

Список использованных источников

1. Седов Л.И. Механика сплошных сред. Т.1 /Л.И. Седов - М.: Наука, 1976. - 536 с.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г.Лойцянский - М.: Наука, 1978. - 727 с.
3. Тіщенко Л.М. До побудови математичної моделі технологічного процесу барабанного зернового скальператора / Л.М.Тіщенко, С.А.Богданович // «Механізація сільськогосподарського виробництва». Вісник ХНТУСГ ім. П.Василенка, вип.135, Харків, 2013. С.5-9.

Анотація

ПОБУДОВА ЛІНІЙ СТРУМУ ЗЕРНОВОГО ПОТОКУ В БАРАБАННОМУ СКАЛЬПЕРАТОРІ

Богданович С.

Запропоновано метод побудови ліній струму зернового потоку в барабанному скальператорі, що збігаються з траєкторіями руху частинок

Abstract

BUILDING LINE CURRENT GRAIN FLOW DRUM SKALPERATORS

S. Bogdanovich, as.

Proposed method of construction streamlines the grain flow in the drum scalperator, coinciding with the trajectories of the motion of particles

УДК 534.1, 539.3

РАСЧЁТ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЗМОВ С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ ЗВЕНЬЕВ МЕТОДОМ ВБК

Ольшанский В.П., д. ф.-м. наук, проф.

*Харьковский национальный технический университет
сельского хозяйства имени Петра Василенко*

Ольшанский С.В., к. ф.-м. наук,

Национальный технический университет “ХПИ”

Показано, что инженерный расчёт нестационарных колебаний механизмов с переменной массой или жёсткостью звеньев, которые приводятся к системе с одной степенью свободы, удобно проводить методом ВБК. При соблюдении определённых ограничений на скорость изменения параметров, указанный метод приводит к компактным приближённым решениям высокой точности.

Постановка проблемы. Исследованию колебаний механизмов с переменной массой звеньев уделено мало внимания со стороны учёных

аграриев, связанных с механизацией сельскохозяйственного производства. На актуальность этого направления исследований указывал ещё основатель земледельческой механики В.П. Горячкин в начале 20-го века, что подчёркивал в предисловии к монографии [1] его ученик И.И. Артоболевский. Но во времена В.П. Горячкина уровень развития науки и вычислительной техники не позволил должным образом развивать динамику тела переменной массы. Позже это направление интенсивно развивалось в связи с запросами ракетостроения и менее активно в других технических отраслях, включая производство и эксплуатацию сельхозмашин. Но современный уровень методов математического моделирования позволяет успешно проводить анализ динамики механизмов сельхозмашин, масса которых меняется в ходе технологического процесса: посева, орошения, посева удобрений, уборки урожая, а также при загрузке и разгрузке транспортных средств сыпучими грузами.

Колебания механизмов с монотонно (непериодически) меняющейся массой или жёсткостью на некотором интервале времени описываются дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, что усложняет их аналитическое решение. В отдельных случаях решения таких уравнений удаётся выразить через функции Бесселя [2,3,4,5]. Чтобы не использовать в инженерных расчётах специальные функции, в монографии [1] дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами на коротких промежутках времени заменяют уравнением с постоянными коэффициентами и припасовывают результаты решения упрощённых задач Коши. Вследствие такого упрощения, непрерывное изменение массы или жёсткости приближённо описывается кусочно-постоянной функцией со скачками её значений на краях промежутков разбиения. Для проведения расчёта с высокой точностью приходится рассматриваемый интервал времени разбивать на много участков, что загромождает исследование. В связи с этим здесь предлагается другой способ упрощения расчёта, базирующийся на ВБК–методе, который распространён в физических исследованиях [6,7]. Как и другие асимптотические методы, [8,9] при медленном изменении параметров осциллятора, он приводит к компактным расчётным формулам.

Целью работы является вывод и апробация формул для расчёта свободных затухающих колебаний упругих звеньев механизмов при различных законах монотонного изменения массы звеньев во времени.

