

МІНІСТЕРСТВО НАУКИ І ОСВІТИ УКРАЇНИ  
Харківський державний університет харчування та торгівлі

Потапов В.О.

**МОДЕЛЮВАННЯ ТЕХНОЛОГІЧНИХ  
ПРОЦЕСІВ ХАРЧОВИХ ВИРОБНИЦТВ**

**Рекомендовано вченою радою  
університету як навчальний посібник**

Харків 2008

УДК 529.711.3: 664

Потапов В.О. Моделювання технологічних процесів харчових виробництв. Навчальний посібник: - Х.: ХДУХТ, 2008 – 148 с. іл. – 23; табл. - 11;. Бібліографія: 6 назв.

ISBN – 978 – 966 – 405 – 088 - 0

У початковому посібнику викладено теоретичні основи моделювання процесів харчових виробництв.

Розглянуто принципи експериментального, аналітичного, емпірико-аналітичного методів моделювання. Надано відомості про методи статистичного аналізу та обробки експериментальних даних. Наведено приклади складання фізико-математичних моделей найбільш поширених технологічних процесів: механічних, гідромеханічних, теплообмінних, масообмінних, хімічних та біохімічних. Посібник містить приклади розв'язання конкретних задач та запитання для самоконтролю.

Посібник призначений для магістрів, які спеціалізуються за фахом “Обладнання переробних та харчових виробництв” та може бути корисний аспірантам, науковцям, які працюють у цій галузі.

Рецензенти: д-р.техн. наук, професор Оніщенко В.П.  
д-р.техн. наук, професор Богомолов О.В.  
д-р.техн. наук, професор Погожих М.І.

Рекомендовано до видання вченою радою Харківського державного університету харчування та торгівлі, протокол засідання № від 2008 р.

ISBN – 978 – 966 – 405 – 088 - 0

© Потапов В.О., 2008

© Харківського державного університету харчування та торгівлі, 2008

## Зміст

	стор.
<b>Вступ</b> .....	6
<b>Розділ 1. Етапи фізико-математичного моделювання</b> .....	7
1.1 Принципи моделювання. Загальний порядок складання моделей .....	8
1.2. Методи математичного опису об'єкту .....	10
Питання для самоперевірки .....	13
1.3. Аналітичні методи моделювання .....	13
1.3.1. Термодинамічний метод опису систем .....	13
1.3.2. Феноменологічний метод опису систем .....	16
Питання для самоперевірки .....	18
1.4. Експериментальні методи моделювання .....	19
Питання для самоперевірки .....	23
1.5. Експериментально аналітичний метод моделювання	24
Питання для самоперевірки .....	25
1.6. Статистична обробка експериментальних даних ...	26
1.6.1 Основні поняття математичної статистики ...	26
1.6.2 Обчислення похибок прямих вимірювань ...	27
1.6.3. Обчислення похибок непрямих вимірювань .	30
1.6.4 Перевірка випадковості розсіяння експериментальних даних .....	31
1.6.5. Кореляційний аналіз. Проста лінійна регресія .....	31
1.6.6. Кореляційний аналіз. Множинна лінійна регресія .....	32
1.6.7. Регресійний аналіз лінійних емпіричних рівнянь .....	33
1.6.8. Регресійний аналіз нелінійних емпіричних рівнянь .....	36
1.6.9. Адекватність вибору емпіричних рівнянь ...	37
Питання для самоперевірки .....	38
<b>Розділ 2. Моделювання механічних процесів</b> .....	39
2.1. Моделювання процесів перемішування .....	39
2.2. Моделювання процесів здрібнювання .....	43
2.3. Моделювання процесів формоутворення .....	45
Питання для самоперевірки .....	51
<b>Розділ 3. Моделювання гідродинамічних процесів</b> .....	52
3.1. Система рівнянь Нав'є—Стокса у випадку моделювання руху малих тіл .....	52

3.2. Система рівнянь Нав'є—Стокса у випадку моделювання руху рідини у приграничному шарі . . . . .	56
3.3. Моделювання течії рідини з використанням рівнянь ньютонівської динаміки . . . . .	59
3.3.1. Моделювання процесів осадження . . . . .	60
3.3.2. Моделювання течії в'язкої рідини у плівковому випарному апараті з падаючою плівкою . . . . .	62
3.3.3. Моделювання течії в'язкої рідини у роторно-плівковому випарному апараті . . . . .	64
3.3.4. Моделювання течії неньютонівської рідини у круглому трубопроводі . . . . .	66
3.3.5. Моделювання процесу фільтрування . . . . .	68
3.4. Моделювання гідродинамічних процесів з використанням критеріїв подібності . . . . .	72
Питання для самоперевірки . . . . .	74
<b>Розділ 4. Моделювання теплообмінних процесів . . . . .</b>	<b>75</b>
4.1. Основні фізичні закони та методи моделювання теплообмінних процесів . . . . .	75
4.2. Моделювання динаміки нагрівання та охолодження . . . . .	79
4.3. Методи моделювання теплообмінників . . . . .	84
4.3.1. Модель рекуперативного теплообмінника з зосередженими параметрами . . . . .	84
4.3.2. Модель рекуперативного теплообмінника з розподіленими параметрами . . . . .	90
4.3.3. Модель змішувального теплообмінника . . . . .	92
4.4. Моделювання процесу варення . . . . .	95
4.5. Моделювання процесу жарення . . . . .	99
4.6. Моделювання процесів радіаційного нагрівання . . . . .	104
4.7. Моделювання процесів охолодження та заморожування . . . . .	108
Питання для самоперевірки . . . . .	111
<b>Розділ 5. Моделювання масообмінних процесів . . . . .</b>	<b>112</b>
5.1. Основні масообмінні процеси харчових технологій та методи моделювання . . . . .	112
5.2. Моделювання процесу вилуговування . . . . .	118
5.3. Моделювання процесу адсорбції . . . . .	119
5.4. Моделювання процесу сушіння . . . . .	124
5.4.1. Моделювання кінетики масоперенесення . . . . .	127
5.4.2. Моделювання кінетики теплоперенесення . . . . .	129

5.4.3. Моделювання кінетики високотемпературних методів сушіння . . . . .	132
5.4.4. Моделювання кінетики деформації у процесі сушіння . . . . .	135
Питання для самоперевірки . . . . .	137
<b>Розділ 6. Моделювання хімічних та біохімічних процесів . .</b>	<b>138</b>
6.1. Основні закони хімічної кінетики та методи моделювання хімічних реакцій . . . . .	138
6.2. Основні закони біохімічної кінетики та методи моделювання біохімічних реакцій . . . . .	143
Питання для самоперевірки . . . . .	147
<b>Список літератури . . . . .</b>	<b>148</b>

## ВСТУП

Процеси харчової технології - це складні фізико-хімічні процеси змінні в просторі і в часі, які мають двоїсту детерміновано-стохастичну природу. Потоки речовини, що беруть участь у них, як правило, багатофазні і багатокомпонентні. У ході протікання процесу в кожній точці фази і на границях розділу відбувається перенос імпульсу, енергії, маси. Крім того, весь процес протікає в апараті з конкретними геометричними характеристиками, що, у свою чергу, впливає на характер цього процесу.

Рішення проблеми опису таких складних систем дає метод математичного моделювання, що базується на стратегії системного аналізу, сутність якої полягає в представленні процесу як складної взаємодіючої ієрархічної системи з наступним якісним аналізом її структури, розробкою математичного опису й оцінкою невідомих параметрів.

Під фізико-математичним моделюванням розуміють вивчення властивостей об'єкта на фізико-математичній моделі. Його метою є визначення оптимальних умов протікання процесу, керування їм на основі математичної моделі і перенос результатів на об'єкт.

Основним поняттям методу є поняття **фізичної моделі** – адекватному опису найбільш істотних властивостей процесу, побудованому на основі елементарних фізичних уявлень. При цьому доречно привести одне класичне висловлення: “фізичні моделі схожі на карикатури, вони відбивають одну але найбільш істотну рису досліджуваного явища”.

**Математичною моделлю** називається наближений опис якого-небудь явища або процесу, виражений за допомогою математичної символіки і не обов'язково такий, що відбиває фізичну сутність явища.

**Фізико-математична модель** являє собою математичний опис елементарних фізичних явищ, що лежать в основі фізичної моделі.

Фізико-математичне моделювання включає наступні взаємозалежні етапи:

- вибір фізичної моделі,
- складання математичного опису досліджуваного об'єкта;
- вибір методу рішення системи рівнянь математичного опису і реалізація його у формі моделюючої програми;
- встановлення відповідності (адекватності) моделі об'єктові.

## РОЗДІЛ 1

### ЕТАПИ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Розрізняють **класичний і системний** підхід до фізико-математичного моделювання. При класичному (індуктивному) підході до моделювання, тобто при переході від часткового до загального, модель синтезується шляхом злиття окремих складових. На відміну від цього системний підхід припускає послідовний перехід від загального до часткового, коли в основі розгляду лежить єдина мета дослідження.

Основні вимоги системного підходу можна сформулювати так.

- Правильна локалізація проблеми.
- Визначення найбільш повних границь дослідження даної проблеми.
- Оцінка можливих невизначеностей і методів їхнього зменшення.
- Вибір критеріїв добору елементів, що входять у створювану модель.
- Виявлення альтернативних моделей і рішень.
- Адекватність моделі і ступень експериментальної перевірки зроблених висновків.

Побудову моделі починають з фізичного опису об'єкта моделювання. При цьому виділяють "елементарні" процеси, що протікають в об'єкті моделювання і які підлягають відображенню в моделі. Формулюють основні допущення, прийняті при їхньому описі. Під "елементарним" процесом розуміється фізико-хімічний процес, що відноситься до визначеного класу явищ, наприклад масообмін, теплопередача, хімічна реакція і т.д. Слід зазначити, що назва "елементарні" процеси не означає, що дані процеси є найпростішими й описуються нескладними рівняннями.

Взаємозв'язок "елементарних" процесів може бути надзвичайно складним. Тому на практиці часто роблять різні допущення щодо характеру зв'язків, що дозволяє уникнути необхідності введення в модель недостатньо вивчених залежностей і, отже, зайвого ускладнення опису.

Слід зазначити, що іноді фізичний опис об'єкта моделювання встановлюється в результаті математичного моделювання. Якщо математичний опис адекватний відомим фізичним моделям, то можна з

визначеною мірою впевненості стверджувати, що знайдено найбільш близький до істинного механізм протікання процесу.

На етапі складання математичного опису попередньо виділяють основні явища й елементи в об'єкті і потім устанавлюють зв'язок між ними. Далі, для кожного виділеного елемента і явища записують рівняння (або систему рівнянь), що відбиває його функціонування. У залежності від процесу математичний опис може бути представлений у вигляді системи алгебраїчних, диференціальних, інтегральних і інтегродиференціальних рівнянь.

Етап вибору методу рішення і розробки моделюючої програми полягає у виборі найбільш ефективного методу рішення з наявних (під ефективністю маються на увазі швидкість одержання і точність рішення) і реалізацію його спочатку у формі алгоритму рішення, а потім — у формі комп'ютерної програми.

Для перевірки адекватності математичної моделі реальному процесові потрібно порівняти результати вимірів на об'єкті в ході процесу з результатами прогнозування на основі моделі в ідентичних умовах. Для цього використовується апарат математичної статистики.

## 1.1. Принципи моделювання.

### Загальний порядок складання моделей

При складанні математичного опису загальним прийомом є блоковий принцип. Відповідно до цього принципу, складанню математичного опису передують аналіз окремих "елементарних" процесів, що протікають в об'єкті моделювання, наприклад гідродинамічних, механічних процесів, процесів масо- і теплопередачі, кінетики хімічних реакцій. При цьому експерименти по вивченню кожного такого процесу проводять в умовах, що максимально наближаються до умов експлуатації об'єкта моделювання.

Заключним етапом у даному випадку є об'єднання описів усіх досліджених "елементарних" процесів (блоків) у єдину систему рівнянь математичного опису об'єкта моделювання. Достоїнством блокового принципу побудови математичного опису є те, що його можна використовувати на стадії проектування об'єкта, коли остаточний варіант апаратного оформлення ще невідомий.

Розрізняють **аналітичний, експериментальний і експериментально-аналітичний методи** моделювання.

**Аналітичними методами** за звичай називають способи одержання математичних рівнянь статички, динаміки і кінетики на основі теоретичного аналізу фізичних і хімічних процесів, що відбуваються в



досліджуваному об'єкті, а також на основі заданих конструктивних параметрів апаратури і характеристик речовин, що переробляються. При одержанні цих рівнянь використовуються фундаментальні закони збереження речовини й енергії, а також кінетичні закономірності процесів переносу маси і теплоти, хімічних перетворень.

Для складання математичного опису за допомогою аналітичних методів не потрібно проведення яких-небудь експериментів на об'єкті, тому такі методи придатні для одержання характеристик нових об'єктів, фізико-хімічні процеси в яких відомі.

Параметри (коефіцієнти) складених рівнянь функціонально залежать від визначальних розмірів апарата (діаметра, довжини і т.д.), властивостей оброблюваних речовин і величин, що характеризують протікання фізико-хімічних процесів (коефіцієнтів переносу, констант швидкості реакцій і ін.). Деякі параметри рівнянь можуть бути визначені розрахунковими шляхом, інші знаходяться за допомогою принципу подібності за результатами раніше виконаних досліджень.

До недоліків аналітичних методів складання математичного опису можна віднести складність рішення системи рівнянь, яка збільшується при досить повному описі об'єкта.

**Експериментальний метод** складання математичного опису використовується для керування і дослідження об'єктів у вузькому, "робочому" діапазоні зміни вхідній і вихідній змінних (наприклад, при побудові системи автоматичної стабілізації окремих технологічних параметрів). Ці методи найчастіше ґрунтуються на припущенні про лінійність і зосередженість параметрів об'єкта. Прийняття цих допущень дозволяє порівняно просто описувати процеси, що спостерігаються, алгебраїчними або лінійними диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами. При експериментальному підході до складання математичного опису завжди потрібна постановка дослідів безпосередньо на досліджуваному об'єкті.

Достоїнством експериментальних методів є простота одержання математичної моделі при досить точному описі властивостей об'єкта у вузькому діапазоні зміни параметрів. Основний недолік експериментальних методів — неможливість встановлення функціонального зв'язку між вхідними параметрами і конструктивними характеристиками об'єкта, режимними параметрами процесу, фізико-хімічними властивостями речовин. Крім того, отримані експериментальним методом математичні описи не можна поширювати на інші однотипні об'єкти.

Наявність "сильних" і "слабких" сторін аналітичного й експериментального методів складання математичного опису привело до

розробки комбінованого **експериментально-аналітичного** методу. Сутність його полягає в аналітичному складанні рівнянь опису, проведенні експериментальних досліджень і отриманні по їхніх результатах параметрів рівнянь. При такому підході до одержання математичного опису зберігаються багато позитивних властивостей експериментальних і аналітичних методів.

## 1.2. Методи математичного опису об'єкту

Формально математичний опис являє собою сукупність залежностей, що зв'язують різні змінні процесу в єдину систему рівнянь. Серед цих співвідношень можуть бути рівняння, що відбивають загальні фізичні закони (наприклад, закони збереження маси й енергії), рівняння, що описують "елементарні" процеси (наприклад, хімічні перетворення), обмеження на змінні процесу і т.д. Крім того, до складу математичного опису входять також різні емпіричні і напівемпіричні залежності між різними параметрами процесу, теоретична форма яких невідома або занадто складна.

Зокрема, при відсутності або досить обмеженому обсязі теоретичних знань про об'єкт моделювання, коли невідомий навіть орієнтовано вид співвідношень, що описують його властивості, рівняння математичного опису можуть являти собою систему емпіричних залежностей, отриманих у результаті статистичного обстеження діючого об'єкта (експериментальний метод складання математичного опису). Ці моделі звичайно мають вигляд регресійних співвідношень між вхідного і вихідними змінними об'єкта і, зрозуміло, не відбивають фізичну сутність об'єкта моделювання, що утрудняє узагальнення результатів, одержуваних при їхньому застосуванні.

На відміну від моделей, заснованих на регресійних співвідношеннях, математичні моделі, побудовані на основі аналітичного методу, відбивають основні закономірності процесу і якісно правильно характеризують його навіть при наявності недостатньо точних параметрів моделі. Тому з їхньою допомогою можна вивчати загальні властивості об'єктів моделювання, що відносяться до визначеного класу.

У складі математичного опису, розробленого на основі фізичної природи об'єкта моделювання, можна виділити наступні групи рівнянь:

1. Рівняння збереження фізичної субстанції (маси, енергії, імпульсу), які мають вигляд.

$$\boxed{\text{Прихід субстанції}} - \boxed{\text{Витрата субстанції}} = \boxed{\text{Накопичення субстанції}}$$

Різниця між приходом і витратою субстанції дорівнює зміні її кількості в розглянутому об'єкті. У стаціонарному режимі не може відбуватися ні збиток, ні накопичення. У цьому випадку це рівняння переходить у рівняння матеріального балансу.

$$\boxed{\text{Прихід}} = \boxed{\text{Витрата}} \\ \boxed{\text{Субстанції}} \quad \boxed{\text{субстанції}}$$

2. Рівняння елементарних процесів для локальних потоків. До цієї групи відносяться описи процесів масо- і теплообміну, хімічних реакцій і ін.

3. Теоретичні, напівемпіричні або емпіричні співвідношення між різними параметрами процесу. Такими є, наприклад, залежність коефіцієнта масопередачі від швидкостей потоків фаз, залежність теплоємності суміші від складу і т.д.

4. Обмеження на параметри процесу. Наприклад, при моделюванні процесу дифузії в замкнутому об'ємі на будь-якій ступіні процесу повинне виконуватися умова, що сума концентрацій усіх компонентів дорівнює 1. Крім того, відносна концентрація будь-якого компонента повинна знаходитися в діапазоні від 0 до 1.

Загальним для всіх математичних моделей є те, що число рівнянь, що включаються в математичний опис, повинне дорівнюватися числу змінних, що знаходяться в результаті моделювання.

Математичні моделі можна класифікувати в такий спосіб:

по просторовим ознакам - моделі з зосередженими параметрами; комірчасті моделі; моделі з розподіленими параметрами;

по часовим ознакам - стаціонарні моделі; квазістаціонарні моделі; нестаціонарні моделі.

Основні класи рівнянь, що зустрічаються в математичних описах технологічних об'єктів харчової промисловості наступні: алгебраїчні і трансцендентні рівняння, звичайні диференціальні рівняння, диференціальні рівняння в часткових похідних і інтегральні рівняння. Останній тип - інтегральні рівняння порівняно рідко зустрічається в задачах математичного моделювання об'єктів харчової технології.

До алгебраїчних рівнянь звичайно зводиться математичний опис стаціонарних режимів роботи об'єктів із зосередженими параметрами (наприклад, реактор - змішувач). Розподіл температур, швидкостей потоку при стаціонарній течії рідини в апараті.

Звичайні диференціальні рівняння використовують для математичного опису нестаціонарних режимів об'єктів із зосередженими

параметрами, наприклад, для опису кінетики зміни середньої температури при нагріванні (охолодженні) тіла, а також стаціонарних режимів об'єктів з розподіленими параметрами але по одній просторовій координаті. У першому випадку незалежною змінною є час, а в другому — просторова координата.

Складність рішення звичайних диференціальних рівнянь визначається поруч обставин. По-перше, вона зростає з ростом порядку рівняння (або, що практично еквівалентно цьому, з ростом числа диференціальних рівнянь у системі, оскільки рівняння  $n$ -го порядку завжди можна перетворити в систему, що складається з  $n$  рівнянь першого порядку). На складність рішення істотніше впливає лінійність або нелінійність рівнянь. Лінійні звичайні диференціальні рівняння вирішуються набагато простіше; для них розроблений ряд спеціальних методів, наприклад, операційне числення. Лінійні диференціальні рівняння з постійними коефіцієнтами мають просте аналітичне рішення. Не лінійність різко ускладнює рішення, і, як правило, у цьому випадку потрібне використання чисельних методів.

Важливою особливістю математичного опису, що містить звичайні диференціальні рівняння, є необхідність завдання початкових умов.

Диференціальні рівняння в частинних похідних використовують для математичного опису динаміки об'єктів з розподіленими параметрами або стаціонарних режимів для об'єктів з параметрами, розподіленими по декількох координатах. Для зазначених рівнянь при описі динаміки об'єкта поряд з початковими умовами потрібно також задавати граничні умови, які у загальному випадку є функціями часу. Для стаціонарних об'єктів, які описуються рівняннями в часткових похідних, задають тільки граничні умови. Задачі з рівняннями в часткових похідних, як правило, відрізняються найбільшою складністю, і в більшості випадків рішення кожної конкретної задачі вимагає серйозної роботи.

Дослідження об'єктів, які описуються диференціальними рівняннями, іноді являє собою досить важку обчислювальну задачу. Тому в ряді випадків замість диференціальних рівнянь використовують системи різницевих рівнянь, для чого безперервний об'єкт із розподіленими параметрами розглядають як дискретний із зосередженими параметрами, але такий, що має комірчасту структуру. Формально математично заміна безперервного об'єкта дискретним еквівалентна заміні диференціальних рівнянь різницевиими співвідношеннями. При подібних перетвореннях системи рівнянь, природно, виникає погрішність, яку необхідно враховувати при оцінці результатів моделювання.

Спростити математичну модель нестационарного об'єкта іноді можна з урахуванням наступного. Кожну змінну можна охарактеризувати часом релаксації  $\tau$ , протягом якого вона досягає визначеного рівня від стаціонарного значення при постійних значеннях інших змінних. При цьому всі змінні об'єкта можна розділити на дві групи, для однієї з яких  $\tau < \tau_1$ , а для іншої  $\tau > \tau_2$ . Якщо крім цього справедливо співвідношення  $\tau_1 \ll \tau_2$ , що означає, що час релаксації змінних першої групи значно менше часу релаксації змінних другої групи, тоді з деяким ступенем погрішності можна прийняти, що змінні першої групи, що мають значно менший час релаксації, без інерційні, і вважати в рівняннях математичного опису похідні від зазначених змінних за часом рівними нулю. За допомогою такого прийому іноді вдається досить істотно спростити нестационарну математичну модель. Математичні моделі, у яких нестационарні диференціальні рівняння, що описують змінні з малим часом релаксації, замінені стаціонарними рівняннями, називають квазінестационарними.

### Питання для самоперевірки

1. В чому полягає різниця між математичним та фізичним моделюванням?
2. Які відмінності в класичному і системному підходах до фізико-математичного моделювання?
3. Основні етапи фізико-математичного моделювання.
4. В чому переваги та недоліки аналітичних та експериментальних методів дослідження?
5. Для яких об'єктів моделювання використовуються звичайні диференціальні рівняння, а для яких диференціальні рівняння в часткових похідних?

## 1.3. Аналітичні методи моделювання

### 1.3.1. Термодинамічний метод опису систем

Під термодинамічною системою в технології розуміють сукупність матеріальних тіл, зміна властивостей яких роблять впливає на технологічний процес. Характеристиками системи є величини, що експериментально реєструються (об'єм, тиск, температура). Характеристичними функціями системи, (характеристиками, що обчислюються) і визначають її стан, вважають внутрішню енергію  $U$ , ентальпію  $H$  і енергію Гіббса  $G$ . Кожна з цих функцій виражається через незалежні

змінні (параметри) системи. Для внутрішньої енергії незалежними параметрами є ентропія  $S$  і об'єм  $V$ , для ентальпії — ентропія  $S$  і тиск  $P$ , для енергії Гіббса — температура  $T$  і тиск.

Часткові похідні характеристичних функцій по числу молів компонентів  $N_i$  при інших постійних параметрах стану називають хімічними потенціалами цих компонентів

$$dU/dN_i = dH/dN_i = dG/dN_i = \mu_i \quad (1.1)$$

де  $N_i$  — число молів  $i$ -го компонента.

Умови стійкої рівноваги визначаються мінімальними значеннями  $U$ ,  $H$  і  $G$  в ізольованій системі. Число незалежних параметрів (число ступенів вільності) відповідно до правила фаз Гіббса дорівнює

$$G = n - \Phi, \quad (1.2)$$

де  $n$ ,  $\Phi$  — число компонентів і фаз системи.

У найбільш загальній формі умова рівноваги системи математично формулюється як рівність нулю повного диференціала параметрів стану, що визначають властивості речовини

$$dT = 0, dP = 0, dC_i = 0, \quad (1.3)$$

де  $dT = 0$ ,  $dP = 0$ ,  $dC_i = 0$  — термічна, механічна і хімічна (концентраційна) рівновага системи.

Усі довільні процеси у відповідності з другим законом термодинаміки супроводжуються збільшенням ентропії системи. В ізольованій системі ентропія в стані рівноваги досягає максимального значення, а  $dS = 0$ . Використовуючи характеристичні функції, умови рівноваги будь-якої фізичної системи математично визначаються системою трьох рівнянь

$$dV = TdS - PdV + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = 0 \quad (1.4)$$

$$dH = TdS - VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = 0; \quad (1.5)$$

$$dG = -SdT + VdP + \sum_{i=1}^n \mu_i dN_i = 0; \quad (1.6)$$

В основі термодинамічного методу одержання рівнянь нестационарного переносу маси, енергії, імпульсу лежить відоме вираження для вільної енергії і рівняння Гіббса для зміни ентропії багатокомпонентних систем

$$dF = -sdT - \sum_k \mu_k dC_k + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (1.7)$$

$$Tds = dU - \sum_k \mu_k dC_k + pdV, \quad (1.8)$$

де  $s$  – ентропія,  $\mu_k$  – хімічний потенціал компонента  $k$  у суміші, що складається з  $k$  речовин,  $\sigma_{ij}$  – тензор напруження,  $\varepsilon_{ij}$  – тензор деформацій,  $U$  – внутрішня енергія.

Через величину вільної енергії визначаються термодинамічні параметри  $\mu_k$ ,  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , що потім використовують для запису в явному вигляді рівняння Гіббса. Термодинаміка нерівноважних процесів, заснована на наступних постулатах:

а) Існує лінійна залежність узагальнених термодинамічних потоків від узагальнених потенціалів (рівняння Онзагера)

$$T \frac{ds_i}{d\tau} = \sum_i J_i X_i, \quad (1.9)$$

$$J_i = \sum_m L_{im} X_m, \quad (1.10)$$

де  $J_i$  – потоки,  $X_m$  – термодинамічні сили,  $L_{im}$  – феноменологічні коефіцієнти.

б) Феноменологічні коефіцієнти задовольняють співвідношенням взаємності Онзагера про рівність перехресних коефіцієнтів.

в) Справедливий принцип Пригожина про мінімум виробництва ентропії.

г) Поняття ентропії для локальної термодинамічної рівноваги діє і для систем, що знаходяться удаліні від рівноваги.

Виходячи з цих постулатів, одержують рівняння переносу, а порівнюючи його з рівнянням Онзагера визначають термодинамічні рушійні сили, зокрема для переносу тепла і маси відповідні сили мають вигляд

$$X_T = -\nabla \ln T, \quad X_\mu = -T \nabla \left( \frac{\mu_k}{T} \right) \quad (1.11)$$

Виникаюча при цьому проблема переходу до фізичних величин, що спостерігаються експериментально, вирішується при цьому приблизно. Зокрема, наприклад, за потенціал вологопереносу використовують кон-

центрацію вологи, вологовміст, єдиний потенціал вологопереносу А.В.Ликова і т.д. Це є основним недоліком термодинамічного методу в для опису нерівноважних процесів.

### 1.3.2. Феноменологічний метод опису систем

В основі феноменологічного методу одержання рівнянь переносу лежить інтегральне рівняння збереження і переносу фізичної субстанції

$$\int_V \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} dV + \oint_S \Psi \nu_\Psi + j_\Psi \mathcal{d}S = \int_V I_\Psi dV, \quad (1.12)$$

або його диференціального аналога – рівняння Умова

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\Psi \cdot \nu_\Psi) = -\operatorname{div} j_\Psi + I_\Psi, \quad (1.13)$$

де  $\Psi$  - об'ємна концентрація фізичної субстанції (маси, енергії, імпульсу і т.д.),  $j_\Psi$  - густина дифузійного (молекулярного) потоку субстанції,  $\nu_\Psi$  - швидкість конвекційного (молярного) потоку субстанції,  $I_\Psi$  - об'ємна потужність внутрішніх джерел, стоків субстанції.

Ці рівняння мають простий фізичний зміст - швидкість зміни концентрації субстанції в об'ємі  $V$  із площею поверхні  $S$  дорівнює сумарній дії дифузійних і конвекційних потоків, що входять і виходять через поверхню, яка обмежує цей об'єм і швидкості утворення (зникнення) субстанції внаслідок дії внутрішніх джерел  $I_\Psi$ . Використання цих рівнянь не накладає яких-небудь обмежень на завдання рушійних сил, що забезпечують появи потоків субстанції, крім наявності експериментальної кореляції між ними

У якості феноменологічних співвідношень між потоками і рушійними силами використовуються відомі експериментальні закони.

Для теплопровідності — закон Фур'є

$$j_T = \lambda \nabla T. \quad (1.14)$$

Для молекулярної дифузії — закон Фіка

$$j_m = D \nabla C. \quad (1.15)$$

Для фільтраційного переносу — закон Дарсі

$$j_m = k_p \nabla p. \quad (1.16)$$



Для кількості руху (внутрішнього тертя) — закон Ньютона

$$\sigma_{\tau} = \eta \nabla v. \quad (1.17)$$

У цих рівняннях відповідно  $j$ ,  $j_m$ ,  $\sigma_{\tau}$  потоки теплоти, маси, імпульсу.  $\lambda$ ,  $D$ ,  $k_p$ ,  $\eta$ , — коефіцієнти теплопровідності, дифузії, фільтрації, в'язкості — є кінетичними коефіцієнтами; градієнти концентрації, температури, швидкості є потенціалами переносу.

Фізичний сенс феноменологічних законів переносу полягає в тому, що потік енергії, маси, імпульсу виникає внаслідок неоднорідності полів фізичної субстанції. Мірою просторової неоднорідності полів є градієнт фізичної величини (позначається *grad* або  $\nabla$ ), що вказує напрямком максимального зростання субстанції і чисельно рівний похідній від відповідної фізичної величини в цьому напрямку.

Покажемо, як використовується феноменологічний підхід для складання математичної моделі нестационарного переносу маси. Будемо вважати, що для нестационарного вологопереносу фізичною субстанцією є вологовміст, тому  $\Psi = \rho_0 w$ . Внутрішнє джерело маси відсутнє  $I_m = 0$  (маса не утворюється завдяки хімічним реакціям), а дифузійний перенос здійснюється під дією градієнта вологовмісту і температури (явище термовологопровідності). Конвекційне перенесення вологи здійснюється під дією надлишкового тиску відповідно до закону Дарсі, тому

$$\Psi \cdot v = \rho_0 k_p \nabla p, \quad (1.18)$$

де  $\rho_0$  — середня концентрація сухої речовини в об'ємі тіла,  $p$  — тиск парогазової суміші усередині тіла.

На основі рівняння Умова (1.13) одержуємо відоме рівняння А.В.Ликова для нестационарного переносу маси

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_0 w)}{\partial \tau} &= -\operatorname{div} \left( \rho_0 a_m \nabla w - \rho_0 a_{mT} \nabla T - \rho_0 k_p \nabla p \right) \\ \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial \tau} &= a_m \nabla^2 w + a_{mT} \nabla^2 T + k_p \nabla^2 p \end{aligned} \quad (1.19)$$

де  $a_m$  — коефіцієнт дифузії вологи,  $a_{mT}$  — коефіцієнт термодифузії вологи.

Для того щоб одержати залежність вологовмісту в даній точці системи від часу, координати, фізичних властивостей, тобто вирішити це рівняння, треба задатися умовами однозначності або крайовими

умовами, що задають значення фізичної величини на границях системи в будь-який момент часу.

Точне рішення **крайових задач** можливо тільки для обмеженого класу рівнянь і найпростішої геометрії системи. Для реальних систем подібні задачі вирішуються чисельно. Універсальним методом для чисельного рішення крайових задач є метод кінцевих різниць, що полягає в рішенні різницевого аналога диференціального рівняння на кінцевому числі вузлів сітки в розрахунковій області. Цей метод хоча і загально визнаний але має недоліки, а саме тривалість налагодження програм і розрахунку, відсутність універсальності при зміні геометрії об'єкта, низька ефективність при рішенні зворотних задач і задач оптимізації.

У відмінності від методу кінцевих різниць варіаційні і проєкційні методи мають ті переваги, що наближене рішення шукається у вигляді ряду заданих аналітичних функцій, тобто є аналітичним за формою його представлення, тоді як різницеві методи дають лише числові таблиці даних у вузлах сітки. До найбільш розповсюджених варіаційних методів відносяться методи Ритца і Трефтца, сутність яких зводиться до заміни диференціального рівняння еквівалентним інтегральним функціоналом, екстремум якого відповідає кращої апроксимації точного рішення крайової задачі. Однак цей метод можна використовувати тільки для лінійних крайових задач.

В основі проєкційних методів таких, як метод кінцевих елементів, спектральний метод, метод граничних елементів, лежить метод Б.Г.Гальоркіна, що на відміну від варіаційних методів є універсальним у змісті можливості одержання рівняння для нев'язання (помилки) наближеного рішення, у тому числі, для нелінійних рівнянь.

### **Питання для самоперевірки**

1. Що лежить в основі термодинамічного методу опису стаціонарних та нестаціонарних процесів?
2. В чому полягають переваги феноменологічного методу складання фізико-математичних моделей?
3. Як спростити математичну модель нестаціонарного процесу?
4. В яких випадках крайові задачі мають аналітичне рішення?

#### 1.4. Експериментальні методи моделювання

Знання полів швидкостей, температур, концентрацій і т.д. у результаті використання аналітичного методу надає принципову можливість рішення ряду практичних задач технології і конструювання. Однак найчастіше рішення настільки складне, що отриманою інформацією скористатися не вдається, оскільки ці поля є складними тривимірними структурами, а при описі нестационарних процесів додається четверта змінна — час. Тому для дослідження технологічних процесів харчових виробництв і встановлення кількісних зв'язків між показниками якості процесів і визначальних факторів широко використовують математичні описи, отримані на основі експериментальних даних по різних планах.

Розглядаючи об'єкт дослідження як процес керування, можна його параметри класифікувати відповідно до принципів, прийнятими в теорії керування. **Параметри стану**, або керовані параметри  $y_1, y_2, \dots, y_i$  залежать від протікання процесу, характеризують його режим і готовий продукт і використовуються як критерії якості або обмеження. **Параметри спостереження** також залежать від протікання процесу, можуть бути контрольованими і неконтрольованими. Однак вони не використовуються для дослідження або керування. **Керуючі** (або змінні) параметри  $x_1, x_2, \dots, x_i$  являють собою такі які впливають на процес і які можна цілеспрямовано змінювати. **Збурюючі параметри** - це такі параметри, що впливають на процес, але не залежать від стану об'єкта; ними неможливо керувати.

Параметри стану і спостереження називають вихідними, тому що вони характеризують процес або одержуваний продукт. У залежності від мети керування параметри стану і спостереження можуть мінятися місцями. Керуючі параметри є вхідними і змінюються в залежності від задачі дослідження.

При проведенні експериментальних досліджень звичайно встановлюють зв'язку між вхідними факторами, що впливають на протікання процесу, і вихідними параметрами процесу, що характеризують його властивості. Перші з них є незалежними і можуть приймати довільні значення  $x_i$  на технологічно можливих інтервалах; другі — залежними  $y_i$ , тому що їхні значення визначаються властивостями процесу і зміною незалежних перемінних.

