МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний біотехнологічний університет

Навчально-методичний посібник

Похідна функції та її застосування

з дисципліни: «Вища математика»

Для студентів денної та заочної форми навчання

Затверджено
на засіданні кафедри фізики та математики
Протокол № 3 від 31.10.2022

Затверджено
на засіданні методичної ради
ФМІ ДБТУ
Протокол № 4 від 04.05.23

Харків – 2023

Завгородній О.І., Сичова Т.О.

Похідна функції та її застосування. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Вища математика» для студентів денної та заочної форми навчання. – Х.: ДБТУ, 2023. – 54 с.

Рецензенти:
Пак А.О., доктор техн. наук, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету
Макаров О.А., кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Відповідальний за випуск: Сичова Т.О., канд. техн. наук., доцент

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

1. Поняття похідної функції та її геометричний зміст.

Похідною функції $y = f(x)$ *и точці* x_0 *називається границя відношення приросту* Δf *функції в цій точці до приросту* Δf *аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

Функція $f(x)$, *яка має похідну в кожній точці деякого проміжку, називається диференційованою в цьому проміжку. Похідна функції* $y = f(x)$ *позначається так:*

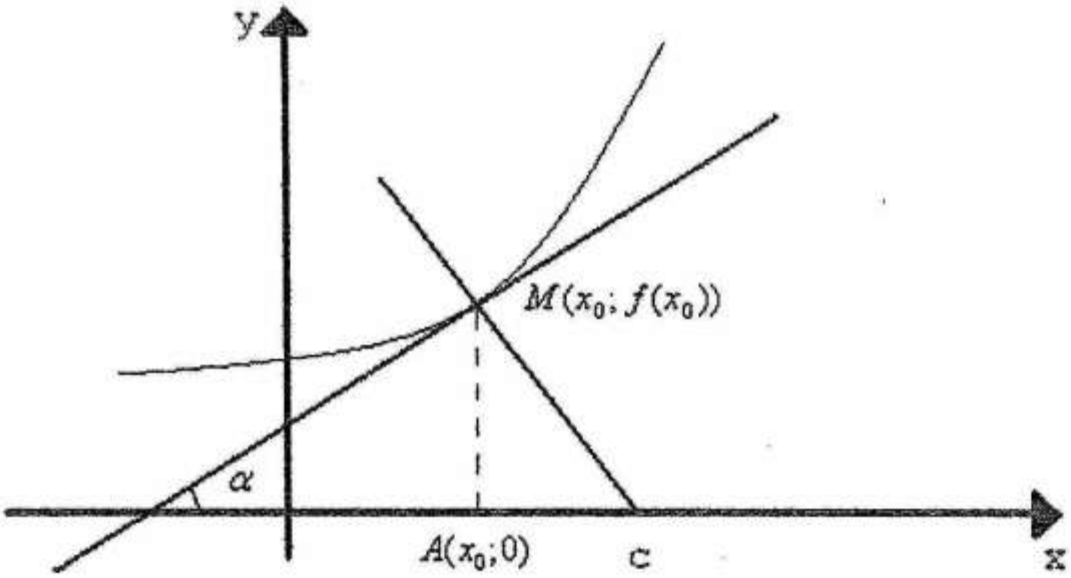
$$y',\ y'_x,\ \frac{dy}{dx},\quad \text{або}\quad f',\ f'(x),\ \frac{df(x)}{dx}$$

Кутовій коефіцієнт дотичної до кривої графіка функції $y = f(x)$ *в точці з абсцисою* x *дорівнює похідній функції в точці, тобто*

$$\kappa = tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ *в точці* $M(x_0; y_0)$ *має вигляд*

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$



Рівняння нормалі (тобто прямої, яка перпендикулярна дотичній до кривої $y = f(x)$, проведеній в точці дотику x_0):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Приклад 1.

Дано рівняння параболи $y = -x^2 + 5$ та радіус кола R=5, центр якого знаходиться в центрі координат.

Необхідно:

1) знайти точки перетину параболи з колом;
2) скласти рівняння дотичної та нормалі до параболи в точках перетину її з колом;
3) знайти гострі кути, які утворюються цими кривими в точках їх перетину;
4) накреслити малюнок.

Розв'язання:

1) Рівняння кола з центром в центрі координат $x^2 - y^2 - R^2$, отже в нашому випадку буде таким:

$$x^2 + y^2 = 25$$

Щоб знайти координати точок перетину параболи і кола, необхідно розв'язати систему:

$$\begin{cases} y = 5 - x^2 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо A(-3;-4), B(3;-4) та C(0;5).

