестановки пикселей на схеме рис.2. Для написанного выражения (18) расчет соответствует схеме рис.2.

Выражение

$$F_{k2ij}(\alpha, c_2, c_1, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (19)$$

$$\begin{array}{ccc} c_3 & c_4 & c_5 \\ c_1 & c_2 & c_6 \\ c_9 & c_8 & c_7 \end{array}$$

Рис. 3. Схема перестановки точек.

$$F_{k3ij}(\alpha, c_3, c_2, c_1, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (20)$$

$$F_{k4ij}(\alpha, c_4, c_2, c_3, c_1, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (21)$$

$$F_{k5ij}(\alpha, c_5, c_2, c_3, c_4, c_1, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (22)$$

$$F_{k6ij}(\alpha, c_6, c_2, c_3, c_4, c_5, c_1, c_7, c_8, c_9) \quad (23)$$

$$F_{k7ij}(\alpha, c_7, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_1, c_8, c_9) \quad (24)$$

$$F_{k8ij}(\alpha, c_8, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_1, c_9) \quad (25)$$

$$F_{k9ij}(\alpha, c_9, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_1) \quad (26)$$

$$F_{k10ij}(\alpha, c_1, c_3, c_2, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (27)$$

$$F_{k11ij}(\alpha, c_1, c_9, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_2) \quad (28)$$

$$F_{k12ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4, c_6, c_5, c_7, c_8, c_9) \quad (29)$$

$$F_{k13ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_7, c_6, c_8, c_9) \quad (30)$$

$$F_{k14ij}(\alpha, c_1, c_2, c_4, c_3, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (31)$$

$$F_{k15ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_5, c_4, c_6, c_7, c_8, c_9) \quad (32)$$

$$F_{k16ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_8, c_7, c_9) \quad (33)$$

$$F_{k17ij}(\alpha, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_9, c_8) \quad (34)$$

Всех перестановок гораздо больше (9), но в данной работе рассматривали только (18) – (26). Выбирали ту, для которой значение (18) – (26) наименьшее (или наибольшее).

Учет граничных условий:

если  $j = 2$ , то перестановки (19), (20), (26), (27) и (28) не производятся;  
 если  $j = n - 1$ , то перестановки (22), (23), (24), (29) и (30) не производятся;  
 если  $i = 2$ , то перестановки (20), (21), (22), (31) и (32) не производятся;  
 если  $i = m - 1$ , то перестановки (24), (25), (26), (33) и (34) не производятся.

То есть, граничные точки не переставляются.

Видим (рис.4), что классическая схема непригодна для черных и белых цветов. Это следовало ожидать заранее, если даже мысленно представить отдельно черную и белую полосы. Они должны быть такие, чтобы средний цвет был равен заданному. Тогда внутри каждой из полос лапласианы будут равны нулю, а все не равные нулю лапласианы будут на границе разделения этих полос. В данном случае из-за учета граничных условий получили более сложную, но ожидаемую картину.

Поэтому в дальнейшем (рис.5) речь будет идти о формуле (3). Хотя для 11 цветов, как в рассматриваемых высокохромистых чугунах [8], классическая схема (1) вполне применима. Это проверялось, но для сокращения в этой работе не приведено.

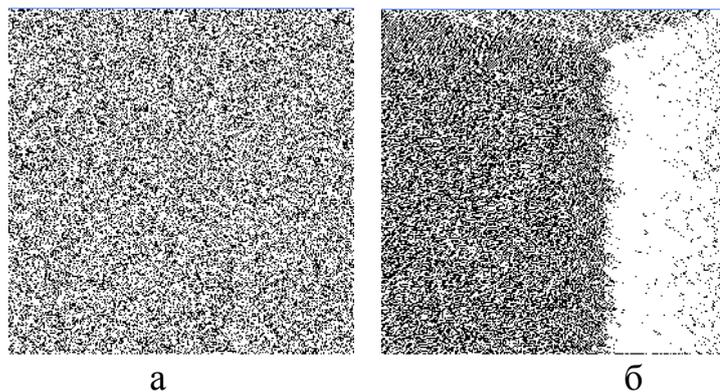


Рис. 4. Минимизация абсолютных величин вихрей (б) случайного набора черных и белых пикселей (а) по классической схеме (1) конечных разностей для лапласиана.

