

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ, ДИНАМІЧНИЙ АНАЛІЗ ПОВЕДІНКИ  
ТА ОЦІНКА ЗАТУХАННЯ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ ПРИ ГОРИЗОН-  
ТАЛЬНОМУ ПОЛЬОТІ ГЕЛІКОПТЕРА З ПОСТІЙНОЮ ШВИДКІСТЮ**

**Ловейкін В.С., д.т.н., проф., Човнюк Ю.В., к.т.н., доц.,  
Сердюченко Ю.Ю., асист.**

*Національний університет біоресурсів і природокористування України*

**Діктерук М.Г., к.т.н., доц.**

*Київський національний університет будівництва і архітектури*

*Поведінка системи «гелікоптер-вантаж» аналізується за допомогою моделі двоточкового математичного маятника, коливання котрого відбуваються у потоці повітря. Визначаються основні кінематичні та динамічні характеристики руху системи, логарифмічний декремент коливань вантажу в залежності від швидкості переміщення точки підвісу, маси вантажу і довжини підвісу. Проведений якісний аналіз отриманих рішень динамічної задачі методом фазових портретів (класичного та вищих порядків) як для варіанту відсутності суттєвого впливу опору повітря, так і при його наявності.*

**Постановка задачі (проблеми).** Транспортування вантажів (зокрема, деревини) на зовнішній підвісці гелікоптера супроводжується коливаннями, які мають складний характер. Систему двох тіл – гелікоптер і вантаж на зовнішній підвісці (ЗП) – можна подати, як математичний маятник (ММ), де гелікоптер є несучим тілом, а вантаж – тілом, яке переноситься. Дану систему буде відрізняти величезне розмаїття фізичних явищ, характерних для ММ, у котрого точка підвісу може переміщуватись у різних напрямках з різними прискореннями.

Коливання вантажу можна подати, як результат складання поздовжніх, поперечних та крутих коливань. На різних етапах польоту переважають ті чи інші типи коливань. Так при злеті й польоті гелікоптера з вантажем до моменту досягнення останнім певної швидкості горизонтального польоту переважають поздовжні коливання, при польоті на маршруті й при різноманітних маневрах у горизонтальній площині в більшому ступені спостерігаються поперечні коливання. Насправді, важко виділити й точно назвати якийсь один тип коливань. Коливання вантажу перш за все залежать від довжини підвіски, котра визначає близькість вантажу до несучого гвинта (НГ) гелікоптера, який створює неоднорідний повітряний потік. Тип коливань та їх амплітуда залежать від аеродинамічної конфігурації вантажу та його стабілізації. На характер коливань справляють вплив: швидкість, напрямок і тривалість поривів вітру. Від дій пілота при пілотуванні гелікоптера залежить траєкторія руху точки підвісу маятника. У даній роботі розглядається кілька питань – визначаються основні кінематичні та динамічні характеристики системи «гелікоптер-канат-

вантаж» як при відсутності опору повітря (несуттєвий вплив), так і при його наявності, а також досліджений (та кількісно визначений) закон зміни у часі логарифмічного декременту коливань вантажу в залежності від швидкості горизонтального польоту гелікоптера, співвідношення мас гелікоптера й вантажу, а також довжини підвісу вантажу (канату).

**Аналіз публікацій по темі дослідження.** У роботах [4, 5] методами [1-3, 6] проведені дослідження поведінки вантажу на зовнішній підвісці гелікоптера, спосіб його стабілізації у польоті, дана кількісна оцінка затухання коливань вантажу при горизонтальному польоті гелікоптера з постійною швидкістю, проте, на думку авторів даної роботи, не у повній мірі проаналізовані основні характеристики можливих рухів таких систем за відсутності (чи при наявності) сил опору повітря особливо для випадку, коли маса гелікоптера одного порядку з масою вантажу. Кількісний аналіз задачі у такому випадку вимагає ще й якісного дослідження руху, наприклад, методом фазових портретів.

**Мета роботи** полягає у встановленні основних закономірностей поведінки та оцінці затухання коливань вантажу при горизонтальному польоті гелікоптера з постійною швидкістю як за наявності, так і при відсутності сил аеродинамічного опору.

