

## АНАЛІЗ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ТА ПОЛЯ ШВИДКОСТЕЙ СИПКИХ МАТЕРІАЛІВ У ВІБРАЦІЙНИХ СИЛОСАХ/БУНКЕРАХ КОНІЧНОГО ТИПУ

**Човнюк Ю.В. к.т.н., доц., Тисленко О.Б. аспірант**

*Національний університет біоресурсів та природокористування України*

*Проведений аналіз основних компонент напружено-деформованого стану сипких матеріалів, які знаходяться у вібраційних силосах/бункерах конічного типу. Наведені характеристики поля швидкостей вказаних матеріалів. У межах моделі пластичності Кулона-Мора враховані особливості руху сипких матеріалів через отвір силоса/бункера. Запропонована уточнена модель руху частинки впродовж віброуючої стінки оболонки конічного типу.*

Постановка проблеми. Вплив вібрацій на напружено-деформований стан (НДС) та швидкість витоку сипких матеріалів з силосів/бункерів конічного типу досліджений відносно слабо: встановлено, що вібрація достеменно сприяє кращому витоку тільки погано текучих матеріалів і не справляє суттєвого впливу на добре (задовільно) текучі; отримані деякі аналітичні залежності, які описують умови ударного режиму склепоутворення; досліджені критерії витоку при наявності на стінці бункера жорстко закріпленого вібратора. Однак практично застосовувані зведення, які дозволяють визначати швидкість витоку матеріалу з силосу/бункера конічного типу при певних параметрів вібрації відсутні.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Дослідження впливу вібрації на пропускну здатність бункерів проведені у роботах [1,2]. Складування та випуск сипких матеріалів, усталений їх рух під дією власної ваги у бункерах зі змінним перерізом вивчав Дженікс Е.В. [3,4]. Проте авторам даної роботи невідомі дослідження у яких би визначались компоненти НДС й поле швидкосте й сипкого (зокрема, зернового) матеріалу у вібраційних бункерах/силосах конічного типу (з урахуванням пластичних властивостей даного матеріалу).

Мета роботи полягає у встановленні компонент НДС й поля швидкостей сипкого (зернового) матеріалу у вібраційних бункерах/силосах конічного типу (з урахуванням пластичних властивостей вказаного матеріалу). При цьому використані підходи, розвинуті у [5,6].

Виклад основного змісту дослідження. Розглянемо у полярній системі координат плоску задачу пластичної течії. Рівняння рівноваги виділеного елемента будуть мати вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot (\sigma_r - \sigma_{\theta}) + \gamma \cdot \cos \theta = 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{2 \cdot \tau_{\theta r}}{r} - \gamma \cdot \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де  $\gamma$  - питома вага матеріалу, Н/м<sup>3</sup>.

Система рівнянь (1) має 3 невідомих  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{\theta r}$  й для її розв'язку, як звично [4], вводимо умову текучості:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sin \delta, \quad (2)$$

де  $\sigma_1, \sigma_2$  - найбільше та найменше значення головних напружень,  $\delta$  - ефективний кут тертя.

Заміняємо у (1) й (2)  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{\theta r}$ :

$$\begin{cases} \sigma_r = \sigma \cdot (1 + \sin \delta \cdot \cos 2\psi); \sigma_\theta = \sigma \cdot (1 - \sin \delta \cdot \cos 2\psi); \\ \sigma_{\theta r} = \sigma \cdot \sin \delta \cdot \sin 2\psi, \end{cases} \quad (3)$$

де  $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$ ;  $\sigma_1 = \sigma(1 + \sin \delta)$ ;  $\sigma_2 = \sigma \cdot (1 - \sin \delta)$ .