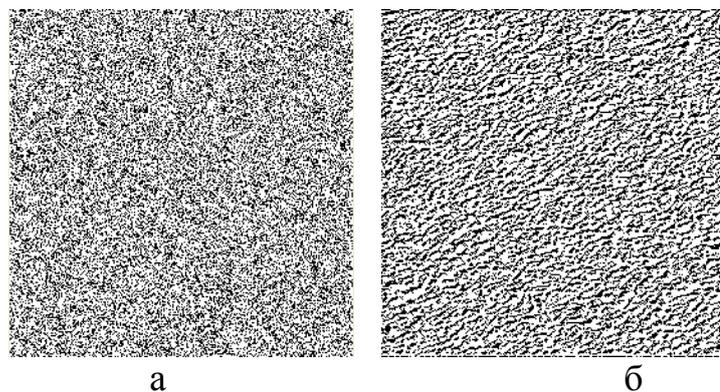


Рис. 5. Минимизация абсолютных величин вихрей (б) случайного набора черных и белых пикселей (а) по обобщенной формуле (3). Рисунок по функционалу (16) при  $\alpha = 1$ .

Видим, что формула (3) пригодна для черных и белых цветов.

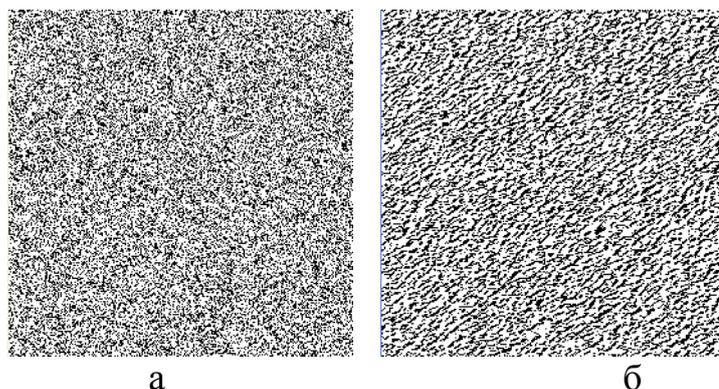


Рис. 6 Минимизация абсолютных величин вихрей (б) случайного набора черных и белых пикселей (а) по обобщенной формуле (3). Рисунок по функционалу (16) при  $\alpha = 0,5$ .

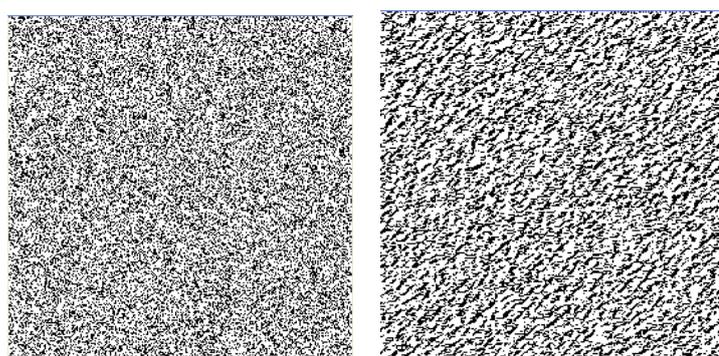


Рис. 7 Минимизация абсолютных величин вихрей (б) случайного набора черных и белых пикселей (а) по обобщенной формуле (3). Рисунок по функционалу (17) при  $\alpha = 0,5$

Дальше идут аналогичные рисунки по новой схеме для фотографий матрицы высокохромистого чугуна: общий вид после ТО и в литом состоянии.

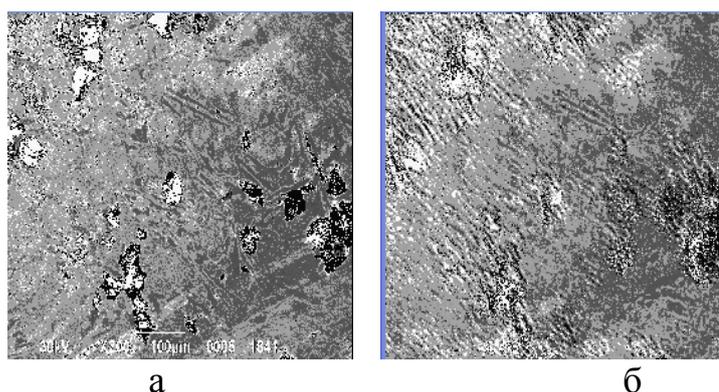


Рис. 8 Минимизация абсолютных величин вихрей (б) фотографии матрицы высокохромистого чугуна в литом состоянии (а) по обобщенной схеме конечных разностей (3).