**Виклад основного змісту дослідження.** Динамічний аналіз поведінки системи «гелікоптер-вантаж» при горизонтальному польоті з постійною швидкістю (аеродинамічний опір відсутній).

У якості моделі розглядуваної системи (рис. 1) обираємо загальновідому – рухомий плоский маятник (рухомою є точка підвісу).

На рис. 1 введені наступні позначення:  $x$  – координата положення у системі декартових координат гелікоптера (що розглядається як точкова маса  $m_1$ );  $V$  – швидкість руху гелікоптера вздовж осі  $Ox$  (вважаємо рух гелікоптера відбувається у площині  $XOY$  – модель плоского маятника);  $l$  – довжина канату (вважаємо його недеформівним);  $m_2$  – маса вантажу (вважаємо його точковим, причому  $m_1 \approx m_2$ );  $g$  – прискорення вільного падіння;  $\varphi$  – кут відхилення канату з вантажем  $m_2$  відносно вертикального положення. Таким чином, у межах даної моделі узагальненими координатами є  $x$  та  $\varphi$ , які, безумовно, є функціями часу  $t$ .

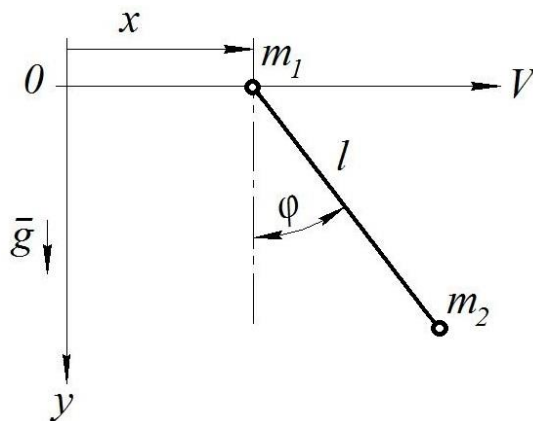


Рис. 1 – Модель задачі за відсутності аеродинамічного опору

Функція Лагранжа для рухомого плоского маятника має вид:

$$L = \frac{(m_1 + m_2)}{2} \cdot \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \cdot (l^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + 2l \cdot \dot{x} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi) + m_2 \cdot g \cdot l \cdot \cos \varphi, \quad (1)$$

при цьому  $m_2 = m_{екв}$ , де еквівалентна маса вантажу (дерево висотою  $H$  і радіусом поперечного перерізу  $R$ , щільністю  $\rho_{деф}$ ) визначається з наступних міркувань (рис. 2).

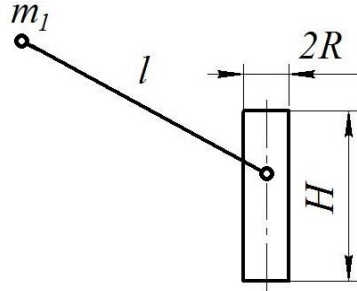


Рис. 2 – Схема розрахунку  $m_{екв}$  дерева

Момент інерції  $I_a$  маси, зображеної на рис. 2, визначається за допомогою теореми Штейнера:

$$I_a = I'_a + m \cdot l^2;$$

$$m = \rho_{деф} \cdot S \cdot H = \rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H; \quad (2)$$

$$I'_a = \frac{m}{12} \cdot (3R^2 + H^2);$$

$$I_a = \frac{m}{12} \cdot (3R^2 + H^2) + m \cdot l^2 = (\rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H) \cdot \left[ \frac{3R^2 + H^2}{12} + l^2 \right]; \quad (3)$$

$$m_{екв} \cdot l^2 = (\rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H) \cdot \left[ \frac{3R^2 + H^2}{12} + l^2 \right]; \quad (4)$$

$$m_{екв} = \frac{(\rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H) \cdot \left[ \frac{3R^2 + H^2}{12} + l^2 \right]}{l^2} = (\rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H) \cdot \left[ 1 + \frac{3R^2 + H^2}{12l^2} \right]. \quad (5)$$

Оцінка  $m_{екв}$  за співвідношенням (5) проведена для наступних значень параметрів:  $H = 20$  м;  $R = 1$  м;  $L = 70$  м, тоді:

$$m_{екв} = (\rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H) \cdot (1 + 7 \cdot 10^{-3}) = 1,007 \cdot \rho_{деф} \cdot \pi R^2 \cdot H, \quad (6)$$

тобто практично  $m_2 = m_{екв}$  співпадає з масою дерева.