Основные соотношения метода ВБК. Указанный метод позволяет приближённо выразить в общей аналитической форме решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\ddot{y} - [\rho^2 f(t) + \varphi(t)]y = 0. \quad (1)$$

где: ρ – безразмерный большой параметр;

$f(t)$ и $\varphi(t)$ – некоторые функции времени t , причём в рассматриваемой области изменения t $f(t) \neq 0$; точкой обозначены производные по t .

Согласно ВБК – методу, фундаментальные решения уравнения (1) приближённо представляются интегралами [6], [10]:

$$y_j(t) = \exp\left(\int v_j(t) dt\right), \quad j = \overline{1,2}, \quad (2)$$

где

$$v_{1,2} = \pm \rho u_0 + u_1 \pm \frac{1}{\rho} u_2 + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right); \quad u_0 = \sqrt{f(t)}; \quad (3)$$

$$u_1 = -\frac{\dot{u}_0}{2u_0}; \quad u_2 = \frac{\varphi(t) - \dot{u}_1 - u_1^2}{2u_0}$$

Используя выражения (2) и (3), рассмотрим колебания системы с одной степенью свободы, получаемой в результате приведения к ней всего механизма. Ограничимся исследованием двух законов изменения массы звеньев.

Изменение массы осциллятора по экспоненциальному закону. Для такого случая изменения движущейся массы m имеем:

$$m = m(t) = m_0 \exp(\lambda t). \quad (4)$$

где: m_0 – начальное значение массы,

λ – характеризует скорость изменения массы, которая при $\lambda > 0$ возрастает, а при $\lambda < 0$ – убывает.

Свободные колебания осциллятора, с учётом реактивной силы и силы вязкого сопротивления, описываем уравнением:

$$\ddot{x} + \left(\lambda + \frac{\mu}{m_0} e^{-\lambda t}\right) \dot{x} + \frac{c}{m_0} e^{-\lambda t} x = 0, \quad (5)$$

где: x – перемещение осциллятора;

μ – коэффициент вязкого сопротивления;

c – коэффициент жёсткости пружины.

Построим решение уравнения (5) при начальных условиях:

$$x(0) = x_0; \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (6)$$

где: x_0 и \dot{x}_0 – перемещение и скорость осциллятора при $t = 0$.

Точное аналитическое решение задачи (5), (6) при $\mu = 0$ выражается через функции Бесселя [4]. Далее построим приближённое решение задачи Коши, когда $\mu \geq 0$.

Введением новой переменной

$$\xi = \exp(-\lambda t); \quad \dot{\xi} = -\lambda \xi,$$

выражения (5) и (6) преобразуем к форме:

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} - \frac{\mu}{m_0 \lambda} \frac{dx}{d\xi} + \frac{c}{m_0 \lambda^2 \xi} x = 0; \quad (7)$$

$$x|_{\xi=1} = x_0; \quad \left. \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=1} = -\frac{\dot{x}_0}{\lambda}; \quad (8)$$

Решение уравнения (6) ищем в виде:

$$x = y \exp(\mu_1 \xi), \quad \mu_1 = \frac{\mu}{2m_0 \lambda}. \quad (9)$$

Подстановкой (9) в (7) получаем

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(\frac{c}{m_0 \lambda^2 \xi} - \mu_1^2 \right) y = 0. \quad (10)$$

Если в уравнении (1) заменить: $t \rightarrow \xi$; $f(t) \rightarrow \xi^{-1}$; $\varphi(t) \rightarrow \mu_1^2$ и положить $\rho = \omega_0 |\lambda|^{-1}$; $\omega_0 = (c/m_0)^{1/2}$, то оно перейдет в (10). Поэтому, согласно (2) и (3):

$$u_0 = \frac{i}{\sqrt{\xi}}; \quad i = \sqrt{-1}; \quad u_1 = \frac{1}{4\xi}; \quad u_2 = -\frac{i\sqrt{\xi}}{2} \left(\mu_1^2 + \frac{3}{16\xi^2} \right);$$

$$y_{1,2} = \xi^{1/4} \exp \left\{ \pm i \left[2\rho\sqrt{\xi} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{3} \mu_1^2 \xi^{3/2} - \frac{3}{16\sqrt{\xi}} \right) \right] \right\}. \quad (11)$$