Вважаючи у подальшому, для спрощення, що  $\sigma = r \cdot \gamma \cdot S(\theta)$ , що узгоджується з епюрою розподілу тиску у звуженій частині воронки бункера/силосу, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{dS}{d\theta} + S \cdot f(\theta) + q(\theta) = 0, \\ S \cdot h(\theta) + j(\theta) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де  $S(\theta)$  - шукана функція й введені наступні позначення:

$$f(\theta) = 2 \cdot \left( \frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \cdot \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \cdot \sin 2\psi; \quad g(\theta) = -\frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \cdot \sin(\theta + 2\psi) - \frac{\sin \theta}{\cos^2 \delta}; \quad (5)$$

$$h(\theta) = 1 + 2 \cdot \left( \frac{d\psi}{d\theta} + 1 \right) \cdot (\cos 2\psi - \sin \delta) \cdot \frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \cdot \sin 2\psi; \quad j(\theta) = -\frac{\sin \delta}{\cos^2 \delta} \cdot \cos(\theta + 2\psi) + \frac{\cos \theta}{\cos^2 \delta};$$

Розв'яжемо систему (4) відносно похідних  $\frac{d\psi}{d\theta}$  й  $\frac{dS}{d\theta}$ . Матимемо:

$$\begin{cases} \frac{d\psi}{d\theta} = -1 - \frac{\cos \theta - \sin \delta \cdot \cos(\theta + 2\psi) + S \cdot \cos^2 \delta}{2S \cdot \sin \delta \cdot (\cos 2\psi - \sin \delta)}; \\ \frac{dS}{d\theta} = \frac{S \cdot \sin 2\psi + \sin(\theta + 2\psi) + \sin \delta \cdot [\operatorname{ctg} \theta \cdot (1 + \cos 2\psi) - \sin 2\psi]}{\cos 2\psi - \sin \delta}. \end{cases} \quad (6)$$

Для системи (6) початковими умовами для  $\psi$  будуть 2 наступні:  $\theta = \theta_1$  й  $\theta = -\theta_1$ . Однак ніяких зведень про значення функції  $S(\theta)$  немає. Тому для

розв'язку, знаючи початкове  $\psi(\theta_1)$  знайдемо довільно  $S(\theta_1) = S_1$  і потім, будуючи криву  $\psi = \psi(\theta)$ , досягаємо підбором  $S_1$ , щоб  $\psi(-\theta_1)$  дорівнювала  $\delta$  відомому заданому значенню. Для виведення виразів для  $\psi(\theta_1)$  й  $\psi(-\theta_1)$  розглянемо круг Мора (рис.1).

З  $\Delta OWS$ :

$$\frac{\sigma_q - \sigma_2}{2 \cdot \sin \phi_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2 \sin(180^\circ - 2\psi + \phi_1)}, \phi_1 = \phi_1. \quad (7)$$

Враховуючи умову текучості (2) матимемо:

$$\sin(2\psi - \phi_1) = \frac{\sin \phi_1}{\sin \delta}. \quad (8)$$

Звідси:

$$\begin{cases} \psi(\theta_1) = \frac{\phi_1}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\sin \phi_1}{\sin \delta} \right\}; \\ \psi(\theta_2) = \frac{\phi_1}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \left\{ \frac{\sin \phi_1}{\sin \delta} \right\}, \end{cases} \quad (9)$$

де  $\theta_1$  - кут нахилу стінки й вертикалі;  $\psi$  - кут нахилу найбільшого головного напруження до додатного напрямку ОХ;  $\phi_1$  - кут тертя матеріалу зі стінкою бункера/силосу.