Рівняння Лагранжа для функції (1) мають вид:

$$\begin{cases} g \cdot \sin \varphi + l \cdot \ddot{\varphi} + \dot{x} \cdot \cos \varphi = 0; \\ (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot l \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - m_2 \cdot l \cdot (\dot{\varphi})^2 \cdot \sin \varphi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Для варіанту  $\dot{x} = V = \text{const}$  система рівнянь (7) суттєво спрощується й зводиться до одного рівняння для  $\varphi$ :

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \sin \varphi + \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} \cdot \left\{ (\dot{\varphi})^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \ddot{\varphi} \cdot \cos^2 \varphi \right\} = 0, \quad (8)$$

де:  $\Omega^2 = \frac{g}{l}, ( ) \equiv \frac{d}{dt} ( )$ .

За своєю сутністю рівняння (8) можна подати у вигляді рівняння коливань «збуреного» математичного маятника:

$$\ddot{\varphi} + (\Omega^2 \cdot \sin \varphi) \cdot \frac{\left[ \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) + \frac{(\dot{\varphi})^2}{\Omega^2} \cdot \cos \varphi \right]}{\left[ \frac{m_1 + m_2}{m_2} - \cos^2 \varphi \right]} = 0. \quad (9)$$

Для  $\varphi = 1$  з (9) легко отримати наближене рівняння:

$$\ddot{\varphi} + \Omega^2 \cdot \varphi \cdot \frac{\left[ \left( \frac{m_1 + m_2}{m_2} \right) + \frac{(\dot{\varphi})^2}{\Omega^2} \right]}{\left[ \frac{m_1 + m_2}{m_2} - 1 \right]} = 0. \quad (10)$$

Розрахунки на ПЕОМ й чисельне інтегрування рівняння (9) здійснювалось за наступних значень параметрів:  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,81}{67}} \approx 0,3826 \text{ с}^{-1}$ ;  $f = \frac{\Omega}{2\pi} \approx 0,061 \text{ Гц}$ ;  $T = \frac{1}{f} = 16,4 \text{ с}$ ;  $m_1 = m_2 = 10^4 \text{ кг}$ . Відношення  $\frac{(\dot{\varphi})^2}{\Omega^2}$  обиралось різним. Слід зазначити, що при  $\dot{\varphi} < \Omega$  ведучим у системі «гелікоптер-вантаж» є гелікоптер, а при  $\dot{\varphi} > \Omega$  ситуація змінюється на протилежну.

На рис. 3-6 наведені результати розрахунку кінематичних параметрів системи «гелікоптер-вантаж».