Якщо одна з величин  $y$  залежить від іншої  $x$  таким чином, що кожному значенню  $x$  відповідає визначене значення  $y$ , те таку залежність називають функціональною, а якщо кожному значенню  $x$  відповідає деяка сукупність значень  $y$ , те статистичної. Частковим випадком статистичного зв'язку є кореляційна залежність, коли зміна величини

$x$ , обумовлює зміна розподілу  $y$  і його середнього значення. Найпростішим видом є лінійний кореляційний зв'язок

$$y = a + b \cdot x \quad (1.20)$$

Експеримент проводять пасивними й активними методами. Під пасивними експериментами розуміють одержання будь-яких даних без планування умов проведення досвідів при випадковій зміні вхідних факторів. При цьому проводять виміри або збирають необхідні дані по різних документах у результаті нормального протікання технологічного процесу. Пасивні методи найбільше доцільно застосовувати до працюючих виробничих установок (натурних моделей).

**Пасивний експеримент** проводять без плану, але до його організації висувають певні вимоги, виконання яких забезпечує необхідну якість отриманих даних. Це оснащення об'єкта відповідними вимірювальними приладами, встановлення періодичності реєстрації даних, порядок реєстрації даних і т.д. Пасивний експеримент широко використовують для одержання динамічних характеристик лінійного об'єкта, що описується диференціальними рівняннями з постійними коефіцієнтами.

Позитивними в пасивному експерименті є відносна простота одержання вихідних даних і порівняно невеликі витрати на їхнє одержання. Однак пасивним експериментам властивий цілий ряд недоліків:

- діапазони зміни вхідних параметрів можуть не відповідати поставленій задачі дослідження, тобто досліджені точки невдало розташовані;
- сукупність отриманих даних містить недостатню кількість корисної інформації;
- зміни вихідних параметрів обумовлені змінами неконтрольованих вхідних параметрів.

**Активний експеримент** (заздалегідь спланований) ставлять у тому випадку, якщо досліджуваний об'єкт допускає можливість постановки дослідів у необхідних межах. При цьому досягають зниження витрат праці, засобів і часу, підвищення надійності отриманих результатів дослідження, одночасного вивчення великого числа факторів, що впливають на процес, обліку впливу кожного з факторів і міжфакторних взаємодій. Плани зміни вхідних факторів повинні передбачати застосування простих і найменш трудомістких методів обробки отриманих результатів, що дають можливість одержати опис процесу найбільш простими засобами. Активні експерименти проводять як у виробничих умовах, так і на різних фізичних моделях. На основі результатів цих експериментів можна одержати математичний опис у виді по-

ліномів, користуючись методами **регресивного і кореляційного аналізу**.

Однофакторний експеримент не дає можливості виявити оптимальні значення вихідного параметра з урахуванням взаємодії двох і більш факторів і тому більш ефективними є багатофакторні плани, при яких одночасно варіюють декількома факторами. Для скорочення числа досвідів складають спеціальні матриці планування, у яких визначають число дослідів і межі зміни факторів. Матриця являє собою перелік варіантів, узятих у даній серії досвідів. Фактором прийнято називати вхідні параметри процесу  $x_i$ .

У таблиці 1.1 представлена матриця планування для двох факторів  $x_1, x_2$ , у таблиці 1.2 для трьох  $x_1, x_2, x_3$  при двох рівнях варіювання фактора. Такі матриці планування називають повним факторним експериментом (ПФЕ) типу  $2^2$  і  $2^3$  відповідно. Знаки (+) і (-) — це верхній і нижній рівні кожного фактора.

Таблиця 1.1. Матриця ПФЕ типу  $2^2$

Номер дослідів	$x_1$	$x_2$
1	-	-
2	+	-
3	-	+
4	+	+

Таблиця 1.2. Матриця ПФЕ типу  $2^3$

Номер дослідів	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-	-	-
2	+	-	-
3	-	+	-
4	+	+	-
5	-	-	+
6	+	-	+
7	-	+	+
8	+	+	+

Для зниження числа дослідів користуються дробовими репліками або постановкою дробового факторного експерименту (ДФЕ). Якщо в матриці типу  $2^3$  добуток  $x_1 \cdot x_2$  дорівнює третьому фактору  $x_3$ , то можна обмежитися чотирма дослідями, матриця яких  $2^{3-1}$  представлена в табл. 1.3, а матриця другої напіврепліки — у табл. 1.4. Цей тре-

тій розрахунковий фактор називають додатковим. Якщо число додаткових факторів прийняти 2, то план називається чвертьреплікою, 3 — однієї восьмої репліки і т.п.

Кількість варіантів дослідів, який необхідно поставити по матриці планування, залежить від числа досліджуваних факторів  $n$ . Усього на двох рівнях для  $n$  факторів можливо  $2^n$  варіантів планування. Для наближеного опису процесу лінійними рівняннями і можливості оцінки його адекватності досить поставити від  $n+2$  до  $n+6$  варіантів досвідів. При цьому важливо, щоб у них приблизно однакове число раз зустрічалися верхні і нижні рівні кожного фактора.

Таблиця 1.3. Перша напіврепліка ДФЕ  $2^{3-1}$ ,

Номер дослідів	$x_1$	$x_2$	$x_3$
2	+	-	-
3	-	+	-
5	-	-	+
8	+	+	+

Таблиця 1.4. Друга напіврепліка ДФЕ  $2^{3-1}$ ,

Номер дослідів	$x_1$	$x_2$	$x_3$
1	-	-	-
4	+	+	-
6	+	-	+
7	-	+	+

Для спрощення розрахунків і більш точного визначення напрямку руху до оптимального дослідів ставлять по так названих ортогональних матрицях. У них із усіх можливих варіантів обрана невелика їхня кількість. При цьому дотримуються наступні умови:

- у серії досвідів кількість варіантів з верхнім рівнем кожного фактора дорівнює кількості варіантів з нижнім рівнем того ж фактора;
- верхній і нижній рівні будь-якого фактора сполучаються однаковою кількістю разів з верхнім і нижнім рівнями всіх інших факторів.

Після складання матриці планування і вибору інтервалів варіювання факторів відповідно до варіантів матриці ставлять досліди, за результатами яких розраховують **лінійне рівняння регресії**:

$$y = a_0 + a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3. \quad (1.21)$$

Крім викладених формальних сторін одержання експериментальної інформації про технологічні процеси варто враховувати і неформальні чисто технологічні аспекти планування експерименту, тобто визначати можливості виміру величин у даних умовах, у заданих межах, а також стабілізації несуттєвих факторів, умови перерахування даних стосовно до виробничих умов і ін.

При виборі плану експерименту варто враховувати деякі найбільш розповсюджені помилки:

- неповний аналіз наявних теоретичних представлень про досліджуваний об'єкт;
- невдалий вибір параметрів спостереження (керуючих факторів);
- невдалий вибір параметрів стану (керованих параметрів);
- неповний облік можливостей виміру відповідних технологічних потоків;
- опис одиничних або випадкових явищ при даних конкретних умовах.

### **Питання для самоперевірки**

1. Якими параметрами формально описуються модель якого процесу чи об'єкту?
2. В чому різниця між пасивним та активним експериментом?
3. Як скоротити кількість експериментів без втрати адекватності математичної моделі об'єкта?

### 1.5. Експериментально аналітичний метод моделювання

В основі цього підходу до складання фізико-математичної моделі об'єкта лежить метод аналізу розмірностей і теорія подібності.

Розрізняють розмірні і безрозмірні величини. Ці величини пов'язані між собою певними співвідношеннями. Незалежні розмірні величини називають основними (м, кг, с, К), а всі інші величини - похідними (м/с, кг-м/с<sup>2</sup> тощо). Вираження похідної величини через основні величини називають розмірністю.

Будь-яке фізичне рівняння за розмірністю є однорідним, тобто обидві його частини мають завжди однакову розмірність, незалежно від вибору системи фізичних величин. Це правило розповсюджується і на ще невідомі рівняння. Властивість однорідності є основою теорії розмірностей. Формули розмірності всіх похідних фізичних величин мають вигляд степеневих одночленів

$$[D]=L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot \tau^{\gamma} \cdot T^{\delta}, \quad (1.22)$$

де  $L, M, \tau, T$ - відповідно довжина, маса, час і температура.

Якщо на основі аналізу того чи іншого явища можна виділити фізичні величини, які впливають на це явище, то встановити характер залежності між виділеними величинами можна на основі принципу однорідності розмірності і за допомогою **II-теорема Бекінгема**.

**II-теорема** доводить, що загальну функціональну залежність, яка пов'язує між собою  $n$  розмірних величин при  $k$  основних одиницях їх вимірювання, можна навести як залежність між  $n - k$  безрозмірними комплексами цих величин, а за наявності подібності - як зв'язок між  $n - k$  критеріями подібності.

Наприклад рух рідини у трубопроводі залежить від таких величин

$$\pi = f(v, \mu, \rho, d), \quad (1.23)$$

де  $v, \mu, \rho, d$  - відповідно швидкість, динамічна в'язкість і густина потоку;  $d$  - діаметр трубопроводу,  $\pi$ - число подібності.

Функцію (4.2) наближено можна записати у вигляді степеневі залежності

$$\pi = C \cdot v^{\alpha} \cdot \mu^{\beta} \cdot \rho^{\gamma} \cdot d^{\delta}, \quad (1.24)$$

де  $C, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ - невідомі числові коефіцієнти.



Враховуючи, що розмірності обох частин залежності (4.3) однакові, а  $C$  - безрозмірний коефіцієнт, замінімо всі величини в ній розмірностями цих величин

$$\pi = M^0 \cdot L^0 \cdot \tau^0 = (L \cdot \tau^{-1})^\alpha \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot \tau^{-1})^\beta \cdot (M \cdot L^{-3})^\gamma \cdot L^\delta. \quad (1.25)$$

У лівій частині останнього рівняння величина  $\pi$  виражена через розмірність основних величин у нульовому степені. Показники степенів при однакових основних одиницях в обох частинах цього рівняння повинні бути однакові. Тому отримуємо систему трьох рівнянь.

$$\text{Для } M: \beta + \gamma = 0.$$

$$\text{Для } L: \alpha - \beta - 3\gamma + \delta = 0.$$

$$\text{Для } \tau: -\alpha - \beta = 0.$$

У цій системі з трьох рівнянь є чотири невідомих  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ . Будь-які три з них завжди можна подати через четверту, наприклад,  $\alpha$ . Тоді знайдемо з третього рівняння  $\beta = -\alpha$ , з першого  $\gamma = \alpha$ , з другого  $\delta = \alpha$ .

Підставляючи тепер значення  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ; в рівняння (4.3), отримаємо

$$\pi = C \cdot v^\alpha \cdot \mu^{-\alpha} \cdot \rho^\alpha \cdot d^\alpha = C \left( \frac{\rho v d}{\mu} \right)^\alpha = C \cdot \text{Re}^\alpha, \quad (1.26)$$

де  $\alpha$  може приймати будь-яке значення, відмінне від нуля.

Значення  $\alpha$  і  $C$  визначають з обробки результатів експериментальних даних. Тобто визначаючою величиною для руху рідини в трубопроводі являється критерій Рейнольда.

### Питання для самоперевірки

1. В чому суть методу аналізу розмірностей?
2. Як вибрати основні розмірні величини для конкретного об'єкта моделювання?

## 1.6. Статистична обробка експериментальних даних

### 1.6.1 Основні поняття математичної статистики

Під випадковим процесом розуміють функцію  $F(x)$  від незалежного параметра  $x$ , що при деякому числі вихідних дослідів може приймати в залежності від умов кожного дослідів конкретний, але задалегідь невідомий випадковий вид  $f_u(x)$ . Випадковий процес є функцією двох змінних — незалежного аргументу  $x$  і випадкового параметра  $u$ , що залежить від умов експерименту. Якщо в якості незалежної змінної випадкової функції виступає час, то випадкову функцію називають стохастичною. Кожна окремо узята функція  $f_u(x)$  — це реалізація випадкового процесу, а їхня сукупність при проведенні дослідів — ансамбль або сукупність реалізацій.

Середнє по сукупності реалізацій значення випадкової функції називають **моментом першого порядку**, дисперсію випадкової функції — **моментом другого порядку** і т.д.

Оцінку випадкової величини називають незміщеною, якщо її математичне очікування при будь-якому обсязі вибірки дорівнює оцінюваному параметрові. Якщо незміщена оцінка в порівнянні з іншими має найменшу дисперсію, то її називають ефективною. Оцінки, що володіють усіма цими властивостями, вважаються достатніми.

Математичне очікування випадкової величини — це сума добутків кожного значення такої величини на відповідну імовірність його появи або середнє арифметичне всіх значень, що приймає випадкова величина в  $N$ -х дослідів, за умови, що число цих дослідів зростає необмежено ( $N \rightarrow \infty$ ).

Дисперсією випадкової величини називають характеристику її розсіювання навколо математичного очікування або математичне очікування квадрата різниці між випадковою величиною і її математичним чеканням при  $N \rightarrow \infty$ .

Центральний момент другого порядку називається автокореляційною або просто кореляційною функцією. В основі **кореляційного аналізу** лежить постулат про те, що залежна змінна величина  $y$  (вихідний параметр) і незалежні перемінні  $x$  (фактори) — це випадкові величини з розподілом, що відповідають нормальному закону, і між ними існує кореляційний взаємозв'язок. Предметом кореляційного аналізу є визначення характеру розподілу і кількісної оцінки розкиду значень залежної величини, одержуваних при фіксованих значеннях незалежної перемінної. Кореляційний аналіз зводиться до зміни тісноти або ступеня спряженості між ознаками, що варіюють, і визначенню форми і напрямки існуючої між ними зв'язку. Якщо напрямок зв'язку

між ознаками  $x$  і  $y$  виражається прямою лінією, то кореляція називається лінійною, якщо ж кореляційна залежність має іншу форму, то нелінійною.

Для кількісної оцінки ступеня взаємозв'язку між вхідними факторами і вихідними параметрами застосовують **регресивний аналіз**. Регресивний аналіз призначений для визначення функціональної залежності між середніми значеннями одного з вихідних параметрів від незалежної факторів. Така функціональна залежність існує, якщо виконуються наступні умови:

- значення вихідного параметру  $y$  є незалежними і нормально розподіленими випадковими величинами у кожному досліді ;
- помилка незалежних змінних  $x$  дуже мала в порівнянні з помилкою залежної змінної  $y$ , а окремі  $x_i$  не корелюють один з одним;

Регресивний аналіз може бути лінійним або нелінійним залежно від вигляду математичної моделі.

### 1.6.2 Обчислення похибок прямих вимірювань

Найбільш простий випадок одержання шуканої величини - це прямі вимірювання, коли значення певної величини знаходять безпосередньо в процесі вимірювання. Це означає, що відповідні засоби вимірювання мають лічильну шкалу, яка відградує в одиницях вимірюваної величини. При повторних вимірюваннях часто виникає розсіювання результатів, викликане комплексом причин. Самостійні і незміщені оцінки математичного очікування (вибіркового середнього) і вибіркової дисперсії для вимірюваного параметра визначаються наступним чином

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i . \quad (1.27)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} . \quad (1.28)$$

де  $x_i$  - елементи масиву даних ( $i = 1 \dots N$ ),  $\bar{x}$  — середнє значення вимірюваного параметра;  $N$  — кількість вимірів (дослідів);  $\sigma$  — стандартне відхилення вимірів.

При проведенні експериментальних досліджень необхідно установити кількість повторностей досліду для обраної вимірюваної величини. Для цього задають довірчу імовірність (надійність виводу)  $p$  або рівень значимості  $\alpha=1-p$  і припустиму помилку  $\varepsilon$ , виражену в частках вибіркового середньоквадратичного відхилення  $S$ .

Довірча імовірність є імовірністю того, що значення вимірюваної величини знаходяться в межах довірчого інтервалу  $\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x$ , тобто в межах абсолютної помилки вимірюваної величини. Зі збільшенням довірчої імовірності збільшується довірчий інтервал, тобто імовірність того, що результати вимірів не вийдуть за його межі. При звичайних дослідженнях технологічних процесів приймають довірчу імовірність у межах  $p = 0,80-0,95$ . Для підвищення надійності досвідів потрібно збільшити повторність вимірів.

Для вилучення грубих похибок з даних використовується правило “3-х сигм”, за яким модуль максимального відхилення вимірюваного значення від середнього на величину  $3\sigma$  - малоімовірний, а саме при нормальному законі розподілу помилок імовірність появи такого відхилення не перевищує 0,997. Для цього точку з максимальним відхиленням від середнього видаляють з даних та порівнюють відхилення цієї точки від середнього з величиною  $3\sigma$ , обчислених для нового масиву даних.

Абсолютна помилка (точність вимірів) визначається величиною

$$\Delta x = \frac{t_s}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N-1}} = \frac{t_s}{\sqrt{N}} \sigma. \quad (1.29)$$

де  $t_s$  - коефіцієнт Стьюдента.

Величина  $t_s$  залежить від прийнятого рівня значимості  $\alpha=1-p$  і числа точок вимірювання. З рівняння (1.3) можна визначити число вимірів  $N$ , які необхідно зробити, щоб забезпечити задану точність виміру при прийнятій довірчій імовірності  $p$

$$N = t_s^2 \frac{\sigma^2}{\Delta x^2}. \quad (1.30)$$

Таблиця 1.1 дає представлення про необхідне число вимірів (дослідів) для забезпечення заданої точності при прийнятій довірчій імовірності  $p$ .

Відносною похибкою вимірювання називають відношення

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\bar{x}}. \quad (1.31)$$

Найчастіше відносну похибку виміряють у відсотках. За величиною відносної похибки, як правило, визначають число надійних значущих цифр  $m$  в кінцевому результаті за формулою

$$m=p+1, \quad (1.32)$$

де  $p$ - порядок величини відносної похибки.

**Приклад.** У результаті обчислення одержане число  $x=12,36521$  з відносною похибкою 0,052 (5,2%), тоді згідно з (1.6) число надійних значущих цифр  $m$  дорівнює  $p(5,2 \cdot 10^{-2}) + 1 = 2 + 1 = 3$ . Кінцевий результат з урахуванням значущих чисел :  $x = 12,4$

Таблиця 1.5. Необхідна кількість повторювання дослідів

Відносна гранична помилка $\Delta x / \sigma$	Довірча імовірність $p$			
	0,80	0,90	0,95	0,99
3,0	1	2	3	4
2,0	2	3	4	5
1,0	4	5	7	11
0,5	9	13	18	31
0,4	12	19	27	46
0,3	20	42	46	78
0,2	43	70	99	171
0,1	266	273	387	668

Іноді параметри моделі одержують при однократному вимірюванні. Це можна робити тоді, коли при повторних вимірюваннях шукана величина за показаннями вимірювального приладу не змінює свого значення. У цьому випадку найімовірніше значення істинної величини співпадає з показаннями приладу, а похибка вимірювання визначається класом точності приладу.

Абсолютна похибка вимірювання пов'язана з класом точності приладу згідно з формулою

$$\Delta x = \frac{K}{100} I_{\max}, \quad (1.33)$$

де  $K$  - клас точності приладу,  $I_{max}$  - максимальне значення шкали приладу, на якій проводяться вимірювання.

**Приклад.** Клас точності приладу - 0,5, шкапа, на якій проводились вимірювання має максимальне значення 50, відлік по шкалі - 25. Абсолютна похибка вимірювання:  $\Delta x = 0,5 \cdot 50 / 100 = 0,25$ , тобто істинне значення вимірюваної величини лежить у межах надійного інтервалу:  $x = 25 \pm 0,25$  ( $24,75 \leq x \leq 25,25$ ). Відносна похибка вимірювання  $\varepsilon = 0,25 / 25 = 0,01 = 1\%$ .

### 1.6.3. Обчислення похибок непрямих вимірювань

У непрямих вимірюваннях шукана величина  $y$  пов'язана функціонально залежністю із сукупністю аргументів, які визначають шляхом прямих вимірювань.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (1.34)$$

де  $x_1, x_2, \dots, x_n$  - незалежні аргументи, які визначаються шляхом прямих вимірювань, при чому кожен з них може бути одержаний однократним чи багатократним прямим вимірюванням з різними похибками  $\Delta x_i$ .

В цьому разі абсолютна похибка визначення шуканої величини  $\Delta y$  обчислюється за формулою.

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \Delta x_i^2}, \quad (1.35)$$

де частинна похідна функції  $\partial f / \partial x_i$  обчислюється для середніх значень аргументів  $x_i$ .

Відносна похибка визначення шуканої величини  $y$  обчислюється за формулою

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\bar{y}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_i} \right]^2 \Delta x_i^2}. \quad (1.36)$$

#### 1.6.4. Перевірка випадковості розсіяння експериментальних даних

Щоб перевірити, чи дійсно розсіяння експериментальних даних має випадковий характер, розраховують коефіцієнти асиметрії  $-g$  та ексцесу  $-E$ .

$$g = \frac{\sum_i |x_i - \bar{x}|^3}{\left[ \sum_i |x_i - \bar{x}|^2 \right]^{3/2}} \sqrt{N} \quad (1.37)$$

$$E = \frac{\sum_i |x_i - \bar{x}|^4}{\left[ \sum_i |x_i - \bar{x}|^2 \right]^2} N - 3 \quad (1.38)$$

Якщо  $|g| < 3\sigma_g$  та  $|E| < 3\sigma_E$  розсіювання даних можна вважати випадковим. В іншому випадку є підозра тогою що розсіювання даних викликано систематичними похибками. Але треба пам'ятати, що робити остаточний висновок про не випадковість, розсіяння треба з певною пересторогою, бо перевищення коефіцієнтів асиметрії та ексцесу їх граничних значень може означати відмінний від нормального закон розсіяння даних.

#### 1.6.5. Кореляційний аналіз. Проста лінійна регресія

Не завжди між двома досліджуваними величинами  $x$  та  $y$  є однозначний функціональний зв'язок, що пов'язане з цілою низкою факторів, та все ж таки за повторних вимірювань простежується певна закономірність між цими величинами. У цих випадках говорять про певний ступінь зв'язку між величинами  $x$ ,  $y$  мірою якого є коефіцієнт кореляції  $r_{xy}$ .

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1.39)$$

Величина коефіцієнта кореляції змінюється в межах  $-1 < r < 1$ . При  $r_{xy}=0$  зв'язок між величинами  $x$   $y$  відсутній. Ступінь кореляційного зв'язку визначається коефіцієнтом значущості:

$$H = |r_{xy}| \sqrt{N-1}, \quad (1.40)$$

де  $N$ -число експериментальних точок. Якщо величина коефіцієнта  $H$  вища за критичне значення, яке залежить від надійності виводу та числа вимірювань згідно функції  $r$ - розподілу, то між  $x$ ,  $y$  існує лінійний зв'язок.

Якщо залежність між  $x$ ,  $y$  існує, то цей зв'язок описується рівняннями простої лінійної регресії:

$$y = a_0 + a_1x. \quad (1.41)$$

Стандартні похибки коефіцієнтів простої регресії визначаються за формулами

$$\sigma_0 = \sigma \sqrt{\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}; \quad (1.42)$$

$$\sigma_1 = \sigma \frac{1}{\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}}, \quad (1.43)$$

де  $\sigma$ - стандартна похибка лінійного регресивного рівняння.

#### 1.6.6. Кореляційний аналіз. Множинна лінійна регресія

Якщо існує певний вплив на досліджуваний параметр з боку декількох незалежних факторів  $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ , то говорять про множинну регресію між декількома величинами:

$$y = f(x_1, x_2, x_3 \dots x_n). \quad (1.44)$$

Рівняння регресії в цьому випадку представляє лінійне рівняння:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = f(a_i, x_i). \quad (1.45)$$

Щоб визначити ступінь впливу кожного з незалежних факторів  $x_i$  (за відсутності впливу інших) на керований фактор  $y$ , використовують поняття часткового коефіцієнта кореляції  $R_{yx}$ , а для характерис-



тики щільності зв'язку між залежною величиною  $y$  та усіма незалежними факторами використовують поняття множинної регресії  $R$ .

Якщо значність часткового коефіцієнта кореляції менша за критичну, то вважають, що відповідний фактор не впливає на аналізовану величину  $y$ .

Коефіцієнти лінійної регресії  $a_i$  знаходять за методом найменших квадратів, суть якого полягає в мінімізації суми середньо квадратичних відхилень експериментальних значень від лінійного рівняння (1.16):

$$\sum_{i=1}^N (y_i - f(a_i, x_i))^2 \rightarrow \min. \quad (1.46)$$

Процедура знаходження відповідних коефіцієнтів  $a_i$  просто реалізується в матричній алгебрі.

$$a = (X^T X)^{-1} X^T y, \quad (1.47)$$

де  $X$  - матриця аргументів.  $X^T$  - транспонована матриця,  $y$  – вектор параметра, що відшукується,  $a$  - вектор коефіцієнтів регресії.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix}; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

Стандартна похибка коефіцієнтів множинної регресії визначається за формулою

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{M_{i,i}}, \quad (1.50)$$

де  $M_{ii}$  - діагональні елементи матриці  $M = (X^T X)^{-1}$ ,  $\sigma$  - стандартна похибка рівняння регресії.

### 1.6.7. Регресійний аналіз лінійних емпіричних рівнянь

Якщо ступінь кореляційного зв'язку достатньо високий, то зазвичай говорять про однозначний функціональний зв'язок між досліджуваними величинами. У цьому випадку використовують емпіричне рівняння, яке апроксимує експериментальні дані з мінімальною похиб-

кою. Коефіцієнти, у цих формулах визначають методами регресивного аналізу.

Загальні правила для вибору емпіричного рівняння наступні:

- аналітична залежність повинна бути найпростішою;
- коефіцієнтів емпіричної формули не повинно бути багато (1-3 – коефіцієнти на один змінний параметр (аргумент)).
- емпірична формула повинна задовольняти умовам адекватності.

Емпіричне рівняння є лінійним відносно емпіричних параметрів, якщо його можна представити у наступному вигляді:  
для одновимірної залежності

$$y(x) = \sum_{i=1}^m a_i f_i(x), \quad (1.51)$$

для багатовимірної залежності

$$y(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_i a_{1i} f_{1i}(x_1) + \sum_j a_{2j} f_{2j}(x_2) + \dots + \sum_k a_{mk} f_{mk}(x_m), \quad (1.52)$$

де  $f_i(x)$  - довільні функції,  $a_i$  - емпіричні коефіцієнти.

Якщо емпірична формула не може бути представлена в такому вигляді, то вона є нелінійною відносно емпіричних коефіцієнтів.

Приклад лінійних емпіричних формул:

$$y(x) = a_1 + a_2 x;$$

$$y(x) = a_1 x^3 + a_2 \ln(x) + a_3 \frac{1}{\sqrt{x}};$$

$$y(x_1, x_2) = a_{11} \sin(x_1) + a_{12} x_1 + a_{21} x_2^2.$$

Для лінійних емпіричних формул коефіцієнти знаходяться методом найменших квадратів, а саме

$$a = \left( X^T X \right)^{-1} X^T y, \quad (1.53)$$

де  $y$  – вектор функції, що аналізується,  $a$  - вектор коефіцієнтів регресії:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad (1.54)$$

$X$  - матриця аргументів.  $X^T$  - транспонована матриця

Для одномірної залежності матриця аргументів, має вигляд:

$$X = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_m(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \dots & f_m(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_m(x_n) \end{bmatrix}; \quad (1.55)$$

де  $m$ - число емпіричних коефіцієнтів,  $n$ - число експериментальних точок.

Для багатовимірної залежності матриця аргументів, має вигляд

$$X = \begin{bmatrix} f_{11}(x_{11}) & f_{12}(x_{11}) & \dots & f_{21}(x_{12}) & f_{22}(x_{12}) & \dots & f_{31}(x_{13}) & \dots \\ f_{11}(x_{21}) & f_{12}(x_{21}) & \dots & f_{21}(x_{22}) & f_{22}(x_{22}) & \dots & f_{31}(x_{23}) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{11}(x_{n1}) & f_{12}(x_{n1}) & \dots & f_{21}(x_{n2}) & f_{22}(x_{n2}) & \dots & f_{31}(x_{n3}) & \dots \end{bmatrix}.$$

Стандартна похибка коефіцієнтів емпіричної формули визначається за формулою

$$\sigma_i = \sigma \sqrt{M_{i,i}}, \quad (1.56)$$

де  $M_{ii}$  - діагональні елементи матриці  $M = (X^T X)^{-1}$ ,  $\sigma$ - стандартна похибка рівняння регресії.

Для одномірної залежності

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2}{n - m - 1}}, \quad (1.57)$$

Для багатовимірної залежності

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{mi}))^2}{n - m - 1}}, \quad (1.58)$$

де  $m$ - число емпіричних коефіцієнтів,  $n$ - число експериментальних точок

### 1.6.8. Регресійний аналіз нелінійних емпіричних рівнянь

Нелінійними емпіричними рівняннями називають такі, в яких коефіцієнти нелінійно пов'язані з величиною  $y$ , що аналізується. Приклад нелінійних емпіричних формул:

$$y(x) = a_1 e^{a_2 x}; \quad (1.59)$$

$$y(x) = \frac{1}{a_1 + a_2 x}; \quad (1.60)$$

$$y(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1^{a_2} x_2^{a_3} x_3^{a_4}. \quad (1.61)$$

$$y(x) = a_1 + e^{a_2 x}; \quad (1.62)$$

Більшість нелінійних емпіричних рівнянь шляхом алгебраїчних перетворень можна зробити лінійними (лініалізувати). Так, наприклад емпіричні формули (1.30) – (1.33) можна представити так

$$\ln [y(x)] = \ln(a_1) + a_2 x; \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{y(x)} = a_1 + a_2 x; \quad (1.64)$$

$$\ln [y(x_1, x_2, x_3)] = \ln(a_1) + a_2 x_1 + a_3 x_2 + a_4 x_3. \quad (1.65)$$

Тобто формули (1.34) - (1.36) лінійні, але відносно нових функцій і коефіцієнтів.

Для цих лініалізованих формул емпіричні коефіцієнти визначаються методами лінійного регресивного аналізу, як показано в розділі 1.7. Слід враховувати, що похибки коефіцієнтів нелінійних емпіричних рівнянь, для яких проводились алгебраїчні перетворення, треба обчислювати за формулами похибок непрямих вимірювань (розділ 1.3.).

Існують також суттєво нелінійні емпіричні залежності, які не можливо лініалізувати, наприклад рівняння (1.33). В цьому випадку намагаються із фізичних міркувань визначити початкові значення деяких коефіцієнтів. Так залежність (1.33) можна представити так,

$$\ln [y(x) - a_1] \approx a_2 x; \quad (1.66)$$

якщо відомо початкове значення для коефіцієнту  $a_1$ .

Слід зазначити, що лініалізовані емпіричні залежності тільки в першому наближенні відповідають умовам мінімуму середньоквадратичних відхилень. Істинні значення емпіричних коефіцієнтів слід шукати нелінійним методом найменших квадратів.

### 1.6.9. Адекватність вибору емпіричних рівнянь

В залежності від того відома, чи невідома похибка одержання експериментальних даних використовують різні критерії адекватності вибору емпіричних рівнянь. При відомих похибках порівнюють відношення дисперсії рівняння регресії до дисперсії (квадрату стандартної похибки) експериментальних даних з критичним значенням критерію Пірсона  $\chi_k^2$ .

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{y_i - y(x_i)}{\sigma_i} \right]^2, \quad (1.67)$$

де - стандартна похибка експериментального даного  $y_i$ . Якщо виконується нерівність  $\chi^2 < \chi_k^2$ , то гіпотеза про адекватність емпіричного рівняння та експериментальних даних виконується. Критичне значення критерію Пірсона залежить від надійності виводу та числа ступенів вільності і визначається відповідним квантілем  $\chi^2$ -розподілу. Вид емпіричного рівняння обирається таким чином, щоб простіша крива лягала в межі надійного інтервалу  $\pm \sigma$ . Вибір емпіричної функції починають з лінійної, а потім ускладнюють її вигляд, перевіряючи кожного разу критерій адекватності.

Якщо похибка одержання експериментальних даних не відома то для перевірки адекватності емпіричної формули використовують критерій Фішера. Обирають два або більше емпіричних рівнянь, які можуть апроксимувати одержану експериментальну залежність, знаходять відповідні регресивні коефіцієнти та обчислюють відношення дисперсій регресії для двох обраних математичних моделей.

$$F = \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2, \quad (1.68)$$

де  $F$ - критерій Фішера,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  - стандартні похибки регресії відповідних математичних моделей. Причому  $\sigma_1$  - стандартна похибка регресії для емпіричної формули, яка має менш регресивних коефіцієнтів (дає більшу похибку).

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - y(x_i))^2}{f}, \quad (1.69)$$

де  $f = n - m - 1$  - число ступенів вільності;  $n$ - число експериментальних точок,  $m$ - число коефіцієнтів емпіричної формули.

Якщо значення критерію Фішера менше його критичного значення  $F < F_k$ , то обирається емпірична формула, яка має менш коефіцієнтів. Критичне значення критерію Фішера залежить від надійності виводу та числа ступенів вільності і визначається відповідним квантілем  $F$ -розподілу.

### Питання для самоперевірки

1. Як визначається похибка прямих вимірювань?
2. Як визначається похибка непрямих вимірювань?
3. Як перевірити випадковість розсіяння даних?
4. В чому різниця між коефіцієнтом парної кореляції та коефіцієнтом часткової кореляції?
5. Що показує коефіцієнт значності кореляційного зв'язку?
6. В чому полягає процедура лініалізації нелінійного емпіричного рівняння?
7. Як перевірити адекватність вибору емпіричного рівняння.

## РОЗДІЛ 2

### МОДЕЛЮВАННЯ МЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Механічні процеси здрібнювання, різання, сепарування (поділу), дозування, змішання, перемішування, гранулювання (брикетування) широко застосовують у харчовій промисловості.

Сепарування (поділ, класифікацію) застосовують для поділу сипучих матеріалів на фракції, що відрізняються розмірами, формою, густиною та іншими фізико-механічними властивостями.

При дозуванні і змішуванні різних рідких, пастоподібних та сипучих компонентів утворюються суміші з визначеними якісними показниками.

Особливість моделювання механічних процесів полягає в тому, що природа фізичних явищ дуже складна, тому існуючі теорії цих процесів не дозволяють проводити аналітичне моделювання, тому для кількісної оцінки явищ зазвичай використовується емпірично-аналітичні методи, в основу яких покладено рівняння балансу та імовірності характеристики.

#### 2.1. Моделювання процесів перемішування

Процеси перемішування широко використовуються в харчовій промисловості для утворення однорідних продуктів з визначеними властивостями, а також для інтенсифікації технологічних процесів. Перемішування здійснюють різними способами в різних апаратах з мішалками, а також у газових і рідинних потоках.

Згідно існуючих гіпотез про механізм перемішування математичний опис представляється у вигляді залежностей між параметрами, що характеризують механічний рух часток і факторами, що викликають їхнє переміщення. За таких уявлень одержують характеристики з енергетичних витрат, часу і якості перемішування. Перемішування так само, як здрібнювання і поділ, розглядають як випадковий процес, а математичну модель одержують на основі детермінованих факторів, що викликають зміну положення часток у просторі з використанням імовірних характеристик фізичних властивостей часток і їхнього положення в просторі.

Рівномірність розподілу компонентів при перемішуванні оцінюють середньоквадратичним відхиленням концентрацій компонентів для всіх елементарних об'ємів апарату від середньої (рівномірної) концентрації за усім об'ємом. Цю величину називають ще індексом перемішування. Індекс перемішування може служити також мірою інтенсивності процесу. Рівномірне перемішування компонентів у стро-

го заданому співвідношенні впливає на якісні і кількісні показники процесів харчових виробництв. При цьому чим більше розходження у властивостях компонентів, тим трудніше отримати однорідну суміш. Досягнення рівноважного стану під час перемішування залежить від відносної рівноваги між процесами перемішування і поділу для кожної сукупності компонентів. Причому необхідно якийсь мінімальний час перемішування  $\tau_{min}$ , після якого стан системи не поліпшується.