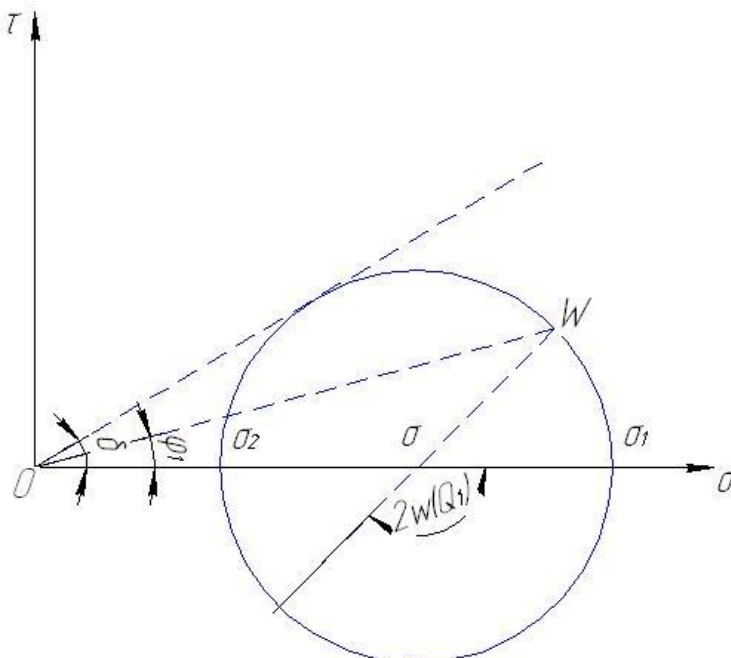


Рис.1 – Використання круга Мора для визначення  $\psi(\theta_1)$  й  $\psi(-\theta_1)$ .

Таким чином, отримуючи за (6) значення  $\psi$  й  $S$  у кожній точці, за формулою  $\sigma = r \cdot \gamma \cdot S(\theta)$  отримаємо шуканий тиск.

При визначенні поля швидкостей (рис.2) зробимо припущення, що рух

частинок відбувається вповодж радіусів:  $U_r = U_2(\theta_1 r); U_\theta = 0$ .

Умова неперервності у полярних координатах має вид:  $\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 0$ .

Підставляючи у нього  $\varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r}$  й  $\varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r}$  та інтегруючи отримане рівняння, матимемо:

$$U_r = \frac{1}{r} \cdot U(\theta) \quad (10)$$

де  $U(\theta)$  - функція, яку треба визначити.

Таким чином, при радіальному русі (течії) для точок, які лежать на одному промені, швидкість обернено пропорціональна радіусу ( $r$ ). Згідно [5], умова того, що вповодж головних дотичних напружень швидкість максимальна, записується у полярних координатах наступним чином:

$$\operatorname{tg}(2\xi) = \frac{\frac{\partial V_r}{r \partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r}}{\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{r \partial \theta} - \frac{V_r}{r}}. \quad (11)$$

При  $V_\theta = 0$  й  $V_r = V$  маємо з (11):

$$\operatorname{tg}(2\xi) \cdot \left( V - r \cdot \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0. \quad (12)$$

З (10) випливає, що  $V = \frac{1}{r} \cdot f(\theta)$ . Із врахуванням цієї обставини з (12) маємо:

$$\frac{df(\theta)}{d\theta} + 2f(\theta) \cdot \operatorname{tg}(2\xi) = 0. \quad (13)$$

Інтегруючи (13), маємо:

$$V = \frac{A}{r} \cdot \exp\{-2 \cdot f \operatorname{tg}(2\xi) d\theta\}, \quad (14)$$

де  $A$  - константа,  $\xi$  - кут нахилу головного найбільшого напруження до радіусу, тобто:  $\xi = 180^\circ - \psi + \theta$ .