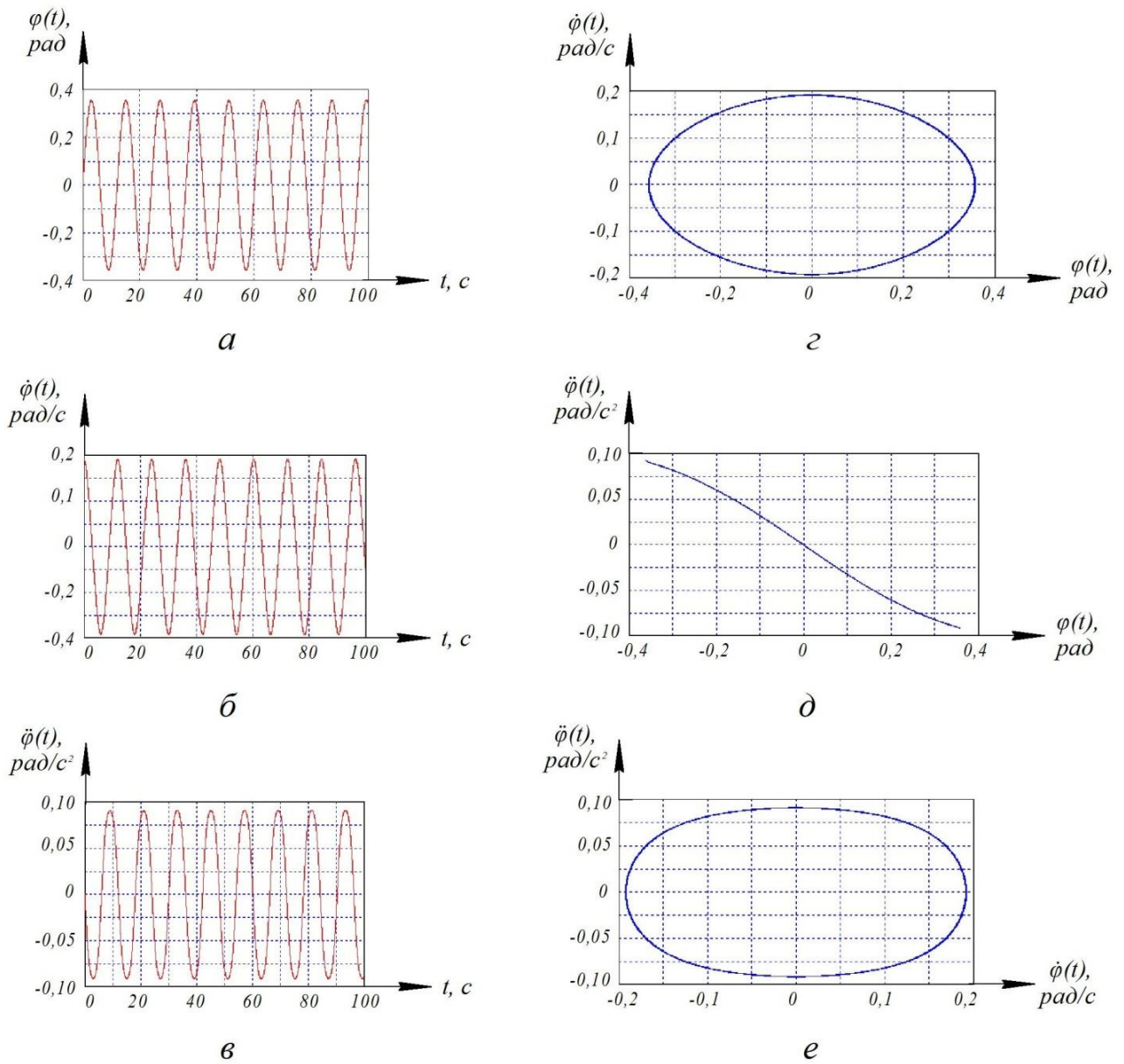


Рис. 3 – Графічна інтерпретація зміни кінематичних параметрів системи «гелікоптер-вантаж» при  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 0,5\Omega$ :

$a, б, в$  – залежності зміни у часі  $t$  кута відхилення  $\varphi$ , кутової швидкості  $\dot{\varphi}$  і кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$  відповідно;  $г$  – класичний фазовий портрет у координатах  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ;  $д$  і  $е$  – некласичні фазові портрети у координатах  $(\varphi, \ddot{\varphi})$  і  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  відповідно