Из приведенных данных видно, что термообработка увеличивает однородность структуры.

Далее следуют числовые значения, полученные при расчетах (табл.1).

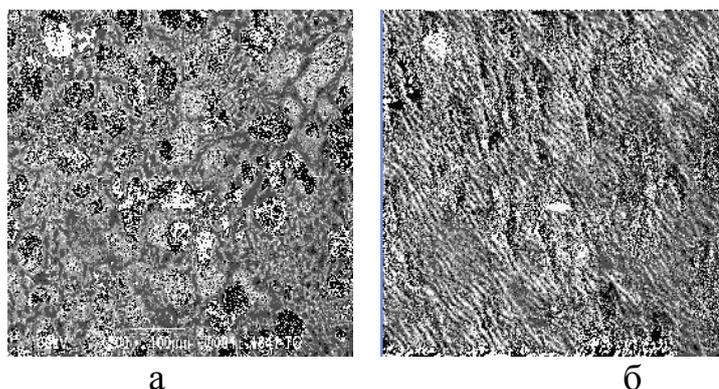


Рис. 9. Минимизация абсолютных величин вихрей (б) фотографии матрицы высокохромистого чугуна после ТО (а) и по обобщенной схеме (3).

Таблица 1

Значения завихренности (суммарной абсолютной величины вихрей или лапласианов) на исходном рисунке, после первой и 100-итераций

Структура	Завихренность на исходном рисунке	Завихренность после 1-й итерации	Завихренность после 100-й итерации
Случайная	97654464	74039401	38494019
После ТО	69069340	33599168	29900497
Литое состояние	40283810	22910362	21156082

Видно, что первая же итерация существенно уменьшает завихренность на исходном рисунке. Для более подробного изучения изменения зависимости по итерациям приводится табл. 2.

Таблица 2

Отношения завихренностей на исходном рисунке к завихренности после первой итерации, после 100-й итерации и отношение завихренности после первой итерации к завихренности после 100-й итерации

Структура	Отношение исходной завихренности к завихренности после первой итерации	Отношение исходной завихренности к завихренности после 100-й итерации	Отношение завихренности после 1-й итерации к завихренности после 100-й итерации
Случайная	1,319	2,537	1,923
После ТО	2,055	2,310	1,124
Литое состояние	1,758	1,904	1,083

Видно, что уже первая итерация существенно уменьшает завихренность на исходном рисунке. Для более подробного изучения изменения зависимости по итерациям приводится табл. 3.

Таблица 3

Отношения завихренностей на исходном рисунке к завихренности после первой итерации, после 100-й итерации и отношение завихренности после первой итерации к завихренности после 100-й итерации

Структура	Отношение исходной завихренности к завихренности после первой итерации	Отношение исходной завихренности к завихренности после 100-й итерации	Отношение завихренности после 1-й итерации к завихренности после 100-й итерации
Случайная	1,319	2,537	1,923
После ТО	2,055	2,310	1,124
Литое состояние	1,758	1,904	1,083

В табл.4,5 приводятся значения функционалов (16) и (17) в зависимости от величины параметра  $\alpha$ .

