

УДК 539.3:534.1

Енергетичний метод розрахунку коливань механізмів змінної маси з сухим тертям

В.П.Ольшанський, С.В.Ольшанський

Харківський національний технічний університет
сізького господарства ім. П.Василенка (м. Харків, Україна),

Удосконаленням методом енергетичного балансу виведено наближені формули для розрахунку амплітуд малих затухаючих коливань системи лінійно-змінної маси з одним ступенем вільності при спільній дії реактивної сили та сил в'язкого і сухого тертя. Розглянуто варіанти нестационарних коливань, коли сила тертя Кулона має сталу величину або змінюється у часі по тому ж закону, що і маса. Проведено порівняння результатів обчислень за допомогою побудованих наближених формул з одержаними раніше іншими методами. Показано, що виведені компактні формули мають високу точність і цілком придатні для інженерних розрахунків.

Ключові слова: коливання, механізм змінної маси, метод енергетичного балансу.

Вступ. Закономірності вільних коливань механічних систем з кулоновим тертям відносяться до ґрунтовно вивчених. Але це не стосується коливальних систем змінної маси, хоч спроба дослідження їх теж робилась уже багато років тому [1]. У вказаній монографії рівняння руху зі змінними коефіцієнтами на коротких проміжках часу (напівциклах коливань) наближено заміняли рівняннями зі сталими коефіцієнтами, фіксуєчи масу систем під час її руху. Потім зшивали аналітичні розв'язки рівнянь зі сталими коефіцієнтами, а масу змінювали скачкоподібно в моменти зупинок системи. Цей громіздкий спосіб наближеного розрахунку можна спростити користуючись методом енергетичного балансу [2,3].

Але для підвищення точності вказаного методу, у випадку коливальної системи змінної маси, потрібно удосконалити метод, то без цього він дає дуже наближені результати [4]. Саме цим зумовлена мета роботи.

Метою роботи є адаптація методу енергетичного балансу до розрахунку вільних нестационарних коливань осциляторів змінної маси при спільній дії сил сухого та в'язкого тертя і порівняльний аналіз результатів, одержаних після адаптації, з відомими в інших виданнях.

1. Коливання осцилятора при дії сили тертя сталої величини.

Їх описуємо диференціальним рівнянням [4]

$$(m_0 + \delta t)\ddot{x} + (\delta\varepsilon + \mu)\dot{x} + cx = -F_T \text{sign}(\dot{x}), \quad (1)$$

у якому m_0 – початкове значення маси; δ – швидкість зміни маси у часі t ; $0 \leq \varepsilon \leq 1$ – коефіцієнт реактивності, як поправка на те, що лінія дії реактивної сили може не співпадати з віссю ox ; μ – коефіцієнт в'язкого тертя; c – коефіцієнт пружності системи; F_T – сила тертя Кулона; $x(t)$ – переміщення осцилятора; крапкою над x позначена похідна за часом t .

При змінній масі, сила сухого тертя F_T може мати сталі значення, лише тоді, коли вузол тертя відокремлений від маси, що показано на рис. 1, який запозичений з [1].

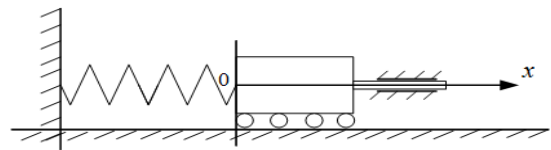


Рис. 1 Розрахункова схема

Причиною вільних коливань системи вважаємо її початкове відхилення вліво від положення рівноваги на відстань a_0 . Тому початковими умовами для (1) приймаємо:

$$x(0) = -a_0 < 0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

На відміну від [4], де задачу Коші розв'язували методом зшивання наближених розв'язків рівняння (1), побудованих ВБК-методом, тут скористаємося методом енергетичного балансу, який виявився ефективним у розрахунках затухаючих коливань при сталій масі системи [2,3].