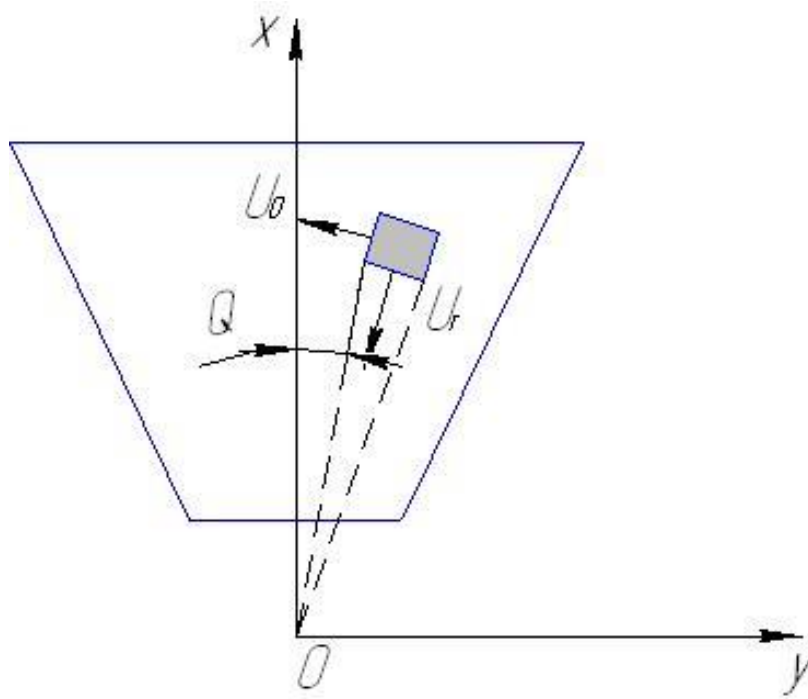


Рис.2 – Радіальний рух матеріалу у бункері/силосі конічної форми

На промені  $\theta = 0$  також й  $\xi = 0$ . Тому (14) зводиться до виду:

$$V = \frac{A}{r}. \quad (15)$$

Визначимо  $A$ , розглядаючи елемент сипкого матеріалу поблизу вихідного отвору (рис.3). Оскільки у цій зоні вертикальний тиск близький до нуля, можна розглядати виток елемента тільки під дією сили ваги, тертя зі стінкою та внутрішнього тертя між часточками (зернинами). Для усталеного руху:

$$V = \frac{\gamma \cdot (1 - \phi_1 \cdot \sin \theta_1)}{c}, \quad (16)$$

де  $c$  – коефіцієнт тертя, який пропорціональний першому степеню швидкості.

Знаючи  $V$  для даного  $r$ , можна визначити з (15) константу  $A$ .

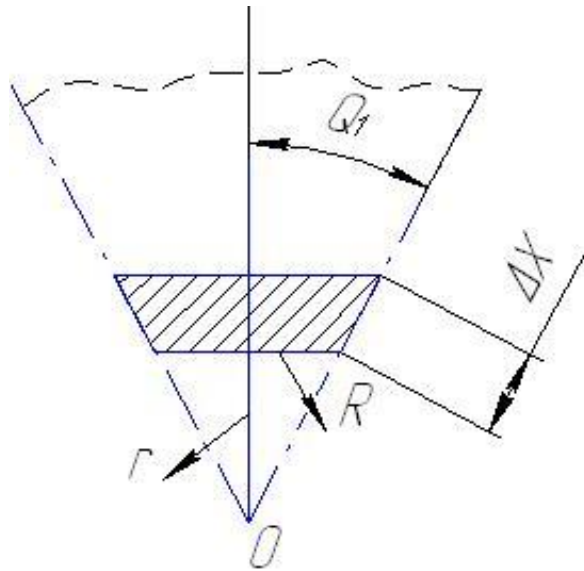


Рис.3 – Визначення швидкості витoku поблизу випускного отвору.

Незначна зміна швидкості витoku «добресипких» матеріалів при накладанні вібрацій на бункер/силос пов'язана зі значним впливом у цьому випадку гравітаційних сил у порівнянні із силами вібрації. Для «паганосипких» матеріалів збільшення швидкості витoku можна пояснити зменшенням зчеплення між частинками у напрямку випускного отвору ефектом. Врахуємо зміну швидкості витoku за рахунок вібрації, нехтуючи тиском. Припустимо, що стінка здійснює гармонічні коливання з кутовою частотою  $\omega$ , амплітудою  $\tilde{A}$  й кутом  $\beta$  (рис.4) у площині рисунку.