Одержимо модель кінетики перемішування у апараті з мішалкою, використовуючи рівняння матеріального балансу: зміна кількості речовини в одиницю часу, що знаходиться в змішувачі об'ємом  $V$ , дорівнює різниці потоків, що входять та виходять з апарату за той же самий час. Схема змішувача наведена на рис. 2.1.

У пристрій надходять два потоки продуктів  $G_1$  і  $G_2$  з концентраціями  $c_1$  і  $c_2$ , а виходить кінцевий продукт із витратою  $G_k$  і концентрацією  $c_k$ .

$$G_1 c_1 + G_2 c_2 - G_k c_k = V \frac{dc_k}{d\tau}, \quad (2.1)$$

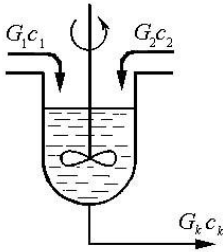


Рис. 2.1. Розрахункова схема змішувача.

Це рівняння запишемо у вигляді звичайного диференціального рівняння:

$$T \frac{dy}{d\tau} + y = K, \quad (2.2)$$

де  $T = V/G_k$ —стала часу змішувача;  $c$ ;  $K$ - стала граничних параметрів,  $m^{-3}$

$$K = \frac{G_1}{G_k} c_1 + \frac{G_2}{G_k} c_2, \quad (2.3)$$

Рішення рівняння (2.2) описує кінетику змінювання середньої концентрації готової суміші на виході апарату і має наступний вигляд

$$y = K \left( 1 - e^{-\frac{\tau}{T}} \right). \quad (2.4)$$

Таким чином стала змішувача характеризує час виходу апарата на стаціонарний режим роботи.



Отримаємо модель якості перемішування. Основну мету процесу перемішування можна сформулювати як досягнення мінімально можливих чи заданих значень індексу перемішування, або мінімального часу перемішування  $\tau_{min}$ , що забезпечує задані чи мінімальні можливі значення індексу перемішування.

Концентрація малих доз компонентів суміші визначається експериментально по числу часток індикатора у пробі визначеної маси чи або часток речовини компонента в порціях суміші рівної маси. Змінювання значення стандартного відхилення концентрацій у пробі від середньої за об'ємом в процесі перемішування описується наступним рівнянням

$$\sigma(\tau) = \left( \sigma_0 - \sigma_k \right) e^{-\frac{\tau}{\tau_0}} + \sigma_k, \quad (2.5)$$

де  $\sigma_0$ ,  $\sigma_k$  — початкове і кінцеве значення індексу перемішування;  $\tau_0$  — стала часу перемішування, що характеризує інтенсивність роботи змішувача і здатність компонентів до змішування.

Мінімальний час перемішування, що забезпечує задану однорідність, визначають з (2.5) за рівнянням

$$\tau_{min} = \tau_0 \ln \left( \frac{\sigma_0 - \sigma_k}{\beta \sigma_k} \right), \quad (2.6)$$

де  $\beta=0,05; 0,1 \dots$  — коефіцієнт, що показує допустиме відносне відхилення індексу перемішування від кінцевого значення.

За експериментальними даними визначають величини, що входять до рівняння (2.6).

Отримаємо емпірично-аналітичну модель, що пов'язує сталу часу перемішування з основними параметрами процесу перемішування сипучого матеріалу. Skorистуємося для цього методом аналізу розмірностей та фізичної суті процесу. Стала часу перемішування визначається характеристиками апарату - об'ємом робочої зони  $-V$ ; частотою обертання мішалки  $-n$ ; та фізичними характеристиками сировини  $-$  насипною густиною  $-\rho$ , вагою  $mg$  та коефіцієнтом тертя, оцінкою якого може бути величина куту природного ухилу  $-a$ .

$$\tau_0 = A \rho^a m^b g^c \alpha^d V^e n^f. \quad (2.7)$$

Визначимо зв'язок між показниками степенів  $a, b, c, d, e, f$  методом аналізу розмірностей правої та лівої частини (2.8) та отримаємо наступне критеріальне рівняння

$$\frac{\tau_0 \sqrt{g}}{V^{1/6}} = A \left( \frac{m}{\rho V} \right)^b \left( \frac{n V^{1/6}}{\sqrt{g}} \right)^f \alpha^d. \quad (2.8)$$

Таким чином рівняння (2.6) та (2.8) дозволяють шляхом аналізу експериментальних даних отримати аналітичний опис процесу перемішування сипучого матеріалу.

**Приклад.** Отримати модель розрахунку тиску у процесі отримання піни за допомогою струминного апарату, де відбувається змішування в потоці стислого газу та поверхнево активної рідини

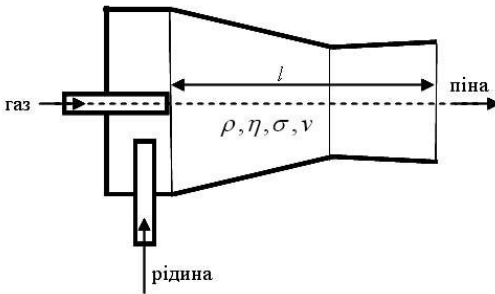


Рис.2.2. Розрахункова схема струминного апарату для отримання піни.

(рис 2.2)

**Розв'язання.** Застосуємо метод аналізу розмірностей для складання критеріального рівняння. Тиск, який потрібний для утворення піни у двофазному потоці газ-рідина буде залежати від довжини апарату –  $l$ , м, швидкості основного потоку –  $v$ , м/с, та фізичних характеристик піни: густини –  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, в'язкості –  $\eta$ , Па·с, кое-

фіцієнту поверхневого натягу –  $\sigma$ , Н/м.

$$\Delta p = A v^a \rho^b \eta^c \sigma^d l^e. \quad (2.9)$$

Залежність (2.9) згідно  $\pi$ -теорема може бути представлена у вигляді залежності між числами подібності. Запишемо рівняння для основних одиниць вимірювання

$$ML^{-1}\tau^{-2} = A (\tau^{-1})^a (L^{-3})^b (L^{-1}\tau^{-1})^c (\tau^{-2})^d (L)^e. \quad (2.10)$$

Отримуємо систему рівнянь для основних одиниць вимірювання.

$$\text{Для } M: b + c + d = 1.$$

$$\text{Для } L: a - 3b - c + e = -1.$$

$$\text{Для } \tau: -a - c - 2d = -2.$$

Визначаємо всі показники степенів і одержуємо критеріальне рівняння у вигляді

$$\frac{\Delta p l}{\sigma} = A \left( \frac{v \eta}{\sigma} \right)^a \left( \frac{\rho \alpha}{\eta^2} \right)^b. \quad (2.11)$$

## 2.2. Моделювання процесів здрібнювання

Процеси здрібнювання використовують у тих випадках, коли необхідно зменшити розміри часток сипучого матеріалу без додання їм визначеної форми. Якщо необхідно додати визначену форму здрібненим часткам, застосовують різання. В основу теорії здрібнювання покладено гіпотезу про те, що витрата енергії на процес визначається сумарною роботою на деформацію об'єму речовини та роботою на збільшення поверхні. При різанні витрата енергії визначається сумою робіт на деформацію продукту та роботою його руйнування.

Розглянемо моделювання процесу сухого подрібнення харчової сировини. За основний визначальний параметр приймемо потужність приводу на подрібнення  $N$ , Вт, яка залежить від характеристик апарату: швидкості ножів  $v$ , м/с, характерного розміру ножів  $D$ , м, масової подачі сировини  $Q$ , кг/с та фізичних характеристик сировини: насипної густини  $\rho$ , кг/м<sup>3</sup>, модуля деформації  $E$ , Па, руйнівного контактного напруження  $\sigma_p$ , Па.

Відповідно до обраних параметрів модель подрібнювача символічно на якісному рівні можна описати залежністю:

$$N = f(v, Q, D, \rho, E, \sigma_p) \quad (2.12)$$

Залежність (6.12) згідно  $\pi$ -теорема може бути представлена у вигляді залежності між числами подібності. Для переходу до чисел подібності вибираємо в якості основних одиниць  $\rho$ ,  $v$ ,  $D$ , кількість їх повинна дорівнюватись числу основних одиниць вимірювання для механічних процесів ( $L, M, \tau$ ), тому

$$\frac{N}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}} = A \left( \frac{Q}{\rho^{\alpha_2} v^{\beta_2} D^{\gamma_2}} \right)^a \left( \frac{E}{\rho^{\alpha_3} v^{\beta_3} D^{\gamma_3}} \right)^b \left( \frac{\sigma_p}{\rho^{\alpha_4} v^{\beta_4} D^{\gamma_4}} \right)^c. \quad (2.13)$$

Для першого критерію маємо

$$\frac{N}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}} = \frac{L^2 M \tau^{-3}}{(ML^{-3})^{\alpha_1} (\tau^{-1})^{\beta_1} (L)^{\gamma_1}}. \quad (2.14)$$

Записуємо рівняння для основних одиниць вимірювання у (6.14).

$$\text{Для } M: \alpha_1 = 1.$$

$$\text{Для } L: -3\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 2.$$

$$\text{Для } \tau: -\beta_1 = -3.$$

Звідки визначаємо всі показники степенів і одержуємо перший критерій

$$y = \frac{N}{\rho^{\alpha_1} v^{\beta_1} D^{\gamma_1}} = \frac{N}{\rho v^3 D^2}. \quad (2.15)$$

Аналогічно отримуємо інші критерії

$$x_1 = \frac{Q}{\rho v D^2}; \quad x_2 = \frac{E}{\rho v^2}; \quad x_3 = \frac{\sigma_p}{\rho v^2}. \quad (2.16)$$

Таким чином, емпірико-аналітична модель процесу подрібнювання харчової сировини має наступний вигляд

$$y = A \cdot x_1^a \cdot x_2^b \cdot x_3^c, \quad (2.17)$$

де невідомі коефіцієнти  $A, a, b, c$ , мають бути визначеними з експериментальних даних.

**Приклад.** Отримати модель процесу віборізанання харчової сировини.

**Розв'язання.** Згідно гіпотези про процес різання за основний визначальний параметр приймемо потужність приводу на різання  $N$ , Вт, яка залежить від характеристик апарату: частоти коливань,  $n$ , Гц, амплітуди коливань ножа  $\delta$ , м, довжини ножа  $l$ , м, модуля деформації  $E$ , Па, руйнівного контактного напруження  $\sigma_p$ , Па.

$$N = f(E, \sigma_p, n, \delta, l) \quad (2.18)$$

Застосуємо метод аналізу розмірностей для складання критеріального рівняння.

$$ML^2 \tau^{-3} = A (ML^{-1} \tau^{-2})^a (ML^{-1} \tau^{-2})^b (L)^c L^d L^e \quad (2.19)$$

Записуємо рівняння для основних одиниць вимірювання у (2.19).

Для  $M$ :  $a + b = 1$ .

Для  $L$ :  $-a - b + d + e = 2$ .

Для  $\tau$ :  $-2a - 2b - c = -3$ .

Звідки визначаємо всі показники степенів і одержуємо наступну модель процесу віброрізання з трьома невідомими коефіцієнтами  $A, a, d$ .

$$\frac{N}{\sigma_p n l^3} = A \left( \frac{E}{\sigma_p} \right)^a \left( \frac{\delta}{l} \right)^d. \quad (2.20)$$

### 2.3. Моделювання процесів формоутворення

До процесів формоутворення відносяться гранулювання, пресування, таблетування та ін. В основі їх лежить фізичний процес деформування. Тому основним фізико-математичним рівнянням є рівняння переносу механічного імпульсу. Для пружних суцільних середовищ це така зване рівняння Ляме

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}_{xyz}}{\partial \tau^2} = G \nabla^2 \vec{U}_{xyz} + \frac{1}{3} (E + G) \nabla (\operatorname{div} \vec{U}_{xyz}) + \vec{F}, \quad (2.21)$$

де  $E$  – модуль об'ємної пружності,  $G$  – модуль зсуву пружно-пластичної деформації,  $\vec{U}_{xyz}$  – вектор змінювання форми тіла відносно центру мас,  $\rho$  – густина тіла,  $\vec{F}$  – вектор зовнішніх сил, що діють на тіло.

Для моделювання процесів у харчовій сировині це рівняння практично не використовується, по перше з огляду на складність його розв'язання, по-друге тому що реологічна модель харчових продуктів більш складна ніж модель пружного тіла. В реології розрізняють три простіших моделі суцільних тіл: ідеально пружне тіло Гука, ідеальна рідина Ньютона та ідеально пластичне тіло Сен-Венана. Як правило реологічні моделі харчових продуктів являють собою комбінацію з

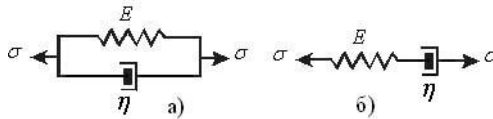


Рис. 2.4. Реологічні моделі: а) модель Кельвіна-Фойгта; б) модель Максвелла.

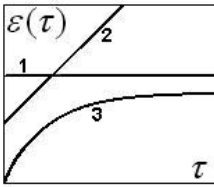


Рис.2.5. Кінетика деформації реологічних моделей: 1-Гука, 2-Максвела, 3- Кельвіна-Фойгта.

поширеним реологічним моделям харчових продуктів.

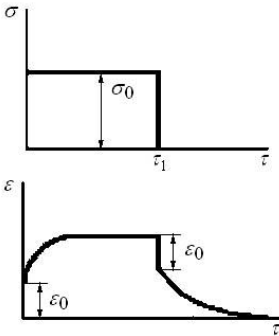


Рис. 2.6. Кінетика деформації ковбасного фаршу за постійної напруги.

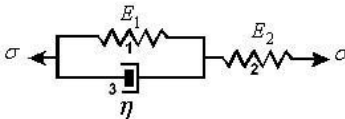


Рис. 2.7. Реологічна модель ковбасного фаршу за умов одновісного стискування.

цих елементарних тіл, яку отримують послідовним, паралельним поєднанням окремих елементів. При цьому найбільш поширено дві комбінованих реологічних моделі для харчових продуктів: в'язко-пружного тіла Кельвіна-Фойгта (рис.2.4а ) Максвела (рис.2.4б ).

Виходячи з аналізу експериментальних даних про кінетику деформування харчового продукту вибудовують ту чи іншу реологічну модель. На рис. 6.5 наведено характер кінетики деформації, який відповідає трьом найбільш

розглянемо приклад складання реологічної моделі ковбасного фаршу, який за даними експерименту має кінетику деформування за постійної напруги, яка показана на рис. 6.6.. Характерним явищем є миттєва пружна деформація фаршу  $\epsilon_0$ , яка спостерігається у момент накладання та зняття зовнішньої напруги, та в'язка течія під дією постійної сили. З огляду на характер деформаційної кривої, що мають найбільш поширені реологічні моделі (рис.2.5) можна зробити висновок, що ні одна з

них цілком не відповідає даним експерименту. Більш за все наближається до експерименту крива 3, що відповідає моделі в'язко-пружного тіла Кельвіна-Фойгта, але наявність миттєвої пружної деформації в початковий момент нагадує поведінку прямої 2 на рис. 2.5 для моделі Максвела. Тому поєднаємо ці дві моделі як показано

на рис. 2.7. Наявність послідовно включеного пружного елемента 2 означає появу миттєвої пружної деформації при додаванні зовнішньої сили, а наявність тіла Кельвіна-Фойгта (1,3) відповідає в'язко-пружній деформації ковбасного фаршу з часом.

Отримаємо математичну модель кінетики деформування ковбасного фаршу за схемою навантаження, що відповідає експериментальним даним (рис.2.6).

Згідно законів Гука та Ньютона маємо наступні рівняння для кожного з елементів моделі на рис. 2.7.

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1; \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2; \quad \sigma_3 = \eta \frac{d\varepsilon_3}{d\tau}. \quad (2.22)$$

З умов рівноваги маємо

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3; \quad \sigma = \sigma_2 \quad (2.23)$$

З умов нерозривності маємо

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2; \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_3. \quad (2.24)$$

Тоді можемо записати

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_3 = E_1 \varepsilon_1 + \eta \frac{d\varepsilon_3}{d\tau}. \quad (2.25)$$

Оскільки  $\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$  та  $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$ , а  $\varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma}{E_2}$  то замість (2.25) отримуємо

$$\sigma = E_1 \varepsilon - \frac{E_1}{E_2} \sigma + \eta \frac{d\varepsilon}{d\tau} - \frac{\eta}{E_2} \frac{d\sigma}{d\tau}. \quad (2.26)$$

Розділяючи змінні у (2.26) отримуємо диференційне рівняння деформації

$$\frac{d\sigma}{d\tau} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_2 \frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{E_1 E_2}{\eta} \varepsilon. \quad (2.27)$$

При сталому зовнішньому навантаженні  $\sigma = \sigma_0 = const$  тому рівняння (2.27) набуває наступного вигляду

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = \frac{E_1 + E_2}{E_2 \eta} \sigma_0. \quad (2.28)$$

Вирішення цього рівняння:

$$\varepsilon(\tau) = C e^{-\frac{E_1}{\eta} \tau} + \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \sigma_0. \quad (2.29)$$

Визначимо довільну сталу  $C$  з початкових умов. Миттєва деформація створюється за рахунок ізольованої пружини  $E_2$ . Тому початкова умова визначає рівність початкової деформації і деформації пружини, тобто:

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_2}. \quad (2.30)$$

З урахуванням цього рівняння з (2.29) отримуємо значення довільної сталої і запишемо результат в остаточному вигляді.

$$\varepsilon(\tau) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} \tau} \right). \quad (2.31)$$

Перший доданок у правій частині рівняння (2.32) - це миттєва деформація ізольованої пружини, а другий доданок визначає уповільнену деформацію моделі Кельвіна-Фойгта. При  $\tau \rightarrow \infty$ , отримаємо рівноважне (максимальне) значення деформації:

$$\varepsilon(\infty) = \frac{\sigma_0}{E_2} + \frac{\sigma_0}{E_1}. \quad (2.32)$$

Таким чином, рівноважна деформація дорівнює сумі деформацій послідовного з'єднання пружин з модулями  $E_1$  та  $E_2$ .

Після знімання напруги в момент часу  $\tau = \tau_1$  відбувається відновлення недеформованого стану ковбасного фаршу. У цей момент часу миттєва деформація  $\sigma_0/E_2$  зникає, тобто маємо умову

$$\varepsilon(\tau_1 + 0) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\mu} \tau_1} \right). \quad (2.33)$$



Диференційне рівняння деформації (2.27) за умов відсутності напруги  $\sigma=0$  и має вигляд:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = 0. \quad (2.34)$$

Вирішення цього рівняння з урахуванням початкової умови (6.33):

$$\varepsilon(\tau_1 + \tau) = \frac{\sigma_0}{E_1} \left( 1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} \tau_1} \right) e^{-\frac{E_1}{\eta} \tau}. \quad (2.35)$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  деформація повністю зникає.

Таким чином рівняння (2.31) та (2.35) описують дві гілки кінетики деформування ковбасного фаршу відповідно при навантаженні та зніманні напруги. Наявність цих рівнянь дає змогу шляхом регресивного аналізу експериментальної кривої деформації визначити механічні характеристики харчового продукту: модулі пружності  $E_1$ ,  $E_2$  та ефективну в'язкість  $\mu$ .

Розглянемо модель процесу брикетування харчового продукту. Брикетування проводять в спеціальних пресах до густини за якої брикет не може своєвільно руйнуватися. Ця густина пов'язана з тиском, що виникає під час пресування у речовині емпіричною залежністю

$$p = p_0 e^{\frac{1}{\psi} \left( \frac{\rho}{\rho_0} - 1 \right)}, \quad (2.36)$$

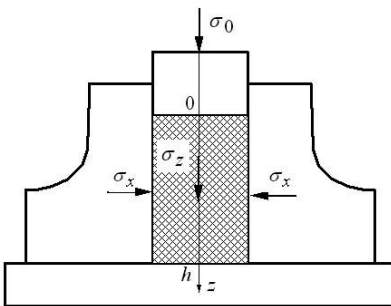


Рис. 2.8.Схема сил, що діють на брикет під час пресування.

де  $\psi$  - модуль пресування,  $p$  - тиск в речовині, що відповідає її густині  $\rho$ ,  $p_0$  - нормальний атмосферний тиск,  $\rho_0$  - густина речовини за нормального тиску.

Для виведення рівняння розподілу тиску пресування за висотою брикету розглянемо схему сил, що діють на елементарний шар брикету (рис. 2.8). В умовах рівноваги на елемент брике-

ту, що знаходиться в матриці на відстані  $z$  від пуансона, у вертикальній площині діють нормальні напруження  $\sigma_z$ , питомі сили тертя  $f\sigma_z$ , де  $f$  - коефіцієнт тертя матеріалу об стінку матриці,  $\sigma_x$  - напруження бічного тиску. Умова рівноваги сил на вісь  $z$  виражається рівнянням

$$Fd\sigma_z = -f\sigma_x\Pi dz, \quad (2.37)$$

де  $F$  – площа поперечного перетину брикету,  $\Pi$  – його периметр.

Вертикальне нормальне напруження  $\sigma_z$  пов'язане з бічним нормальним напруження співвідношенням  $\sigma_x = \xi\sigma_z$ , де  $\xi$  - невідомий коефіцієнт. Прийmemo допущення про постійність коефіцієнту тертя  $f$  і коефіцієнту бічного тиску  $\xi$ . З урахуванням цього рівняння (2.37) інтегрується

$$\ln(\sigma_z) = -\frac{\xi f \Pi}{F} z + \ln C, \quad (2.38)$$

де довільна стала  $C$  знаходиться з початкових умов  $\sigma_z(0) = \sigma_0$ . Тому рівняння розподілу тиску пресування за висотою брикету набуває наступного вигляду

$$\sigma_z = \sigma_0 e^{-\frac{\xi f \Pi}{F} z}, \quad (2.39)$$

Зменшення тиску з висотою, а відповідно і густини брикету пов'язане з втрат тиску на роботу сил тертя. Отримаємо залежність густини брикету від його висоти. З рівняння (2.36) маємо

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \Psi \ln \frac{p}{p_0} \right), \quad (2.40)$$

Підставляючи у (2.40) замість  $p = \sigma_z$  з рівняння (2.39) отримуємо

$$\rho = \rho_0 \left( 1 + \Psi \ln \frac{\sigma_0}{p_0} - \Psi \xi f \frac{\Pi z}{F} \right). \quad (2.41)$$

Знайдемо середню густину брикету. Інтегруючи рівняння (2.41) в межах від 0 до  $h$ , після відповідних перетворень отримаємо

$$\bar{\rho} = \rho_0 \left( 1 + \Psi \ln \frac{\sigma_0}{p_0} - \Psi \xi f \frac{\Pi h}{2F} \right). \quad (2.42)$$

Таким чином рівняння (2.41) та (2.42) є моделлю процесу од-нобічного пресування дисперсної речовини, отриманою за прийнятих вище умов. Як бачимо підвищення тиску пресування збільшую густи-ну брикету, а збільшення розмірів брикету, навпаки, зменшує середню густину брикету. Отримана модель процесу брикетування дозволяє за аналізом експериментальних даних про залежність середньої густини брикету від геометрії матриці та пуансону, а також тиску пресування знайти невідомі характеристики процесу: модуль пресування, та вели-чину пропорційну коефіцієнту тертя.

### **Питання для самоперевірки**

1. Який метод моделювання переважно використовується під час опису механічних процесів?
2. Які основні фізичні величини використовуються для мо-делювання процесів перемішування та здрібнювання?
3. Які моделі використовують для опису процесів формоут-ворення?
4. В чому різниця між реологічними моделями Кельвіна-Фойгта та Максвела?
5. На основі яких даних можна правильно обрати реологічну модель харчового продукту?

## РОЗДІЛ 3

### МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Теоретична гідродинаміка розглядає дві групи процесів: процеси, що складають внутрішню задачу гідродинаміки (наприклад, рух потоків у трубах), і процеси, що складають зовнішню задачу (наприклад, рух частки, що осаджується в середовищі під дією сили тяжіння). Процеси, зв'язані з рухом потоку через шар (фільтрування, псевдозрідження), складають третю групу, що відноситься до змішаної задачі гідродинаміки.

Виходячи з такої класифікації гідродинамічних процесів можна виділити наступні види задач:

**Внутрішня задача гідродинаміки** - вивчення руху рідин і газів у трубопроводах і апаратах.

**Зовнішня задача гідродинаміки** — вивчення руху часток у газоподібному або в рідкому середовищі. Сюди входять задачі розрахунку процесів гравітаційного осадження, осадження в поле відцентрових і інерційних сил, перемішування твердих часток з рідиною й інші способи утворення неоднорідних систем.

**Змішана задача гідродинаміки** — вивчення руху рідин і газів через пористий шар. При цьому у залежності від висоти шару розрізняють два випадки: нерухомим або рухомий (сушарки з нерухомим шаром, або сушарки киплячого шару), різні процеси фільтрування.

Розглянемо деякі найбільш характерні приклади, що відносяться до цих задач гідродинаміки.

#### 3.1. Система рівнянь Нав'є—Стокса у випадку моделювання руху малих тіл

У загальному випадку рух часток у рідкому або газоподібному середовищі може бути описаний системою рівнянь нерозривності та рівняння Нав'є—Стокса, які у векторному запису для нестисливої рідини мають наступний вигляд

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0, \quad (3.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial \tau} + \rho \vec{v} \nabla \vec{v} = \eta \nabla^2 \vec{v} - \nabla \bar{p} + \rho \vec{a}, \quad (3.2)$$

де  $\vec{v}$  - швидкість руху середовища,  $\tau$  - поточний час,  $\rho$  - густина середовища,  $\bar{p}$  - тиск,  $\eta$  - динамічна в'язкість середовища,  $a$  - прискорення, викликане дією зовнішніх сил.

Це рівняння є ні чим іншим ніж рівнянням перенесення фізичної субстанції Умова (1.13) у випадку, якщо фізичною субстанцією є об'ємна концентрація імпульсу  $\vec{\Psi} = \rho\vec{v}$ , а внутрішні джерела, що викликають рух є градієнт зовнішнього тиску та об'ємна густина зовнішніх сил  $I_{\Psi} = -\nabla\bar{p} + \rho\vec{a}$ .

Система цих рівнянь є нелінійною і в загальному випадку не має аналітичного рішення. В окремих випадках вводять ті або інші спрощення, що полягають у тім, що з диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса виключаються ті доданки, які малі в порівнянні з іншими.

Розглянемо спрощену модель течії при повільному стаціонарному русі часток у рідині, коли поле швидкостей середовища не змінюється з часом,  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial\tau} = 0$ . Одне з розповсюджених допущень полягає в тім, що передбачається повзучий характер течії, тобто для малих розмірів часток швидкість їхнього обтікання середовищем мала, що відповідає малому значенню числа Рейнольдса ( $Re < 1$ ) і в'язкі сили в потоці переважають інерційні сили. У цьому випадку для нестисливої рідини рівняння руху в декартових координатах приймуть наступний вигляд

$$\frac{\partial p}{\partial x} - \rho a_x = \eta \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \rho a_y = \eta \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right), \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \rho a_z = \eta \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \quad (3.5)$$

Рівняння руху (3.3) - (3.5) необхідно доповнити рівнянням нерозривності

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Перевага такого спрощення системи рівнянь Нав'є-Стокса в тому, що в цьому вигляді вони є лінійними, а тому можуть бути вирішені аналітично. Система цих рівнянь також описує течію дуже в'язких рідин при цьому розміри тіла (каналу) не обов'язково малі, в усіх випадках коли виконується умова малості числа Рейнольда ( $Re=v_0 l/\nu$ ) ці рівняння можуть бути застосовані.

Наприклад рішення цієї системи для руху сферичної частинки радіусом  $R$  у потоці нестисливої рідини під дією сили тяжіння ( $a=g$ ) мають наступний вигляд у сферичній системі координат

$$v_r = v_0 \left[ 1 - \frac{2R}{3r} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \cos \vartheta, \quad (3.7)$$

$$v_\vartheta = v_0 \left[ 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right] \sin \vartheta, \quad (3.8)$$

$$p = p_0 - \rho g z - \frac{3}{2} \frac{\eta v_0}{R} \left( \frac{R}{r} \right)^2 \cos \vartheta, \quad (3.9)$$

де  $v_0$  — швидкість потоку на нескінченному видаленні від частинки,  $r, \vartheta$  - сферичні координати,  $p_0$  — тиск у площині  $z$  на великій відстані від частинки;  $\rho g z$  — гідростатичний ефект;  $p$  — густина рідини.

Якщо проінтегрувати локальні тиски, що діють на всій поверхні сферичної частки, то одержимо результуючу силу, що діє та частинку з боку потоку

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho g + 6\pi R \eta v_0. \quad (3.10)$$

Перший член у правій частині рівняння (3.10) відповідає силі виштовхування, а другий член являє собою повну силу опору, так званий закон Стокса. Повна сила опору при обтіканні сферичної частки пропорційна кількості руху і площі лобового перетину  $s$ .

$$F_0 = \xi \frac{\rho v_0^2}{2} s. \quad (3.11)$$

Звідси знаходимо коефіцієнт опору, враховуючи, що  $s = \pi R^2$ ,  
 $F_0 = 6\pi R \eta v_0$ .

$$\xi = \frac{2F_0}{\rho v_0^2 s} = \frac{2F_0}{\rho v_0^2 \pi R^2} = \frac{12\eta}{\rho v_0 R} = \frac{24}{\text{Re}}. \quad (3.12)$$

Відзначимо, що отриманий закон опору справедливий при ламинарному режимі руху ( $\text{Re} < 1$ ).

**Приклад.** За допомогою рівнянь Нав'є-Стокса отримати модель руху в'язкої рідини ( $\eta = 150$  Па·с,  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>) середньою швидкістю  $v = 0$  м/с у круглому трубопроводі діаметру  $D = 10$  мм.

**Розв'язання.** Оцінюємо число Рейнольда  $\text{Re} = 10 \cdot 1050 \cdot 10 \cdot 10^{-3} / 150 = 0,7$ , тобто воно менше за одиницю. У цьому випадку використовуємо наближення для рівняння Нав'є-Стокса за умов  $\text{Re} < 1$ . Враховуючи, що зовнішній тиск у трубопроводі спрямований тільки вздовж вісі  $z$  залишаємо тільки одне рівняння (3.5), яке у циліндричній системі координат за умов радіально-симетричної течії має вигляд

$$\frac{dp}{dz} = -\eta \left( \frac{1}{r} \frac{dv_r}{dr} + \frac{d^2 v_r}{dr^2} \right). \quad (3.13)$$

Рішення цього рівняння має наступний вигляд

$$v = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (r^2 + A), \quad (3.14)$$

де константа інтегрування  $A$  визначається з крайових умов  $v(R) = 0$

$$0 = -\frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (R^2 + A), \quad (3.15)$$

Звідки остаточно отримуємо

$$v = \frac{1}{4\eta} \frac{dp}{dz} (R^2 - r^2), \quad (3.16)$$

Максимальна швидкість течії у трубопроводі на осі

$$v_0 = \frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz}, \quad (3.17)$$

Величину градієнту тиску у (3.15) можна знайти використовуючи рівняння для витрати рідини  $L$  крізь трубопровід, яка є відомою характеристикою, наприклад подача насосу

$$L = \int_s v ds = \int_0^R \left( \int_0^R v r dr \right) d\varphi. \quad (3.18)$$

Підставляючи (3.17) у (3.19) отримуємо після інтегрування

$$L = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}. \quad (3.19)$$

Звідки знаходимо значення величини градієнту тиску у трубопроводі

$$\frac{dp}{dz} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}. \quad (3.20)$$

Втрати напору на переміщення рідини складають

$$\Delta p = \int_0^l \frac{dp}{dz} dz = \int_0^l \frac{8\eta L}{\pi R^4} dz = \frac{8\eta L}{\pi R^4} l. \quad (3.21)$$

### 3.2. Система рівнянь Нав'є—Стокса у випадку моделювання руху рідини у приграничному шарі

Розглянемо другий граничний випадок – стаціонарний рух потоку газу або рідини при обтіканні твердих тіл, коли сили в'язкості дуже малі, що справедливо при великих значеннях чисел Рейнольдса. У цьому випадку рівняння Нав'є—Стокса спрощуються, оскільки на деякій відстані від тіла внаслідок малої в'язкості в потоці переважають сили інерції, але поблизу твердої поверхні рідина як би прилипає до неї внаслідок дії міжмолекулярної взаємодії. Перехід від нульової швидкості до швидкості основного потоку  $v_0$  відбувається поступово в приграничному шарі. У цьому шарі градієнт швидкості  $dv/dy$  у напрямку, перпендикулярному поверхні, дуже великий, а поперечна складова швидкості  $v_y$  мала у порівнянні з  $v_x$ . Якщо знехтувати масовими силами ( $\vec{a} = 0$ ), то рівняння Нав'є—Стокса для двовимірного стаціонарного ламінарного приграничного шару нестисливої рідини мають вигляд



$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right), \quad (3.22)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (3.23)$$

де  $\nu$ - кінематична в'язкість.

Якщо врахувати, те що компонента  $v_y$  та її похідні малі, оскільки потік практично паралельний плоскій поверхні, та з цих же міркувань член  $(\partial P/\partial y)$  також незначний, то систему рівнянь Нав'є Стокса можна значно спростити

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (3.25)$$

Відповідні крайові умови для розв'язання цієї системи рівнянь мають вигляд

$$v_x = v_y = 0 \quad \text{при } y=0;$$

$$v_x = v_0 \quad \text{при } y=\delta$$

Рівняння (3.24) і (3.25) називаються рівняннями Прандтля для приграничного шару. Вони справедливі для плоскої стінки, але можуть бути використані і для криволінійних поверхонь за умови, що радіус кривизни не змінюється дуже різко.

Течія за приграничним шаром товщиною  $\delta$  можна вважати безвихровим, тому що вплив сил в'язкості в цій області не виявляється. У цьому випадку розподіл тиску описується рівняннями Ейлера (тобто рівняннями ідеальної рідини), так що похідну  $\partial P/\partial x$  у приграничному шарі можна вважати заданою і не залежною від  $y$ . Спільне рішення рівняння руху (3.24) (3.25) дає розподіл швидкостей у приграничному шарі.

Приграничний шар при обтіканні тонкої плоскої пластини тим тонше, чим менше сили в'язкості. Його товщину  $\delta(x)$  можна оцінити, розглянувши сили тертя і в'язкості. З рівняння (3.24) приблизно впливає, що на границі приграничного шару сила тертя дорівнюється силі

інерції, бо всі інші члени нескінченно малі за рахунок того, що  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx 0$ ,  $\frac{\partial p}{\partial x} \approx 0$  (за межами приграничного шару рідина ідеальна)

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (3.26)$$

Приблизно в цьому випадку величина  $\frac{\partial v_x}{\partial y} \approx \frac{v_0}{l}$ , тобто обернено пропорційна довжині пластини  $l$ , де  $v_0$  — швидкість потоку поза приграничним шаром.

Гradient швидкості в напрямку осі  $y$  можна виразити через товщину приграничного шару у вигляді  $v_0/\delta$ . Тоді замість (3.26) приблизно можна записати

$$\frac{v_0^2}{l} \approx \nu \frac{v_0}{\delta^2}, \quad (3.27)$$

Звідки товщина приграничного шару складає

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu l}{v_0}}. \quad (3.28)$$

Або через число Рейнольдса

$$\frac{\delta}{l} = \sqrt{\frac{1}{\text{Re}_l}}. \quad (3.29)$$

Тобто безрозмірна товщина приграничного шару  $\delta/l$  обернено пропорційна кореневі квадратному з числа Рейнольдса.