Розглянемо перший розмах (напівцикл) коливань, при $\dot{x} > 0$, $\text{sign}\dot{x} = 1$. Увівши позначення:

$$\Phi(t, \dot{x}) = \delta t \dot{x}; \quad s(\dot{x}) = (\delta\varepsilon + \mu) \dot{x}, \quad (3)$$

на цьому етапі руху рівнянню (1) надаємо вигляд:

$$m_0 \dot{x} + cx = -F_T - \Phi(t, \dot{x}) - s(\dot{x}). \quad (4)$$

Переміщення осцилятора апроксимуємо залежністю

$$x = x(t) = -a \cdot \cos(\omega t), \quad (5)$$

де $\omega = \sqrt{c/m_0}$; $a = a(t)$ – невідома функція, що досить повільно змінюється у часі.

Апроксимація (5) відноситься до традиційних у методі енергетичного балансу [2,3].

Наближено, як при сталій $a(t)$, похідні від (5) подаємо виразами:

$$\dot{x} = a\omega \sin(\omega t); \quad \ddot{x} = a\omega^2 \cos(\omega t) \quad (6)$$

Знайдемо роботу сил, що знаходяться у правій частині рівняння (4), на першому етапі руху, коли $t \in [0; \pi/\omega]$. Для цього обчислимо інтеграл

$$A = - \int_0^{\pi/\omega} [F_T + \Phi(t, \ddot{x}) + s(\dot{x})] \dot{x} dt.$$

Підставивши у нього вирази (3) і (6), одержуємо

$$A = -2aF_T - \frac{\pi}{4} \omega a^2 (2\mu + 2\delta\varepsilon - \delta).$$

У відповідності з енергетичним балансом, робота A повинна дорівнювати зміні потенціальної енергії системи Δu на першому розмасі коливань. За вище вказаних обмежень на $a(t)$, функція Δu в [2] подана виразом

$$\Delta u = \frac{\pi}{\omega} ca \frac{da}{dt}$$

Отже, рівність $\Delta u = A$ набуває вигляд диференціального рівняння

$$\frac{da}{dt} = - \frac{\omega}{\pi c} \left[2F_T + \frac{\pi}{4} \omega (2\mu + 2\delta\varepsilon - \delta) a \right]. \quad (7)$$

Його слід розв'язувати при початковій умові

$$a(0) = a_0, \quad (8)$$

що впливає з (2).

Розв'язок задачі Коші, поданої виразами (7), (8), має вигляд

$$a(t) = b + (a_0 - b) \exp\left(\frac{\lambda t}{4m_0}\right), \quad (9)$$

де

$$b = \frac{8F_T \sqrt{m_0}}{\pi \lambda \sqrt{c}}; \quad \lambda = \delta - 2\delta\varepsilon - 2\mu.$$

Щоб знайти амплітудне відхилення a_1 системи в кінці першого розмаху коливань, підставимо в (9) значення $t = \pi/\omega$. Тоді

$$a_1 = a_0 \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{m_0 c}}\right) + \frac{8F_T \sqrt{m_0}}{\pi \lambda \sqrt{c}} \left[1 - \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{m_0 c}}\right) \right]. \quad (10)$$

Маса коливальної систем в цей час дорівнює:

$$m_1 = m_0 + \frac{\pi \delta}{\sqrt{c}} \sqrt{m_0}.$$

Узагальнивши одержані формули на випадок k -го розмаху, одержуємо рекурентні співвідношення:

$$a_k = a_{k-1} \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{cm_{k-1}}}\right) + \frac{8F_T \sqrt{m_{k-1}}}{\pi \lambda \sqrt{c}} \left[1 - \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{cm_{k-1}}}\right) \right], \quad (11)$$

$$m_k = m_{k-1} + \pi \delta \sqrt{\frac{m_{k-1}}{c}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

Формула (11) годиться і для обчислень амплітуд коливань осцилятора сталої маси при спі-

льній дії сил в'язкого та сухого тертя. У цьому випадку в ній треба задати

$$\lambda = -2\mu, \quad m_{k-1} = m = \text{const}.$$

Якщо $\delta = \mu = 0$, то граничний перехід $\lambda \rightarrow 0$ в (11), приводить до відомої класичної залежності [3, 5]

$$a_k = a_{k-1} - \frac{2F_T}{c},$$

коли зменшення амплітуд коливань відбувається при сталій масі за законом арифметичної прогресії.