2) Щоб скласти рівняння дотичної та нормалі в точках A і B, скористуємося рівнянням пучка прямих, в якому кутовий коефіцієнт для дотичної до параболи дорівнює значенню похідної функції $y = -x^2 + 5$, знайденому в точці A та в точці B, а кутовий коефіцієнт нормалі $k = -\frac{1}{f'(x_0)}$, отже:

   рівняння параболи $y = 5 - x^2$; похідна $y' = -2x$;

   значення похідної в точці A: $y'|x = -3 = -2 \cdot (-3) = 6$;

   значення похідної в точці B: $y'|_{x=3} = -2 \cdot (3) = -6$

   <u>Для точки A:</u>

   рівняння дотичної до параболи $y + 4 = 6 \cdot (x + 3)$,
   або $y - 6x - 14 = 0$;

   рівняння нормалі до параболи $y + 4 = -1/6 \cdot (x + 3)$,
   або $6y + x + 30 = 0$.

Для точки В:

рівняння дотичної до параболи $y+4=-6\cdot(x-3)$,

або $y+6x-14=0$;

рівняння нормалі до параболи $y+4=1/6\cdot(x-3)$,

або $6y-x+30=0$.

3) Кут, під яким перетинаються дві лінії, вимірюється кутом між дотичними до цих ліній, проведеним в точці їх перетину, а кут між двома прямими визначається за формулою:

$$tg=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$$

Знаходимо кутовий коефіцієнт дотичної до кола в точці В. Рівняння кола $x^2+y^2=36$, похідна має вигляд $2x+2yy'=0$;

$\gamma'=-\frac{x}{y}$; значення похідної в точці В: $\gamma'(B)=-\frac{3}{-4}=0{,}75$.

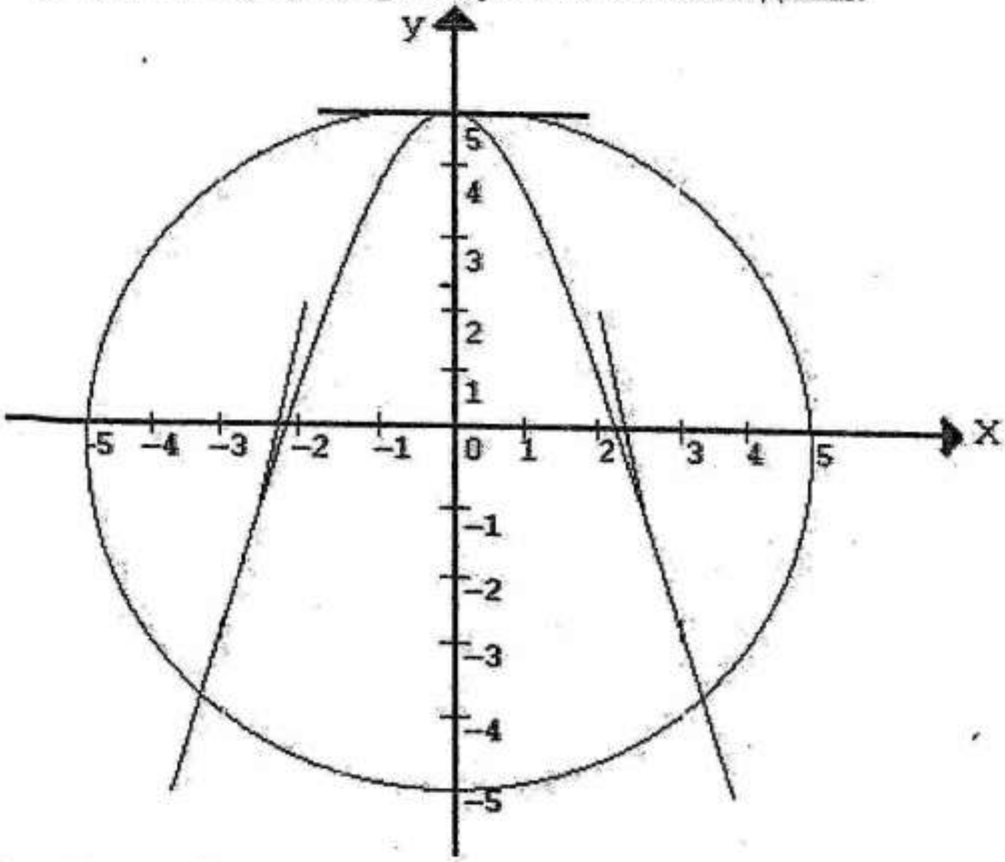
Отже $tg\varphi=\frac{-6-0{,}75}{1-0{,}75\cdot 6}=\frac{-6{,}75}{-3{,}5}\cong 1{,}93$.