Учитывая (9) и (11), общее решение уравнения (7) представим в виде:

$$x = \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{1/2} \exp \left[\mu_1 \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] \left\{ c_1 \cos \left[\eta - \frac{2}{\eta_0} \left(\mu_1^2 \frac{\eta^3}{3\eta_0^3} - \frac{3}{16} \frac{\eta_0}{\eta} \right) - \alpha \right] + \right.$$

$$\left. + c_2 \sin \left[\eta - \frac{2}{\eta_0} \left(\mu_1^2 \frac{\eta^3}{3\eta_0^3} - \frac{3}{16} \frac{\eta_0}{\eta} \right) - \alpha \right] \right\}. \quad (12)$$

где: $\eta = \eta_0 \sqrt{\xi}$, $\eta_0 = 2\rho$; $\alpha = \eta_0 - \frac{2}{\eta_0} \left(\frac{\mu_1^2}{3} - \frac{3}{16} \right)$;

c_1, c_2 – произвольные постоянные.

Подставив (12) в (8), находим постоянные:

$$c_1 = x_0; \quad c_2 = \frac{-2\dot{x}_0 / \lambda - (0,5 + 2\mu_1)x_0}{\eta_0 \left(1 - \frac{2}{\eta_0^2} \mu_1^2 - \frac{3}{8\eta_0^2} \right)}.$$

Обычно на практике $\eta_0 \gg 1$. Поэтому в инженерных расчётах наряду с (12) можно использовать и более грубое решение:

$$x = \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{1/2} \exp \left[\mu_1 \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] [c_1 \cos(\eta - \eta_0) + c_2 \sin(\eta - \eta_0)]. \quad (13)$$

где: $c_1 = x_0$; $c_2 = -\frac{1}{\eta_0} \left[\frac{2\dot{x}_0}{\lambda} + (0,5 + 2\mu_1)x_0 \right]$.

Из (12) следует компактная формула для приближённого вычисления мгновенной частоты свободных колебаний осциллятора

$$\omega_c = \left| \frac{d}{dt} \left[\eta - \frac{2}{\eta_0} \left(\mu_1^2 \frac{\eta^3}{3\eta_0^3} - \frac{3}{16} \frac{\eta_0}{\eta} \right) \right] \right|.$$

Выполнив дифференцирование, получаем

$$\omega_c = \omega_c(t) = \omega_0 \sqrt{\xi} \left(1 - \frac{2\mu_1^2 \xi}{\eta_0^2} - \frac{3}{8\eta_0^2 \xi} \right). \quad (14)$$

Если исходить из приближённого решения (13), то

$$\omega_c(t) = \omega_0 \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{c}{m_0}} \exp \left(-\frac{1}{2} \lambda t \right).$$

Согласно (12) и (13), изменение амплитуд колебаний во времени описываем выражением

$$amx = \left(\frac{\eta}{\eta_0} \right)^{1/2} \exp \left[\mu_1 \left(\frac{\eta^2}{\eta_0^2} - 1 \right) \right] \sqrt{c_1^2 + c_2^2}.$$

При $\lambda < 0$, когда ξ и η возрастают с ростом t , происходит увеличение и amx . Как видим, уменьшение массы осциллятора сопровождается ростом его амплитуд колебаний. Наоборот, увеличение массы осциллятора приводит к уменьшению amx во времени, т.е. к затуханию колебаний.

Далее рассмотрим другой вариант изменения $m(t)$.