Зазначимо, що з розвитком турбулентності й в умовах відриву приграничного шару від поверхні поблизу від цієї поверхні тиск знижується, що приводить до вихроутворення в зоні зниженого тиску. Слід зазначити також, що різниця тисків рідини на лобову поверхню частки, що зустрічає потік і на її кормову поверхню перевищує різницю тисків, що виникає при ламінарному обтіканні. Перепад тиску залежить від місця відриву лінії струму рідини від поверхні, що, у свою чергу, зв'язано з формою і шорсткістю поверхні, швидкістю потоку й інших фізичних властивостей системи. У зв'язку з тим що теорія обті-

кання при великих числах Рейнольдса не розроблена, гідравлічний опір визначається експериментально.

При кількісному визначенні гідравлічних опорів тіл, що рухаються в потоці рідини або газу, зв'язок між втратою кінетичної енергії і режимом руху зазвичай представляється у формі співвідношень між безрозмірними числами. Так, коефіцієнт опору середовища при русі кулястої частинки визначається співвідношеннями

$$\xi = \frac{24}{\text{Re}}, \quad \text{Re} < 0,1. \quad (3.30)$$

$$\xi = \frac{18,5}{\text{Re}}, \quad 2 < \text{Re} < 500. \quad (3.31)$$

$$\xi \approx 0,44, \quad 500 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5, \quad (3.32)$$

Розглянутий закон опору середовища відноситься до вільного руху кулястих твердих часток. Для реальних тіл вводиться фактор форми  $\psi$  (коефіцієнт сферичності), що визначається як відношення поверхні кулі  $s_{кл}$ , що має такий же об'єм, як і реальна частинка, до поверхні частинки  $s$ :

$$\psi = \frac{s_{кл}}{s} = 4,878 \frac{V^{2/3}}{s}. \quad (3.33)$$

Поверхня кулі з об'ємом, рівним об'ємові частинки, визначається за еквівалентним діаметром, що дорівнює

$$d_e = \sqrt[3]{6V / \pi}. \quad (3.34)$$

Числові значення фактора форми  $\psi$  для різних геометричних тіл приводяться в літературі. Для турбулентного обтікання коефіцієнт опору не залежить від числа Re, а тільки від фактора форми  $\psi$ :

$$\xi = 5,31 - 4,88\psi. \quad (3.35)$$

### 3.3. Моделювання течії рідини з використанням рівнянь ньютонівської динаміки

Ще одним способом моделювання течії рідини є безпосереднє використання рівнянь динаміки Ньютона під час складання математичної моделі. Розглянемо де кілька характерних задач гідродинаміки, що вирішуються цим способом моделювання.

### 3.3.1. Моделювання процесів осадження

Розглянемо частку, що рухається в нерухомому середовищі під дією зовнішньої сили. Зовнішньою силою може бути сила ваги або сила відцентрового поля.

Частинка, що падає під дією сили ваги, буде збільшувати свою швидкість доти, поки сила опору середовища не зрівноважить силу ваги. Потім частка продовжить рух з постійною швидкістю. Цю постійну швидкість називають швидкістю вільного осадження. Таким чином, при падінні частки мають місце дві стадії її руху: 1) рух зі збільшенням швидкості; 2) рух з постійною швидкістю. Відзначимо, що зростання швидкості від до  $v$  відбувається протягом дуже короткого проміжку часу, тому в більшості випадків становить інтерес лише друга стадія руху часток.

Рівняння руху частинки має вигляд

$$F_3 - F_o - F_A = m \frac{dv}{d\tau}, \quad (3.36)$$

де  $F_o$  - сила опору середовища;  $F_A$  - піднімальна (архімедова) сила,  $F_3$  - зовнішня сила (сила ваги, відцентрова сила).

Згідно закону Ньютона  $F_3 = ma$ , а сила опору середовища  $F_o$  визначається наступним рівнянням

$$F_o = \xi \frac{\rho v^2}{2} s. \quad (3.37)$$

Піднімальна (архімедова) сила, пропорційна об'єму середовища, витиснутою часткою, тобто

$$F_A = \left( \frac{m}{\rho_T} \right) \rho a, \quad (3.38)$$

де  $\rho_T$  - густина матеріалу частинки,  $a$  - прискорення частинки.

Тоді одержуємо наступне рівняння осадження частинки в полі зовнішніх сил

$$\frac{dv}{d\tau} = a - \frac{\rho a}{\rho_T} - \xi \frac{\rho v^2}{2m} s. \quad (3.39)$$

Для його рішення необхідно знати природу зовнішньої сили і закон опору.

Розглянемо випадок осадження під дією сили тяжіння ( $a = g$ ) на ділянці з постійною швидкістю ( $dv/dt = 0$ ). У цьому випадку одержуємо формулу для швидкості осадження сферичних часток діаметром  $d$  та масою  $m = 4\rho g d^3/3$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\zeta_T - \rho}{\xi \rho} d g}. \quad (3.40)$$

Рівняння (3.39) справедливе для ламінарного, перехідного і турбулентного режимів осадження частинок з різною формою, якщо коефіцієнт опору відомий.

Для ламінарного режиму осадження ( $Re < 0,1$ ) сила опору  $F_o$ , що діє на частинку, визначається згідно Стоксу рівнянням

$$F_o = 3\pi d v \eta. \quad (3.41)$$

Тоді, підставляючи цю формулу у рівняння (3.36), на ділянці сталого осадження частки ( $dv/dt = 0$ ), одержуємо відому формулу Стокса для швидкості осадження сферичної частки:

$$v = \frac{\zeta_T - \rho}{18\eta} d^2 g. \quad (3.42)$$

Якщо частка осаджується у відцентровому полі, то  $a = r\omega^2$ , де  $\omega$ -кутова швидкість, а  $r$  - радіус траєкторії частинки. Підставляючи це вираження  $a$  в рівняння (3.36) для ділянки сталого руху частки одержуємо рівняння

$$v = \sqrt{\frac{2mr\omega^2 (\zeta_T - \rho)}{\xi \rho_T \rho s}}. \quad (3.43)$$

Застосування цих формул вимагає попереднього визначення режиму осадження (числа  $Re$ ), бо від нього залежить коефіцієнт опору. У зв'язку з цим ці рівняння можна розв'язувати методом послідовних наближень, тобто задають число  $Re$ , розраховують коефіцієнт опору і швидкість осадження, потім знову перевіряють, чи знаходиться розраховане значення швидкості в заданому гідродинамічному режимі.

Даної процедури розрахунку швидкості осадження можна уникнути, перетворивши одержані рівняння осадження методом Ляшенко в критеріальні.

$$\xi \text{Re}^2 = \frac{4}{3} \text{Ar} . \quad (3.44)$$

Вираження в правій частині рівняння (3.43) являє собою безрозмірне число Архімеда.

$$\text{Ar} = \frac{d^2 \rho^2 g}{\eta^2} \left( \frac{\rho_T - \rho}{\rho} \right) . \quad (3.45)$$

Оскільки коефіцієнт опору залежить від режиму осадження, можна установити граничні значення числа Архімеда, що відповідають переходові з однієї області осадження в іншу.

В області ламінарного режиму осадження ( $\text{Re} < 2$ ), ( $\text{Ar} < 36$ ). .

$$\text{Re} = \frac{\text{Ar}}{18} . \quad (3.46)$$

В автотодельній (турбулентній) області  $\xi = 0,44$  запишеться ( $500 < \text{Re} < 2 \cdot 10^5$ )

$$\text{Re} = 1,74 \text{Ar}^{0,5} . \quad (3.47)$$

У перехідній області ( $2 < \text{Re} < 500$ ), ( $36 < \text{Ar} < 8,3 \cdot 10^4$ ).

$$\text{Re} = 0,152 \text{Ar}^{0,715} . \quad (3.48)$$

Загальна напівемпірична залежність, що зв'язує безрозмірні числа  $\text{Ar}$  і  $\text{Re}$ , має вигляд

$$\text{Re} = \frac{\text{Ar}}{18 + 0,6\sqrt{\text{Ar}}} . \quad (3.49)$$

Таким чином, розрахунок швидкості осадження методом Лященко зводиться до наступного: 1) визначають значення числа Архімеда і по ньому режим осадження; 2) розраховують швидкість осадження.

### 3.3.2. Моделювання течії в'язкої рідини у плівковому випарному апараті з падаючою плівкою

Як відому, у такому апараті випарювання відбувається у тонкому шарі плівки, що рухається по периметру труби. В цьому випадку сталий рух рідини здійснюється під дією сили тяжіння, яка протидіє

силі в'язкого тертя та силі поверхневого натягу на границі рідини-поверхня труби. Тоді рівняння руху має такий вигляд

$$\rho V g = -\eta \frac{dv}{dr} S_T - \sigma \Pi, \quad (3.50)$$

де  $\rho$  - густина рідини,  $V$  - об'єм плівки,  $g$  - прискорення вільного падіння,  $\sigma$  - коефіцієнт поверхневого натягу рідини,  $S_T$  - площа тертя окремих шарів рідини,  $\Pi$  - периметр трубопроводу.

Знак “-” враховує те що швидкість руху рідини зменшується у напрямку до стінки труби ( $0 \leq r \leq R$ ). Відповідні геометричні величини легко знайти

$$S_T = 2\pi r l, \quad V = \pi(R^2 - r^2)l, \quad \Pi = 2\pi R, \quad (3.51)$$

де  $l$  - довжина труби,  $r$  - поточний радіус шару,  $R$  - радіус труби.

Підставляючи (3.51) в (3.50) одержуємо

$$\rho \pi (R^2 - r^2) \cdot g = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l - \sigma 2\pi R, \quad (3.52)$$

або у іншому вигляді

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{2\sigma R + R^2 l \rho g}{2\eta l} \frac{1}{r} + \frac{g \rho}{2\eta} r. \quad (3.53)$$

Рішення цього диференціального рівняння з крайовою умовою  $v(R)=0$ , має вигляд

$$v = \frac{\rho g R^2}{2\eta} \left[ \left( \frac{2\sigma}{\rho g R l} + 1 \right) \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) \right], \quad (3.54)$$

Останнє рівняння описує профіль швидкості рідини за товщиною плівки.

Розрахуємо об'ємні витрати рідини у апараті

$$L = \int_S v ds = \int_0^R \left( \int_{R-\delta}^R v r dr \right) d\varphi, \quad (3.55)$$

де  $\delta$  - товщина плівки рідини. З урахуванням (3.54) після інтегрування отримуємо

$$L = \pi v_0 \left[ \frac{(R^2 - R\delta^2)(\delta^2 + R^2)(A+1)}{4R^2} - R\delta^2(A+1) \ln \frac{R}{R\delta} \right]. \quad (3.56)$$

де  $v_0 = \rho g R^2 / 2\eta$ ,  $R_\delta = R - \delta$ ,  $A = 2\sigma / \rho g R l$ .

Останнє рівняння можна спростити, враховуючи що товщина плівки мала у порівнянні з радіусом труби випарного апарату  $\delta \ll R$ . Тоді, розклав у ряд (3.56) за малим параметром  $\delta$ , одержуємо

$$L = \pi \frac{\sigma R}{\eta l} \delta^2 + O(\delta^3). \quad (3.57)$$

Звідки можна визначити товщину плівки за відомою витратою рідини, яка пов'язана з продуктивністю апарату  $L = G/\rho$ , де  $G$  - продуктивність апарата, кг/с.

$$\delta = \sqrt{\frac{\eta G l}{\pi \sigma \rho R}}. \quad (3.58)$$

### 3.3.3. Моделювання течії в'язкої рідини у роторно-плівковому випарному апараті

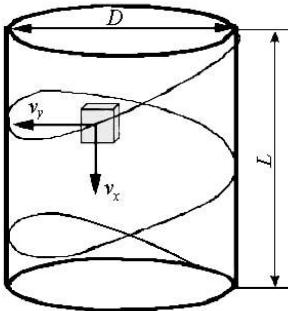


Рис. 3.1. Модель руху елементарного об'єму рідини у роторно-плівковому апараті.

Роторно-плівковий випарний апарат на відміну від плівкових мають всередині корпусу ротор, що обертається. Це дозволяє інтенсифікувати процес випарювання та підвищити якість готового продукту. Отримаємо модель руху рідини у такому апараті. Елементарний об'єм продукту здійснює в апараті рух за спіраллю (рис.3.1) під дією сукупності сил тяжіння та відцентрової сили. Силами поверхневого натягу у цьому випадку можна знехтувати, бо вони набагато менші за відцентрові сили. Оскільки товщина плівки набагато менша за діаметр апарату, то рух елементарного



об'єму можна вважати плоским, тому координатну вісь  $x$  направимо вздовж осі апарату, а вісь  $y$  по довжині кола апарату.

Складова швидкості  $v_x$  визначає час перебування елементарного об'єму в апараті. Результируюча швидкість  $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$  визначає продуктивність апарату.

Отримаємо рівняння руху елементарного об'єму продукту  $dV$ , що має поверхню  $dS$  і товщину  $\delta$ . У напрямку осі  $0x$  продукт рухається під дією сили тяжіння  $F_g = g\rho dV$  і сили в'язкого тертя  $F_T = F_T = \eta \cdot \nabla v \cdot S$  з постійною швидкістю. Тому можна записати:

$$g\rho dV = \eta \frac{v_x}{\delta} dS, \quad (3.59)$$

де  $\rho$  - густина продукту,  $g$  - прискорення сили тяжіння,  $\eta$  - динамічна в'язкість.

Оскільки  $\delta = dV/dS$ , з (3.59) визначаємо швидкість руху елементарного об'єму продукту за довжиною апарату

$$v_x = \frac{\rho g \delta^2}{\eta}. \quad (3.60)$$

Час перебування елементарного об'єму в апараті довжиною  $l$ :

$$\tau = \frac{l}{v_x} = \frac{l\eta}{\rho g \delta^2}. \quad (3.61)$$

Складову швидкості  $v_y$  надає елементарному об'єму продукту лопать ротора апарату. Тому ця швидкість визначається сумісною дією відцентрової сили  $\rho dV \cdot a_\omega$ , де  $a_\omega = 2(\pi n)^2 D$  - відцентрове прискорення та силою в'язкого тертя. Відповідне рівняння динаміки руху має вигляд

$$2\rho dV(\pi n)^2 D = \eta \frac{v_y}{\delta} dS. \quad (3.62)$$

де  $D$  - діаметр апарату,  $n$  - частота обертання ротора.

Враховуючи, що  $\delta = dV/dS$ , з (3.62) визначаємо складову швидкості  $v_y$

$$v_y = \frac{2\rho(\pi)^2 D \delta^2}{\eta}. \quad (3.63)$$

Таким чином, результуюча швидкість руху елементарного об'єму рідини в апараті

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\rho g \delta^2}{\eta}\right)^2 + \left(\frac{2\rho(\pi)^2 D \delta^2}{\eta}\right)^2}. \quad (3.64)$$

Ця швидкість пов'язана з продуктивністю апарата  $G$  наступним чином

$$G = \rho \cdot l \cdot \delta \cdot v. \quad (3.65)$$

З формул (3.65) (3.64) знаходимо товщину плівку у роторно-плівковому апараті

$$\delta = \frac{\sqrt[3]{\frac{G \cdot \eta}{\rho^2 \cdot l \cdot g}}}{\sqrt{1 + 4 \frac{(\pi)^4 D^2}{g^2}}}. \quad (3.66)$$

### 3.3.4. Моделювання течії неньютонівської рідини у круглому трубопроводі

В цьому випадку сталий рух рідини здійснюється під дією прикладеного зовнішнього тиску, який компенсую втрати опору на тертя.

Для неньютонівської псевдо пластичної рідини сила внутрішнього тертя описується степеневим законом Оствальда

$$F_T = -\eta \frac{v_0}{R} \left( \frac{dv^*}{dr^*} \right)^n S_T, \quad (3.67)$$

де  $v^* = v/v_0$ ,  $r^* = r/R$  - безрозмірна швидкість течії та безрозмірна координата,  $v_0$  - швидкість рідини на осі трубопроводу,  $n$  – емпіричний індекс течії ньютонівської рідини ( $n < 1$ ).

Тоді рівняння руху має такий вигляд

$$-\eta \frac{v_0}{R} \left( \frac{dv^*}{dr^*} \right)^n S_T = pS, \quad (3.68)$$

де  $S_T$  - площа тертя окремих шарів рідини,  $S$  - площа перерізу трубопроводу. Знак “-” враховує те що швидкість руху рідини зменшується у напрямку до стінки трубопроводу ( $0 \leq r \leq R$ ). Відповідні площі  $S_T$ ,  $S$  обчислюються наступним чином

$$S_T = 2\pi r l, \quad S = \pi r^2, \quad (3.69)$$

де  $l$ - довжина трубопроводу,  $r$ - поточний радіус шару рідини.

З урахуванням цього на основі рівняння руху (3.68) одержуємо наступне диференціальне рівняння

$$-\left( \frac{dv^*}{dr^*} \right)^n = \frac{p}{2\eta l} \frac{R^2}{v_0} r^*, \quad (3.69)$$

Рішення останнього диференціального рівняння з крайовою умовою  $v^*(1)=0$ , має вигляд

$$v^* = \left( \frac{pR^2}{2\eta l v_0} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[ 1 - \left( r^* \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad (3.70)$$

або у розмірному вигляді

$$\frac{v}{v_0} = \left( \frac{pR^2}{2\eta l v_0} \right)^{1/n} \frac{n}{n+1} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right]. \quad (3.71)$$

З останнього рівняння одержимо значення швидкості течії на осі каналу  $v_0$  за умови  $r=0$

$$v_0 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \frac{pR^2}{2\eta l}. \quad (3.72)$$

Підставляючи (3.72) в (3.71) одержимо

$$v = \frac{pR^2}{2\eta l} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]. \quad (3.73)$$

Розрахуємо об'ємні витрати рідини крізь трубопровід

$$L = 2\pi \int_0^R v(r)rdr. \quad (3.74)$$

Підставляючи (3.73) в (3.74) одержуємо

$$L = \frac{\pi p R^4}{2\eta l} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-n} \frac{n}{3n+1}. \quad (3.75)$$

Легко перевірити, що якщо індекс течії  $n=1$  рівняння (3.73), (3.75), переходить в рівняння для ньютонівської рідини (3.16), (3.19).

Взагалі такий метод перевірки нової моделі з відомими існуючими моделями має назву граничного переходу. За умов коректної фізичної моделі нова модель повинна включати в себе існуюче рішення, як частковий випадок.

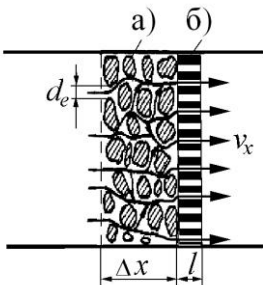


Рис.3.2. Схема руху фільтрату через шар осаду та фільтр: а) шар осаду; б) фільтр.

### 3.3.5. Моделювання процесу фільтрування

При розділенні суспензій залежно від виду фільтрувальної перегородки і властивостей самої суспензії фільтрування може відбуватися з утворенням осаду на поверхні перегородки, із закупорюванням пір фільтруючої перегородки і з тим та іншим явищами одночасно (проміжний вид фільтрування). Розглянемо випадок моделювання кінетики процесу фільтрування з утворенням осаду. Основ-

ний опір руху фільтрату у цьому випадку створює шар осаду. Рідина рухається у каналах складної форми утворених твердими частками осаду (рис.3.2). Скористуємося рівнянням Нав'є-Стокса для випадку одновимірної задачі про стаціонарну течію в'язкої рідини у вузькому каналі. У цьому випадку із рівнянь (3.3)-(3.5) залишається тільки одне

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2 v_x}{dy^2}. \quad (3.76)$$

Приблизно для кінцевих прирощень змінних у (3.76) маємо наступне рівняння

$$\frac{\Delta p}{\Delta x + l} = \eta \frac{v_x}{d_e^2}, \quad (3.77)$$

де  $d_e$  - еквівалентний діаметр каналу.

Враховуємо те, що число таких каналів у шарі осаду дорівнює  $1/\Pi$ , де  $\Pi$  - поверхнева пористість (відношення площі перерізу пор до площі перерізу шару осаду), тоді для визначення повного тиску опору праву частину рівняння (3.77) треба додати на  $1/\Pi$ . З урахуванням цього з (3.77) отримуємо середню швидкість фільтрування

$$v_x = \frac{\Delta p \Pi d_e^2}{\eta (\Delta x + l)}. \quad (3.78)$$

З іншого боку швидкість фільтрування можна визначити через об'ємну витрату фільтрату

$$v_x = \frac{1}{S} \frac{dV}{d\tau}. \quad (3.79)$$

де  $S$  - площа перерізу фільтра,  $V$ - об'єм рідини, що фільтрується..

Товщину шару осаду можна розрахувати наступним чином

$$\Delta x = \frac{V_o}{S} = \frac{m_o}{S \rho_o}, \quad (3.80)$$

де  $V_o$  - об'єм осаду,  $m_o$  - маса осаду,  $\rho_o$  - густина осаду.

Між масою осаду та масою фільтрату має місце наступне співвідношення

$$m_o = c \phi \rho V, \quad (3.81)$$

де  $c_\phi$  – відносний вміст осаду у фільтраті,  $c_\phi = m_o / m_\phi$ .

Таким чином товщина шару осаду залежить від об'єму фільтрату наступним чином

$$\Delta x = c_\phi \frac{\rho}{\rho_o} \frac{V}{S}, \quad (3.82)$$

Підставляючи це рівняння у (3.78) з урахуванням (3.79) отримуємо диференціальне рівняння кінетики фільтрації

$$\frac{1}{S} \frac{dV}{d\tau} = \frac{\Delta p \Pi d_e^2}{\eta \left( c_\phi \frac{\rho}{\rho_o} \frac{V}{S} + l \right)}. \quad (3.83)$$

Рішення цього рівняння з крайовою умовою  $V(0)=0$  має наступний вигляд

$$c_\phi \frac{\rho}{\rho_o} V_f^2 + l V_f = \frac{\Delta p \Pi d_e^2}{\eta} \tau, \quad (3.84)$$

де  $V_f = V/S$  – питома продуктивність фільтру, ( $\text{м}^3/\text{м}^2$ ).

Необхідний час для отримання фільтрату заданого об'єму згідно з (3.84) визначається наступним чином

$$\tau = \frac{\eta}{\Delta p \Pi d_e^2} \left( c_\phi \frac{\rho}{\rho_o} V_f^2 + l V_f \right). \quad (3.85)$$

Ця формула дозволяє шляхом регресивного аналізу експериментальних даних про кінетику фільтрування, тобто залежності об'єму фільтрату від тривалості процесу фільтрування  $V_f(\tau)$ , визначити структурно-механічні характеристики осаду  $\Pi d_e$ ,  $c_\phi$ ,  $\rho_o$ .

**Приклад.** Отримати модель процесу фільтрації за допомогою центрифуги.

**Розв'язання.** У цьому випадку вимушений рух фільтрату здійснюється під дією відцентрової сили  $dF_{вц}$ , яка створює відповідний тиск на елементарний об'єм суспензії (рис. 3.3) товщиною  $dr$

$$dp = \frac{dF_{вц}}{S} = dm \frac{\omega^2 r}{S}, \quad (3.86)$$

де  $dm$  - маса елементарного об'єму суспензії,  $\omega$  - кутова швидкість обертання центрифуги,  $S$ -площа бокової поверхні шару суспензії.

Оскільки  $dm = \rho dV = \rho S dr$ , то

$$dp = \rho \omega^2 r dr, \quad (3.87)$$

Після інтегрування (3.87) в межах радіусу шару осаду від 0 до  $r$  одержимо тиск опору шару осаду

$$\Delta p = \frac{\rho \omega^2}{2} r^2. \quad (3.88)$$

Враховуючи, що  $r = R - \Delta x$  отримуємо

$$\Delta p = \frac{\rho \omega^2}{2} (R - \Delta x)^2. \quad (3.89)$$

Підставив отримане значення для тиску опору шару осаду у рівняння швидкості фільтрату (3.78), маємо

$$v_x = \frac{\rho \omega^2}{2} \frac{\Pi d_e^2}{\eta} \frac{(R - \Delta x)^2}{(\Delta x + l)}. \quad (3.90)$$

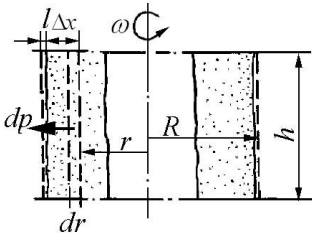


Рис. 3.3. Схема фільтрування у центрифугі:

Підставляючи це рівняння у (3.78) з урахуванням (3.90) отримуємо диференціальне рівняння кінетики фільтрації

$$\frac{dV_f}{d\tau} = \frac{\rho \omega^2}{2} \frac{\Pi d_e^2}{\eta} \frac{\left( R - \frac{c\phi\rho}{\rho_o} V_f \right)^2}{\frac{c\phi\rho}{\rho_o} V_f + l} \quad (3.91)$$

Рішення цього рівняння з крайовою умовою  $V_f(0)=0$  має наступний вигляд

$$\tau = \frac{2\eta\rho_o}{c_\phi\Pi(\rho\omega d_e)^2} \left[ \frac{c_\phi\rho}{\rho_o} \frac{l/R+1}{\left(1-c_\phi\frac{\rho}{\rho_o}\frac{V_f}{R}\right)} \frac{V_f}{R} + \ln\left(1-\frac{c_\phi\rho}{\rho_o}\frac{V_f}{R}\right) \right]. \quad (3.92)$$

Таким чином отримано рівняння кінетики фільтрування у центрифугі.

### 3.4. Моделювання гідродинамічних процесів з використанням критеріїв подібності

На підставі аналізу диференціального рівняння руху в'язкої нестискуваної рідини (3.2) можна отримати чотири безрозмірні критерії, з яких складається критеріальне рівняння

$$f(\text{Ne}, \text{Eu}, \text{Re}, \text{Sh}) = 0, \quad (3.93)$$

де Ne - критерій Ньютона, Eu - критерій Ейлера, Re - критерій Рейнольда, Sh- критерій Струхала.

При цьому в залежності від виду зовнішніх сил, що діють на рідину, замість критерію Ньютона використовують критерії Фруда або Вебера.

Таблиця 3.1.

Гідродинамічні критерії подібності

Назва критерію	Формула	Позначення	Фізичний сенс
Ньютона	$\text{Ne} = \frac{F}{\rho v_0^2 l^2},$ або $\text{Ne} = \frac{al}{v_0^2}$	$F$ – зовнішня сила, $a$ - прискорення, $\rho$ - густина рідини, $v_0$ – характерна швидкість потоку, $l$ – характерний розмір тіла	Відношення зовнішньої сили до сили інерції потоку рідини



Фруда	$Fr = \frac{v_0^2}{gl}$	$g$ - прискорення вільного падіння, $v_0$ - характерна швидкість потоку, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення сили інерції потоку рідини до сили тяжіння
Вебера	$We = \frac{\rho v_0^2 l}{\sigma}$	$\rho$ - густина рідини, $v_0$ - характерна швидкість потоку, $l$ - характерний розмір тіла, $\sigma$ - коефіцієнт поверхневого натягу	Відношення сили інерції потоку рідини до сили поверхневого натягу

Продовження табл. 3.1.

1	2	3	4
Ейлера	$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v_0^2}$	$\Delta p$ - перепад тиску у потоці, $\rho$ - густина рідини, $v_0$ - характерна швидкість потоку	Відношення сили гідродинамічного тиску до сили інерції
Рейнольдса	$Re = \frac{v_0 l}{\nu}$	$v_0$ - характерна швидкість потоку, $l$ - характерний розмір тіла, $\nu$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості	Відношення сили інерції потоку рідини до сил в'язкості
Стухаля	$Sh = \frac{l}{v_0 \tau_0}$	$v_0$ - характерна швидкість потоку, $\tau_0$ - характерний час процесу, $l$ - характерний розмір тіла	Число гомохронності, безрозмірна частота процесу

**Приклад.** Отримати математичну модель для розрахунку потужності приводу шнеку макаронного преса методом аналізу розмірностей.

**Розв'язання.** При формуванні макаронних виробів рух тіста відбувається у каналі, який утворений стінками пресу та гвинтовим каналом шнека. Тісто є реологічною в'язко-пластичною масою, що

характеризується граничною напругою зсуву  $\sigma_0$ , ефективною вязкістю  $\eta$ , та густиною  $\rho$ . Технічними характеристиками пресу є діаметр камери,  $D$ , її довжина,  $l$ , та швидкість подачі шнеком,  $v$ .

Тому для потужності приводу, можна записати наступне рівняння

$$N = A \sigma_0^a \eta^b \rho^c v^d l^e D^f. \quad (3.94)$$

З урахуванням розмірностей одиниць вимірювання маємо

$$ML^2\tau^{-3} = A \left( ML^{-1}\tau^{-2} \right)^a \left( ML^{-1}\tau^{-1} \right)^b \left( ML^{-3} \right)^c \left( \tau^{-1} \right)^d L^e L^f. \quad (3.95)$$

Записуємо рівняння для основних одиниць вимірювання у (3.95).

$$\text{Для } M: a + b + c = 1.$$

$$\text{Для } L: -a - b - 3c + d + e + f = 2.$$

$$\text{Для } \tau: -2a - b - d = -3.$$

З цієї системи виключаємо три показники степенів  $c, d, f$  та одержуємо наступну математичну модель

$$\frac{N}{\rho v^3 D^2} = A \left( \frac{\sigma_0}{\rho v^2} \right)^a \left( \frac{\eta}{\rho v D} \right)^d \left( \frac{l}{D} \right)^e. \quad (3.96)$$

Потужність можна виразити через тиск та об'ємну витрату тіста:  $N = \text{const} \cdot \Delta p \cdot v \cdot D^2$ . Підставляючи це у ліву частину (3.96) отримуємо критерій Ейлера. Перший безрозмірний комплекс у правій частині (3.96) множимо та ділимо на  $D^2$  та отримуємо критерій Ньютона. Другий безрозмірний комплекс (3.96) не що інше як критерій Рейнольдса. Тому остаточно математична модель процесу формування макаронних виробів у пресі приймає наступний вигляд

$$Eu = A Ne^a Re^{-d} \left( \frac{l}{D} \right)^e. \quad (3.97)$$

### Питання для самоперевірки

1. За яких умов може бути спрощена система рівнянь Нав'є-Стокса?
2. Як оцінити товщину приграничного шару при обтіканні плоского тіла?

3. Як визначається сила опору в загальному випадку?
4. Чому дорівнює коефіцієнт опору кулястих тіл?
5. Який вигляд має рівняння осадження частинок в полі зовнішніх сил?
6. У чому особливість моделі процесу фільтрування у центрифугах?
7. Перечисліть основні критерії подібності гідромеханічних процесів?

## РОЗДІЛ 4

### МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛОБМІННИХ ПРОЦЕСІВ

Нагрівання та охолодження харчових продуктів реалізується різними способами теплопередачі, а саме конвекцією, контактним нагрівом (за рахунок теплопровідності) та радіаційним випромінюванням. Основні технологічні процеси, в яких реалізовано ці способи теплопередачі, це нагрівання, охолодження, варіння, жаріння, випікання та деякі інші. Розглянемо основні фізичні закони, що описують процеси теплообміну.

#### 4.1. Основні фізичні закони та методи моделювання теплообмінних процесів

Кількісною мірою перенесення теплоти є вектор густини теплового потоку  $j_T$ , що вказує напрям перенесення і чисельно дорівнює кількості теплоти, що проходить за одиницю часу, через одиницю поверхні  $F$ , нормальній до напрямку перенесення

$$j_T = \frac{1}{F} \frac{dQ}{d\tau} = \frac{cm}{F} \frac{dT}{d\tau}, \quad (4.1)$$

де  $c$  - теплоємність речовини, Дж/(кг·К);  $m$  - маса, кг;  $T$  - температура, К.

Для теплопередачі шляхом конвекції у рухомому потоці рідини

$$j_T^k = \rho c v T, \quad (4.2)$$

де  $\rho$  - густина речовини, кг/м<sup>3</sup>;  $v$  - швидкість конвекційного потоку, м/с.

Для конвекційного теплообміну між твердим тілом та рідиною

$$j_T^d = \alpha(T_\infty - T_s), \quad (4.3)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $T_\infty$  - температура потоку, що омиває поверхню тіла, К;  $T_s$  - температура поверхні тіла, К.

Для теплопередачі шляхом теплопровідності

$$j_T^d = -\lambda \cdot \nabla T, \quad (4.4)$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності речовини, Вт/(м·К);  $\nabla T$  - градієнт температур, К/м.

Для теплопередачі шляхом радіаційного випромінювання

$$j_T^r = C_{12} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (4.5)$$

де  $C_{12}$  - зведений коефіцієнт випромінювання між тілами 1 та 2, Вт/(м<sup>2</sup>·К<sup>4</sup>);  $T_1, T_2$  - температура тіл.

Основним рівнянням, що описує динаміку температурних полів у речовині під час теплообмінних процесів є рівняння Фур'є-Кіргофа, що виходить з рівняння Умова (4.13) за умов, що фізичною субстанцією є тепловміст одиниці об'єму речовини  $j_\Psi = c\rho T$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \operatorname{div}(T \cdot \vec{v}) = a\nabla^2 T + \frac{I_T}{c\rho}, \quad (4.6)$$

де  $a$  - коефіцієнт температуропровідності, м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>;  $I_T$  - потужність внутрішніх джерел, стоків теплоти, Вт/м<sup>3</sup>.

Внутрішні джерела теплоти у теплообмінних процесах враховуються якщо має місце фазове перетворення (рідина - газ, рідина - тверде тіло), перетворення енергії електричного (електромагнітного поля) у теплоту, виділення теплоти за рахунок сил тертя.

Член  $\operatorname{div}(T \cdot \vec{v})$  враховує конвекційне перенесення теплоти у рухомому середовищі (рідина, газ), член  $a\nabla^2 T$  враховує перенесення теплоти за рахунок теплопровідності. Тому рівняння (4.5) можна спростувати відкидаючи ті чи інші члени з урахуванням того якими механізмами переважно відбувається теплообмін.

Рівняння (4.6) повинно бути доповнено системою рівнянь Нав'є-Стокса щоб одержати замкнену систему. Така система рівнянь є системою нелінійних диференціальних рівнянь у часткових похідних і аналітичного рішення не має. Тому для моделювання конвекційного теплообміну у в'язкій рідині частіше використовують критеріальні рівняння.

Якщо вирішується задача теплопровідності у нерухомому середовищі  $\vec{v} = 0$ , то рівняння Нав'є-Стокса не потрібні. Рівняння (4.6) описує нестационарні поля температури у об'ємі тіла за умов завдання

відповідних крайових умов, але його аналітичне рішення можливо тільки для тіл правильної геометричної форми. Такі рішення мають вигляд нескінчених рядів та дуже складні для аналізу, тому зазвичай їх спрощують для того щоб, наприклад, розраховувати потрібний час технологічної обробки продукту.

Для задач моделювання кінетики теплообмінних процесів, тобто змінювання середньої температури тіла з часом використовується рівняння кінетики теплопередачі, яке безпосередньо впливає з рівняння збереження та перенесення фізичної субстанції (4.6) і має наступний вигляд

$$c\rho V \frac{d\bar{T}}{d\tau} = \sum_i j_i^d S_i^d + \sum_j j_j^k S_j^k + \sum_n \bar{I}_n V_n, \quad (4.7)$$

де  $V$  – об'єм системи,  $\bar{T}$  - середня за об'ємом температура системи,  $j_i^d$  - густина дифузійного потоку теплоти, що переноситься через поверхню  $S_i^d$ ,  $j_j^k$  - густина конвекційного потоку теплоти, що переноситься через поверхню  $S_j^k$ ,  $\bar{I}_n$  - середня потужність внутрішнього джерела (стоку) теплоти, яке діє у об'ємі  $V_n$ .