Цей закон має місце і при змінній масі за умови, що

$$\delta = \frac{2\mu}{1 - 2\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq \frac{1}{2}.$$

Якщо $\varepsilon = 1/2$, то зміна маси не впливає на характер руху, він проходить так як при сталій масі.

Аналізуючи формулу (9) при $F_T = 0$, приходимо до висновку, що в умовах відсутності сухого тертя коливання затухають лише тоді, коли $\delta(1 - 2\varepsilon) < 2\mu$ або $\varepsilon > 0,5 - \mu/\delta$ при $\delta > 0$ і $\varepsilon < 0,5 - \mu/\delta$ при $\delta < 0$.

Для проведення обчислень по формулах (11), (12) приймаємо: $m_0 = 5$ кг; $c = 4900$ Н/м; $\delta = \pm 3$ кг/с; $F_T = 14,7$ Н; $\mu = 2; 9$ кг/с; $\varepsilon = 0; 1$; $x_0 = 0,06$ м. Одержані результати записано в чисельниках табл. 1 та 2.

Таблиця 1 – Значення a_k при $\delta = 3$ кг/с; $F_T = 14,7$ Н

k	100a _k , м при μ = 2 кг/с		100a _k , м при μ = 9 кг/с	
	ε = 0	ε = 1	ε = 0	ε = 1
1	5,371 5,372	5,203 5,206	4,987 4,993	4,830 4,838
2	4,747 4,748	4,439 4,444	4,057 4,067	3,790 3,803
3	4,126 4,127	3,704 3,711	3,199 2,212	2,860 2,876
4	3,508 3,510	2,996 3,004	2,406 2,420	2,025 2,042
5	2,894 2,895	2,313 2,322	1,669 1,684	1,270 1,287
6	2,283 2,284	1,652 1,662	0,983 0,998	0,585 0,602
7	1,674 1,676	1,012 1,022	0,341 0,355	0,039* 0,236*
8	1,068 1,070	0,392 0,402	0,262* 0,248*	– –
9	0,465 0,467	0,210* 0,201*	– –	– –
10	0,135* 0,133*	– –	– –	– –

Символом * позначено амплітуди розмахів, при яких осцилятор не проходить положення $x = 0$.

Числа в знаменниках табл. 1 та 2 запозичені з монографії [4, табл. 2.7 і 2.8]. Там вони одержані послідовним розв'язанням задачі Коші з використанням ВБК апроксимацій. Спостерігається задовільна узгодженість результатів, одержаних різними методами. Суттєві розбіжності амплітуд маємо тільки в кінці коливального процесу при малих значеннях амплітуд.

Таблиця 2 – Значення a_k при $\delta = -3$ кг/с; $F_T = 14,7$ Н

k	100 a_k , м при $\mu = 2$ кг/с		100 a_k , м при $\mu = 9$ кг/с	
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
1	<u>5,203</u> 5,200	<u>5,371</u> 5,371	<u>4,830</u> 4,822	<u>4,987</u> 4,981
2	<u>4,429</u> 4,423	<u>4,745</u> 4,744	<u>3,764</u> 3,749	<u>4,037</u> 4,026
3	<u>3,677</u> 3,670	<u>4,122</u> 4,120	<u>2,797</u> 2,778	<u>3,150</u> 3,145
4	<u>2,949</u> 2,940	<u>3,501</u> 3,499	<u>1,924</u> 1,902	<u>2,323</u> 2,306
5	<u>2,245</u> 2,235	<u>2,882</u> 2,881	<u>1,141</u> 1,119	<u>1,557</u> 1,539
6	<u>1,567</u> 1,555	<u>2,267</u> 2,265	<u>0,444</u> 0,421	<u>0,851</u> 0,832
7	<u>0,913</u> 0,901	<u>1,655</u> 1,653	<u>0,173*</u> 0,194*	<u>0,203</u> 0,184
8	<u>0,287</u> 0,275	<u>1,046</u> 1,044	– –	– –
9	– –	<u>0,441</u> 0,439	– –	– –
10	– –	<u>0,160*</u> 0,162*	– –	– –