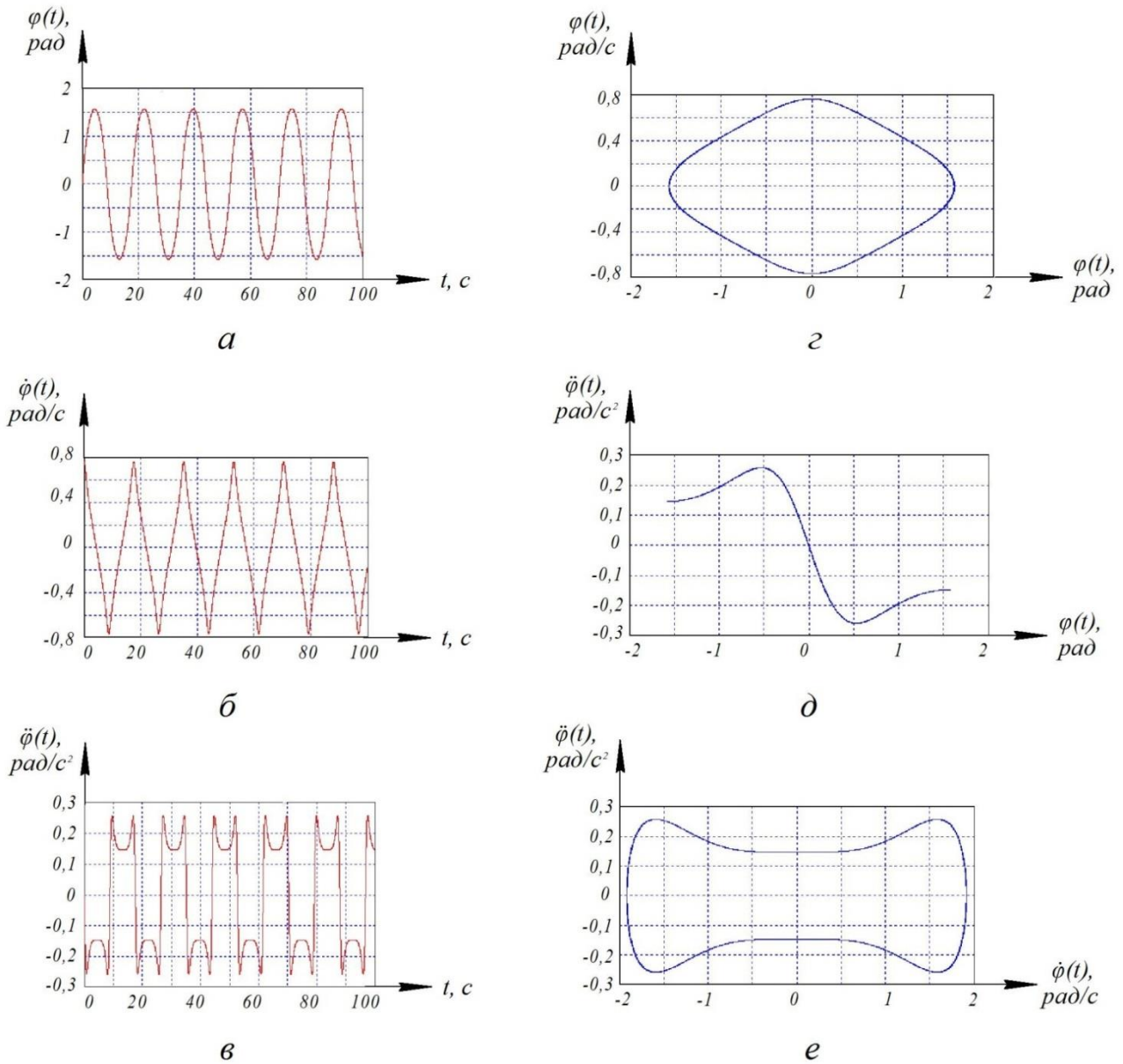


Рис. 4 – Графічна інтерпретація зміни кінематичних параметрів системи «гелікоптер-вантаж» при  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 2\Omega$ :

*a, б, в* – залежності зміни у часі  $t$  кута відхилення  $\varphi$ , кутової швидкості  $\dot{\varphi}$  і кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$  відповідно; *г* – класичний фазовий портрет у координатах  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ; *д* і *е* – некласичні фазові портрети у координатах  $(\varphi, \ddot{\varphi})$  і  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  відповідно

У кожному варіанті розрахунку задавались значення:  $\Omega (\equiv W)$ ,  $\dot{\varphi}|_{t=0}$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ . При заданих вихідних даних обчислювались на ПЕОМ залежності:  $\varphi(t)$ ,  $\dot{\varphi}(t)$ ,  $\ddot{\varphi}(t)$ , а також будувались фазові портрети: класичний  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ; некласичні (вищих порядків) –  $(\varphi, \ddot{\varphi})$ ,  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ . При значеннях  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 2,8273\Omega$  відбуваються радикальні зміни характеристик руху системи, і зокрема, її фазовий портрет суттєво змінюється (при цьому  $m_1 = m_2 = 10^4$  кг). При  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 3\Omega$  характеристики руху знову стають стабільними, як, до речі, й фазова траєкторія  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$ .