При цьому знак додавання у правій частині (4.7) означає, що враховуються усі потоки теплоти, що входять або виходять з об'єму системи  $V$ . Якщо відповідний потік  $j_i^d, j_j^k$  збільшує температуру системи з часом, то він враховується у сумі зі знаком „+”, якщо навпаки зменшую – то зі знаком „-”. Теж саме зауваження стосується суми потужності діючих у системі джерела (стоків) теплоти.

Густина дифузійного потоку розраховується за наступною формулою.

$$j^d = k_T (T_\infty - \bar{T}); \quad (4.8)$$

де  $T_\infty$  - температура тіла в стаціонарному стані коли,  $k^T$  - коефіцієнт теплопередачі, який обернено пропорційний сумарному термічному опору  $\sum_i R^T$  між зовнішнім середовищем та тілом

$$(k^T)^{-1} = \sum_i R^T = \sum_i \left( \frac{\delta_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right), \quad (4.9)$$

де  $\delta_i$  – характерний розмір шару, що складає термічний опір.

Для розрахунку конвекційного потоку теплоти  $j^k$  використовується формула (4.2), у яку підставляється середня швидкість конвекційного потоку та його середня температура.

Перевагою рівнянь (4.8), (4.9) є те, що вони можуть бути застосовано для тіл довільної форми.

Іншим продуктивним методом моделювання теплообмінних процесів є застосування методу аналізу розмірності та критеріїв подібності.

Таблиця 4.1.

## Критерії подібності теплообміну

Назва критерію	Формула	Позначення	Фізичний сенс
Фур'є	$Fo = \frac{a\tau_0}{l^2}$	$a$ - коефіцієнт теплопроводності, $\tau_0$ - характерний час процесу, $l$ - характерний розмір тіла	Відносний час досягнення стаціонарного стану під час теплообміну
Нусельта	$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$	$\alpha$ - коефіцієнт тепловіддачі, $\lambda$ - коефіцієнт теплопроводності рідини, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення конвекційного потоку теплоти до потоку за рахунок теплопроводності у граничному шарі на межі розділу рідина – тверде тіло
Біо	$Bi = \frac{\alpha l}{\lambda}$	$\alpha$ - коефіцієнт тепловіддачі, $\lambda$ - коефіцієнт теплопроводності твердого тіла, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення конвекційного потоку теплоти на межі розділу рідина – тверде тіло до потоку за рахунок теплопроводності у твердому тілі.
Пекле	$Pe = \frac{v_0 l}{a}$	$v_0$ - характерна швидкість потоку, $a$ - коефіцієнт теплопроводності, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення інтенсивності перенесення теплоти конвекцією та теплопроводністю у рухомому середо-

			вищі
--	--	--	------

Продовження табл. 4.1

1	2	3	4
Прандтля	$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\nu}{a}$	$\nu$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості, $a$ - коефіцієнт температуропровідності	Відношення потоку імпульсу до потоку теплоти у рухомому середовищі
Грасгофа	$Gr = \frac{gl^3 \beta \Delta T}{\nu^2}$	$g$ - прискорення вільного падіння, $l$ - характерний розмір тіла, $\beta$ - коефіцієнт об'ємного розширення, $\Delta T$ - перепад температур, $\nu$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості	Відношення сили Архімеда до сил тертя у вільному конвекційному потоці рідини
Кірпичьова	$Ki = \frac{j_T l}{\lambda T}$	$j_T$ - густина зовнішнього потоку теплоти, $\lambda$ - коефіцієнт теплопровідності тіла, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення зовнішнього теплового потоку до потоку за рахунок теплопровідності у твердому тілі

## 4.2. Моделювання динаміки нагрівання та охолодження

Моделювання динаміки теплообміну дає можливість знаходити нестационарні, або стаціонарні поля температур за об'ємом тіла. Це дозволяє оцінювати не тільки час завершення відповідної технологічної операції, але й дозволяє контролювати якість продукції частіше всього за значеннями температури у центрі тіла або на його поверхні. Задачі динаміки нагрівання або охолодження аналітично вивіщується для тіл найпростішої форми: пластина, циліндр, сфера. Нижче наведено рішення рівняння Фур'є-Кіргофа у випадку відсутності внутрішніх джерел теплоти за умов симетричного конвекційного теплообміну з поверхні тіла.



$$\theta(\xi, Fo) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2W_{\Gamma}(\mu_i, \xi)}{\mu_i V_{\Gamma}(\mu_i)} \frac{Bi^2}{\mu_i^2 + Bi^2 + (2-\Gamma)Bi} e^{-\mu_i^2 Fo}, \quad (4.10)$$

де  $\xi=r/R$  - безрозмірна координата;  $\theta$  - безрозмірна температура

$$\theta = \frac{T - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}},$$

$T_0$  - початкова температура тіла;  $T_{\infty}$  - температура навколишнього середовища;  $R$  - характерний розмір тіла;  $Fo$  - число Фур'є;  $Bi$  - критерій Біо;  $\Gamma$  - коефіцієнт форми тіла:

для нескінченної пластини  $\Gamma = 1$ , ( $-R \leq r \leq R$ )

$$W_1(\mu_i, \xi) = \cos(\mu_i \xi), \quad V_1(\mu_i) = \sin(\mu_i);$$

для нескінченного циліндру  $\Gamma = 2$ , ( $0 \leq r \leq R$ )

$$W_2(\mu_i, \xi) = J_0(\mu_i \xi), \quad V_2(\mu_i) = J_1(\mu_i);$$

для кулі  $\Gamma = 3$ , ( $0 \leq r \leq R$ )

$$W_3(\mu_i, \xi) = \frac{\sin(\mu_i \xi)}{\xi}, \quad V_3(\mu_i, \xi) = \frac{\sin(\mu_i) - \mu_i \cos(\mu_i)}{\mu_i^2},$$

де  $\mu$  - корені характеристичного рівняння:

$$W_{\Gamma}(\mu)/V_{\Gamma}(\mu) = \mu/Bi,$$

де  $J_0, J_1$  - функції Бесселя першого роду нульового та першого порядку.

Наведенні формули дозволяють розраховувати температуру в будь якій точці тілі, в будь який момент часу. Для центра тіла поточна координата дорівнює 0, для поверхні -  $R$ .

Рівняння (4.10) не має аналітичного розв'язання відносно тривалості процесу нагрівання (охолодження) тіла, тому для інженерних розрахунків використовується наближення регулярного режиму згідно якого за умов  $Fo > 0,3$  у формулі (4.10) можна обмежитись тільки першим членом ряду та отримати розв'язання рівняння (4.10) відносно числа Фур'є (безрозмірного часу). Застосування цього рівняння на практиці обмежується не тільки простішою геометрією тіл, а також необхідністю чисельного рішення трансцендентного характеристично-

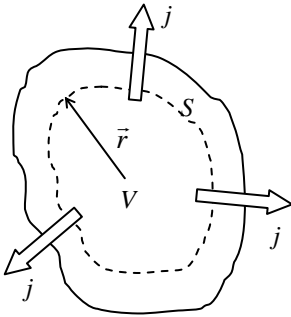


Рис. 4.1. Схема теплових потоків за симетричного теплообміну тіла з навколишнім середовищем

го рівняння, для високоінтенсивних процесів теплообміну з малою тривалістю ( $Fo < 0,3$ ) наближення регулярного режиму може призводити до суттєвих похибок.

Отримаємо наближену модель динаміки теплообміну для випадку симетричного теплового потоку для тіла довільної форми об'ємом  $V_0$  та площею поверхні  $S_0$  яке зображено на рис. 4.1 Для довільного кінцевого об'єму  $V$  всередині тіла для будь якого моменту часу можна записати рівняння збереження та перенесення теплоти у вигляді

$$c\rho \int_V \frac{\partial T(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} dV = \int_S j(\vec{r}, \tau) dS. \quad (4.11)$$

Припустимо, що темп змінювання температури у кожній точці об'єму  $V$  однаковий та дорівнює середньому за об'ємом темпу теплообміну

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial T(\vec{r}, \tau)}{\partial \tau} dV = T'. \quad (4.12)$$

Друге допущення - припустимо, що густина теплового потоку залежить тільки від однієї узагальненої координати  $r=V/S$  та однакова в кожній точці поверхні  $S$ , що оточує об'єм  $V$ . Тоді замість (4.11) маємо

$$c \cdot \rho \cdot T' \cdot V = j(r) \cdot S, \quad (4.13)$$

де,  $j(r) = \frac{1}{S} \int_S j(\vec{r}, \tau) dS$  середній тепловий потік через поверхню  $S$  у

даний момент часу.

З урахуванням закону теплопровідності, а також того, що довільний об'єм тіла та його поверхня пов'язані узагальненою координатою як  $V=r \cdot S$ , отримаємо наступне диференціальне рівняння

$$T' \cdot r = -a \frac{dT}{dr}, \quad (4.14)$$

де  $a = \lambda / c\rho$  – коефіцієнт температуропровідності.

Рішення цього рівняння будемо шукати для різниці температур тіла та навколишнього середовища  $\theta = T - T_\infty$ .

$$T = C - \frac{T' r^2}{a 2}, \quad (4.15)$$

де константу  $C$  визначимо з крайових умов для теплообміну

$$-\lambda \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R_V} = \alpha \cdot (T - T_\infty), \quad (4.16)$$

де  $R_V = V_0 / S_0$  – відношення об'єму тіла до площі його поверхні,  $T_\infty$  – температура навколишнього середовища.

Підставляючи (4.15) у (4.16) знаходимо константу  $C$  та знаходимо розподіл температур за поточною координатою у даний момент часу

$$T = T_\infty + T' \frac{c\rho R_V}{K_r}, \quad (4.17)$$

де  $K_r$  – локальний коефіцієнт теплопередачі для даної точки тілі

$$K_r = \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{2\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right) \right]^{-1}. \quad (4.18)$$

Перепишемо рівняння (4.17), враховуючи що середній темп змінювання температури згідно граничної умови (4.16) має негативний знак  $T' = -\frac{dT}{d\tau}$ , тоді отримуємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{d\tau} = -\frac{K_r}{c\rho R_V} (T - T_\infty). \quad (4.19)$$

Рішення цього рівняння має вигляд

$$T - T_\infty = C_1 \exp\left(-\frac{K_r \cdot \tau}{c\rho R_V}\right), \quad (4.20)$$

де константа  $C_1$  визначається з початкових умов  $T|_{\tau=0} = T_0$ , де  $T_0$  – початкова температура тіла.

Остаточною наближеною моделлю динаміки симетричного теплообміну має наступний вигляд

$$T(r, \tau) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty}) \exp \left[ - \frac{\tau}{c\rho R_V \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right] \right\}} \right], \quad (4.21)$$

або у критеріальному вигляді

$$\frac{T(\xi, Fo) - T_{\infty}}{T_0 - T_{\infty}} = \exp \left[ - \frac{2Fo}{\frac{2}{Bi} + 1 - \xi^2} \right], \quad (4.22)$$

де  $\xi = r/R_V$  - безрозмірна координата.

З рівняння (4.22) випливає розрахункова формула для визначення тривалості теплової обробки до заданої температури в певній точці тіла

$$\tau = c\rho R_V \left\{ \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right] \right\} \cdot \ln \left( \frac{T_1 - T_{\infty}}{T_2 - T_{\infty}} \right), \quad (4.23)$$

де  $T_1, T_2$  - початкова та кінцева температура тіла.

При цьому для центру тіла час визначається за  $r=0$ , для поверхні за  $r=R_V$ .

Отримане співвідношення (4.18) дозволяє записати наступне вираження для локальної густини теплового потоку у даній точці тіла за умов симетричного теплообміну

$$j^d = K_r S (T - T_{\infty}) = \frac{S}{\frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{2\lambda} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_V} \right)^2 \right)} (T - T_{\infty}). \quad (4.24)$$

### 4.3. Методи моделювання теплообмінників

У харчовій промисловості широко застосовуються різні теплообмінні апарати, які класифікуються за принципом дії на рекуперативні, регенеративні, та змішувальні. У рекуперативних гарячий та холодний теплоносії розділені стінкою. У регенеративних одна та ж поверхня поперемінно омивається то гарячим то холодним теплоносієм. У змішувальних теплообмінниках теплопередача відбувається за рахунок безпосереднього змішування гарячого та холодного теплоносія.

Для моделювання теплообмінників використовують моделі як із зосередженими параметрами, так і з розподіленими параметрами. В першому випадку описують змінювання середньої температури теплоносіїв з часом, у другому випадку змінювання температури теплоносіїв з часом та за координатами. У першому випадку математична модель описується звичайними диференціальними рівняннями, у другому диференціальними рівняннями у часткових похідних.

Межею використання моделі із зосередженими параметрами є умова

$$\frac{t_1^e - t_2^e}{t_2^x - t_1^x} \leq 2, \quad (4.25)$$

$t_1^e, t_2^e$  - температури гарячого теплоносія на вході та виході теплообмінника,  $t_1^x, t_2^x$  - температури холодного теплоносія на вході та виході теплообмінника.

#### 4.3.1. Модель рекуперативного теплообмінника з зосередженими параметрами

Отримаємо модель рекуперативного теплообмінного апарату з зосередженими параметрами. В рамках цієї моделі представимо теплообмінний апарат як дві ємності, які одночасно заповнюються холодним та гарячим теплоносієм, рис. 4.3.. Теплообмін між ними відбувається через стінку теплообмінного апарату. Втратами теплоти в оточуюче середовище знехтуємо. На основі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) у відсутності внутрішніх джерел теплоти, та конвекційного перенесення між теплоносіями можна записати наступні кінетичні рівняння. Для гарячого теплоносія

$$c_2 \rho_2 V_2 \frac{dt^2}{d\tau} = -\alpha_2 S_2 (t^2 - t^c). \quad (4.26)$$

Для холодного теплоносія

$$c_x \rho_x V_x \frac{dt^x}{d\tau} = \alpha_x S_x (t^c - t^x); \quad (4.27)$$

Для стінки теплообмінника, яка розділяє холодний та гарячий теплоносії

$$c_c \rho_c V_c \frac{dt^c}{d\tau} = \alpha_2 S_2 (t^2 - t^c) - \alpha_x S_x (t^c - t^x); \quad (4.28)$$

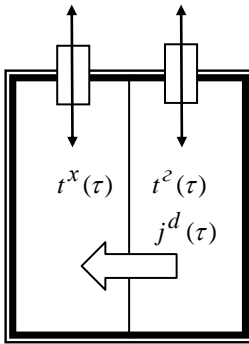


Рис. 4.3. Модель рекуперативного теплообмінника з зосередженими параметрами

З урахуванням (4.26) - (4.27) замість (4.28) маємо

$$c_c \rho_c V_c \frac{dt^c}{d\tau} = c_2 \rho_2 V_2 \frac{dt^2}{d\tau} - c_x \rho_x V_x \frac{dt^x}{d\tau}. \quad (4.29)$$

Виконав інтегрування лівої та правої частини (4.29), отримуємо

$$t_c = \frac{c_2 \rho_2 V_2}{c_c \rho_c V_c} t^2 - \frac{c_x \rho_x V_x}{c_c \rho_c V_c} t^x. \quad (4.30)$$

де  $c$  — питома теплоємність, Дж/кг·К;  $\rho$  — густина, кг/м<sup>3</sup>;  $V$  — об'єм, м<sup>3</sup>;  $\alpha$  — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $S$  — площа теплообміну, м<sup>2</sup>. Індокси означають:  $2$  — гарячий теплоносій,  $x$  — холодний теплоносій,  $c$  — стінка теплообмінника.

Невідомими в системі рівнянь (4.26)-(4.28) є температури теплоносіїв  $t^2(\tau)$ ,  $t^x(\tau)$  та температура теплообмінної стінки  $t^c(\tau)$ . Зменшимо число невідомих у системі рівнянь, вилучивши

Замінюючи у рівняннях (4.26), (4.27) температуру стінки на вираження (4.30) отримуємо систему двох диференціальних рівнянь

$$\frac{dt^2}{d\tau} = -K_2(1-a_2)t^2 + K_2a_x t^x; \quad (4.31)$$

$$\frac{dt^x}{d\tau} = -K_x(1-a_x)t^x + K_xa_2t^2, \quad (4.32)$$

де уведено наступні позначення

$$K_2 = \frac{\alpha_2 S_2}{c_2 \rho_2 V_2}; \quad K_x = \frac{\alpha_x S_x}{c_x \rho_x V_x};$$

$$a_2 = \frac{c_2 \rho_2 V_2}{c_c \rho_c V_c}; \quad a_x = \frac{c_x \rho_x V_x}{c_c \rho_c V_c}$$

Далі виключимо з системи рівнянь (4.31) - (4.32) температуру холодного теплоносія. Для цього знайдемо  $t^x$  з рівняння (4.31)

$$t^x = \frac{1}{K_2 a_x} \left( -K_2(1-a_2)t^2 - \frac{dt^2}{d\tau} \right). \quad (4.33)$$

Виконаємо диференціювання рівняння (4.31)

$$\frac{d^2 t^2}{d\tau^2} = -K_2(1-a_2) \frac{dt^2}{d\tau} + K_2 a_x \frac{dt^x}{d\tau}. \quad (4.34)$$

Замінімо у (4.34) похідну від  $t^x$  на її вираження у (4.32)

$$\frac{d^2 t^2}{d\tau^2} = -K_2(1-a_2) \frac{dt^2}{d\tau} + K_2 a_x \left[ -K_x(1-a_x)t^x + K_x a_2 t^2 \right], \quad (4.35)$$

а в останньому рівнянні замінімо  $t^x$  згідно (4.33). Тоді отримаємо диференціальне рівняння відносно температури гарячого теплоносія

$$\frac{d^2 t^2}{d\tau^2} + 2\beta \cdot \frac{dt^2}{d\tau} + \omega^2 \cdot t^2 = 0, \quad (4.36)$$

де

$$\beta = \frac{1}{2} [K_z(a_z - 1) + K_x(a_x - 1)], \quad (4.37)$$

$$\omega = \sqrt{K_z K_x (a_z + a_x - 1)}. \quad (4.38)$$

Рішення диференційного рівняння (4.44) має наступний вигляд

$$t^z = C_1^z \cdot e^{-k_1 \tau} + C_2^z \cdot e^{-k_2 \tau}, \quad (4.39)$$

де введені позначення

$$k_1 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}, \quad k_2 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2},$$

а сталі  $C_1^z, C_2^z$  визначаються з початкових умов

$$t^z \Big|_{\tau=0} = t_1^z; \quad \frac{dt^z}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = K_z(a_z - 1)t_1^z + K_x a_x t_1^x, \quad (4.40)$$

де  $t_1^z, t_1^x$  - температура гарячого та холодного теплоносія на вході у теплообмінник відповідно.

Підставив у рівняння (4.40) рівняння (4.39) отримуємо значення невідомих сталих

$$C_1^z = -\frac{K_z(a_z - 1) + k_2}{k_1 - k_2} t_1^z - \frac{K_x a_x}{k_1 - k_2} t_1^x, \quad (4.41)$$

$$C_2^z = \frac{K_z(a_z - 1) + k_1}{k_1 - k_2} t_1^z + \frac{K_x a_x}{k_1 - k_2} t_1^x. \quad (4.42)$$

Аналогічним шляхом можна отримати рішення для кінетики температури холодного теплоносія у теплообміннику

$$t^x = C_1^x \cdot e^{-k_1 \tau} + C_2^x \cdot e^{-k_2 \tau}, \quad (4.43)$$

де сталі  $C_1^x, C_2^x$  мають наступні значення

$$C_1^x = -\frac{K_x(a_x - 1) + k_2}{k_1 - k_2} t_1^x - \frac{K_x a_z}{k_1 - k_2} t_1^z, \quad (4.44)$$



$$C_2^x = \frac{K_x(a_x - 1) + k_1}{k_1 - k_2} t_1^x + \frac{K_x a_2}{k_1 - k_2} t_1^c. \quad (4.45)$$

Таким чином отримані рівняння (4.39) та (4.43) описують кінетику змінювання температури гарячого та холодного теплоносіїв у рекуперативному теплообміннику. Щоб перейти від моделі теплообмінника періодичної дії, до проточного теплообмінника, позбавимося в отриманих рівняннях часу. Час перебування теплоносія у теплообміннику  $\tau = l/v$ , де  $v$  – швидкість руху відповідного теплоносія,  $l$  – довжина труб для відповідного теплоносія. Таким чином температури на виході теплообмінника залежать від довжини труб та швидкості руху теплоносія в них.

Отриману модель можна значно спростити, якщо вважати температуру стінки теплообмінника сталою. Це виправдано якщо виконується умова  $c_c \rho_c V_c \ll c_2 \rho_2 V_2$ ,  $c_c \rho_c V_c \ll c_x \rho_x V_x$ , тобто теплоємність стінки набагато менша за теплоємність теплоносіїв. В цьому разі маємо

$$\alpha_2 S_2 (t_1^c - t^c) - \alpha_x S_x (t^c - t_1^x) = 0. \quad (4.46)$$

Звідки середня температура стінки

$$\bar{t}^c = \frac{\alpha_2 S_2 t_1^c + \alpha_x S_x t_1^x}{\alpha_2 S_2 + \alpha_x S_x}. \quad (4.47)$$

Тоді замість системи рівнянь (4.26)- (4.28) маємо наступну систему

$$\frac{dt^c}{d\tau} = -\frac{\alpha_2 S_2}{c_2 \rho_2 V_2} (t^c - \bar{t}^c); \quad (4.48)$$

$$\frac{dt^x}{d\tau} = \frac{\alpha_x S_x}{c_x \rho_x V_x} (t^c - \bar{t}^x). \quad (4.49)$$

Рішення цих диференціальних рівнянь за початкових умов

$t^c \Big|_{\tau=0} = t_1^c$ ,  $t^x \Big|_{\tau=0} = t_1^x$  має наступний вигляд

$$t^c = \bar{t}^c + (t_1^c - \bar{t}^c) \cdot e^{-\frac{\alpha_2 S_2}{c_2 \rho_2 V_2} \tau}; \quad (4.50)$$

$$t^x = \bar{t}^c - (\bar{t}^c - t_1^x) \cdot e^{-\frac{\alpha_x S_x}{c_x \rho_x V_x} \tau} \quad (4.51)$$

Враховуючи те що  $S = \pi dl$  - площа поверхні труби,  $V = \pi d^2 l / 4$  об'єм труби ( $d$  – діаметр труби),  $v = l / \tau$  - швидкість теплоносія у трубі, замість останніх двох рівнянь можна записати

$$t_2^c = \bar{t}^c + (t_1^c - \bar{t}^c) \cdot e^{-\frac{4\alpha_c l_c}{c_c \rho_c d_c v_c}} \quad (4.52)$$

$$t_2^x = \bar{t}^c - (\bar{t}^c - t_1^x) \cdot e^{-\frac{4\alpha_x l_x}{c_x \rho_x d_x v_x}} \quad (4.53)$$

де  $t_2^c, t_2^x$  - температури теплоносіїв на виході теплообмінника,  $t_1^c, t_1^x$  - температури холодного теплоносіїв на вході теплообмінника.

Для розрахунку за цими формулами треба знати коефіцієнт тепловіддачі. Як відомо, коефіцієнт тепловіддачі за ламінарного режиму течії рідини в трубах, якщо відношення довжини труби  $l$  до її діаметра  $d$ ,  $l/d > 10$  та  $Re_p > 10$ , визначається з формули

$$Nu_p = 1,4 \left( Re_p \frac{d}{l} \right)^{0,4} Pr_p^{0,33} \left( \frac{Pr_p}{Pr_c} \right)^{0,25} \quad (4.54)$$

де

$$Nu_p = \frac{\alpha d}{\lambda_p}, \quad Re_p = \frac{vd}{\nu_p}, \quad Pr_p = \frac{\nu_p}{a_p}, \quad Pr_c = \frac{\nu_c}{a_c}.$$

Індекси "p" і "c" означають, що фізичні властивості вибираються за середньою температурою рідини і стінки відповідно.

За турбулентного режиму течії коефіцієнт тепловіддачі визначається з формули

$$Nu_p = 0,21 (Re_p)^{0,8} Pr_p^{0,43} \left( \frac{Pr_p}{Pr_c} \right)^{0,25} \cdot \varepsilon_l \quad (4.55)$$

За визначальну температуру тут прийнята середня температура рідини  $T_p$ , а за визначальний розмір — еквівалентний діаметр  $d_e =$

$2p/S$  ( $p$ - периметр труби,  $S$ - площа перерізу труби, для труб круглого перетину еквівалентний діаметр дорівнює геометричному). Коefіцієнт  $\varepsilon_l$  враховує зміну коefіцієнта тепловіддачі уздовж довжини труби (якщо  $l/d > 50$ , то  $\varepsilon_l = 1$ ).

#### 4.3.2. Модель рекуперативного теплообмінника з розподіленими параметрами

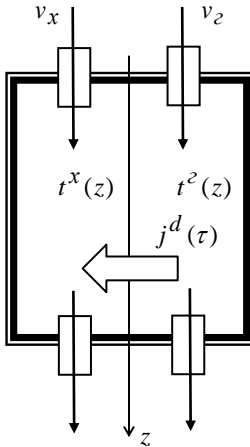


Рис. 4.4. Модель рекуперативного теплообмінника з розподіленими параметрами

Будемо вважати, що теплообмінний апарата працює безперервно у сталому режимі. Змінювання температури теплоносіїв відбувається тільки вздовж однієї координати  $z$ , яка спрямована за віссю труби. У потоці теплоносія теплота переноситься конвективно, а теплопередача відбувається крізь стінку трубопроводу шляхом теплопровідності, рис. 4.4. Тоді з рівняння кінетики теплопередачі (4.7) у відсутності внутрішніх джерел теплоти, та у стаціонарному стані ( $dt/d\tau=0$ ) можна записати наступні кінетичні рівняння.

$$\alpha_2 dS_2 (t^2 - t^c) + c_2 \rho_2 v_2 S_2^v dt^2 = 0, \quad (4.56)$$

$$\alpha_x dS_x (t^c - t^x) - c_x \rho_x v_x S_x^v dt^x = 0, \quad (4.57)$$

де  $dS$  – елемент бокової поверхні труби,  $S^v$  - площа перерізу труби,  $v$  - швидкість теплоносія у трубі.

Враховуючи, що елемент бокової поверхні можна записати наступним чином  $dS = l^P dz$ , де  $l^P$  - периметр труби, то замість (4.56) -(4.57) отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dt^c}{dz} + \frac{\alpha_z l_z^p}{c_z \rho_z v_z S_z^v} (t^c - \bar{t}^c) = 0; \quad (4.58)$$

$$\frac{dt^x}{dz} + \frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x v_x S_x^v} (t^x - \bar{t}^c) = 0. \quad (4.59)$$

Для спрощення моделі будемо вважати, як у попередньому прикладі, температуру стінки теплообмінника сталою  $t^c = \bar{t}^c$ , згідно з (4.47). Тоді отримані рівняння за крайових умов  $t^c \Big|_{z=0} = t_1^c$ ,  $t^x \Big|_{z=0} = t_1^x$  мають наступне рішення

$$t^c(z) = \bar{t}^c + (t_1^c - \bar{t}^c) \cdot e^{-\frac{\alpha_z l_z^p}{c_z \rho_z L_z} z}; \quad (4.60)$$

$$t^x(z) = \bar{t}^c - (\bar{t}^c - t_1^x) \cdot e^{-\frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x} z}, \quad (4.61)$$

де  $L_{z,x} = S_{z,x}^v \cdot v_{z,x}$  - об'ємна витрата теплоносія у трубі.

Рівняння (4.60), (4.61) дозволяють розраховувати температуру теплоносія за довжиною труби, тобто можуть бути застосовані для розрахунку геометричних розмірів теплообмінного апарату.

**Приклад.** Знайти розрахункову формулу для визначення довжини труби рекуперативного теплообмінника з короткими трубами, вважаючи що виконуються умови  $\frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x} z \ll 1$ ,  $\frac{\alpha_z l_z^p}{c_z \rho_z L_z} z \ll 1$ . Температури на вході та виході з труби вважати відомими.

**Розв'язання.** З рівнянь (4.60), (4.61) за зазначених умов отримуємо наближенні рівняння, розкладаючи у ряд експоненту за малим параметром та нехтуючи членами ряду вищого порядку

$$t_2^c = \bar{t}^c + (t_1^c - \bar{t}^c) \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_2 l_2^p}{c_2 \rho_2 L_2} z \right);$$

$$t_2^x = \bar{t}^c - (\bar{t}^c - t_1^x) \cdot \left( 1 - \frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x} z \right),$$

де індексом „2” позначена температура теплоносія на виході з труби.

Виключимо з останніх рівнянь невідому температури стінки труби та отримуємо наступне рівняння

$$\frac{t_2^c + t_1^c \left( \frac{\alpha_2 l_2^p}{c_2 \rho_2 L_2} z - 1 \right)}{\frac{\alpha_2 l_2^p}{c_2 \rho_2 L_2}} = \frac{t_2^x + t_1^x \left( \frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x} z - 1 \right)}{\frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x}}.$$

Розв’язуючи це рівняння відносно  $z$  отримуємо розрахункову формулу для визначення довжини труби рекуперативного теплообмінника

$$z = \frac{t_1^c - t_2^c}{\left( t_1^c - t_1^x \right) \frac{\alpha_2 l_2^p}{c_2 \rho_2 L_2}} + \frac{t_2^x - t_1^x}{\left( t_1^c - t_1^x \right) \frac{\alpha_x l_x^p}{c_x \rho_x L_x}}.$$

#### 4.3.3. Модель змішувального теплообмінника

Для моделювання теплообміну у змішувальному теплообмінному апараті скористуємося моделлю з зосередженими параметрами. Будемо вважати що у змішувальну камеру поступають два теплоносія які утворюють суміш з заданою температурою. Теплота вноситься та виводиться з теплообмінника за рахунок конвекційного перемішування теплоносіїв, а також втрачається через стінки теплообмінника в оточуюче середовище, рис. 4.5.. На підставі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) у відсутності внутрішніх джерел теплоти можна записати наступне кінетичне рівняння

$$c\rho V \frac{dT}{d\tau} = c_2\rho_2 L_2 T_2 + c_x\rho_x L_x T_x - c\rho L T - kS(T - T_\infty), \quad (4.62)$$

де  $T$  - температура суміші теплоносіїв, К;  $T_2$  - температура гарячого теплоносія, К;  $T_x$  - температура холодного теплоносія, К;  $T_\infty$  - температура оточуючого середовища, К;  $c$  - питома теплоємність суміші, Дж/кг·К;  $\rho$  - густина суміші, кг/м<sup>3</sup>;  $V$  - об'єм суміші, м<sup>3</sup>;  $k$  - коефіцієнт теплопередачі з оточуючим середовищем, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $S$  - площа теплообміну, м<sup>2</sup>.

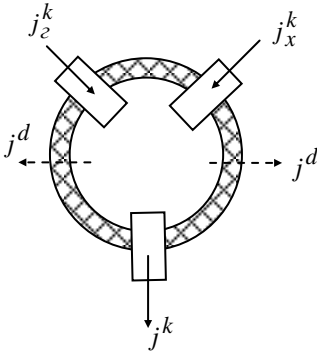


Рис. 4.5. Модель змішувального теплообмінника з зосередженими параметрами

Враховемо, що між фізичними характеристиками суміші та теплоносіїв існують наступні співвідношення:

$$c\rho = c_2\rho_2 + c_x\rho_x,$$

$$\rho = \rho_2 + \rho_x,$$

$$L\rho = L_2\rho_2 + L_x\rho_x$$

Звідки отримуємо

$$c = \frac{c_2\rho_2 + c_x\rho_x}{\rho_2 + \rho_x}, \quad L = \frac{L_2\rho_2 + L_x\rho_x}{\rho_2 + \rho_x}. \quad (4.63)$$

Диференціальне рівняння (4.62) можна записати у наступному вигляді

$$\frac{d\theta}{d\tau} + \left( \frac{L}{V} + \frac{kS}{c\rho V} \right) \theta = 0, \quad (4.64)$$

$$\text{де } \theta = T - T_{\max}, \quad T_{\max} = \frac{c_2\rho_2 L_2 T_2 + c_x\rho_x L_x T_x + kST_\infty}{c\rho L + kS}.$$

Температура  $T_{\max}$  має сенс максимальної температури суміші на виході із теплообмінника.

Рішення рівняння (4.64) має вигляд

$$\theta = C \cdot e^{-\left( \frac{L}{V} + \frac{kS}{c\rho V} \right) \tau}. \quad (4.65)$$

Сталу  $C$  визначимо з початкових умов, вважаючи, що втрати теплоти у цей момент можна знехтувати

$$\left. \frac{d\theta}{d\tau} \right|_{\tau=0} = c_2 \rho_2 L_2 T_2 + c_x \rho_x L_x T_x, \quad (4.66)$$

Підставив (4.65) у (4.66) отримуємо значення сталої  $C$  та запишемо остаточний результат моделі теплообміну у змішувальному теплообмінному апараті

$$T = T_{\max} - \frac{c_2 \rho_2 L_2 T_2 + c_x \rho_x L_x T_x}{c \rho L + kS} \cdot e^{-\left(\frac{L}{V} + \frac{kS}{c \rho V}\right) \tau}. \quad (4.67)$$

Час перебування суміші у теплообміннику дорівнює  $\tau = V/L$ , з урахуванням цього температура на виході з теплообмінного апарату дорівнює

$$T_2 = T_{\max} - \frac{c_2 \rho_2 L_2 T_2 + c_x \rho_x L_x T_x}{c \rho L + kS} \cdot e^{-\left(1 + \frac{kS}{c \rho L}\right)}. \quad (4.68)$$

Формула (4.69) дозволяє за відомими параметрами теплоносіїв на вході та виході теплообмінника розраховувати його геометричні розміри.

Для розрахунків за цією формулою коефіцієнт теплопередачі має наступний вигляд

$$k = \left( \frac{1}{\alpha_p} + \frac{\delta_c}{\lambda_c} + \frac{1}{\alpha_n} \right)^{-1}, \quad (4.69)$$

де  $\alpha_p$  - коефіцієнт тепловіддачі рідини до корпусу теплообмінного апарата, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $\alpha_n$  - коефіцієнт тепловіддачі повітря з зовнішньої поверхні теплообмінного апарата, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $\delta_c$  - товщина теплоізоляції стінки корпусу апарата, м;  $\lambda_c$  - теплопровідність теплоізоляційного матеріалу, Вт/м·К.

При цьому коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_p$  розраховується за формулами (4.54) або (4.55), а коефіцієнт тепловіддачі у зовнішнє середовище  $\alpha_n$  знаходиться з формули для тепловіддачі зі вільного руху рідини з ламінарним граничним шаром у поверхні ( $5 \cdot 10^2 < Gr \cdot Pr < 2 \cdot 10^7$ )

$$\text{Nu} = 0,54(\text{Gr} \cdot \text{Pr})^{0,25}, \quad (4.70)$$

де фізичні константи у критеріях беруться за середньої температури, теплообмінна поверхня – оточуюче середовище.

#### 4.4.. Моделювання процесу варення

Характерним для процесу варення у киплячій рідині у варильних апаратах періодичної дії є наявність трьох характерних етапів (рис.4.6). На першому при завантаженні продукту температура рідини миттєво зменшується, на другому етапі відбувається нагрівання рідини

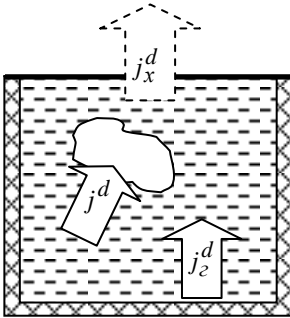


Рис. 4.6. Схема теплових потоків у процесі варення продукту

до температури кипіння та одночасно починається прогрівання продукту, на третьому етапі відбувається процес варення продукту до досягнення потрібної температури у центрі продукту. Таким чином загальна тривалість процесу варення складається з тривалості першого та другого етапів.