Изменение массы осциллятора по дробно-линейному закону. В этом случае

$$m = m(t) = \frac{m_0}{1 + \gamma t}. \quad (15)$$

Колебания осциллятора с учётом реактивной силы и силы вязкого сопротивления описываются уравнением

$$\frac{m_0}{1 + \gamma t} \frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{m_0 \gamma}{(1 + \gamma t)^2} \frac{dx}{dt} + \mu \frac{dx}{dt} + cx = 0. \quad (16)$$

Введением новой переменной

$$\xi = 1 + \gamma t,$$

уравнение (16) преобразуем к форме

$$\frac{d^2 x}{d\xi^2} + \left(\frac{\mu \xi}{m_0 \gamma} - \frac{1}{\xi} \right) \frac{dx}{d\xi} + \frac{c}{m_0 \gamma^2} \xi x = 0. \quad (17)$$

Неизвестное перемещение x представляем произведением

$$x = \sqrt{\xi} \exp\left(-\frac{1}{4} \frac{\mu}{m_0 \gamma} \xi^2\right) \cdot y. \quad (18)$$

После подстановки (18) в (17), для определения y , получаем выражение

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + \left(\frac{c}{m_0 \gamma^2} \xi - \frac{1}{4} \mu_2^2 \xi^2 - \frac{3}{4 \xi^2} \right) y = 0. \quad (19)$$

где: $\mu_2 = \frac{\mu}{m_0 \gamma}$.

Если в уравнении (1) заменить $t \rightarrow \xi$; $f(t) \rightarrow \xi$; $\varphi(t) \rightarrow \frac{1}{4} \mu_2^2 \xi^2 + \frac{3}{4 \xi^2}$ и положить $\rho = \omega_0 |\gamma|^{-1}$; $\omega_0 = (c/m_0)^{1/2}$, то оно перейдёт в (19). Поэтому, согласно (2) и (3):

$$\begin{aligned}
u_0 &= i\sqrt{\xi}; \quad u_1 = -\frac{1}{4\xi}; \quad u_2 = -\frac{i}{8}\left[\mu_2^2\xi^{3/2} + \frac{7}{4}\xi^{-5/2}\right]; \\
y_1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \cos\left[\frac{2}{3}\rho\xi^{3/2} - \frac{1}{8\rho}\left(\mu_2^2\frac{2}{5}\xi^{5/2} - \frac{7}{6}\xi^{-3/2}\right)\right]; \\
y_2 &= \frac{1}{\sqrt[4]{\xi}} \sin\left[\frac{2}{3}\rho\xi^{3/2} - \frac{1}{8\rho}\left(\mu_2^2\frac{2}{5}\xi^{5/2} - \frac{7}{6}\xi^{-3/2}\right)\right];
\end{aligned} \tag{20}$$

Учитывая (18) и (20), общее решение уравнения (17) приближённо представляем в виде

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[4]{\xi} \exp\left[-\frac{1}{4}\mu_2^2(\xi^2 - 1)\right] \left\{ c_3 \cos\left[\frac{2}{3}\rho\xi^{3/2} - \frac{1}{8\rho}\left(\mu_2^2\frac{2}{5}\xi^{5/2} - \frac{7}{6}\xi^{-3/2}\right) - \beta\right] + \right. \\
&\quad \left. + c_4 \sin\left[\frac{2}{3}\rho\xi^{3/2} - \frac{1}{8\rho}\left(\mu_2^2\frac{2}{5}\xi^{5/2} - \frac{7}{6}\xi^{-3/2}\right) - \beta\right] \right\}.
\end{aligned} \tag{21}$$

где: $\beta = \frac{2}{3}\rho - \frac{1}{8\rho}\left(\frac{2}{5}\mu_2^2 - \frac{7}{6}\right);$

c_3, c_4 – произвольные постоянные.

Решение (21) удовлетворяет начальным условиям (6), когда:

$$c_3 = x_0; \quad c_4 = \frac{\dot{x}_0/\gamma - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu_2^2\right)x_0}{\rho - \frac{1}{8\rho}\left(\mu_2^2 + \frac{7}{4}\right)}.$$

При медленном изменении массы, когда $\rho \gg 1$, вместо (21), в инженерных расчётах можно использовать и более простое решение

$$x = \sqrt[4]{\xi} \exp\left[-\frac{1}{4}\mu_2^2(\xi^2 - 1)\right] \left[c_3 \cos\left(\frac{2}{3}\rho(\xi^{3/2} - 1)\right) + c_4 \sin\left(\frac{2}{3}\rho(\xi^{3/2} - 1)\right) \right], \tag{22}$$