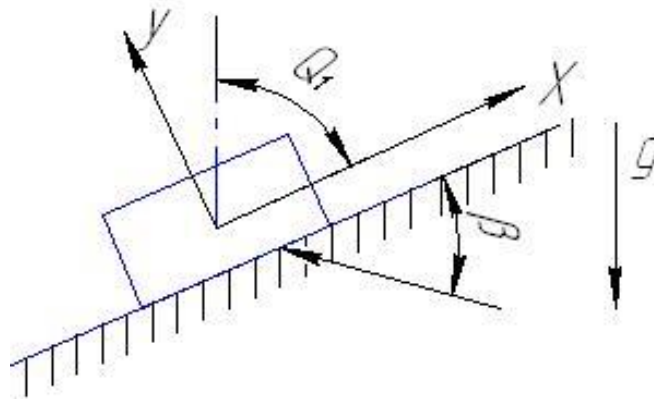


Рис.4 – Схема руху частинки вповодж вібруючої стінки ( $\bar{q}$  - прискорення вільного падіння)

Рівняння руху частинки, яка імітує матеріал (зерновий) на стінці бункеру/силосу, запишеться наступним чином:

$$m\ddot{y} = -m\tilde{A}\omega^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t - mg \sin \theta_1 + N(t), \quad (17)$$

де  $N(t)$  - реакція стінки (сила, що є функцією часу  $t$ ),

У випадку контакту частинки зі стінкою  $\ddot{y} = 0$  і з (17) маємо:

$$N(t) = m\tilde{A}\omega^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \omega t + mg \sin \theta_1. \quad (18)$$

Момент відриву частинки від стінки бункера/силосу визначається з формули:

$$t_k = \frac{1}{w} \cdot \left\{ (-1)^{k+1} \cdot \arcsin\left(\frac{g \sin \theta_1}{\tilde{A} w^2 \sin \beta}\right) + k\pi \right\}, k = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

(Зазначимо, що  $k = 0$  не може бути з фізичних міркувань,  $t_k \geq 0$ ).

Перші два (найменші) корені (19) мають вид:

$$t_1 = \frac{1}{w} \cdot \left\{ \arcsin\left(\frac{g \sin \theta_1}{\tilde{A} w^2 \sin \beta}\right) + \pi \right\}; t_2 = \frac{1}{w} \cdot \left\{ -\arcsin\left(\frac{g \sin \theta_1}{\tilde{A} w^2 \sin \beta}\right) + 2\pi \right\}. \quad (20)$$

Вибір  $t_1$  чи  $t_2$  (моменти, по суті, відриву частинки від стінки) відбувається за знаком  $N(t)$ , тобто за  $\text{sign}\{N(t)\}$ . Якщо при  $t_k + \varepsilon$  (де  $\varepsilon \ll 1$ , а  $k = 1$  чи  $2$ )  $N(t) < 0$ , тоді  $t_k$  обраний правильно.

На етапі польоту частинки рівняння її руху мають вид:

$$\ddot{y} = -\tilde{A} w^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin wt - g \sin \theta_1, N(t) \equiv 0, \quad (21)$$

(а початкові умови  $y(t_k) = 0, \dot{y}(t_k) = 0, k = (1, 2)$ )

$$\ddot{x} = -\tilde{A} w^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin wt - g \sin \theta_1, \quad (22)$$

(а початкові умови  $x(t_k) = 0, \dot{x}(t_k) = \frac{V}{\cos \theta_1}$  - визначена з (16) швидкість частинки).