Для рішення задачі скористаємося комбінованою моделлю. Для рідини-теплоносія у апарата моделлю з зосередженими параметрами, а для продукту моделлю з розподіленими параметрами на підставі рівняння для локальної густини теплового потоку за умов симетричного теплообміну (4.18).

Згідно схеми теплових потоків, наведеної на рис. 4.7, можна на підставі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) записати наступні кінетичні рівняння. Для рідини - теплоносія

$$c_p m_p \frac{dT^P}{d\tau} = \alpha_2 S_2 (T^e - T^P) - k_x S_x (T^P - T_\infty) - I \cdot V, \quad (4.71)$$

де  $c_p$  – питома теплоємність теплоносія, Дж/кг·К;  $m_p$  - маса теплоносія апараті, кг;  $V$  – об'єм, м<sup>3</sup>;  $\alpha_2$  - коефіцієнт тепловіддачі від поверхні нагріву теплоносія, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $k_x$  - коефіцієнт теплопередачі у оточуюче середовище, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $S_2$ - площа поверхні нагріву для теплоносія, м<sup>2</sup>,  $S_x$  - площа поверхні тепловтрат для теплоносія, м<sup>2</sup>,  $T^P$  - температура те-



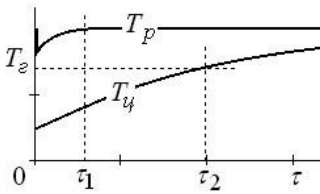


Рис. 4.7. Кінетика температур у процесі варення.  $T_p$  - температура рідини,  $T_c$  - температура центру продукту,  $T_z$  - температура готовності продукту.

плоносія, К;  $T^2$  - температура поверхні нагріву, К;  $T_\infty$  - температура оточуючого середовища, К;  $I$  - об'ємна потужність втрат теплоти у продукті об'ємом  $V$ . Індекси означають:  $z$  - гарячий теплоносіє,  $x$  - холодний теплоносіє,  $c$  - стінка теплообмінника.

Для продукту

$$cm \frac{dT}{d\tau} = K_r S (T^p - T); \quad (4.72)$$

$$I \cdot V = cm \frac{dT}{d\tau},$$

де  $c$  - питома теплоємність продукту, Дж/кг·К;  $m_p$  - маса продукту, кг;  $K_r$  - локальний коефіцієнт теплопередачі для продукту (4.18), Вт/м<sup>2</sup>·К;  $S_z$  - площа поверхні продукту, м<sup>2</sup>,  $T_p$  - температура продукту, К.

Систему рівнянь (4.71), (4.72) можна розв'язати методом, що описаний у розділі 4.3.1. Отримаємо наближене рішення системи, вважаючи, що тривалість першого та другого етапів мала у порівнянні з третім етапом.

Розрахуємо тривалість першого етапу варення. По перше, знайдемо температуру до якої остиває рідина після завантаження продукту у апарат. Оскільки цей процес відбувається миттєво, то внутрішня енергія системи рідина продукт не змінюється. Тоді маємо

$$c_p m_p T_k^p = c_p m_p T_1^p + cm T_0, \quad (4.73)$$

де  $T_k^p$  - температура кипіння рідини,  $T_1^p$  - температура до якої остиває рідина,  $T_0$  - початкова температура продукту.

Звідки

$$T_1^p = T_k^p - \frac{cm}{c_p m_p} T_0, \quad (4.74)$$

Якщо відновлення температури рідини відбувається достатньо швидко, тоді розкладаючи її у ряд та відкидаючи члени вищих порядків маємо

$$T^P = T_1^P + T_p' \cdot \tau, \quad (4.75)$$

де темп нагрівання теплоносія  $T_p' = \left. \frac{dT^P}{d\tau} \right|_{\tau=0}$  у початковий момент часу згідно (4.71) та (4.72) визначається з наступного рівняння

$$T_p' = \frac{\alpha_z S_z (T^e - T_1^P) - k_x S_x (T_1^P - T_\infty) - \alpha S (T_1^P - T_0)}{c_p m_p}, \quad (4.76)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі від теплоносія до поверхні продукту, який на цьому етапі визначається за формулою для випадку вільної конвекції (4.70).

Таким чином тривалість нагрівання теплоносія до температури кипіння з урахуванням (4.75), (4.76) становить

$$\tau_1 = \frac{c_p m_p (T_k^P - T_1^P)}{\alpha_z S_z (T^e - T_1^P) - k_x S_x (T_1^P - T_\infty) - \alpha S (T_1^P - T_0)}. \quad (4.77)$$

На цьому етапі температура продукту змінюється не значно. Тому аналогічно рівнянню (4.75) можна записати

$$T = T_0 + T' \cdot \tau, \quad (4.78)$$

де темп нагрівання продукту  $T' = \left. \frac{dT}{d\tau} \right|_{\tau=0}$  у початковий момент часу згідно (4.72) становить

$$T' = \frac{K_r S (T^P - T_0)}{cm}, \quad (4.79)$$

або з урахуванням (4.75)

$$T' = \frac{K_r S (T_1^P + T_p' \cdot \tau - T_0)}{cm}, \quad (4.80)$$

Відповідно температура продукту наприкінці другого етапу становить

$$T_1 = T_0 + \frac{K_r S (T_1^P + T_p' \tau_1 - T_0)}{cm} \cdot \tau_1, \quad (4.81)$$

На третьому етапі продукт нагрівається від теплоносія, що кипить то температури готовності. Рівняння кінетики цього етапу має наступний вигляд

$$cm \frac{dT}{d\tau} = K_r S (T_k^P - T). \quad (4.82)$$

Рішення цього рівняння за початкової умови  $T|_{\tau=0} = T_1$  має наступний вигляд

$$T = T_k^P - (T_k^P - T_1) \cdot e^{-\frac{K_r S}{cm} \tau}. \quad (4.83)$$

З урахуванням формули (4.18) для локального коефіцієнту теплопередачі  $K_r$ , у центрі продукту температура змінюється за наступним законом

$$T(\tau, 0) = T_k^P - (T_k^P - T_1(0)) \cdot e^{-\frac{K_r(0)S}{cm} \tau}, \quad (4.84)$$

де

$$K_r(0) = \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{2\lambda} \right]^{-1};$$

$$T_1(0) = T_0 + \frac{K_r(0) \cdot S (T_1^P + T_p' \tau_1 - T_0)}{cm} \cdot \tau_1.$$

Якщо позначити температуру готовності у центрі продукту  $T_u$  то тривалість третього етапу визначається з рівняння (4.84) наступним чином

$$\tau_2 = \frac{cm}{K_r(0)S} \ln \left( \frac{T_k^P - T_1(0)}{T_k^P - T_u} \right) \quad (4.85)$$

Загальна тривалість процесу варення складає  $\tau = \tau_1 + \tau_2$ .

#### 4.5. Моделювання процесу жарення

Як відомо, особливістю процесу жарення являється створення умов за яких на поверхні продукту утворюється скоринка викликана реакцією мелаїдиноутворення. Існують два способи жарення – основний та жарення у фритюрі. Отримаємо модель кінетики теплообміну для цих способів жарення.

За основного способу жарення продукт жариться у відносно невеликій кількості жиру за температур 150..190 °С. Одна поверхня продукту контактує через шар жиру з нагрітою поверхнею апарату, а друга вільна поверхня відає теплоту у навколишнє середовище. Будемо вважати, що теплофізичні характеристики продукту не змінюються з температурою. Втрати вологи на випаровування знехтуємо, бо кипіння рідини відбувається тільки у тонкому шарі продукту, який контактує з поверхнею, що гріє. Враховуючи цю фізичну модель, на підставі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) у відсутності внутрішніх джерел теплоти запишімо

$$cm \frac{dT}{d\tau} = k_2 S_2 (T_2 - T) - k_1 S_1 (T - T_1), \quad (4.86)$$

де  $c$  – питома теплоємність продукту, Дж/кг·К;  $m$  – маса продукту, кг;  $k_2$  – коефіцієнт теплопередачі від жиру до продукту, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $k_1$  – коефіцієнт теплопередачі від продукту у оточуюче середовище, Вт/м<sup>2</sup>·К;  $S_2$  – площа контактної поверхні продукту, м<sup>2</sup>,  $S_1$  – площа вільної поверхні продукту, м<sup>2</sup>,  $T$  – середня температура продукту, К;  $T_2$  – температура жиру, К;  $T_1$  – температура оточуючого середовища, К.

$$k_2 = \left( \frac{1}{\alpha_2} + \frac{R_2}{\lambda} \right)^{-1}; \quad (4.87) \quad k_1 = \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{R_1}{\lambda} \right)^{-1}, \quad (4.88)$$

де  $\alpha_2$  – коефіцієнт тепловіддачі від жиру до поверхні продукту, Вт/м<sup>2</sup>·К,  $\alpha_1$  – коефіцієнт тепловіддачі від вільної поверхні продукту до оточуючого середовища, Вт/м<sup>2</sup>·К,  $R_{1,2} = V/S_{1,2}$  – відношення об'єму тіла до відповідної площі поверхні, м;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності продукту, Вт/м·К.

Запишемо рівняння (4.86) у вигляді диференційного рівняння відносно безрозмірної температури  $\theta = T/T_2$

$$-\frac{1}{K} \frac{d\theta}{d\tau} = \theta_{\max} - \theta, \quad (4.89)$$

де

$$K = \frac{\lambda}{cm} \left( \frac{\alpha_1 S_1}{\lambda + \alpha_1 R_1} + \frac{\alpha_2 S_2}{\lambda + \alpha_2 R_2} \right);$$

$$\theta_{\max} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_1 S_1}{\alpha_2 S_2} \frac{\lambda + \alpha_2 R_2}{\lambda + \alpha_1 R_1}} + \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2 S_2}{\alpha_1 S_1} \frac{\lambda + \alpha_1 R_1}{\lambda + \alpha_2 R_2}} \frac{T_1}{T_2}$$

Рішення диференційного рівняння (4.89) за початковою умовою  $\theta(0) = T_0/T_2$ , де  $T_0$  - початкова температура продукту має наступний вигляд

$$\theta = \theta_{\max} - (\theta_{\max} - \theta(0)) \cdot e^{-K \cdot \tau}. \quad (4.90)$$

Отримане рівняння описує кінетику змінювання середньої температури продукту під час жарення. Тривалість процесу  $\tau_{20m}$  до досягнення заданої середньої температури виробу знаходиться з (4.90)

$$\tau_{20m} = \frac{1}{K} \ln \left( \frac{\theta_{\max} - \theta(0)}{\theta_{\max} - \theta_{20m}} \right), \quad (4.91)$$

де  $\theta_{20m} = T_{20m}/T_2$  - безрозмірна температура готовності продукту.

При другому способі - жарення у фритюрі - продукт повністю занурюється у киплячий жир, внаслідок значного коефіцієнту теплообміну в продукті виникає зона кипіння вологи, яка поступово поширюється від його поверхні до центру. При цьому можна вважати що практично вся теплота, що підводиться до продукту витрачається саме на випаровування вологи, а його температура з часом не змінюється: На поверхні продукту температура визначається процесом теплообміну, а у внутрішніх шарах вона дорівнює температурі кипіння води. Процес жарення у фритюрі закінчується тоді, коли зона кипіння досягає центру продукту. При подальшому перебуванні продукту у фритюрі його температура буде поступово підвищуватися до температури фритюру.

На підставі описаної фізичної моделі складемо математичну модель кінетики жарення у фритюрі. На підставі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) запишімо

$$cm \frac{dT}{d\tau} = j \cdot S - r_w \frac{dm_w}{d\tau}, \quad (4.92)$$

$j$  – густина теплового потоку через поверхню продукту  $S$ , Вт;  $r_w$  – питома теплота пароутворення, Дж/кг;  $m$  – маса продукту, кг;  $m_w$  – маса вологи, що випаровується, кг.

Знак мінус указує на дію внутрішнього стоку енергії, яка витрачається на пароутворення.

Оскільки температура з часом не змінюється, то з урахуванням рівняння теплопровідності (4.4) у одновимірному наближенні рівняння теплоперенесення (4.93) набуває наступного вигляду

$$\lambda \frac{dT}{dr} S = -r_w \frac{dm_w}{d\tau}, \quad (4.93)$$

Маса вологи, що випаровується у нескінченно тонкому шарі продукту дорівнює

$$dm_w = w \cdot \rho \cdot dV, \quad (4.94)$$

де  $\lambda$  – теплопровідність продукту, Вт/м·К;  $w$  – вологість продукту, кг/кг;  $\rho$  – густина продукту, кг/м<sup>3</sup>.

Враховуючи, що  $dr=dV/S$  – поточна координата, а  $v=dr/d\tau$  – швидкість просування зони випаровування вологи, перепишемо (4.93) у вигляді диференційного рівняння відносно поточної координати.

$$\lambda \frac{dT}{dr} = -r_w w \rho v, \quad (4.95)$$

Якщо зробити допущення про незалежність швидкості просування зони випаровування  $v$  від координати, то рішення рівняння останнього рівняння має наступний вигляд

$$T = -\frac{r_w w \rho v}{\lambda} r + C, \quad (4.96)$$

де константа  $C$  з граничних умов на поверхні продукту, де має місце конвекційний теплообмін

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_V} = \alpha (T_\infty - T(R_V)), \quad (4.97)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі від киплячого фритюру до поверхні продукту,  $R_V=V/S$  - характерний розмір продукту,  $T_\infty$  - температура фритюру.

Підставляючи (4.96) у граничну умову (4.97) знаходимо константу  $C$

$$C = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{\lambda} \right) r_w w \rho v + T_\infty. \quad (4.98)$$

З урахуванням того, що для будь-якої поточної координата температура зони випаровування дорівнює температурі кипіння води, а також вираження для швидкості просування зони випаровування рівняння (4.99) набуває наступного вигляду

$$T_k = r_w w \rho \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{R_V}{\lambda} - \frac{r}{\lambda} \right) \frac{dr}{d\tau} + T_\infty, \quad (4.99)$$

Рішенням цього диференційного рівняння є

$$\tau = - \frac{r_w w \rho}{T_\infty - T_k} \left( \frac{r}{\alpha} + \frac{R_V r}{\lambda} - \frac{r^2}{2\lambda} \right) + C_1, \quad (4.100)$$

Константу  $C$  визначаємо з умови положення зони випаровування у початковий момент часу  $r=R_V$  для  $\tau=0$

$$C_1 = \frac{r_w w \rho}{T_\infty - T_k} \left( \frac{r}{\alpha} + \frac{R_V r}{\lambda} - \frac{r^2}{2\lambda} \right), \quad (4.101)$$

Підставляючи значення  $C_1$  у (4.100) отримуємо формулу, що описує положення зони випаровування у продукті з часом

$$\tau = \frac{r_w w \rho R_V^2}{2\lambda(T_\infty - T_k)} \left( 1 - \frac{r}{R_V} \right) \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha R_V} - \frac{r}{R_V} \right), \quad (4.102)$$

Тривалість процесу жарення у фритюрі, як вказувалось вище, визначається часом  $\tau_{zom}$  потрібним для досягнення зоною кипіння центру продукту ( $r=0$ ). Тому з (4.102) маємо

$$\tau_{zom} = \frac{r_w w \rho R_V^2}{2\lambda(T_\infty - T_k)} \left( 1 + \frac{2\lambda}{\alpha R_V} \right), \quad (4.103)$$

**Приклад.** Знайти розрахункову формулу для визначення температури у центрі виробу під час жарення основним способом за умов досягнення стаціонарного режиму теплоперенесення.

**Розв'язання.**

У стаціонарному тепловому стані тепловий потік з часом не змінюється. Температура у плоскому тілі розподілена за товщиною за лінійним законом. Тому на поверхні продукту мають місце наступні співвідношення

$$j = \alpha_1(T_{n1} - T_1) = \lambda \frac{T_{n2} - T_{n1}}{2R};$$

$$j = \alpha_2(T_2 - T_{n2}) = \lambda \frac{T_{n2} - T_{n1}}{2R},$$

де  $2R$  – де товщина виробу.

З іншого боку згідно рівняння теплопередачі

$$j = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{2R}{\lambda}}.$$

З цих рівнянь знаходимо різницю температур між поверхнями продукту

$$T_{n2} - T_{n1} = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{2R}{\lambda}} \frac{2R}{\lambda}.$$

Підставляючи останнє рівняння у перших два знаходимо значення температур на поверхнях продукту

$$T_{n2} = T_2 - \frac{T_2 - T_1}{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \frac{2R\alpha_2}{\lambda}}; \quad T_{n1} = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{2R\alpha_1}{\lambda}}.$$

За лінійного розподілу температур за товщиною продукту температура у його центрі дорівнює  $T_y = (T_{n1} + T_{n2})/2$ . З урахуванням, отриманих значень  $T_{n1}, T_{n2}$  маємо наступну формулу



$$T_u = \frac{1}{2 + \frac{\lambda}{\alpha_1 R} + \frac{\lambda}{\alpha_2 R}} \left[ \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_1 R} \right) T_2 + \left( 1 + \frac{\lambda}{\alpha_2 R} \right) T_1 \right].$$

#### 4.6. Моделювання процесів радіаційного нагрівання

До процесів радіаційного нагрівання відносять нагрівання у надвисокочастотному полі (НВЧ-нагрівання) та нагрівання за допомогою інфрачервоного випромінювання (ІЧ-нагрівання). Перевагою цих способів теплової обробки є мала інерційність, бо електромагнітне випромінювання проникає на певну глибину у продукт та відбувається безпосереднє перетворення енергії електромагнітних хвиль у теплоту, завдяки втратам на процес поляризації діелектричної речовини.

Глибина проникнення електромагнітного поля у продукт залежить від довжини хвилі та діелектричної проникності середовища.

$$\delta = \frac{\lambda_e}{\sqrt{\varepsilon'}}, \quad (4.104)$$

де довжина хвилі електромагнітного поля, м; дійсна складова відносної діелектричної проникності середовища.

Величина  $\varepsilon' = 80$  для води, яка складає більшу частину харчових продуктів, тому для НВЧ-поля стандартної частоти 2450 МГц глибина проникнення складає 1,3 см. Для інфрачервоного випромінювання з довжиною хвилі  $10^{-6}$  м глибина проникнення не перевищують 1 мм. Тому в останньому випадку має місце тільки поверхнєве радіаційне нагрівання.

Для отримання моделі кінетики процесу НВЧ-нагрівання запровадимо наступні допущення: тіло має характерну товщину, що перевищує глибину проникнення електромагнітного поля, тому внутрішні джерела теплоти діють тільки у поверхневій частині об'єму тіла  $V_1$ ; об'єм  $V_1$  втрачає теплоту за рахунок конвекції в оточуюче середовище та за рахунок теплопровідності у бік внутрішнього об'єму; внутрішній об'єм тіла  $V_2$  розігрівається виключно за рахунок теплоти, яка надходить з боку поверхневих шарів тіла. На підставі рівнянням кінетики теплопередачі (4.7) з урахуванням внутрішнього джерела теплоти, отримаємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$c\rho V_1 \frac{dT_1}{d\tau} = -\alpha S_1(T_1 - T_\infty) - \frac{\lambda}{R_{V_2}} S_2(T_1 - T_2) + P; \quad (4.105)$$

$$c\rho V_2 \frac{dT_2}{d\tau} = \frac{\lambda}{R_{V_2}} S_2(T_1 - T_2), \quad (4.106)$$

де  $S_1$  – площа зовнішньої поверхні тіла, що охоплює об’єм  $V_1$ ,  $S_2$  – площа поверхні внутрішнього об’єму  $V_2$ ;  $R_{V_2} = V_2 / S_2$ ;  $T_1, T_2$  - середні температури у об’ємі тіла  $V_1, V_2$  відповідно,  $T_\infty$  - температура оточуючого середовища; НВЧ-потужність, яка генерується всередині тіла ( $P = \eta P_{ген}$ ,  $\eta$  - к.к.д. НВЧ-камери,  $P_{ген}$  - потужність НВЧ-генератора).

Щоб спростити вирішення цієї системи знехтуємо тепловим потоком за рахунок теплопровідності

$\alpha S_1(T_1 - T_\infty) \gg \lambda S_2(T_1 - T_2) / R_{V_2}$ , та отримаємо наступну систему рівнянь

$$\frac{dT_1}{d\tau} = -k_1(T_1 - T_\infty) + \omega; \quad (4.107)$$

$$\frac{dT_2}{d\tau} = -k_2(T_2 - T_1), \quad (4.108)$$

де  $k_1 = \frac{\alpha}{c\rho R_{V_1}}$ ;  $\omega = \frac{P}{c\rho V_1}$ ;  $k_2 = \frac{\lambda}{c\rho R_{V_2}^2}$ , геометричні характеристики,

що входять в ці формули пов’язані наступними співвідношеннями:  $R_{V_1} = \delta$ ;  $V_1 = \delta S$ ;  $R_{V_2} = R_V - \delta$ , де  $R_V = V / S$  - відношення площі поверхні тіла до його об’єму.

Рішення першого рівняння з початковою умовою  $T_1(0) = T_0$  має наступний вигляд

$$T_1 = \frac{\omega}{k_1} + \left( T_0 - \frac{\omega}{k_1} \right) \cdot e^{-k_1 \tau}. \quad (4.109)$$

Підставляючи отримане рішення у (4.108), розв’язуємо друге рівняння з тією ж початковою умовою

$$T_2 = \frac{\omega}{k_1} + \frac{T_0 k_1 - \omega}{k_1(k_2 - k_1)} \cdot \left( k_1 e^{-k_2 \tau} - k_2 e^{-k_1 \tau} \right). \quad (4.110)$$

З формули (4.109) випливає тривалість НВЧ-нагрівання  $\tau_{zom}$  до заданої температури  $T_{zom}$  у поверхневих шарах продукту

$$\tau_{zom} = \frac{1}{k_1} \ln \left( \frac{T_0 k_1 - \omega}{T_{zom} k_1 - \omega} \right), \quad (4.111)$$

Температуру у центральних шарах продукту можна визначити, якщо підставити  $\tau = \tau_{zom}$  у формулу (4.110).

$$T_2^{zom} = \frac{T_{zom} k_1 - \omega}{k_1 (k_2 - k_1)} \cdot \left[ k_2 - k_1 \left( \frac{T_{zom} k_1 - \omega}{T_0 k_1 - \omega} \right)^{\frac{k_2}{k_1} - 1} \right]. \quad (4.110)$$

**Приклад.** Отримати модель кінетики НВЧ-нагрівання тонких виробів ( $\delta \leq R_V$ ) за умов періодичного змінювання потужності НВЧ-генератора.

**Розв'язання.**

Якщо товщина виробу менша за глибину проникнення електромагнітного поля у речовину, то можна вважати, що внутрішні джерела теплоти розподілені рівномірно за об'ємом. Тому рівняння кінетики теплопередачі (4.7) приймає наступний вигляд

$$c\rho V \frac{dT}{d\tau} = -\alpha S(T - T_\infty) + P.$$

Періодичне змінювання потужності НВЧ-поля у продукті змодельовано наступним рівнянням.

$$P = \frac{P_0}{2} [1 + \cos(\Omega\tau)],$$

де  $P_0$  - максимальна потужність НВЧ-генератора,  $\Omega$  - частота змінювання потужності.

З урахуванням цього перепишемо диференційне рівняння кінетики НВЧ-нагрівання у наступному вигляді

$$\frac{dT}{d\tau} = -k(T - T_\infty) + \omega_0 [1 + \cos(\Omega\tau)].$$

де  $k_1 = \frac{\alpha}{c\rho R_V}$ ;  $\omega_0 = \frac{P_0}{2c\rho V_1}$ ;  $R_V = V/S$ .

Рішення цього диференційного рівняння будемо шукати у вигляді

$$T - T_\infty = C_1 e^{-k \cdot \tau} + C_2 \sin(\Omega \tau) + C_3 \cos(\Omega \tau) + C_4.$$

Коефіцієнти  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  визначаються після підстановки цієї формули у диференційне рівняння кінетики.

$$C_2 = \frac{\omega_0 \Omega}{k^2 + \Omega^2}; \quad C_3 = \frac{\omega_0 k}{k^2 + \Omega^2}; \quad C_4 = \frac{\omega_0}{k}.$$

Коефіцієнт  $C_1$  визначається з початкової умови  $T(0) - T_\infty = T_0 - T_\infty$

$$C_1 = -\frac{2k^2 + \Omega^2}{k^2 + \Omega^2} \frac{\omega_0}{k}.$$

Розглянемо модель інфрачервоного нагрівання продукту. У цьому випадку електромагнітна енергія поглинається нескінченно малим поверхневим шаром продукту, що відповідає теплообміну із заданим потоком теплоти. При цьому внаслідок малої інерційності ІЧ-нагрівання температура поверхні продукту швидко досягає свого рівноважного значення і надалі не змінюється. З урахуванням цієї фізичної моделі рівняння кінетики теплопередачі (4.7) приймає наступний вигляд

$$-\alpha S(T_S - T_\infty) + P = 0, \quad (4.111)$$

де використані такі самі позначення, що і у формулі (4.105),  $P$  - потужність ІЧ-нагрівача,  $T_S$  - температура поверхні продукту.

З останнього рівняння знаходимо температуру поверхні

$$T_S = T_\infty + \frac{P}{\alpha S}. \quad (4.112)$$

Внутрішній шари продукту нагріваються за рахунок теплопровідності за сталої температури поверхні, тому рівняння диференційне кінетики ІЧ-нагрівання приймає вигляд

$$c\rho V \frac{dT}{d\tau} = \frac{\lambda}{R_V} S(T_s - T). \quad (4.113)$$

Рішення цього рівняння з початковою умовою  $T(0) = T_0$  має наступний вигляд

$$T = T_s - (T_s - T_0) \cdot e^{-\frac{\lambda}{c\rho R_V^2} \cdot \tau}. \quad (4.114)$$

#### 4.7. Моделювання процесів охолодження та заморожування

Метою моделювання теплообмінних процесів охолодження та замороження є отримання формул, які дозволяють розраховувати тривалість відповідного процесу та розподілення температур у тілі, що охолоджується. Для моделювання процесів охолодження до температури фазового переходу (кріоскопічної температури) можна використовувати математичні моделі, що застосовуються для позитивних температур, тобто рівняння динаміки теплопередачі для тіл простішої форми (4.10), наближене рівняння динаміки (4.22) та рівняння кінетики теплопередачі (4.7). Для моделювання безпосередньо процесу заморожування тобто утворення нової фази (льоду) у об'ємі тіла необхідно застосування іншої моделі. Справа в тому, що під час фазового перетворення рідина-лід виділяється схована теплота внаслідок зменшення ентропії системи, яка стає більш упорядкованою, що теплоту необхідно враховувати в загальному тепловому балансі. При цьому процес заморожування розвивається поступово ввід поверхні тіла до його центру, тобто границя фазового переходу є рухомою. Якщо врахувати, що при цьому теплофізичні характеристики тіла значно змінюються, то зрозуміло, що математична модель цього фізичного процесу повинна бути дуже складною.

У інженерній практиці найчастіше застосовується наближена модель процесу заморожування відома як формула Р.Планка (1912 р.) В основу формули Планка покладено наступні допущення: розподіл температур за об'ємом тіла в процесі заморожування залишається постійним (квазістаціонарне наближення) та одновимірним, теплофізичні характеристики тіла залишаються постійними, перед початком заморожування тіло охолоджено до кріоскопічної температури, фронт заморожування переміщається симетрично від поверхні тіла до його центру, виконуються граничні умови третього роду на поверхні тіла.

Отримаємо математичну модель процесу заморожування у рамках цих допущень. Тепловий потік  $j$  направлений від продукту до навколишнього середовища, оскільки кріоскопічна температура  $T_k$  вища за температуру навколишнього середовища, фронт фазового перетворення рухаються симетрично від поверхні до центру продукту зі швидкістю  $v$  (рис. 4.8.)

Для будь-якого нескінченно малого об'єму тіла  $dV$ , який розташований між поверхнею тіла та включає фронт заморожування, у будь-який момент часу виконується рівняння збереження та перенесення фізичної субстанції (4.7):

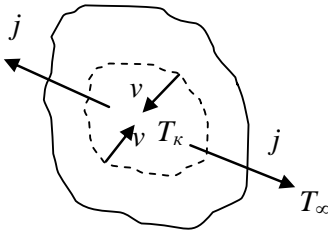


Рис. 4.8. Розрахункова схема процесу симетричного конвекційного заморожування.

$$c\rho dV \frac{dT}{d\tau} = jS + dQ \quad (4.115)$$

де  $c$  – питома теплоємність тіла, Дж/кг·К;  $\rho$  – густина продукту, кг/м<sup>3</sup>;  $dV$  – довільний об'єм, м<sup>3</sup>;  $S$  – площа поверхні, що охоплює об'єм  $dV$ , м<sup>2</sup>,  $T$  – температура, К;  $j$  – густина теплового потоку через поверхню  $S$ , Вт/м<sup>2</sup>;  $\tau$  – поточний час, с;  $dQ$  – потужність

внутрішнього джерела теплоти кристалізації води, що діє в об'ємі  $dV$ , Вт.

Враховуючи, що згідно моделі Планка температура тіла залишається не змінною  $dT/d\tau = 0$  маємо

$$-j \cdot S = dQ \quad (4.116)$$

Враховуючи рівняння для теплового потоку у одновимірному наближенні (4.4) отримуємо замість (11) наступне диференціальне рівняння:

$$\lambda_k \frac{dT}{dr} = \frac{dQ}{S} \quad (4.117)$$

де  $\lambda_k$  – коефіцієнт теплопровідності замороженої частини тіла, Вт/м·К.

Потужність внутрішнього джерела теплоти під час заморожування можна розрахувати таким чином:

$$dQ = q \frac{dm}{d\tau} \quad (4.118)$$

де  $q$  – питома теплота кристалізації води, Дж/кг;  $m$  – маса заморожуваної вологи у продукті, кг.

Вважаючи, що по досягненні кріоскопічної температури виморожується тільки вільна волога у нескінченно тонкому шарі на границі фронту виморожування, можна записати наступне вираження для внутрішнього джерела теплоти:

$$\frac{dQ}{S} = q\rho w_f \frac{dV}{S \cdot d\tau} = q\rho w_f \frac{dr}{d\tau} = q\rho w_f v, \quad (4.119)$$

де  $w_f = m_f/m$  – вміст вільної вологи в одиниці маси речовини, кг/кг ( $m_f$  – маса вільної вологи,  $m$  – маса тіла);  $dr = dV/S$  – узагальнена поточна координата, м;  $v$  – швидкість просування фронту заморожування, м/с.

Підставляючи (4.119) в (4.117) отримуємо наступне диференціальне рівняння:

$$\lambda_k \frac{dT}{dr} = q\rho w_f v. \quad (4.120)$$

Його рішення за умови, що швидкість просування фронту  $v$  заморожування в межах нескінченного малого об'єму  $dV$  є постійною, має вигляд:

$$T = \frac{q\rho w_f v}{\lambda_k} r + C. \quad (4.121)$$

де постійна інтегрування  $C$  визначається з наступних граничних умов.

На поверхні тіла, що контактує з повітрям

$$-\lambda_k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_V} = \alpha(T - T_\infty), \quad (4.122)$$

де  $T_\infty$  – температура середовища у морозильній камері.

На межі фронту заморожування температура продукту дорівнює кріоскопічній температурі  $T_k$

$$T(r) = T_k. \quad (4.123)$$

З урахуванням цих формул отримуємо рішення для стаціонарного розподілу температур в замороженій частині тіла.

$$T_k - T_\infty = \frac{q\rho w_f}{\lambda_k} \left[ r - \left( \frac{\lambda_k}{\alpha} + R_V \right) \right] \cdot v. \quad (4.124)$$

Замінюючи в останньому рівнянні швидкість фронту заморожування на  $v = dr/d\tau$ , отримуємо диференціальне рівняння, що описує переміщення фронту заморожування від поверхні продукту до його центру

$$T_k - T_\infty = \frac{q\rho w_f}{\lambda_k} \left[ r - \left( \frac{\lambda_k}{\alpha} + R_V \right) \right] \cdot \frac{dr}{d\tau}. \quad (4.125)$$

Вирішення цього рівняння за початкових умов  $T(0)|_{\tau=0} = T_k$ ;

$T(R_V)|_{\tau=0} = T_k$  має вигляд:

$$\tau = \frac{q\rho w_f}{2\lambda_k(T_k - T_\infty)} \left[ \xi^2 - 2\left(\frac{1}{\text{Bi}} + 1\right)\xi + \left(1 + \frac{2}{\text{Bi}}\right) \right]; \quad (4.126)$$

де  $\tau$  - час просування фронту заморожування з боку вільної поверхні продукту,  $\xi = r/R_V$  - безрозмірна координата,  $\text{Bi}$  - критерій Біо.

З останнього рівняння за умови  $\xi=0$  отримуємо планківський час заморожування

$$\tau = \frac{q\rho w_f R_V^2}{2\lambda_k(T_k - T_\infty)} \left( 1 + \frac{2}{\text{Bi}} \right). \quad (4.127)$$

### Питання до самоперевірки

1. Яке рівняння описує динаміку температурних полів у речовині під час теплообмінних процесів?
2. Які критерії подібності є визначальними для моделювання процесів теплообміну?
3. Яке рівняння можна використовувати для моделювання кінетики теплообміна процесів?
4. Як розрахувати температури у центрі тіла під час його нагрівання, охолодження?
5. Коли можна використовувати моделі із зосередженими параметрами для моделювання теплообмінних апаратів?
6. Чим відрізняються моделі теплообмінника з розподіленими та зосередженими параметрами?



7. В чому полягає різниця у критеріальних рівняннях для визначення коефіцієнта тепловіддачі за турбулентного, ламінарного режимів течії та режиму вільної конвекції?
8. Які характерні етапи можна виділити при складанні моделі процесу варення?
9. Чим відрізняються моделі процесу жарення основним способом та жарення у фритюрі?
10. В чому полягає різниця у фізичних моделях НВЧ-нагрівання та ІЧ-нагрівання?
11. Чим відрізняються моделі НВЧ-нагрівання тонких та товстих виробів?
12. Як допущення покладено у фізичну модель процесу заморожування згідно формули Планка?

## РОЗДІЛ 5

### МОДЕЛЮВАННЯ МАСООБМІННИХ ПРОЦЕСІВ

У харчових технологіях використовуються різноманітні масообмінні процеси. Загальною рисою для них є наявність двох або більше станів або фаз компонентів між якими відбувається перенесення маси. Цей процес може відбуватися двома механізмами - молекулярною дифузією і конвекційним перенесенням.

Основні закономірності перенесення речовин з однієї фази в іншу визначає теорія масоперенесення, відповідно до якої швидкість масопередачі пропорційна рушійній силі. Її величину можна визначити на основі законів фазової рівноваги. Рушійними силами масоперенесення може бути різниця концентрацій, температур і тиску.

Розглянемо основні фізичні закони, що описують процеси масообміну.

#### 5.1. Основні масообмінні процеси харчових технологій та методи моделювання

**Абсорбція** - селективне поглинання газів або пари рідкими поглиначами — абсорбентами, тобто має місце перехід речовини з газової фази в рідку.

**Перегонка і ректифікація** – розділення рідкої суміші на складові компоненти. При цьому відбувається перехід речовин з рідкої фази в газову і з газової в рідку.

**Екстракція** – вилучення одного або декількох речовин з розчинів або твердих речовин за допомогою розчинників. При цьому відбувається перехід речовин з рідкої фази в іншу рідку

**Вилуговування** - процес вилучення речовин з твердого тіла за допомогою розчинника, тобто має місце перехід речовини з твердої фази в рідку.