Таблица 4

Значения первого функционала (16) на исходном рисунке, после первой и 20-итераций

Выпуклая комбинация $\alpha =$	Функционал на исходном рисунке	Функционал после 1-й итерации	Функционал после 20-й итерации
1	9765446426190	7406188315548	3947347339503
0,9	9439919381836	6646111270036	4122660428215
0,7	8788865293128	6292334331635	3936860321837
0,5	8137811204420	5957433857261	3836720480945
0,3	7486757115712	5547327419497	3896595005837
0,1	6835703027005	5156935048219	3806380145909
0	6510175982651	5091528236681	4236418753953

Таблица 5

Значения второго функционала (17) на исходном рисунке, после первой и 20-итераций

Выпуклая комбинация $\alpha =$	Функционал на исходном рисунке	Функционал после 1-й итерации	Функционал после 20-й итерации
1	3306334731931	2860103477528	1987041646124
0,9	3626718856985	2928790494698	1919261570543
0,7	4267487107149	3390346649657	2456823588634
0,5	4908255357290	3847743940345	2874753423931
0,3	5549023607435	4289819029621	3194933708346
0,1	6189791857602	4731894118933	3515113992782
0	6510175982651	5091528236681	4236418753953

Визуально видно, что моделированные структуры имели текстуру, но не лишним убедиться в этом и аналитически. Ранее был разработан алгоритм для определения направления структуры. Он представляет самостоятельный интерес. Также вызывает интерес, понятие направления потока. Оно в металловедении имеет аналог, называемый текстурой. Используя метод наименьших квадратов, получаем формулы определения направлений, которые отличаются от классической системы нормальных уравнений.

Задача ставится следующим образом. Необходимо найти коэффициенты уравнения прямой  $y = a + bx$  исходя из координат  $x_i$  и  $y_i$  пикселей, для которых значение маркера меньше заданного числа. Чтобы найти  $a$  и  $b$ , находим

$$c = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (35)$$

$$d = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (36)$$

$$e = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \quad (37)$$

По этим значениям находим два взаимно ортогональных направления

$$b_1 = \frac{-(d - e) + \sqrt{(d - e)^2 + 4c^2}}{2c} \quad (38)$$

$$b_2 = \frac{-(d - e) - \sqrt{(d - e)^2 + 4c^2}}{2c}, \quad (39)$$

По ним находим

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b_1 \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (40)$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - b_2 \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (41)$$

Таблица 6

Значения  $b_1, b_2, a_1, a_2$  при минимизации функционалов (16) в зависимости от параметра  $\alpha$

$\alpha =$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$
1	335.002	-0.00002985	-95606.001	380.123
0.9	167.168	-0.00005982	-47333.211	382.525
0.7	167.168	-0.00005982	-47333.211	382.525
0.5	-2611.492	-0.00003829	745780.059	380.294
0.3	-189.175	-0.00005286	54483.325	378.471
0.1	603.499	-0.00001657	-171755.280	381.182
0	234.226	-0.00004269	-66028.941	382.258

Точка пересечения полученных взаимно перпендикулярных прямых находится в центре тяжести маркеров.

В качестве маркеров в этой работе было выбрано значение половины максимальной абсолютной величины вихря на рассчитываемом изображении. Для исходной случайной структуры получено:

$$b_1 = 177884.146 \quad b_2 = -0.00000005621 \quad a_1 = -50810402.516 \quad a_2 = 380.331$$

Таблица 7

Значения  $b_1, b_2, a_1, a_2$  при минимизации функционалов (17) в зависимости от параметра  $\alpha$

$\alpha =$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$
1	539.460	-0.00001854	-154052.021	380.423
0.9	169.590	-0.00005897	-48025.285	382.507
0.7	-660.782	-0.00001513	188661.118	380.195
0.5	603.499	-0.00001657	-171755.280	381.182
0.3	711.350	-0.00001406	-202527.716	381.129
0.1	711.350	-0.00001406	-202527.716	381.129
0	234.226	-0.00004269	-66028.941	382.258

Таблица 8

Значения  $b_1, b_2, a_1, a_2$  при максимизации функционалов (16) в зависимости от параметра  $\alpha$

$\alpha =$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$
1	352.113	-0.00002839	-99834.457	380.649
0.9	-1934.181	0.00005170	550535.388	379.459
0.7	-1934.181	0.00005170	550535.388	379.459
0.5	540.962	-0.00001848	-153361.485	380.088
0.3	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0.1	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0	7881.124	-0.00001268	-2240207.17	379.766

Таблица 9

Значения  $b_1, b_2, a_1, a_2$  при максимизации функционалов (17) в зависимости от параметра  $\alpha$