Останнє рівняння (22) можна при інтегрувати один раз і отримати:

$$\dot{x} = g \cos \theta_1 \cdot (t_k - t) + \tilde{A} w \cos \beta \cdot (\cos wt - \cos wt_k) + \frac{V}{\cos \theta_1}. \quad (23)$$

З рівняння (21) маємо:

$$y = \tilde{A} \cdot \sin \beta \cdot (\sin wt + wt) - \frac{g \sin \theta_1 \cdot t^2}{2}. \quad (24)$$

Порівнюючи цей вираз до нуля, знайдемо момент падіння частинки на стінку бункера/силосу  $t^*$ , де  $t^*$  - найменший додатній корінь трансцендентного рівняння, тобто:

$$\tilde{A} \cdot \sin \beta \cdot (\sin wt^* + wt^*) - \frac{g \sin \theta_1 \cdot (t^*)^2}{2} = 0. \quad (25)$$

При  $0 < wt^* \ll 1$  можна знайти корінь (25) аналітично:

$$t^* \approx \frac{2\tilde{A} \cdot \sin \beta \cdot w}{g \sin \theta_1}. \quad (26)$$

Тоді середня швидкість витоку матеріалу із врахуванням вібрації стінки силосу/бункера визначається формулою:

$$V^* = \left[ \int_{t_k}^{t^*} \dot{x}(t) dt + \frac{V}{\cos \theta_1} \cdot \left( \frac{2\pi}{w} + t_k - t^* \right) \right] \cdot \frac{w \cdot \cos \theta_1}{2\pi}. \quad (27)$$

Висновки. 1. Запропонована фізико-механічна модель для визначення компонент НДС й поля швидкостей сипких матеріалів у вібраційних бункерах/силосах конічного типу, яка враховує пластичні властивості середовища за теорією Кулона-Мора.

2. Отримані у роботі результати можуть бути у подальшому використані для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку процесів витоку сипких (пластичних) матеріалів з вібраційних бункерів/силосів конічного типу як на стадії їх проектування/конструювання, так і у режимах реальної конструкції.

### Список використаної літератури

1. Макеев В.А, Исследование влияния вибрации на пропускную способность бункеров. / В.А. Макеев // Известия вузов. Горный журнал. – 1970. - №1.
2. Shinohara K. Gravity and vibration effect on flow of cohesive materials from “Hopper”. / K.Shinohara, A Suzuki, T.Tanaka // Papers of American Society of Mechanical Engineers. – 1968. – No.MH-33.
3. Дженикс Э.В. Складирование и выпуск сыпучих материалов. / Э.В.Дженикс. – М.:Мир, 1968.
4. Дженикс Э.В. Установившееся течение под действием собственного веса в сужающихся сосудах. / Э.В.Дженикс // Прикладная механика. – 1964. - №1.
5. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. / Н.Н.Малинин. – М.: Наука, 1968.
6. Василенко П.М. Теория движения частиц по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. / П.М.Василенко. – Киев: Изд-во УСХА, 1960. – 283с.



## **Аннотация**

### **АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ И ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ СЫПУЧИХ МАТЕРИАЛОВ В ВИБРАЦИОННЫХ СИЛОСАХ/БУНКЕРАХ КОНИЧЕСКОГО ТИПА**

Човнюк Ю.В., Тисленко А.Б.

*Проведен анализ основных компонент напряженно-деформированного состояния сыпучих материалов, которые находятся в вибрационных силосах/бункерах конического типа. Приведены характеристики поля скоростей указанных материалов. В рамках модели пластичности Кулона-Мора учтены особенности движения сыпучих материалов через отверстие силоса/бункера. Предложена уточненная модель движения частички вдоль вибрирующей стенки оболочки конического типа.*

## **Resume**

### **ANALYSIS STRESS-DEFORMED STATE AND THE VELOCITY FIELD OF BULK MATERIALS IN SILOS/BUNKER VIBRATION CONIC TYPE**

Chovnyuk Y.V., Tyslenko A.B.

*The analysis of the major components of the stress-strain state of loose materials, which are locating vibrating silos bunkers cone type was conducted. The characteristics of the velocity field of these materials are given. In the framework of the Kulon-Mohr plasticity into account peculiarities of the movement of bulk materials through the hole silo / bunkers. Refined model of particle motion along the wall of the shell vibration cone type are propose.*