**Адсорбція** – вибіркове поглинання газів, пари або розчинених в рідині речовин твердим поглиначем — адсорбентом. При адсорбції речовини переходять з газової або рідкої фази в тверду.

**Сушіння** — це видалення вологи з твердих або рідких вологих матеріалів шляхом її випаровування, тобто має місце перехід вологи, яка пов'язана з іншою фазою у газовий стан.

**Кристалізація** - виділення речовини з рідкої фази у вигляді кристалів. При цьому відбувається перехід речовин з рідкої фази в тверду.

Кількісною мірою перенесення речовини є вектор її густини  $j_m$ , що вказує напрям перенесення і чисельно дорівнює масі речовини, що проходить за одиницю часу, через одиницю поверхні  $F$ , нормальної до напрямку перенесення

$$j_m = \frac{1}{F} \frac{dm}{d\tau}, \quad (5.1)$$

де  $m$  – маса речовини, кг.

Перенесення речовини може відбуватись двома основними механізмами шляхом молекулярної дифузії та конвекційним перенесенням.

Масоперенесення шляхом молекулярної дифузії описується закон Фіка

$$j_m^d = -D \cdot \nabla C, \quad (5.2)$$

де  $D$  - коефіцієнт дифузії речовини,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $C$  - концентрація речовини,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Значення коефіцієнта взаємної дифузії речовин  $A$  і  $B$  можна розрахувати за наступними формулами:

для газів

$$D = 4,35 \cdot 10^{-2} \frac{T^{3/2}}{p(V_A^{1/3} + V_B^{1/3})^2} \sqrt{\frac{1}{\mu_A + \mu_B}}. \quad (5.3)$$

для рідин

$$D = 8,2 \cdot 10^{-12} \frac{T}{\eta V_A^{1/3}} \left[ 1 + \left( \frac{3V_B}{V_A} \right)^{2/3} \right]. \quad (5.4)$$

де  $T$  - температура, К;  $p$  - тиск, Па;  $V_A$  і  $V_B$  - молярні об'єми взаємодіючих речовин,  $\text{см}^3/\text{моль}$ ;  $M_A$  і  $M_B$  - молекулярні маси речовин,  $\text{кг}/\text{кмоль}$ ;  $\eta$  - динамічна в'язкість, Па·с.

Для твердих тіл значення коефіцієнтів дифузії визначаються з таблиць.

Для газів коефіцієнти дифузії мають значення  $10^{-5} \dots 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , для рідин -  $10^{-9} \dots 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ , твердих тіл -  $10^{-11} \dots 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}$ . Із збільшенням температури коефіцієнти дифузії зростають, а з підвищенням тиску зменшуються.

Для масоперенесення шляхом конвекції у рухомому потоці рідини або газу

$$j_m^k = Cv, \quad (5.5)$$

де  $v$  - швидкість конвекційного потоку речовини, м/с.

Масообмін на межі розділу фаз описується законом аналогічним закону Ньютона

$$j_m^d = \beta(C_\infty - C_s), \quad (5.6)$$

де  $\beta$  - коефіцієнт масовіддачі, м/с;  $C_\infty$  - концентрація речовини у ядрі потоку, кг/м<sup>3</sup>;  $C_s$  - концентрація речовини на межі розділу фаз, кг/м<sup>3</sup>.

Основним рівнянням, що описує динаміку концентраційних полів у речовині під час масообмінних процесів є рівняння перенесення Фурьє-Кіргофа, що виходить з рівняння Умова (2.13) за умов, що фізичною субстанцією є концентрація певної речовини в одиниці об'єму тіла  $j_\Psi = C$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} + \operatorname{div}(C \cdot \vec{v}) = D\nabla^2 C + I_m, \quad (5.7)$$

де  $I_m$  - потужність внутрішніх джерел, стоків маси, кг/(м<sup>3</sup>·с).

Внутрішніми джерелами маси у масообмінних процесах є хімічні реакції, що призводять до зникнення або появи речовини, що переноситься.

Розв'язання рівняння (5.7) можливо у системі рівнянь з рівняннями Нав'є-Стокса. Така система рівнянь є системою нелінійних диференціальних рівнянь у часткових похідних і аналітичного рішення не має.

Рівняння (5.7) можна спростувати відкидаючи ті чи інші члени з урахуванням того якими механізмами переважно відбувається масообмін. Так, якщо вирішується задача масоперенесення у нерухомому середовищі  $v=0$  та рівняння Нав'є-Стокса не потрібні для розв'язання задачі про масоперенесення.

Наведені співвідношення свідчать про аналогію процесів тепло- і масоперенесення, що дозволяє узагальнити і методи складання математичних моделей. Зокрема для моделювання динаміки масоперенесення використовуються рішення рівняння Фурьє-Кіргофа аналогічні рішенням задач про теплоперенесення (4.10). Так у випадку відсутності внутрішніх джерел маси за умов симетричного конвекційного

масообміну з поверхні твердого тіла, безрозмірна концентрація змінюється в тілі згідно наступного рівняння

$$C^*(\xi, Fo_m) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2W_{\Gamma}(\mu_i, \xi)}{\mu_i V_{\Gamma}(\mu_i)} \frac{Bi_m^2 e^{-\mu_i^2 Fo_m}}{\mu_i^2 + Bi_m^2 + (2-\Gamma) Bi_m}, \quad (5.8)$$

де  $\xi=r/R$  - безрозмірна координата;  $C^*$  - безрозмірна концентрація

$$C^* = \frac{C - C_{\infty}}{C_0 - C_{\infty}},$$

$C_0$  - початкова концентрація речовини в тілі;  $C_{\infty}$  - концентрація речовини у ядрі потоку, що омиває тіло;  $R$  - характерний розмір тіла;  $Fo_m$  - дифузійне число Фур'є;  $Bi_m$  - дифузійний критерій Біо;  $\Gamma$  - коефіцієнт форми тіла, функції  $W_{\Gamma}, V_{\Gamma}$  мають такі ж самі значення, що і для процесу теплообміну.

Як і у випадку моделювання процесу теплоперенесення рівняння (5.8) може застосовуватись для тіл правильної геометричної форми (нескінчена пластина, циліндр, куля). За умов відносно великої тривалості масообміну  $Fo_m > 0,3$  у формулі (5.8) можна обмежитись тільки першим членом ряду та отримати розв'язання цього рівняння відносно тривалості процесу (наближення регулярного режиму).

Для задач моделювання кінетики масообмінних процесів, тобто змінювання середньої концентрації речовини у системі з часом використовується рівняння кінетики масопередачі, яке безпосередньо впливає з рівняння збереження та перенесення фізичної субстанції (4.6) і має наступний вигляд

$$V \frac{d\bar{C}}{d\tau} = \sum_i j_i^d S_i^d + \sum_j j_j^k S_j^k + \sum_n \bar{I}_n V_n, \quad (5.9)$$

де  $V$  - об'єм системи,  $\bar{C}$  - середня концентрація речовини за об'ємом системи,  $j_i^d$  - густина потоку маси через поверхню  $S_i^d$  за рахунок молекулярної дифузії,  $j_j^k$  - густина потоку за рахунок конвекційного перенесення через поверхню  $S_j^k$ ,  $\bar{I}_n$  - середня потужність внутрішнього джерела (стоку) маси, яке діє у об'ємі  $V_n$ .

Густина дифузійного потоку маси розраховується за наступною формулою.

$$j^d = k_m (\bar{C} - C_\infty) = \frac{\bar{C} - C_\infty}{1/\beta + R_V/D}; \quad (5.10)$$

де  $k_m$  - коефіцієнт масопередачі, який обернено пропорційний сумарному опору для внутрішнього та зовнішнього масоперенесення,  $R_V$  – відношення об'єму тіла до площі його поверхні.

Для розрахунку конвекційного потоку теплоти  $j^k$  використовується формула (5.5), у яку підставляється середня швидкість конвекційного потоку та середня концентрація речовини в ньому.

Перевагою рівнянь (5.9), (5.10) є те, що вони можуть бути застосовано для тіл довільної форми.

Для моделювання масообмінних процесів часто використовуються метод аналізу розмірності та критеріїв подібності.

Таблиця 5.1.

## Критерії подібності масообміну

Назва критерію	Формула	Позначення	Фізичний сенс
Фур'є	$Fo_m = \frac{D\tau_0}{l^2}$	$D$ - коефіцієнт дифузії, $\tau_0$ - характерний час процесу, $l$ – характерний розмір тіла	Відносний час досягнення стаціонарного стану під час масообміну
Нусельта	$Nu_m = \frac{\beta l}{D}$	$\beta$ - коефіцієнт масовіддачі, $D$ - коефіцієнт дифузії, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення конвекційного потоку маси до потоку за рахунок молекулярної дифузії у граничному шарі на межі розділу фаз
Біо	$Bi_m = \frac{\beta l}{D}$	$\beta$ - коефіцієнт масовіддачі, $D$ - коефіцієнт дифузії, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення конвекційного потоку маси на межі розділу фаз до потоку за рахунок молекулярної дифузії у одній з фаз.

Продовження табл. 5.1

1	2	3	4
Пекле	$Pe_m = \frac{v_0 l}{D}$	$v_0$ –характерна швидкість потоку, $D$ - коефіцієнт дифузії, $l$ - характерний розмір тіла	Відношення інтенсивності перенесення маси конвекцією та молекулярною дифузією у рухомому середовищі
Прандтля	$Pr_m = \frac{Pe_m}{Re} = \frac{\nu}{D}$	$\nu$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості, $D$ - коефіцієнт дифузії	Відношення потоку імпульсу до потоку маси у рухомому середовищі
Грасгофа	$Gr = \frac{gl^3 \beta_t \Delta T}{\nu^2}$	$G$ - прискорення вільного падіння, $l$ - характерний розмір тіла, $\beta_t$ - коефіцієнт об'ємного розширення, $\Delta T$ – перепад температур, $\nu$ - коефіцієнт кінематичної в'язкості	Відношення сили Архімеда до сил тертя у вільному конвекційному потоці рідини
Стантона	$St_m = \frac{Nu_m}{Pe_m} = \frac{\beta}{v_0}$	$\beta$ - коефіцієнт масовіддачі, $v_0$ –характерна швидкість потоку	Відношення інтенсивності перенесення маси конвекцією до потоку імпульсу у рухомому середовищі

За допомогою цих критеріїв найчастіше шукають емпіричні залежності для коефіцієнту масовіддачі у вигляді

$$Nu_m = f(Re, Pr_m, Gr, Fo_m). \quad (5.11)$$

Це рівняння можна спрощувати – для стаціонарних процесів не враховується число  $Fo_m$ , для вимушеного руху не враховується критерій Грасгофа.

## 5.2 Моделювання процесу вилуговування

Процеси вилуговування широко застосовуються у харчових технологіях при обробці сировини рослинного або тваринного походження. Як розчинники використовують воду, наприклад, для дифузії цукру з буряка, воду та пар для екстракції желатину, спирт та водно-спиртову суміш – для одержання настоянок та морсів у лікеро-горілчаному виробництві, бензин, трихлоретилен, дихлоретан, - у вершково-жироекстракційному та ефіроолійному виробництвах.

Отримаємо модель динаміки процесу екстракції водорозчинних речовин з плодів рослинної сировини у формі кульок. При цьому будемо вважати, що на поверхні сировини концентрація речовини, що вилуговується, залишається незмінною та дорівнює рівноважній концентрації у розчиннику (воді). Основною задачею є розрахунок тривалості процесу вилуговування.

Для цього випадку рівняння перенесення Фур'є-Кіргофа у сферичних координатах приймає наступний вигляд

$$\frac{dC}{d\tau} = D_c \left( \frac{d^2C}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dC}{dr} \right), \quad (5.12)$$

де  $D_c$  – коефіцієнт дифузії корисної речовини у розчин,  $m^2/c$ ;  $r$  – поточний радіус плоду,  $m$  ( $0 \leq r \leq R$ ).

Граничні умови що відповідають умовам проведення процесу вилуговування

$$C(R, \tau) = C_\infty, \quad (5.13)$$

де рівноважна концентрація речовини, що вилуговується.

Рішення рівняння (5.12) з граничною умовою (5.13) має наступний вигляд

$$C(r, \tau) = C_\infty \left( 1 + \frac{2R}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_c \tau}{R^2}} \frac{\sin \frac{n\pi r}{R}}{r} \right). \quad (5.14)$$

У центрі плоду концентрація дорівнює



$$C(0, \tau) = C_{\infty} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 D_c \tau}{R^2}} \right). \quad (5.15)$$

Користуючись наближенням регулярного режиму за  $Fo_m > 0,3$  можна обмежитись у останньому рівнянні тільки першим членом ряду

$$C(0, \tau) \approx C_{\infty} \left( 1 + 2e^{-\frac{\pi^2 D_c \tau}{R^2}} \right). \quad (5.16)$$

Звідки відносна безрозмірна концентрація у центрі плоду складає

$$C^*(\tau) = \frac{C(0, \tau)}{C_{\infty}} = 1 + 2e^{-\frac{\pi^2 D_c \tau}{R^2}}. \quad (5.17)$$

Тривалість процесу вилуговування можна визначити значенням відносної концентрації, а саме, якщо відносна концентрація  $C^* < 1,05 \dots 1,1$ , тобто не відрізняється від рівноважної на 5...10%, процес можна вважати завершеним.

З урахуванням цього з (5.17) отримуємо тривалість процесу вилуговування

$$\tau = -\frac{R^2}{\pi^2 D_c} \ln(0,025 \dots 0,05). \quad (5.18)$$

### 5.3. Моделювання процесу адсорбції

Характерна особливість процесу адсорбції — вибірковість і оборотність. Завдяки оборотності процесу можливе поглинання з парогазових сумішей або розчинів одного або декількох компонентів, а потім в певних умовах виділення їх з адсорбенту. Процес, зворотний адсорбції, називають десорбцією.

У харчовій технології адсорбцію використовують для очищення дифузійного соку та цукрових сиропів в цукровому виробництві, освітлювання пива та фруктових соків, очищення від органічних та

інших з'єднань спирту, горілки, коньяку та вин, сиропів в крахмально-паточному виробництві та ін.

Розрізняють фізичну і хімічну адсорбцію. Фізична адсорбція має місце при силовій взаємодії молекул адсорбтива і адсорбенту під дією сил Ван-дер-Ваальса.

Хімічна адсорбція, або хемосорбція, характеризується утворенням хімічного зв'язку між молекулами поглиненої речовини і молекулами адсорбенту, що є результатом хімічної реакції.

У харчових виробництвах широко використовують такі адсорбенти як активоване вугілля, силікагелі, алюмогелі, цеоліти, глини та інші природні адсорбенти.

Процеси адсорбції-десорбції мають місце при зберіганні харчових продуктів. Так, для сушених продуктів має місце адсорбція водяної пари з повітря, що призводить до їх псування у відсутності захисної упаковки, навпаки вологі продукти при тривалому зберіганні втрачають вологу (висушуються).

Незалежно від природи адсорбційних сил кількість речовини, адсорбованої одиницею маси або об'єму певного адсорбенту, залежить від природи поглиненої речовини, температури, тиску і кількості домішок у фазі, з якої поглинається речовина.

Залежність між рівноважними концентраціями поглиненої речовини у твердій та газовій або рідкій фазах в загальному вигляді виражається рівнянням

$$x_{\infty} = f_1(y), \text{ або } x_{\infty} = f_2(p) \quad (5.19)$$

де  $x_{\infty}$  - рівноважна концентрація адсорбтива у адсорбенті, яка відповідає сталим зовнішнім умовам, кг адсорбтива на 1 кг адсорбенту;  $y$  — концентрація адсорбтива в паровій або рідкій фазі, кг адсорбтива на 1 кг інертної частини;  $p$  — тиск адсорбтива в парогазовій суміші, Па.

Для аналізу процесів сорбції-десорбції у харчових продуктах використовують рівняння для рівноважного волого вмісту продукту як функції відносної вологості повітря

$$w_{\infty} = f_3(\varphi), \quad (5.20)$$

$\varphi$  - відносна вологість повітря,  $w_{\infty}$  - рівноважний вологовміст продукту.

Залежності, що описуються рівняннями (5.20), називаються ізотермами адсорбції. Вид ізотерм залежить від багатьох чинників: питомої площі поверхні адсорбенту, об'єму пір, структури адсорбенту, властивостей речовини, що поглинається, а також від температури

процесу. На практиці для моделювання ізотерм використовують різноманітні рівняння, основні з яких представлено у таблиці 5.2.

Таблиця 5.2

## Основні рівняння ізотерм адсорбції

Автор	Рівняння	Інтервал найкращої апроксимації, $\varphi$
Фрейндліх	$w_{\infty} = A_1 \varphi^{A_2}$	0...0,4
С. Брунауер	$w_{\infty} = A_1 \frac{A_2 \varphi}{(1-\varphi)[1+(A_2-1)\varphi]}$	0...0,4
О.В.Ликов	$w_{\infty} = \frac{A_1 \varphi}{A_2 - \varphi}$	0,1...0,5
Г.А. Єгоров	$1 - \varphi = A_1 \exp(-A_2 w_{\infty}^2)$	0...0,5
Я.М. Мініовіч	$\ln(w_{\infty}) = A_1 \varphi + \ln(A_2 + A_3 T)$	0,2...0,8
Б.А. Поснов	$\frac{1}{w_{\infty}} = \frac{1}{w_{\infty H}} + A_1 \ln(\varphi)$	0...0,6
Г.К. Філоненко	$w_{\infty 1} = \frac{A_1 + \varphi}{A_2},$ $w_{\infty 2} = \frac{A_3(\varphi - \varphi_{12})}{A_4 - (\varphi - \varphi_{12})} + w_{12}$	0,1...0,9
В.А. Загоруйко	$\frac{w_{\infty}}{w_{\infty H}} = \varphi \exp \left[ \sum_{i=0} \sum_{j=0} A_{ij} \left( \frac{T}{273} \right)^j \varphi^i \right]$	0...0,95
В.О. Потапов, М.І. Погожих	$\varphi = \frac{w_{\infty} A_3}{A_1 + A_2 w_{\infty} A_3},$	0...0,95

В таблиці використані наступні позначення:  $\varphi_{12}$  - відносна вологість повітря, відповідна початку капілярної конденсації,  $w_{12}$  - вологовміст, що відповідає початку капілярної конденсації,  $w_{\infty H}$  - максимальний гігроскопічний волого вміст.

Коефіцієнти  $A$ , що входять до цих рівнянь, визначаються з експериментальних ізотерм методом регресійного аналізу. Їх значення дозволяють знаходити певні структурно-енергетичні характеристики

продуктів. Так, згідно рівняння Брунауера ємність мономолекулярного шару (його вологовміст  $w_{\infty 0}$ ) дорівнює  $w_{\infty 0} = A_1$ , питома молярна енергія зв'язку мономолекулярного шару визначається з рівняння

$$U_{0\mu} = \ln(A_2)R_G T, \quad (5.21)$$

де  $U_{0\mu}$  - питома молярна енергія зв'язку мономолекулярного шару, Дж/моль,  $R_G$  - універсальна газова стала,  $T$  - абсолютна температура.

Рівняння В.О. Потапова, М.І. Погожих дозволяє знаходити диференціальну функцію розподілу капілярів продукту за радіусами

$$f_{\Pi}^*(R^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_R R^*} \exp\left\{-\left[\ln(R^*) - m_R\right]^2 / 2\sigma_R^2\right\}, \quad (5.22)$$

де  $f_{\Pi}^*(R^*)$  - функція логарифмічно нормального розподілу,  $m_R$  и  $\sigma_R$  - параметри логарифмічно нормального розподілу,  $R^*$  - безрозмірний радіус капілярів  $R^* = (R - d_0)/d_0$ ,  $R$  - поточний радіус капіляру,  $d_0 = 0,3 \cdot 10^{-9}$  м - радіус молекули води.

Параметри логарифмічно нормального розподілу знаходяться за коефіцієнтами рівняння ізотерми

$$m_R = \left(\frac{A_2}{0,433}\right)^{1,247}, \quad (5.23)$$

$$\sigma_R = -\frac{\ln(6,12A_1)}{0,625} \left(\frac{A_3 - 0,957}{0,223}\right)^{-0,6}. \quad (5.24)$$

Питома молярна енергія зв'язку мономолекулярного шару визначається з рівняння

$$U_{0\mu} = R_G T \left(\frac{A_3 - 0,957}{0,223}\right)^{0,6}, \quad (5.25)$$

Для моделювання кінетики процесів адсорбції використовуються рівняння кінетики масопередачі (5.9), яке за умов відсутності хімічних перетворювань та конвекційного перенесення з урахуванням (5.10) приймає наступний вигляд

$$\frac{dC}{d\tau} = - \left( \frac{C - C_\infty}{R_V / \beta + R_V^2 / D} \right), \quad (5.26)$$

де  $D$  - коефіцієнт дифузії адсорбтиву у твердому адсорбенті,  $\beta$  - коефіцієнт масовіддачі від потоку газу або рідини до поверхні адсорбенту.

Його рішення за початкової умови  $C(0) = C_0$  ( $C_0 < C_\infty$ ) має наступний вигляд

$$C = C_0 + (C_\infty - C_0) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\tau}{R_V / \beta + R_V^2 / D} \right) \right], \quad (5.27)$$

або у критеріальному вигляді

$$C = C_0 + (C_\infty - C_0) \left( 1 - e^{-\frac{Fo_m}{1 + 1/Bi_m}} \right). \quad (5.28)$$

Згідно цих рівнянь концентрація адсорбтиву  $C$  зростає з часом у адсорбенті за експоненціальним законом.

Для розмежування адсорбції у зовнішньо дифузійній і внутрішньо дифузійній областях, використовують дифузійний масообмінний критерій Біо. Якщо  $Bi_m > 10$ , то швидкість процесу визначається швидкістю масопровідності усередині адсорбенту ( $j_d \sim D/R_V$ ). При  $Bi_m < 0,1$  швидкість адсорбції залежить від швидкості масоотдачі в газовій або рідкій фазі ( $j_d \sim \beta$ ). В останньому випадку коефіцієнт масотдачі можна визначити з наступних критеріальних рівнянь:

за ламінарного потоку ( $Re < 30$ )

$$Nu_m = 0,883 Re^{0,47} Pr_m^{0,33}; \quad (5.29)$$

за турбулентного потоку ( $Re = 30 \dots 150$ )

$$Nu_m = 0,53 Re^{0,54} Pr_m^{0,33}. \quad (5.30)$$

У цих рівняннях визначальним геометричним розміром є діаметр зерна адсорбенту  $d$ , визначальними фізичними величинами - коефіцієнт дифузії, кінематична в'язкість та швидкість газової або рідкої фази.

**Приклад.** Отримати регресійне рівняння для визначення коефіцієнтів рівняння ізотерм адсорбції за методом Брунауера.

**Розв'язання.** Для отримання регресійного рівняння треба лініалізувати рівняння ізотерм відносно невідомих коефіцієнтів. Рівняння ізотерми Брунауера представимо у наступному вигляді

$$\frac{1}{w_\infty} = \frac{1}{A_1 A_2} \frac{1-\varphi}{\varphi} + \frac{A_2-1}{A_1 A_2} (1-\varphi).$$

Представимо це рівняння у вигляді лінійного регресійного рівняння

$$Y = a_1 X_1 + a_2 X_2,$$

де  $Y = 1/w_\infty$ ;  $X_1 = (1-\varphi)/\varphi$ ;  $X_2 = 1-\varphi$ .

Співставляючи ці рівняння, знаходимо зв'язок між коефіцієнтами регресійного рівняння та коефіцієнтами рівняння ізотерми адсорбції

$$A_1 = \frac{1}{a_1 + a_2}; \quad A_2 = \frac{a_1 + a_2}{a_1}.$$

#### 5.4. Моделювання процесу сушіння

Сушіння є найдавнішим та простішим способом консервації харчової сировини, в той же час, це складний фізико-хімічний процес, який включає в собі сполучені явища перенесення маси, енергії, механічного імпульсу, хімічних та біохімічних реакцій. Тому при моделюванні процесу сушіння виділяють задачі статички, динаміки та кінетики сушіння. Статика сушіння базується на теорії процесів адсорбції та досліджує форми зв'язку вологи у тілі. Динаміка сушіння досліджує та моделює нестационарні поля концентрацій, температур, тисків та деформацій у процесі сушіння. Кінетика моделює еволюцію середніх за об'ємом параметрів стану тіла під час його сушіння.

Складність моделювання динаміки масоперенесення у харчових матеріалах полягає в тому, що вони за класифікацією П.А. Ребіндера відносяться до колоїдних капілярно пористих матеріалів, для яких характерним є змінювання об'єму: у процесі сушіння це зсідання, у процесі зволоження - набрякання. Тому потік маси у тілі в процесі його сушіння викликаний низкою рушійних сил

$$\vec{j}_m = -\rho_0 a_m \nabla w - \rho_0 a_{mT} \nabla T - \rho_0 a_p c_p^a \nabla p - \rho_0 \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau}. \quad (5.31)$$

де  $a_m$  - коефіцієнт дифузії вологи,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $a_{mT}$  - коефіцієнт термодифузії вологи;  $\text{м}^2/(\text{с}\cdot\text{К})$ ;  $a_p$  - коефіцієнт конвекційної фільтраційної дифузії,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $c_p^a$  - коефіцієнт ємності вологого повітря в пористому тілі,  $\text{кг}/(\text{кг}\cdot\text{Па})$ ;  $\rho_0$  - об'ємна концентрація сухої речовини,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $w$  - вологовміст,  $\text{кг}/\text{кг}$ ;  $T$  - температура,  $\text{К}$ ;  $p$  - тиск вологого газу усередині тіла,  $\text{Па}$ ;  $\vec{U}$  - вектор, що описує змінювання форми тіла відносно нерухомого центру мас,  $\text{м}\cdot\text{кг}/\text{кг}$ .

В цьому рівнянні окремі кожний з членів описують внесок у результуючий потік маси окремих фізичних явищ: молекулярної дифузії, термодифузії, конвекційного масоперенесення за рахунок внутрішнього тиску газу та конвекційного перенесення вологи викликаного змінюванням форми та об'єму тіла внаслідок деформацій спричинених зсіданням або набряканням.

З урахуванням цього отримана система рівнянь О.В.Ликова, П.П. Луцика, що описує динаміку сполучених процесів перенесення маси, енергії та імпульсу у процесі сушіння.

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 w + a_{mT} \nabla^2 T + a_p c_p^a \cdot \nabla^2 p - \text{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \quad (5.32)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a_T \nabla^2 T + \frac{\varepsilon_w r_w}{c} \frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{E_0 (\gamma_T T_0 + \gamma_w w_0)}{\rho_0 c} \text{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \quad (5.33)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = a_p \nabla^2 p - \frac{\varepsilon_w}{c_p^a} \frac{\partial w}{\partial \tau} - p_0 \text{div} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \tau} \quad (5.34)$$

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \tau^2} = G_y \nabla^2 \vec{U} + \frac{1}{3} (E_y + G_y) \nabla (\text{div} \vec{U}) + \vec{F} - E_y \nabla Q_w, \quad (5.35)$$

де  $a_T$  - коефіцієнт температуропровідності,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $c$  - зведена питома теплоємність вологого тіла,  $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$ ;  $\varepsilon_w$  - коефіцієнт фазового перетворення, який враховує частку вологи у стані пари;  $r_w$  - питома тепло- та пароутворення,  $\text{Дж}/\text{кг}$ ;  $p_0$  - зовнішній тиск,  $\text{Па}$ ;  $\vec{F}$  - вектор зовнішніх сил, що діють на тіло,  $\text{Н}$ ;  $E_y$  - модуль об'ємної пружності,  $\text{Па}$ ;  $G_y$  - модуль зсуву,  $\text{Па}$ ;  $Q_w = \gamma_T (T - T_0) + \gamma_w (w - w_0) + (p - p_0) / E_y$  - вологотермічна функція,  $\gamma_T$  - коефіцієнт лінійного теплового розширення,

$K^{-1}$ ;  $\gamma_w$  – коефіцієнт лінійного зсідання; кг/кг;  $\rho$  – густина вологого тіла, кг/м<sup>3</sup>.

Кожне з рівнянь системи (5.32-5.35) описують відповідні поля фізичних величин у процесі сушіння: вологовмісту, температури, тиску та деформацій. Система цих рівнянь надто складна, аналітичне рішення можуть бути отримані у деяких випадках, а саме, для тіл правильної геометричної форми за відсутності деформацій тіла ( $\vec{U} = 0$ ) або за деформацій без прискорення (без механічних напружень)  $\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial \tau^2} = 0$ ,

причому за умов сталих коефіцієнтів у наведених рівняннях.

Найпростішою моделлю динаміки сушіння є рівняння, що впливає з (5.32) за умов відсутності перенесення маси термодифузією, конвекційною фільтраційною дифузією та за рахунок деформацій

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a_m \nabla^2 w. \quad (5.36)$$

Рішення цього рівняння, що описує динаміку вологовмісту за об'ємом тіла, за умов граничних умов третього роду (конвекційний масообмін між поверхнею тіла та повітрям яке поглинає вологу) має вигляд аналогічний (5.8).

Але, як показує експеримент, таке спрощення не відповідає дійсності, особливо для харчових матеріалів тому на практиці здебільшого користуються кінетичними моделями для опису процесів сушіння.

Під кінетикою процесу сушіння зазвичай розуміють залежність середніх за об'ємом значень фізичних величин від часу. Це кінетика середнього вологовмісту, середньої температури, середнього тиску вологого газу усередині тіла та його середніх деформацій. Основною задачею кінетичних моделей є розрахунок тривалості процесу сушіння, або знаходження середніх значень параметрів стану тіла у процесі сушіння.

Математичні моделі, що використовують для опису кінетики процесу сушіння, отримують аналітичними або емпіричними методами. Аналітичні моделі отримують шляхом усереднювання за об'ємом аналітичних виразів, що описують динаміку полів фізичних величин в процесі сушіння. Емпіричні моделі засновані на використанні довільних регресійних рівнянь, що задовільно описують експериментальні данні.



## 5.4.1. Моделювання кінетики масоперенесення

О.В.Ликовим отримано рівняння кінетики сушки, виходячи з вирішення диференціального рівняння масоперенесення для плоскої пластини за відсутності термодифузії і градієнту тиску. У першому періоді сушіння у припущенні, що зовнішній тепловий потік витрачається тільки на випаровування, рівняння кінетики вологовмісту має наступний вигляд

$$w = w_0 - N_w \tau, \quad (5.37)$$

де - швидкість першого періоду сушки

$$N_w = \frac{\beta_p (p_M - p_\infty)}{h \rho_0}, \quad (5.38)$$

де  $\beta_p$  - коефіцієнт масовіддачі, віднесений до різниці парціального тиску пари,  $p_M, p_\infty$  - парціальний тиск пари насиченої пари і тиск пари в повітрі,  $h$  - напівтовщина пластини матеріалу.

В результаті обробки численних даних по тепло- і масообміну при вимушеному русі вологого газу О.В.Нестеренко було встановлено наступні критеріальні рівняння для визначення коефіцієнтів тепло та масовіддачі у першому періоді сушіння:

$$\text{Nu} = 2 + A \text{Pr}^{0,33} \text{Re}^n \text{Gu}^m \quad (5.39)$$

$$\text{Nu}_m = 2 + A_m \text{Pr}_m^{0,33} \text{Re}^k \text{Gu}^q \quad (5.40)$$

де  $\text{Gu} = (T_C - T_M) / T_C$  - критерій Гухмана,  $T_C, T_M$  - температура середовища та температура поверхні вологого матеріалу у процесі сушіння, К.

Постійні в рівняннях (5.39), (5.40) залежно від числа Re набувають наступних значень:

	$A$	$n$	$m$	$A_m$	$k$	$q$
$\text{Re}=1 \dots 200$	1,07	0,48	0,175	0,83	0,53	0,135
$\text{Re}=3,15 \cdot 10^3 \dots 2,2 \cdot 10^4$	0,51	0,61	0,175	0,49	0,61	0,135
$\text{Re}=2,2 \cdot 10^4 \dots 3,15 \cdot 10^5$	0,027	0,90	0,175	0,0248	0,90	0,135

У другому періоді сушіння, у припущенні, що має місце параболічний профіль вологовмісту за товщиною пластини, кінетика вологовмісту описується наступним виразом

$$\frac{w - w_\infty}{w_k - w_\infty} \approx \exp(-K\tau). \quad (5.41)$$

де  $w_k$  - критичний вологовміст на початку другого періоду сушіння,  $w_\infty$  - рівноважний вологовміст за даних умов сушіння,  $K$ - коефіцієнт сушіння

$$K = \frac{1}{h} \frac{1}{\left(1/\beta_w\right) + (4h/\pi^2 a_m)}. \quad (5.42)$$

де  $\beta_w$  - коефіцієнт масовіддачі, віднесений до різниці поточного вологовмісту та рівноважного вологовмісту тіла у процесі сушіння.

Використовуючи останні два рівняння з аналізу експериментальних даних можна визначити коефіцієнти масоперенесення, що входять до (5.42).

Проте, як показують результати обробки експериментальних даних, криві кінетики сушіння мають складнішу форму, чим така що описуються рівняннями (5.37), (5.41), тому велике поширення отримали емпіричні моделі кінетики.

У таблиці 5.3 наведені основні емпіричні рівняння, які використовують для опису кінетики вологовмісту в процесі сушіння.

Відзначимо, що, зважаючи на специфіку харчової сировини як об'єкту сушіння, похибка наведених рівнянь у межах 10...50% для всієї кривої сушки задовольняє відомому вислову Арістотеля “освічена людина не вимагає більшої точності знання будь-якого предмету, чим це допускає сам предмет”.

Таблиця 5.3

Основні кінетичні рівняння для кінетики вологовмісту у процесі сушіння

	Автор	Рівняння
1	Г.К. Філоненко	$\tau(w) = \frac{1}{N_w} \int_{w_k}^w \left[ \frac{A_1}{(w - w_\infty)^m} + A_2 \right] dw$
2	Б.С. Сажін	$\tau(w) = \frac{1}{K(w_0 - w_\infty)} \ln \left[ \frac{(w_0 - w)(w_1 - w_\infty)}{(w_0 - w_1)(w - w_\infty)} \right]$

Продовження таблиці 5.3.

	1	2
3	М.С. Смірнов, В.І. Лисенко	$w^*(\tau) = \frac{1}{2} [1 - \operatorname{erf}(K(\tau - \tau_0))]$
4	М.Т. Крэтов, М.Г. Фомін, О.О. Шевцов	$w^*(\tau) = A_1 \cdot \exp(-K_1\tau) + A_2 \cdot \tau^m \cdot \exp(-K_2\tau^n)$
5	Г.І. Эфремов	$w^*(\tau) = \left[ 1 + \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right)^n \right]^{-1}$
6	М.О. Грішин, М.І. Погожих, В.О. Потапов	$w^*(\tau) = \exp(-K\tau)^n$

де  $w^* = \frac{w_0 - w}{w_0 - w_\infty}$ ,  $w_0$  - початковий вологовміст,  $w_\infty$  - рівноважний вологовміст,  $A_1, A_2, m, N_w, w_0, w_1, \tau_0, K, K_1, K_2$  - емпіричні коефіцієнти.

#### 5.4.2. Моделювання кінетики тепло перенесення

Модель кінетики температури у процесі сушіння отримаємо з рівняння кінетики теплопередачі (4.7). Для більшості способів сушіння можна вважати, що теплота всередині тіла переноситься тільки дифузійно, внутрішнім джерелом стоку теплоти є процес фазового перетворення води у пару, тому у випадку конвекційного сушіння можна записати наступне кінетичне рівняння

$$c\rho_0V \frac{dT}{d\tau} = k_T(T_\infty - T)S + r_w\rho_0V \frac{dw}{d\tau}, \quad (5.43)$$

де  $c$  - зведена питома теплоємність вологого тіла,  $c = c_0 + c_w w$ ;  $T$  - середня температура тіла;  $T_\infty$  - температура сушильного агента (нагрітого повітря);  $k_T = (1/\alpha + R_V/\lambda)^{-1}$  - коефіцієнт теплопередачі;  $V$  - об'єм тіла;  $S$  - площа його поверхні.