2. Сила тертя пропорційна змінній масі.

Розрахункова схема подана на рис. 2. У цьому випадку

$$F_T = F_T(t) = fg (m_0 + \delta t).$$

тут f – коефіцієнт тертя ковзання; g – прискорення вільного падіння.

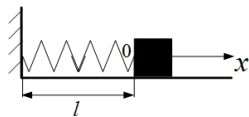


Рис. 2 Розрахункова схема

Обчислимо інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{\omega}} fg (m_0 + \delta t) \dot{x} dt = fg a \omega \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (m_0 + \delta t) \times \sin \omega t dt = 2fg a \left(m_0 + \frac{\pi \delta}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right).$$

Раніше, при $F_T = const$, цей інтеграл дорівнював $2F_T a$. Таким чином, обчислення a_1 теж зводиться до використання формули (10), але тепер в ній треба задати

$$F_T = fg \left(m_0 + \frac{\pi \delta}{2} \sqrt{\frac{m_0}{c}} \right).$$

Узагальнюючий цей результат на випадок k -го розмаху, приходимо до рекурентного співвідношення:

$$a_k = a_{k-1} \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{cm_{k-1}}}\right) + \frac{8fg \left(\sqrt{m_{k-1}} + \frac{\pi \delta}{2} \sqrt{\frac{m_{k-1}}{c}} \right) \sqrt{m_{k-1}}}{\pi \lambda \sqrt{c}} \times \left[1 - \exp\left(\frac{\pi \lambda}{4\sqrt{cm_{k-1}}}\right) \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

При обчисленні значень маси залишається формула (11).

Таблиця 3 – Значення a_k при $\delta = 3$ кг/с; $F_T = fg(m_0 + \delta t)$

k	100 a_k , м при $\mu = 0$		100 a_k , м при $\mu = 5$ кг/с	
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
1	<u>5,468</u> 5,466	<u>5,296</u> 5,297	<u>5,185</u> 5,188	<u>5,022</u> 5,027
2	<u>4,888</u> 4,885	<u>4,569</u> 4,570	<u>4,367</u> 4,371	<u>4,079</u> 4,086
3	<u>4,260</u> 4,254	<u>3,816</u> 3,817	<u>3,543</u> 3,547	<u>3,163</u> 3,172
4	<u>3,582</u> 3,574	<u>3,037</u> 3,037	<u>2,710</u> 2,714	<u>2,269</u> 2,277
5	<u>2,853</u> 2,842	<u>2,229</u> 2,228	<u>1,866</u> 1,869	<u>1,390</u> 1,397
6	<u>2,073</u> 2,058	<u>1,393</u> 1,388	<u>1,009</u> 1,010	<u>0,523</u> 0,528
7	<u>1,239</u> 1,221	<u>0,525</u> 0,518	<u>0,137</u> 0,135	<u>0,337*</u> 0,334*
8	<u>0,351</u> 0,328	<u>0,374*</u> 0,382*	– –	– –

Користуючись формулою (13), знайдемо a_k при $m_0 = 5$ кг; $c = 4900$ Н/м; $\delta = \pm 3$ кг/с; $f = 0,3$; $\mu = 0$; 5 кг/с; $\varepsilon = 0$; 1. Одержані значення амплітуд записано в чисельниках табл. 3 та 4. У знаменниках записано амплітуди, які одержано з використанням ВБК методу в [4, табл. 2.9 і 2.10]. Розбіжності результатів, одержаних двома способами в цілому незначні, за виключенням малих значень амплітуд в кінці коливального процесу.