где: $c_3 = x_0; \quad c_4 = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\dot{x}_0}{\gamma} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\mu_2^2\right)x_0 \right].$

Из (21) следует формула для приближённого вычисления мгновенной частоты свободных колебаний осциллятора

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m_0}(1 + \gamma t)} \left[1 - \frac{1}{8\rho^2} \left(\mu_2^2 \xi^2 + \frac{7}{4} \xi^{-2} \right) \right].$$

Если не учитывать слагаемых, пропорциональных ρ^{-2} , то

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m_0}(1 + \gamma t)}.$$

Изменение амплитуд колебаний во времени описывается выражением

$$amx = \sqrt[4]{\xi} \exp \left[-\frac{1}{4} \mu_2^2 (\xi^2 - 1) \right] \sqrt{c_3^2 + c_4^2}$$

Заметим, что построенное методом ВБК решение, нельзя применять в расчётах колебаний осциллятора возрастающей массы, когда $1 + \gamma t \rightarrow 0$.

Числовые результаты и их анализ. Показательный закон изменения массы. Проверим точность предложенных приближённых формул (12) и (13). Для этого примем следующие исходные данные: $m_0 = 100$ кг; $\lambda = 0,05$ с⁻¹; $c = 1000$ кг/с², $\dot{x}_0 = 0,1$ м/с, $x_0 = 0,02$ м и разные значения коэффициента вязкого трения μ .

В таблице представлены перемещения осциллятора в метрах, вычисленные в различные моменты времени t . В первой строке записаны результаты численного интегрирования уравнения (5), а во второй и третьей строчках – перемещения, вычисленные по формулам (12) и (13) соответственно.

Как видно из табл., предложенные приближённые формулы с высокой точностью описывают колебательный процесс и вполне подходят для практических расчётов. Как указывалось выше, более простой в использовании является формула (13).

Дробно-линейный закон изменения массы. Проверим точность предложенных приближённых формул (21) и (22). Для этого примем следующие исходные данные: $m_0 = 100$ кг; $\gamma = 0,05$ с⁻¹; $c = 1000$ кг/с², $\dot{x}_0 = 0,1$ м/с; $x_0 = 0,02$ м и $\mu = 6$ кг/с.

На рис. нанесены траектории полученные путём численного интегрирования уравнения (16) (самая тонкая линия на рисунке), а также по формулам (21) и (22) которые совпадают (жирная линия на рисунке).

Из рисунка видно, что приближённые формулы (21) и (22) обладают высокой точностью, из них более простая (22).

Таблица – Значения перемещения осциллятора, полученные тремя способами, численным интегрированием уравнения (5) и по формулам (12) и (13)

t, c	$\mu = 3 \text{ кг/с}$	$\mu = 6 \text{ кг/с}$	$\mu = 9 \text{ кг/с}$
5	0,0093	0,0087	0,0082
	0,0093	0,0087	0,0082
	0,0092	0,0087	0,0082
10	-0,0077	-0,0068	-0,0060
	-0,0077	-0,0068	-0,0060
	-0,0078	-0,0069	-0,0061
25	0,0075	0,0061	0,0050
	0,0075	0,0061	0,0050
	0,0075	0,0061	0,0049
50	0,0045	0,0035	0,0027
	0,0045	0,0035	0,0027
	0,0044	0,0034	0,0026
75	0,0081	0,0060	0,0045
	0,0081	0,0060	0,0045
	0,0082	0,0061	0,0046
100	-0,0031	-0,0023	-0,0017
	-0,0031	-0,0023	-0,0017
	-0,0033	-0,0025	-0,0018