Останнє рівняння зручно представити у наступному вигляді

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{k_T}{c\rho_0R_V}(T_\infty - T) + \frac{r_w}{c} \frac{dw}{d\tau}, \quad (5.44)$$

Це рівняння є диференціальним рівнянням кінетики температури у процесі сушіння. Щоб вирішити його відносно температури треба

знати залежність  $w(\tau)$ , тобто кінетику вологовмісту. Враховуючи, що в загальному випадку зведена теплоємність  $c(w)$  також залежить від точного вологовмісту рівняння (5.44) виходить зі змінними коефіцієнтами, та немає аналітичного рішення, тому для спрощення будемо вважати середню теплоємність сталою величиною. Також будемо вважати, що потік маси (5.31) в процесі сушіння викликаний тільки молекулярним масоперенесенням, тоді рівняння кінетики масопередачі (5.9) при  $\bar{C} = \rho_0 w$  приймає наступний вигляд

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{k_m}{R_V}(w - w_\infty), \quad (5.45)$$

де  $k_m = (1/\beta_w + R_V/a_m)^{-1}$  - коефіцієнт масопередачі (коефіцієнт сушіння).

Якщо за початкової умови  $w(0)=w_0$  має наступне рішення

$$w = w_\infty + (w_0 - w_\infty)e^{-\frac{k_m \tau}{R_V}}. \quad (5.46)$$

Підставляючи останнє рівняння у (5.43) отримуємо наступне диференціальне рівняння

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{k_T}{c\rho_0 R_V}(T_\infty - T) - \frac{r_w}{c} \frac{k_m}{R_V}(w_0 - w_\infty)e^{-\frac{k_m \tau}{R_V}} \quad (5.47)$$

Рішення цього диференціального рівняння з початковою умовою  $T(0) = T_0$  має наступний вигляд

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_0 - T_1)e^{-\frac{k_T}{c\rho_0 R_V}\tau} - T_1 e^{-\frac{k_m \tau}{R_V}}, \quad (5.48)$$

$$\text{де } T_1 = \frac{r_w k_m \rho_0 (w_0 - w_\infty)}{k_m c \rho_0 - k_T}.$$

Це рівняння дозволяє розраховувати температуру матеріалу в процесі сушіння. Так, наприклад, можна розрахувати середню температуру матеріалу наприкінці процесу сушіння. Виходячи з (5.46) тривалість сушіння до заданого кінцевого вологовмісту  $w_k$  складає

$$\tau_c = \frac{R_V}{k_m} \ln \left( \frac{w_0 - w_\infty}{w_k - w_\infty} \right). \quad (5.49)$$

Підставляючи це рівняння у (5.48) отримуємо температуру матеріалу  $T_k$  наприкінці процесу сушіння

$$T_k = T_\infty - (T_\infty - T_0 - T_1) e^{-\frac{k_T}{c\rho_0 R_V} \tau_c} - T_1 \left( \frac{w_0 - w_\infty}{w_k - w_\infty} \right), \quad (5.50)$$

**Приклад.** Отримати модель змінювання температури продукту у процесі кондуктивного сушіння у тонкому шарі. Врахувати залежність теплоємності продукту від вологовмісту. Кінетику вологовмісту описати експоненціальним законом.

**Розв'язання.** Для отримання моделі скористуємось рівнянням кінетики теплопередачі (8.7). Як і у випадку конвекційного сушіння будемо вважати, що теплота всередині тіла переноситься тільки дифузійно, внутрішнім джерелом стоку теплоти є процес фазового перетворення води у пару, тепловий потік через тонкий шар продукту вважаємо постійним, бо він передається кондуктивно від стінки з постійною температурою  $T_2$  до навколишнього середовища з постійною температурою  $T_1$ .

Кінетику вологовмісту будемо описувати рівнянням (5.46)

$$w = w_\infty + (w_0 - w_\infty) e^{-\frac{k_m}{\delta} \tau},$$

де  $\delta$  - товщина шару продукту.

Тому можна записати наступне диференціальне рівняння кінетики температури під час кондуктивного сушіння

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{k_T}{c(w)\rho_0\delta} (T_2 - T_1) - \frac{r_w}{c(w)} \frac{k_m}{\delta} (w_0 - w_\infty) e^{-\frac{k_m}{\delta} \tau},$$

де  $k_T$  - коефіцієнт теплопередачі  $k_T = \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta}{\lambda} \right)^{-1}$ .

З урахуванням рівняння для кінетики вологовмісту, маємо наступний вираз для теплоємності продукту

$$c(w) = c_0 + c_w (w_0 - w_\infty) e^{-\frac{k_m}{\delta} \tau}.$$

Підставляючи, це рівняння у диференціальне рівняння кінетики температури, отримуємо

$$\frac{dT}{d\tau} = \frac{K_1}{1 + c_1 e^{-\frac{k_m \tau}{\delta}}} - \frac{K_2}{1 + c_1 e^{-\frac{k_m \tau}{\delta}}} e^{-\frac{k_m \tau}{\delta}},$$

де

$$K_1 = \frac{k_T}{c_0 \rho_0 \delta} (T_2 - T_1); \quad K_2 = \frac{r_w}{c_0} \frac{k_m}{\delta} (w_0 - w_\infty); \quad c_1 = \frac{c_w}{c_0} (w_0 - w_\infty)$$

Рішення цього диференціального рівняння з початковою умовою  $T(0) = T_0$ , має наступний вигляд

$$T = T_0 + K_1 \tau + (K_1 c_1 + K_2) \frac{\delta}{c_1 k_m} \ln \left( \frac{1 + c_1 e^{-\frac{k_m \tau}{\delta}}}{1 + c_1} \right).$$

Таким чином, модель змінювання температури продукту у процесі кондуктивного сушіння отримано.

#### 5.4.3. Моделювання кінетики високотемпературних методів сушіння

Особливістю високотемпературних методів сушіння є нагрівання матеріалу, що висушується до температури вищої за температуру кипіння води при заданому зовнішньому тиску. При цьому процес масоперенесення значно інтенсифікується за рахунок виникнення конвекційного перенесення маси, яке ще називають фільтраційним перенесенням. Якщо знехтувати іншими механізмами масоперенесення, а саме термодифузією та за рахунок деформацій, то у рівнянні (5.31) залишаться тільки дві найсуттєвіші складових

$$\vec{j}_m = -\rho_0 a_m \nabla w - \rho_0 a_p c_p^a \nabla p. \quad (5.51)$$

З урахуванням цього середній дифузійний потік вологи згідно (5.10) при  $\bar{C} = \rho_0 w$  дорівнює

$$j^d = -\rho_0 \frac{w - w_\infty}{1/\beta + R_V / a_m}, \quad (5.52)$$

а середній конвекційний потік

$$j^k = -\rho_0 a_p c_p^a \frac{P - P_\infty}{R_V}, \quad (5.53)$$

де  $p$  - середній тиск парогазової суміші у середині тіла,  $p_\infty$  - тиск газу у навколишньому середовищі.

Відповідно диференціальне рівняння кінетики вологовмісту на підставі (5.9) з урахуванням (5.52), (5.53) приймає наступний вигляд

$$\frac{dw}{d\tau} = -\frac{w - w_\infty}{R_V(1/\beta + R_V/a_m)} - \frac{a_p c_p^a}{R_V^2} (p - p_\infty). \quad (5.54)$$

Рівняння для кінетики тиску отримаємо з рівняння масопередачі (5.9) за умов, що концентрація вологи пов'язана з тиском коефіцієнтом ємності вологого повітря в пористому тілі,  $\bar{C} = \rho_0 c_p^a p$ , а джерелом пари є процес кипіння води у процесі сушіння  $I = -\varepsilon_w \rho_0 \frac{dw}{d\tau}$

$$\rho_0 c_p^a \frac{dp}{d\tau} = -\frac{\rho_0 a_p c_p^a}{R_V^2} (p - p_\infty) - \varepsilon_w \rho_0 \frac{dw}{d\tau}. \quad (5.55)$$

Підставляючи у це рівняння (5.54) отримуємо наступне диференціальне рівняння кінетики тиску парогазової суміші у процесі сушіння

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{(1 - \varepsilon_w) a_p}{R_V^2} (p - p_\infty) + \frac{\varepsilon_w (w - w_\infty)}{c_p^a R_V (1/\beta + R_V/a_m)}. \quad (5.56)$$

Запишемо отриману систему диференціальних рівнянь (5.54), (5.56) у критеріальному вигляді. Запровадимо безрозмірні змінні

$$w^* = \frac{w_0 - w}{w_0 - w_\infty}; \quad p^* = \frac{p - p_0}{p_0}.$$

У якості безрозмірного часу використаємо число Фур'є фільтраційне  $Fo_p = a_p \tau / R_V^2$ . Тоді отримуємо наступну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{dw^*}{dFo_p} = -\frac{Lu \cdot Bi_m}{Lu_p (1 + Bi_m)} w^* - Ra \cdot p^*. \quad (5.57)$$

$$\frac{dp^*}{dFo_p} = -\frac{\varepsilon_w}{Ra} \frac{Lu \cdot Bi_m}{Lu_p (1 + Bi_m)} w^* - (1 - \varepsilon_w) \cdot p^*. \quad (5.58)$$

Ця система рівнянь вирішується методом виключення невідомих шляхом диференціювання (див. розділ 4.3.1). Тоді отримаємо наступні два диференціальних рівняння відносно вологовмісту та тиску

$$\frac{d^2 w^*}{d^2 \text{Fo}_p} + 2\beta \cdot \frac{dw^*}{d \text{Fo}_p} + \omega^2 \cdot w^* = 0, \quad (5.59)$$

$$\frac{d^2 p^*}{d \text{Fo}_p^2} + 2\beta \cdot \frac{dp^*}{d \text{Fo}_p} + \omega^2 \cdot p^* = 0, \quad (5.60)$$

де

$$\beta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Lu} \cdot \text{Bi}_m}{\text{Lu}_p (1 + \text{Bi}_m)} + (1 - \varepsilon_w) \right],$$

$$\omega = \sqrt{\frac{\text{Lu} \cdot \text{Bi}_m (1 - 2\varepsilon_w)}{\text{Lu}_p (1 + \text{Bi}_m)}}.$$

Рішення диференційного рівняння (5.59) з початковими умовами

$$w^* \Big|_{\text{Fo}_p=0} = 1; \quad \frac{dw^*}{d \text{Fo}_p} \Big|_{\text{Fo}_p=0} = - \frac{\text{Lu} \cdot \text{Bi}_m}{\text{Lu}_p (1 + \text{Bi}_m)},$$

має наступний вигляд

$$w^* = \frac{k_3 + k_2}{k_2 - k_1} e^{-k_1 \tau} + \left( 1 - \frac{k_3 + k_2}{k_2 - k_1} \right) \cdot e^{-k_2 \tau}, \quad (5.61)$$

де введені позначення

$$k_1 = \beta - \sqrt{\beta^2 - \omega^2}; \quad k_2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - \omega^2}; \quad k_3 = - \frac{\text{Lu} \cdot \text{Bi}_m}{\text{Lu}_p (1 + \text{Bi}_m)}.$$

Рішення диференційного рівняння (5.60) з початковими умовами

$$p^* \Big|_{\text{Fo}_p=0} = 0; \quad \frac{dp^*}{d \text{Fo}_p} \Big|_{\text{Fo}_p=0} = - \frac{\varepsilon_w}{\text{Ra}} \frac{\text{Lu} \cdot \text{Bi}_m}{\text{Lu}_p (1 + \text{Bi}_m)},$$

має наступний вигляд



$$p^* = \frac{k_4}{k_2 - k_1} (e^{-k_1\tau} - e^{-k_2\tau}), \quad (5.62)$$

де 
$$k_4 = \frac{\varepsilon_w}{Ra} \frac{Lu \cdot Bi_m}{Lu_p (1 + Bi_m)}.$$

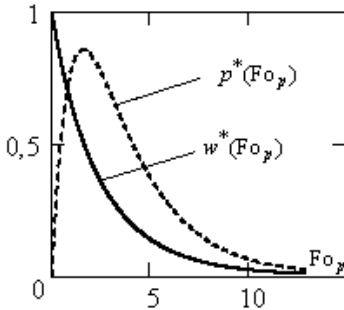


Рис. 5.1. Кинетика безрозмірного вологвмісту та тиску парогазової суміші у процесі високотемпературного сушіння.

Таким чином рівняння (5.61), (5.62) є моделлю високотемпературного сушіння, бо дозволяють розраховувати вплив зовнішніх параметрів та фізичних властивостей тіла на кінетику середнього вологвмісту тіла та тиску парогазової суміші в ньому.

На рис. 5.1 наведено розрахунки кінетики високотемпературного сушіння за цими рівняннями.

#### 5.4.4. Моделювання кінетики деформації у процесі сушіння

Як відомо харчові продукти відносяться до колоїдних каплярно-пористих тіл, тому при сушінні спостерігається явище зсідання, яке викликано взаємодією колоїдних частинок. При зволоження висушені харчові продукти напроти набрякають та збільшуються у об'ємі. Отримаємо модель цих явищ.

Будемо вважати, що реологічною моделлю харчової сировини у процесі сушіння є модель в'язко-пружного тіла Кельвіна-Фойгта, згідно якої внутрішні напруження у процесі деформування

$$\sigma = E_y \varepsilon - \eta_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\tau}, \quad (5.63)$$

де  $E_y$  - модуль об'ємної пружності, Па;  $\eta_\varepsilon$  - ефективна в'язкість, Па·с;  $\varepsilon$  - відносна деформація тіла,  $\varepsilon = (R_{V0} - R_V) / R_{V0}$  ( $R_V$  - характерний розмір тіла).

Для спрощення моделі будемо вважати, що прискорення при деформації тіла нескінченно малі, тобто у процесі сушіння виконується умова рівноваги пружних сил та сил тертя

$$E_y \varepsilon = \eta_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (5.64)$$

При цьому, джерелом пружних сил є процес зсідання, який описується емпіричним коефіцієнтом лінійного зсідання

$$\varepsilon = \gamma_w \Delta w. \quad (5.65)$$

де  $\Delta w = w - w_\infty$ .

Для кінетики вологовмісту використаємо експоненціальну модель (5.46). З урахуванням цього замість (5.64) отримуємо наступне диференціальне рівняння кінетики деформування тіла у процесі сушіння

$$E_y \gamma_w (w_0 - w_\infty) e^{-\frac{k_m \tau}{R_{V0}}} = \eta_\varepsilon \frac{d\varepsilon}{d\tau}. \quad (5.66)$$

Його рішення за початкової умови  $\varepsilon(0) = 0$  має наступний вигляд

$$\varepsilon = \frac{R_{V0} E_y \gamma_w (w_0 - w_\infty)}{k_m \eta_\varepsilon} \left( 1 - e^{-\frac{k_m \tau}{R_{V0}}} \right). \quad (5.67)$$

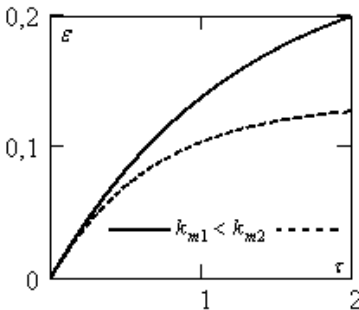


Рис. 5.2. Кінетика відносної деформації харчової сировини у процесі сушіння.

На рис. 5.2 наведена типова кінетика відносної деформації харчової сировини у процесі сушіння. Як випливає з отриманого рівняння, чим більший коефіцієнт масопередачі  $k_m$ , тим менше відносна деформація тіла у процесі сушіння.

Максимальне відносне зсідання тіла у процесі сушіння знайдемо за умов

$$k_m \tau / R_{V0} \gg 1$$

$$\varepsilon_\infty = \frac{R_{V0} E_y \gamma_w (w_0 - w_\infty)}{k_m \eta_\varepsilon}. \quad (5.68)$$

**Приклад.** З аналізу експериментальних даних про кінетику вологовмісту та деформації отримати реологічні характеристики продукту у процесі сушіння.

**Розв'язання.** Скористуємось рівнянням для максимального відносного зсідання у процесі сушіння (5.68). До його складу входить відношення модуля об'ємної пружності та ефективної в'язкості

$$\frac{E_y}{\eta_\varepsilon} = \frac{R_{V0} \gamma_w (w_0 - w_\infty)}{k_m \varepsilon_\infty}.$$

Величину  $k_m / R_{V0}$ , та  $(w_0 - w_\infty)$  визначаємо з регресійного аналізу кінетики вологовмісту  $w(\tau)$ , максимальну деформацію  $\varepsilon_\infty$  визначаємо з кінетики деформації  $\varepsilon(\tau)$ , величину  $\gamma_w$  визначаємо з залежності  $\varepsilon(w)$  та розраховуємо реологічну характеристику  $E_y / \eta_\varepsilon$ .

### Питання для самоперевірки

1. Назвіть основні масообмінні процеси, які використовуються у харчових технологіях.
2. Якими рівняннями описується: молекулярна дифузія, конвекційна дифузія, конвекційний масообмін на межі фаз?
3. З якого рівняння визначається динаміка концентраційних полів у речовині під час масообмінних процесів?
4. Запишіть рівняння кінетики масопередачі та поясніть сенс його складових.
5. Який критерій подібності використовується для моделювання масообмінних процесів?
6. За яких припущень можна отримати модель динаміки процесу екстракції?
7. Які фізичні показники можна отримати за результатами обробки ізотерм сорбції десорбції?
8. Які моделі використовують для опису кінетики сушіння?

## РОЗДІЛ 6

### МОДЕЛЮВАННЯ ХІМІЧНИХ ТА БІОХІМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Хімічні та біохімічні процеси широко застосовуються в харчовій промисловості. Хімічні реагенти використовують при очищенні дифузійного соку, освітлюванні цукрового сиропу, соків та вина, виробництві жирів, рафінуванні рослинного масла, гідролізі крохмалю, очищенню стічних вод та ін. Біохімічні процеси, це такі які відбуваються завдяки спрямованій життєдіяльності мікроорганізмів внаслідок якої виробляється біомаса та рідкі або газоподібні продукти метаболізму. Біохімічні процеси використовують у бродильному та спиртовому виробництвах при отриманні вина, пива, спирту, гліцерину, хлібопекарських дріжджів, квасу, оцту, молочної та інших кислот.

В основі моделювання хімічних та біохімічних процесів лежать закони хімічної та біохімічної кінетики.

#### 6.1. Основні закони хімічної кінетики та методи моделювання хімічних реакцій

Хімічна кінетика вивчає закономірності протікання хімічних процесів в часі і вплив різних умов на хімічні перетворення. Кількісно швидкість хімічної реакції визначають числом молекул, що реагують в одиницю часу. Для того, щоб можна було порівнювати швидкості різних реакцій, число молекул відносять до одиниці об'єму. У зв'язку з цим швидкість реакції визначають як число молекул або молей даної речовини, що реагує в одиницю часу в одиниці об'єму.

Так для системи, об'єм якої з часом залишається постійним, швидкість реакції за заданим компонентом  $A$  визначається наступним чином

$$v_A = \frac{dc_A}{d\tau}, \quad (6.1)$$

де  $c_A$  - концентрація компонента  $A$ ,  $\text{м}^{-3}$  або (моль/ $\text{м}^3$ );  $\tau$  - час, с.

Згідно закону діючих мас, швидкість даної реакції пропорційна добутку концентрацій речовин, що реагують. Причому кожна з концентрацій береться в степені, яка дорівнює стехіометричному коефіцієнту у рівнянні реакції, а коефіцієнтом пропорційності служить константа швидкості реакції.

$$v_A = kc_A^a c_B^b, \quad (6.2)$$

де  $k$  - константа швидкості хімічної реакції, яка залежить від температури;  $c_A, c_B$  — концентрації реагуючих речовин  $A$  і  $B$ ;  $a, b$  — порядки реакції за даним компонентом:  $n=a+b$  - сумарний порядок реакції.

Слід зауважити, що цей закон має місце для ідеальних газів або розбавлених розчинів.

Якщо протікання хімічної реакції не пов'язане з перенесенням маси і енергії, то ці закономірності відносять до мікрокінетики, якщо при протіканні хімічної реакції враховується перенесення маси і енергії, то - до макрокінетики. Мікрокінетика вивчає взаємодії в хімічному процесі на рівні молекул в масштабах, що не перевищують масштабів вільного пробігу молекул, макрокінетика — на рівні агрегатів молекул в масштабах вихорів, крапель, газових пухирців та інших макрочастинок. При цьому треба враховувати явища масо та тепло перенесення, що значно ускладнює відповідну модель.

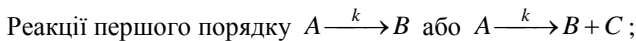
Для харчових виробництв саме моделювання макрокінетики дозволяє розраховувати режимні параметри процесу або технічні характеристики апарату.

Залежно від зовнішніх чинників хімічні процеси протікають в кінетичній, дифузійній або змішаній областях. Для хімічних процесів, що протікають у кінетичній області, швидкість хімічної реакції лімітує весь процес, а швидкості руху потоків речовини та їх фізичні властивості помітно не впливають на процес.

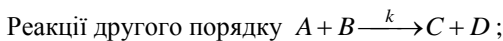
Для хімічних процесів, що протікають в дифузійній області, лімітуючим чинником є швидкість дифузії реагентів в зоні реакції, яка залежить від швидкостей руху потоків та їх фізичних властивостей.

Для процесів, що відбуваються в змішаній області, швидкості хімічного перетворення та дифузії приблизно однакові. При цьому чинником, що лімітує процес, буде найбільш повільна стадія.

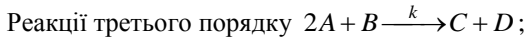
Вид кінетичного рівняння визначається механізмом реакції. За типом механізму розрізняють реакції прості і складні. Простими називаються такі реакції, які протікають в одну стадію і в одному напрямку.



$$\text{кінетичне рівняння} \quad \frac{dc_A}{d\tau} = -kc_A . \quad (6.3)$$



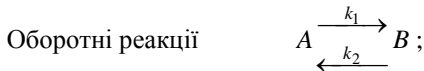
$$\text{кінетичне рівняння} \quad \frac{dc_A}{d\tau} = -kc_A c_B . \quad (6.4)$$



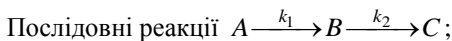
кінетичне рівняння  $\frac{dc_A}{d\tau} = -kc_A^2c_B$ . (6.5)

Більшість хімічних реакцій є складними. У складній реакції одна і та ж речовина може брати участь як початковий або кінцевий реагент в декількох стадіях. При цьому кожна стадія складного процесу протікає за законом реакцій простих типів, тому використовуючи закономірності простих реакцій, можна написати вираз для швидкості утворення або зникнення будь-якого компонента в цій стадії. Результуюча швидкість такої реакції дорівнює алгебраїчній сумі швидкостей всіх стадій.

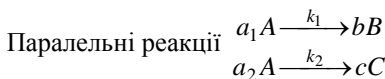
Складні реакції описуються системою диференціальних рівнянь. Їх можна класифікувати таким чином.



кінетичні рівняння  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc_A}{d\tau} = -k_1c_A + k_2c_B \\ \frac{dc_B}{d\tau} = k_1c_A - k_2c_B \end{array} \right\}$ . (6.6)



кінетичні рівняння  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dc_A}{d\tau} = -k_1c_A \\ \frac{dc_B}{d\tau} = k_1c_A - k_2c_B \\ \frac{dc_C}{d\tau} = k_2c_B \end{array} \right\}$ . (6.7)



$$\left. \begin{array}{l} \frac{dc_A}{d\tau} = -k_1 c_A^{a_1} - k_2 c_A^{a_2} \\ \frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_A^b \\ \frac{dc_C}{d\tau} = k_2 c_A^c \end{array} \right\} \quad (6.8)$$

кінетичні рівняння

Таким чином, кінетичні закономірності хімічних реакцій можуть бути описані за допомогою одного або системи звичайних диференціальних рівнянь відносно похідних за часом від концентрацій реагентів. Праві частини таких рівнянь є степеневими функціями шуканих концентрацій реагентів  $c_A, c_B, c_C, \dots$ . При цьому знак перед коефіцієнтами реакції у правій частині кінетичних рівнянь вибирається “+”, якщо це відповідає збільшенню концентрації компонента у лівій частині реакції та “-”, якщо це призведе до зменшення концентрації цього компонента.

В умовах постійної температури та тиску середовища константи швидкості  $k_1, k_2$  можна розглядати як постійні величини. Якщо процес протікає за змінної температури, то треба враховувати температурну залежність константи реакції згідно рівняння Ареніуса

$$k = k_0 e^{-\frac{E}{RT}}, \quad (6.9)$$

де  $k_0$  - стала, що залежить від числа зіткнень реагуючих молекул;  $E$  - енергія активації, Дж/моль,  $R$  – газова постійна, Дж/(моль К);  $T$  - абсолютна температура, К

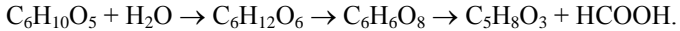
При вивченні кінетики хімічних реакцій найчастіше вирішують одне з наступних трьох завдань:

1. Розрахунок концентрації компонентів системи в певний момент часу або часу за відомим кінетичним рівнянням реакції.
2. Визначення константи швидкостей окремих елементарних стадій за відомими кінетичними кривими компонентів реакції, знайдених у експерименті.
3. Визначення невідомої кінетичної моделі складної реакції на підставі наявних експериментальних даних.

Застосування методів математичного моделювання значно полегшує і прискорює вивчення кінетики хімічних реакцій. Для відомого механізму реакції можна легко скласти математичний опис, користуючись моделями простіших реакцій. Для кожного компонента можна записати диференціальне рівняння або систему диференціальних рівнянь. За умов завдання початкових значень для концентрацій компо-

нентів ці рівняння мають однозначне розв'язання, які в сукупності дають повне уявлення про кінетику хімічних перетворень. Лінійні системи рівнянь мають аналітичне рішення, нелінійні можна розв'язувати із застосуванням наближених методів обчислення.

**Приклад.** Знайти кінетичну модель процесу гідролізу рослинних тканин, тобто перетворення полісахаридів на моносахариди та розкладання моносахаридів в оксиметил-фурфурол та інші речовини



**Розв'язання.** Складемо схему реакції. Цю реакцію можна розглядати, як реакцію послідовного типу (6.7). Позначимо як  $c_A$  концентрацію целюлози ( $C_6H_{10}O_5$ ), як  $c_B$  концентрацію глюкози ( $C_6H_{12}O_6$ ), як  $c_C$  концентрацію оксиметил-фурфуролу ( $C_6H_6O_8$ ). Концентрації компонентів у початковий час відповідно дорівнюють  $c_A(\tau) = c_{A0}$ ,  $c_B(0) = 0$ ,  $c_C(0) = 0$ .

З урахуванням цього рішенням першого з системи рівнянь (6.7) є

$$c_A = c_{A0} e^{-k_1 \tau}.$$

Підставляючи це рівняння у друге рівняння системи (6.7), отримаємо наступне диференційне рівняння

$$\frac{dc_B}{d\tau} = k_1 c_{A0} e^{-k_1 \tau} - k_2 c_B c_A.$$

Його рішення з урахуванням початкових умов має наступний вигляд

$$c_B = c_{A0} \frac{k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2 \tau} - e^{-k_1 \tau}).$$

Підставляючи отримане рівняння у третє рівняння системи (6.7), отримаємо останнє диференційне рівняння

$$\frac{dc_C}{d\tau} = k_2 c_{A0} \frac{k_1}{k_1 - k_2} (e^{-k_2 \tau} - e^{-k_1 \tau}).$$

Його рішення з урахуванням початкових умов має наступний вигляд



$$c_C = c_{A0} \left[ 1 + \frac{k_2}{k_1 - k_2} \left( e^{-k_1 \tau} - \frac{k_1}{k_2} e^{-k_2 \tau} \right) \right].$$

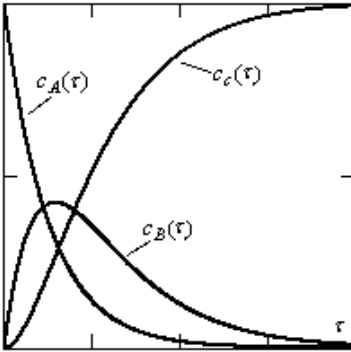


Рис. 6.1. Кінетика процесу гідролізу рослинних тканин.

На рис. 6.1 наведено розрахункову кінетику процесу гідролізу згідно отриманих рівнянь. Як видно концентрація проміжного компонента реакції (гексози) має найбільше значення тільки у певний час. По закінченні процесу гідролізу залишається тільки кінцевий продукт реакції.

Отримана модель дозволяє за наявності відповідних експериментальних даних відшукувати невідомі константи реакції, що входить до кінетичних рівнянь,

шляхом регресійного аналізу.

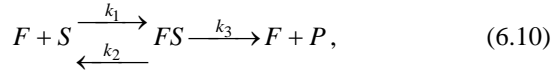
## 6.2. Основні закони біохімічної кінетики та методи моделювання біохімічних реакцій

Біологічна кінетика вивчає закономірності явищ, що протікають в живій природі. Для харчових виробництв найбільше значення має кінетика популяцій. Біохімічна кінетика має свої особливості, пов'язані з особливостями ферментативних реакцій. Ферменти не порушують рівноваги реакції і в цьому вони не відрізняються від звичайних каталізаторів абіогенної природи. Ферментативні реакції приводять до повного виходу продуктів без утворення побічних речовин, причому за відповідних фізіологічних умов їх швидкість на десяток порядків вища, ніж без ферменту.

Ці особливості біохімічних реакцій відображає форма рівнянь біохімічної кінетики, яка декілька відрізняється від форми рівнянь хімічної кінетики. Вивчення кінетичних закономірностей біохімічного каталітичного процесу полягає у встановленні впливу концентрацій ферменту, субстрату, активаторів, інгібіторів, а також фізико-хімічних чинників (температури, іонної сили, діелектричної проникності, тиску)

на швидкість ферментативних реакцій без урахування характеру руйнівних сил.

Біохімічний процес можна розглядати як хімічну реакцію із специфічним каталізатором-ферментом. При цьому фермент на початку утворює фермент-субстратний комплекс зі своїм субстратом, а потім цей комплекс розпадається із звільненням вільного ферменту і продукту реакції. У символічному зображенні однострукатна ферментативна реакція записується наступним чином



де  $F$  - фермент;  $S$  - субстрат;  $FS$  - фермент-субстратний комплекс;  $P$  - інгібітор.

Кінетика зростання популяцій описується рівнянням Моно. Згідно цієї моделі концентрація біомаси при безперервному культивуванні мікроорганізмів змінюється за наступними рівняннями

$$\frac{dc}{d\tau} = \mu c; \quad (6.11)$$

$$c = c_0 + k(S_0 + S); \quad (6.12)$$

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S}, \quad (6.13)$$

де  $c_0$ ,  $c$  - початкове та поточне значення концентрації біомаси,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\tau$  - час,  $c$ ;  $k$  — стала;  $S_0$ ,  $S$  - початкова та поточна концентрації субстрату,  $\text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\mu_{\max}$ ,  $\mu$  - максимальна та поточна питома швидкість росту мікроорганізмів,  $1/\text{с}$ ;  $k_S$  - константа Моно.

Існують інші моделі для питомої швидкості росту мікроорганізмів, які враховують концентрацію інгібітору та інші етапи в ланцюзі метаболічних процесів.

Так згідно моделі Моно-Ієрусалимського питома швидкість зростання мікроорганізмів визначається наступним рівнянням

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} \frac{k_P}{k_P + P}, \quad (6.14)$$

де  $P$  — концентрація інгібіруючого метаболіту,  $k_P$  — стала.

Модель М.І. Миколаєва

$$\mu = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} \frac{k_{PS}}{k_{PS} + (S_0 - S)}, \quad (6.15)$$

де  $k_{PS}$  — стала зростання субстрату.

**Приклад.** Знайти кінетичну модель змінювання кількості субстрату у біохімічній реакції зростання популяції за моделлю Моно.

**Розв'язання.** Згідно моделі Моно швидкість змінювання субстрату знайдемо диференціюючи рівняння (6.12),

$$\frac{dc}{d\tau} = k \frac{dS}{d\tau},$$

та враховуючи (6.11), (6.13), отримуємо наступне

$$k \frac{dS}{d\tau} = \mu_{\max} \frac{S}{k_S + S} [c_0 + k(S_0 + S)].$$

Для спрощення рівняння запровадимо безрозмірну змінну  $S^* = S/S_0$  та представимо це рівняння у вигляді зручному для інтегрування

$$\mu_{\max} d\tau = \frac{k(k_2 + S^*)}{S^*(k_1 + kS^*)} dS^*,$$

$$\text{де } k_1 = \frac{c_0 + kS_0}{S_0}, \quad k_2 = \frac{k_S}{S_0}$$

Інтегруючи останнє рівняння отримуємо

$$\mu_{\max} \tau = \ln \left[ C(k_1 + kS^*)^{1-n} S^{*n} \right],$$

$$\text{де } n = kk_2 / k_1$$

Константу інтегрування  $C$  визначимо з початкової умови  $S^*(0) = 1$ . Звідки

$$C = (k_1 + k)^{n-1}.$$

Остаточно рівняння кінетики змінювання концентрації субстрату

$$\mu_{\max}\tau = \ln \left[ (k_1 + k)^{n-1} (k_1 + kS^*)^{1-n} S^{*n} \right],$$

або

$$(k_1 + kS^*)^{1-n} S^{*n} = (k_1 + k)^{1-n} e^{\mu_{\max}\tau}.$$

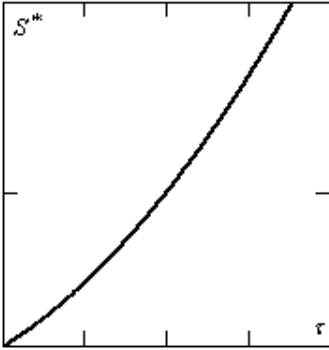


Рис. 6.2. Кінетика змінювання концентрації субстрату у біохімічній реакції за моделлю Моно.

На рис. 6.2 наведено графік змінювання безрозмірної концентрації субстрату у біохімічній реакції за моделлю Моно.

Як бачимо з цього прикладу рівняння кінетики субстрату у біохімічній реакції є трансцендентним, тобто таким, що немає аналітичного рішення відносно концентрації субстрату. Тому для опису кінетики біохімічних процесів, що відбуваються в харчових виробництвах, застосовують наступні види спрощених моделей, що описують швидкість перетворення субстрату.

Реакція першого порядку

$$\frac{dS}{d\tau} = -kS. \quad (6.16)$$

Реакція за рівнянням Міхаеліса — Ментен

$$\frac{dS}{d\tau} = -\frac{kS}{k_s + S}. \quad (6.17)$$

Реакція за рівнянням Міхаеліса — Ментен з інгібуванням

$$\frac{dS}{d\tau} = S - \frac{kS}{k_s + S + k_i S^2}. \quad (6.18)$$

Реакція за степеневим рівнянням

$$\frac{dS}{d\tau} = -kS^n . \quad (6.19)$$

Ці рівняння задовільно описують процеси мікробіологічного синтезу в харчовій промисловості. Коефіцієнти в рівняннях моделей, характеризують конкретні умови процесів. Використовуючи рівняння (6.16) - (6.19) для регресійного аналізу експериментальної кінетики певних біохімічних реакцій можна знайти невідомі кінетичні коефіцієнти, а далі розраховувати режими проведення процесу та відповідне обладнання.