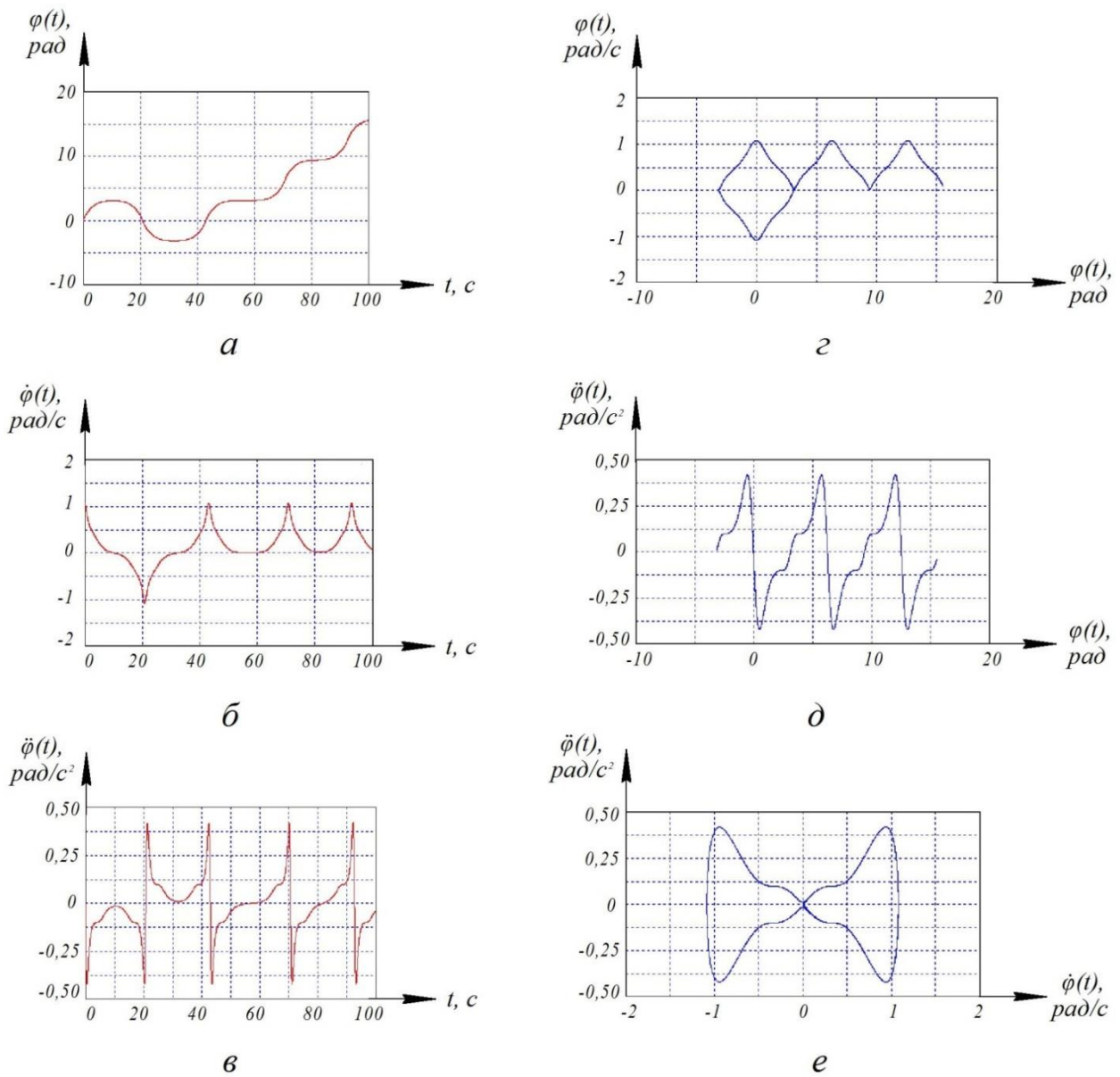


Рис. 5 – Графічна інтерпретація зміни кінематичних параметрів системи «гелікоптер-вантаж» при  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 2,8273\Omega$ :