Таблиця 4 – Значення a_K при $\delta = -3$ кг/с; $F_T = fg(m_0 + \delta t)$

k	100a _K , м при $\mu = 0$		100a _K , м при $\mu = 5$ кг/с		k	100a _K , м при $\mu = 0$		100a _K , м при $\mu = 5$ кг/с	
	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$		$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 1$
1	5,332	5,504	5,057	5,220	7	2,182	3,145	1,053	1,668
	5,331	5,505	5,052	5,217		2,165	3,141	1,025	1,646
2	4,707	5,039	4,199	4,498	8	1,787	2,846	0,627	1,247
	4,704	5,041	4,189	4,491		1,767	2,840	0,597	1,221
3	4,124	4,604	3,422	3,830	9	1,427	2,571	0,260	0,869
	4,119	4,606	3,407	3,820		1,402	2,562	0,229	0,840
4	3,581	4,198	2,723	3,214	10	1,098	2,320	0,051*	0,533
	3,573	4,199	2,704	3,202		1,070	2,307	0,082*	0,501
5	3,077	3,820	2,097	2,650	11	0,802	2,092	–	0,237
	3,067	3,820	2,075	2,634		0,769	2,075	–	0,203
6	2,611	3,469	1,542	2,136	12	0,535	1,885	–	0,020*
	2,598	3,468	1,517	2,116		0,499	1,864	–	0,056*

Висновки. Проведене удосконалення методу енергетичного балансу суттєво підвищило його точність при розрахунку затухаючих коливань осцилятора змінної маси. Одержані формули цілком придатні для інженерних розрахунків амплітуд нестационарних коливань механізмів змінної маси, математичні моделі яких зводяться до системи з одним ступенем вільності.

Література

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев / А.П. Бессонов. – М.: Наука, 1967. – 267 с.

2. Пановко Я.Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1976. – 320 с.

3. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.

4. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2014. – 264 с.

5. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики: учебное пособие для вузов. В 2-х томах. Т. 2. Динамика. – 7-е изд., исправленное / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.

Аннотация

Энергетический метод расчёта колебаний механизмов переменной массы с сухим трением

В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский

Усовершенствованным методом энергетического баланса выведены приближённые формулы для расчёта амплитуд малых затухающих колебаний системы линейно-переменной массы с одной степенью свободы при совместном действии реактивной силы и силы вязкого трения. Рассмотрены варианты нестационарных колебаний, когда сила трения Кулона имеет постоянную величину или изменяется во времени по тому же закону, что и масса. Проведено сравнение результатов вычислений при помощи приближённых формул с полученными раньше другими методами. Показано, что выведенные компактные формулы имеют высокую точность и полностью подходят для инженерных расчётов.

Ключевые слова: колебания, механізм змінної маси, метод енергетичного балансу

Abstract

**Energy method for calculating oscillations mechanisms
of variable mass with dry friction**

V.P.Olshanskii, S.V.Olshanskii

Improved energy balance method approximate formulas for calculating the amplitudes of small damped oscillations of linearly variable mass with one degree of freedom under the joint action of reactive forces and viscous forces were derived. The variants of non-stationary oscillations when Kulon friction force is constant or varies in time according to the same law as the weight were considered. A comparison of the results of calculations using the approximate formulas earlier by other methods were obtained. It is shown that the derived compact formulas are highly accurate and fully suitable for engineering calculations.

Keywords: *oscillations, mechanism with variable mass, energy balance method.*

Представлено: В.И.Пастухов / Presented by: V.I.Pastuhov
Рецензент: А.С.Полянский / Reviewer: A.S.Poljanskij
Подано до редакції / Received: 13.06.2014