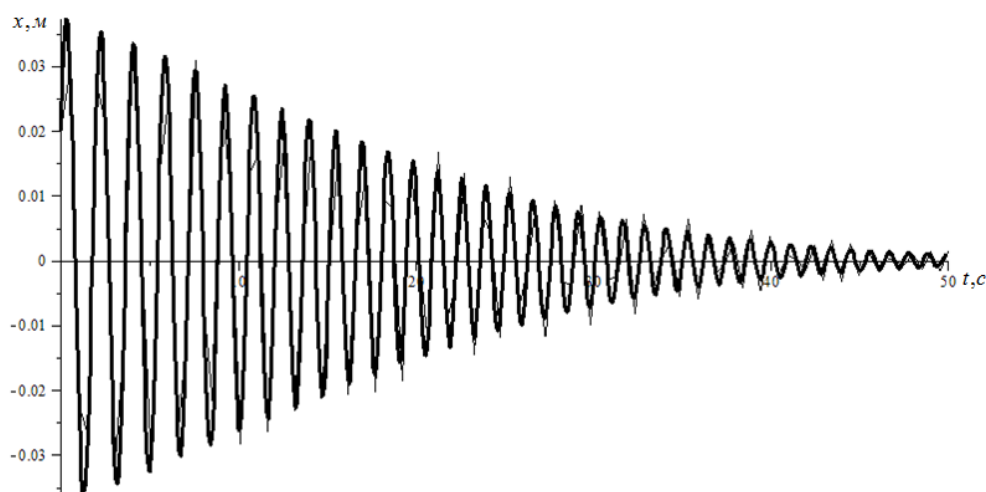


Рис. – Значения перемещения осциллятора, полученные тремя способами, численным интегрированием уравнения (16) и по формулам (21) и (22)

Выводы. Применением ВБК метода построены приближённые аналитические решения уравнений движения механизма, масса которого изменяется по экспоненциальному или дробно линейному законам. Точность решений проверена путём сравнения результатов расчёта по приближённым формулам с результатами численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений. Подтверждена эффективность метода ВБК в расчётах колебаний механизмов с переменной массой звеньев.

Список использованных источников

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. / А.П. Бессонов – М.: Наука, 1967. – 267 с.

2. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.
3. Cveticanin L. Dynamics of Machines with Variable Mass. / L. Cveticanin. Taylor & Francis Ltd, – 1998. – 300 p.
4. Ольшанський В.П. Вільні коливання осцилятора змінної маси / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукр. наук.-техн. журнал. – Вінниця. Вип.2(70). – 2013. – С. 57-59.
5. Ольшанский В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Вісник НТУ “ХПІ”: Математичне моделювання в техніці та технологіях, – 2013, № 37 (1010). – С. 125-130.
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке – М. Наука, 1976. – 576 с.
7. Karnakov V.M. WKB Approximation in Atomic Physics / V.M. Karnakov, V.P. Krainov – Springer, 2013. – 176 p.
8. Митропольский Ю.А. Избранные труды в 2-х томах / Ю.А. Митропольский – К.: Наукова думка, 2012. – 504 с.
9. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
10. Ольшанский В.П. ВБК – метод в расчётах колебаний механизмов с переменной массой звеньев / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский // Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин. Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник. – Кіровоград: КНТУ, 2013, вип. 43, Ч.1. – С. 108-113.

Анотація

РОЗРАХУНОК КОЛИВАНЬ МЕХАНІЗМІВ ЗІ ЗМІННОЮ МАСОЮ ЛАНОК МЕТОДОМ ВБК

Ольшанський В., Ольшанський С.

Показано, що інженерний розрахунок нестационарних коливань механізмів зі змінною масою або жорсткістю ланок, які зводяться до системи з одним ступенем свободи, зручно проводити методом ВБК. При виконанні певних обмежень на швидкість зміни параметрів у часі, вказаний метод приводить до компактних наближених розв'язків високої точності.

Abstract

CALCULATION OF OSCILLATION MECHANISMS WITH VARIABLE MASS UNITS BY WKB APPROXIMATION

V. Olshanskii, S. Olshanskii

It is shown that nonstationary oscillations engineering calculation mechanisms with variable mass or stiffness of links that lead to a system with one degree of freedom is conveniently carried out by WKB. Subject to certain restrictions on the rate of change of the parameters, this method leads to compact approximate solutions of high accuracy.