$a, б, в$  – залежності зміни у часі  $t$  кута відхилення  $\varphi$ , кутової швидкості  $\dot{\varphi}$  і кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$  відповідно;  $г$  – класичний фазовий портрет у координатах  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ;  $д$  і  $е$  – некласичні фазові портрети у координатах  $(\varphi, \ddot{\varphi})$  і  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  відповідно.

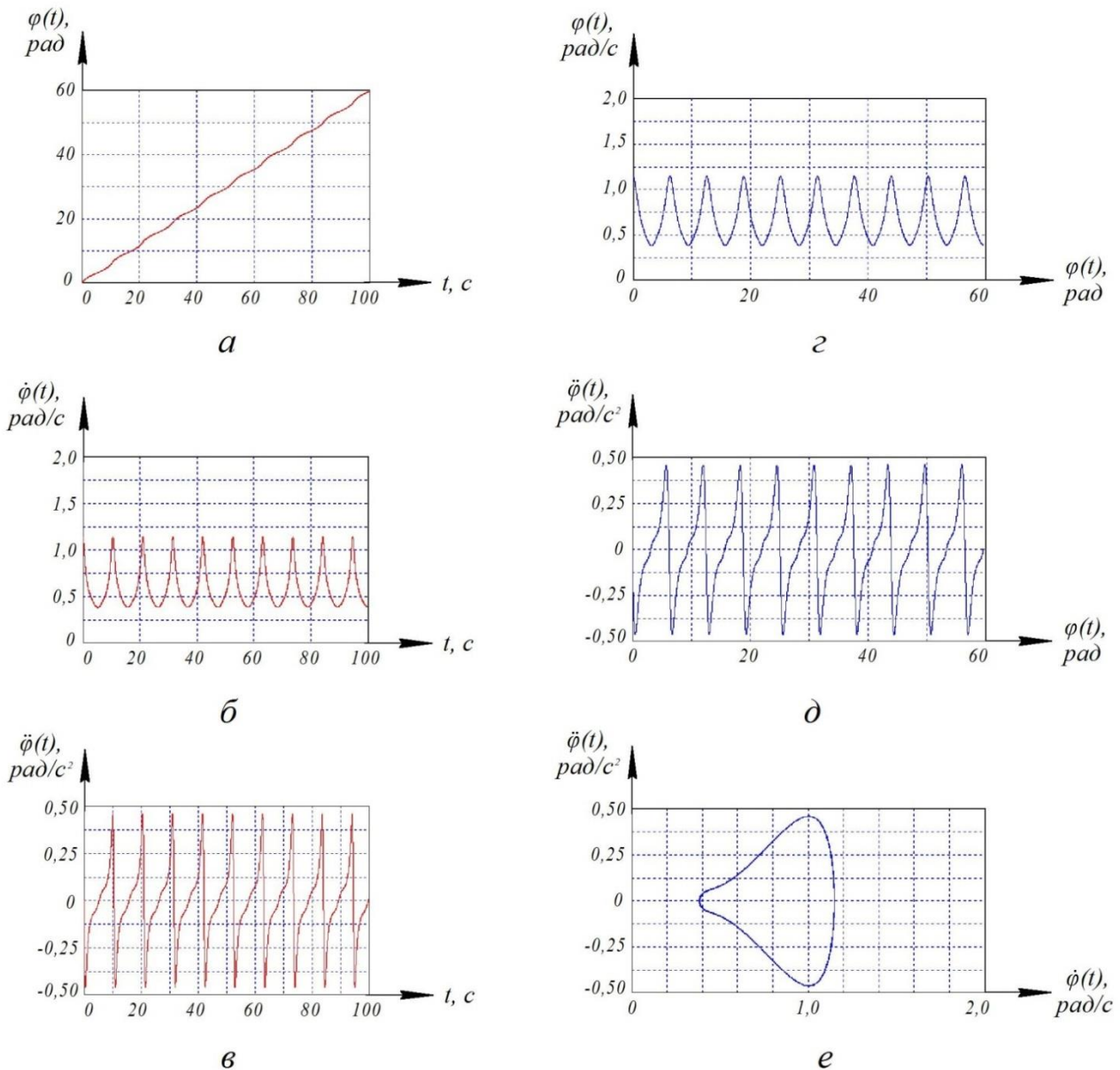


Рис. 6 – Графічна інтерпретація зміни кінематичних параметрів системи «гелікоптер-вантаж» при  $\dot{\varphi}|_{t=0} = 3\Omega$ :

*a, б, в* – залежності зміни у часі  $t$  кута відхилення  $\varphi$ , кутової швидкості  $\dot{\varphi}$  і кутового прискорення  $\ddot{\varphi}$  відповідно; *г* – класичний фазовий портрет у координатах  $(\varphi, \dot{\varphi})$ ; *д* і *е* – некласичні фазові портрети у координатах  $(\varphi, \ddot{\varphi})$  і  $(\dot{\varphi}, \ddot{\varphi})$  відповідно

Таким чином у даній роботі встановленні основні закономірності поведінки вантажу при горизонтальному польоті гелікоптера з постійною швидкістю як за наявності, так і при відсутності сил аеродинамічного опору.

### Список використаних джерел

1. Пановко Я.Г. Введение в теорию колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1971. – 360с.



2. Ландау Л.Д. Механика. / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1969. – 220с.
3. Мартынов А.К. Прикладная аэродинамика. / А.К. Мартынов. – М.: Машиностроение, 1972. – 280 с.
4. Козловский В.Б. Исследование поведения груза на внешней подвеске вертолѐта и способы его стабилизации в полѐте. / В.Б.Козловский, С.А. Паршенцев // Научный вестник МГТУ ГА, серия «Аэромеханика и прочность». – 2004. – №72.
5. Матвеев Ю.И. Оценка затухания колебаний груза при горизонтальном полѐте вертолѐта с постоянной скоростью. / Ю.И. Матвеев, С.С. Павлов // Научный вестник МГТУ ГА, серия «Аэромеханика, прочность, поддержание лѐтной годности ВС». – 2009. – №141. – С.149-156.