$\alpha =$	$b_1$	$b_2$	$a_1$	$a_2$
1	261.282	-0.00003827	-74007.754	379.905
0.9	162.787	-0.00006142	-45976.023	381.076
0.7	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0.5	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0.3	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0.1	619.836	-0.00001613	-175857.200	380.031
0	7881.124	-0.00001268	-2240207.17	379.766

Из сравнения  $b_1$  и  $b_2$  для случайной структуры с любым значением этих же параметров в табл.5 – табл.8 видно, что коэффициенты при  $b_1$  и  $b_2$  для случайной, еще не преобразованной структуры по абсолютной величине на порядок больше, чем для преобразованных. Это говорит о направлении (упорядочении) структуры после моделирования диффузии с помощью перестановок цветов пикселей. Если же сделать аналогичные расчеты по фрагментам, то отличия в направлениях между фрагментами случайной структуры и расчетными, будут намного большими. Это направление отдельной работы.

Была сделана еще одна серия расчетов на сравнение упорядоченности исходной случайной структуры и структур, полученных с помощью минимизации и максимизации функционалов (16) и (17) для различных значений параметра  $\alpha$ .

Определение упорядоченности структуры было представлено в раннее выполненной работе. Обозначим через 0 черный цвет, а через 1 – белый. Упорядоченность структуры тогда выразится формулой

$$u = \sum_{i=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{n-1} |p_{ij-1} + p_{i-1j} + p_{ij+1} + p_{i+1j} - p_{ij}|, \quad (42)$$

где все  $p$  с индексами равны или 0, или 1.

Результаты представлены в табл. 9.

Таблица 9

Сравнение упорядоченности исходной случайной структуры и структур, полученных с помощью минимизации и максимизации функционалов (16) и (17) для различных значений параметра  $\alpha$

$\alpha =$	Минимизация функционала (16)	Минимизация функционала (17)	Максимизация функционала (16)	Максимизация функционала (17)
1	381331	446568	729480	748788
0.9	444715	444718	725429	727465
0.7	444715	552851	725429	706619
0.5	465820	594865	707600	706619
0.3	553149	594821	706619	706619
0.1	594865	594821	706619	706619
0	884984	884984	703252	703252
Исходная случайная структура	775911	775911	775911	775911

**Выводы.** Мы видим, что при максимизации функционалов (16) и (17) все значения упорядоченности полученных структур меньше значения упорядоченности исходной структуры. При минимизации картина более сложная. Наименьшие значения упорядоченности получаются при  $\alpha=1$  и они примерно в два раза меньше, чем для исходной структуры. Но при  $\alpha=0$ , что соответствует требованию только сохранения объема, степень упорядоченности полученных структур больше чем в исходной структуре.

## Список литературы

1. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). – М.: Физматгиз, 1962.
2. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1973.
3. Трухан С.Н. Моделирование диффузии методом Монте-Карло / С.Н. Трухан. – <http://www.exponenta.ru/educat/systemat/truhan/truhan.asp>.
4. Никоненко В.А. Математическое моделирование технологических процессов: Моделирование в среде MathCAD. Практикум / Под ред. Г.Д. Кузнецова. – М.: МИСиС, 2001. – 48 с.
5. Криворучко А.А. Моделирование диффузии примесей в полупроводниках при неравновесных условиях / А.А. Криворучко // Физико-химические процессы в конденсированном состоянии и на межфазных границах «ФАГРАН-2006»: материалы III Всерос. конф., окт. 2006 г. – Воронеж, 2006. – Т.2. – С. 469-472.
6. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
7. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
8. Скобло Т.С. Обоснование применения понятий уравнений гидродинамики Навье-Стокса для анализа металлографических изображений / Т.С. Скобло, Е.Л. Белкин, О.Ю. Клочко // Сб. трудов конф. «Европейская наука XXI века», 07-15 мая 2011г., Польша.

## Анотація

### **Методика моделювання структури металів за допомогою перестановки пікселів зображення**

*У роботі проведено моделювання структури металів за допомогою перестановки пікселів зображення й розроблені практичні рекомендації*

## Abstract

### **Methodology of design of structure of metals with a help transpositions of pixels of image**

*Are In-process conducted design of structure of metals by means of transposition of pixels of image and practical recommendations are worked out*