6. Ануфриев И.Е. Matlab 5.3/6.X. / И.Е. Ануфриев. – СПб.: БХВ – Петербург, 2002. – 600 с.

## **Аннотация**

### **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ И ОЦЕНКА ЗАТУХАНИЯ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА ПРИ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ПОЛѐТЕ ВЕРТОЛѐТА С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ**

Ловейкин В., Човнюк Ю., Сердюченко Ю., Диктерук М.

*Поведение системы «вертолѐт-груз» анализируется с помощью модели двухточечного математического маятника, колебания которого происходят в потоке воздуха. Определяются основные кинематические и динамические характеристики движения системы, логарифмический декремент колебаний груза в зависимости от скорости перемещения точки подвеса, массы груза и длины подвеса. Проведен качественный анализ полученных решений динамической задачи методом фазовых портретов (классического и высших порядков) как для варианта отсутствия существенного влияния сопротивления воздуха, так и при его наличии.*

## **Abstract**

### **MATHEMATICAL MODELING, DYNAMIC ANALYSIS AND EVALUATION OF CONDUCT VIBRATIONS FADE CARGO AT LEVEL FLIGHT HELICOPTER AT A CONSTANT SPEED**

V. Loveykin, Yu. Chovnyuk, Yu. Serdyuchenko, M. Dikteruk

*The behavior of systems «helicopter-load» is analyzed with the help of two-point mathematical pendulum's model. The mentioned pendulum vibrates in airflow. Basic kinematics and dynamic descriptions of system motion and logarithmic dekrement of load's vibrations are determined. These characteristics depend on point suspension moving speed, mass of load and length of point suspension as well. The method of phase portraits (classic and higher orders) is used for the quality dynamic analysis of systems «helicopter-load».*