Кут $\varphi=arctg1{,}93=$ радіан або $\varphi=\frac{180°\cdot 1{,}2}{\pi}=68°79'$.

В силу симетрії графіка кути, під якими перетинаються парабола та коло в точці А і в точці В, рівні між собою.

Для точки С кут між кривими дорівнює 0 і це зрозуміло з графіка

4) Будуємо графік, враховуючи обчислені данні:



2. Основні правила диференціювання

Позначення: c- сила, x- аргумент, u, v і w- функції від x, які мають похідні:

а) похідна алгебраїчної суми функцій

$$(u+v-w)'=u'+v'-w';$$

б) похідна добутку двох функцій

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$$

в) похідна добутку трьох функцій

$$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+u\cdot v'\cdot w+u\cdot v\cdot w';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2},$$

Окремі випадки останньої формули:

$$\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{1}{c} \cdot u'; \quad \left(\frac{c}{u}\right)' = -\frac{c}{v^2} \cdot v'.$$

Доведемо теореми про основні властивості похідної.

Теорема *(похідна алгебраїчної суми функції);*

Якщо функції u(x) і v(x) мають похідні у всіх точках інтервалу (a;b), то $(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$ *для будь-якого* $x \epsilon (a;b)$. *Коротше,* $(u \pm v)' = u' + v'$

Доведення: Суму функцій *u(x)+v(x)*, де $x \epsilon (a;b)$., яка представляє собою нову функцію, позначимо через $f(x)$ і знайдемо похідну цієї функції. Нехай x_0 - деяка точка інтервалу $(a;b)$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(u(x) + v(x)) - (u(x_0) + v(x_0))}{x - x_0} =$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} = u'(x_0) + v'(x_0).$$

Отже, $f'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0)$.

Так як x_0 - довільна точка інтервалу $(a;b)$, то маємо:
$f'(x) = (u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$.

Випадок різниці розглядається аналогічно. Теорема доведена.

Наприклад:

а) $(x^2+x+5)' = (x^2)' + (x-5)' = 2x+1$;

б) $(x^3+\sqrt{x})' = (x^3)' + (\sqrt{x})' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^2+4x+15)' = (x^2)' + (4x+15)' = 2x+4$.

Зауваження. Методом математичної індукції доводиться справедливість цієї формули для кінцевого числа доданків.

Теорема *(похідна добутку). Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні у всіх точках інтервалу $(a;b)$, то*

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Для любого $x\epsilon(a;b)$. Інакше, $(uv)' = u'v + uv'$.

Доведення. Позначимо $u(x)\,v(x)$ через $f(x)$, $x\epsilon(a;b)$, і найдемо похідну цієї функції, виходячи із визначення.

Нехай x_0 - деяка точка інтервалу $(a;b)$. Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)}{x-x_0}$$

Оскільки
$$u(x)v(x)-u(x_0)v(x_0)=(u(x)-u(x_0))v(x)+u(x_0)(v(x)-v(x_0)).$$

то
$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}v(x)+u(x_0)\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}\right).$$

$$f'(x_0)=v(x_0)u'(x_0)+u(x_0)v'(x_0).$$

Так як x_0 - вільна точка інтервалу $(a;b)$, то маємо
$f'(x)=(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x).$
Теорема доведена.

Наприклад:
а) $((x+5)\cdot(x-8))'=(x+5)'\cdot(x-8)+(x-8)'\cdot(x+5)=$
$=1\cdot(x-8)+1\cdot(x+5)=2x-3;$
б) $(x^2\cdot(2x-7))'=(x^2)'\cdot(2x-7)+x^2\cdot(2x-7)'=$
$=2x\cdot(2x-7)+x^2\cdot 2=6x^2-14x;$
в) $(\sqrt{x}\cdot(5-3x))'=(\sqrt{x})'\cdot(5-3x)+\sqrt{x}\cdot(5-3x)'=$
$=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(5-3x)+\sqrt{x}\cdot(-3)=\dfrac{5-3x-6x}{2\sqrt{x}}=\dfrac{5-9x}{2\sqrt{x}}.$

Наслідок. Постійний множник можна виносити за знак похідної:

$$(cf(x))'=cf'(x).$$

Доведення. Застосувавши теорему про похідну добутку, де a – число, отримаємо

$$(af(x))'=(a)'f(x)+af'(x)=a'f(x)+af'(x)=af'(x).$$

Наприклад:

а) $(\frac{x^2}{3})' = \frac{1}{3} \cdot (x^2)' = \frac{2}{3}x;$

б) $(\frac{x^3}{3} + 5x)' = (\frac{x^3}{3})' + (5x)' = \frac{1}{3}(x^3)' + 5(x)' = x^2 + 5.$

Теорема *(похідна частки двох функцій). Якщо функції* $u(x)$ *і* $v(x)$ *мають похідні у всіх точках інтервалу* $(a;b)$, *причому* $v(x) \neq 0$ *для будь-якого* $x \in (a;b)$, *то*

$$(\frac{u(x)}{v(x)})' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \text{ для будь-якого } x \in (a;b).$$

$$(\frac{u}{v})' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Доведення. Позначимо тимчасово $\frac{u(x)}{v(x)}$ через $f(x)$ та знайдемо $f'(x)$, використовуючи визначення похідної.

Нехай x_0 - деяка точка інтервалу $(a;b)$.

Тоді,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{v(x)v(x_0)(x - x_0)} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x)}{x - x_0}$$

Оскільки

$$u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x) = (u(x) - u(x_0))v(x_0) + u(x_0)(v(x_0) - v(x)),$$

то $$f'(x_0) = \frac{1}{v^2(x_0)} \lim_{x \to x_0} (\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} v(x_0) - u(x_0) \frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0},$$

отже, $$f'(x_0) = \frac{v(x_0)u'(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Так як x_0 - вільна точка інтервалу $(a;b)$, то в останній формулі x_0 можна замінити на x. Теорема доведена.

Наприклад:

а) $$\left(\frac{1+9x}{x+1}\right)' = \frac{(x+1)\cdot(1+9x)' - (1+9x)\cdot(x+1)'}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{(x+1)\cdot 9 - (1+9x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{8}{(x+1)^2};$$

б) $$\left(\frac{x^3}{4-x}\right)' = \frac{(4-x)\cdot(x^3)' - x^3\cdot(4-x)'}{(4-x)^2} =$$
$$\frac{(4-x)\cdot 3x^2 - x^3\cdot(-1)}{(4-x)^2} = \frac{12x^2 - 2x^3}{(4-x)^2}.$$

Слід мати на увазі, якщо y є функція від u, то $y = f(u)$, *де u, у свою чергу, є функція від аргументу x:* $u = \varphi(x)$, *тобто якщо y залежить від x через проміжний аргумент u, то y називається складною функцією від x (функцією від функції).*

$$y = f[\varphi(x)]$$

Похідна складеної функції:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}, \quad \text{або} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y=\sin(x^2)$.

Розв'язання:

Цю функцію можна записати так: $y=\sin u$, де $u=x^2$. Тоді за правилом диференціювання складної функції маємо:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\sin u)'_u \cdot (x^2)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2)$$

Отже: $(\sin(x^2))' = 2x \cdot \cos(x^2)$.

Приклад 3. Знайти похідну функції $y=\sin^7 x$.

Розв'язання:

Цю функцію можна записати як

$y=\sin^7 x=(\sin x)^7$, *або* $y=u^7$; $u=\sin x$.

$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 7u^6 \cdot (\sin x)'_x = 7\sin^6 x \cdot \cos x$.

Отже:

$$(\sin^7 x)' = 7\sin^6 x \cdot \cos x.$$

3. Формули диференціювання

1. $(C)' = 0$	**3.** $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$	**7.** $(tgu)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	3^1 $(e^u)' = e^u \cdot u'$	**8.** $(ctgu)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$
2^1 $x' = 1$ 2^2 $(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$	**4.** $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}$	**9.** $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
2^3 $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{1}{u^2} \cdot u'$	4^1. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$	**10.** $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
2^4 $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	**5.** $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	**11.** $(arctgu)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
2^5 $(\sqrt[n]{u})' = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{n \cdot u} \cdot u'$	**6.** $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	**12.** $(arctgu)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$
$(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v u^{v-1} \cdot u'$, *де* $u = u(x), v = v(x)$ (*)		

4. Неявна функція та її похідна

Нехай рівняння $F(x,y) = 0$ *визначає y як неявну функцію від x (тобто рівняння не розв'язане відносно функції y).*

Будемо вважати цю функцію диференційованою. Щоб знайти похідну y'_x, *необхідно:*

1) про диференціювати по x обидві частини рівняння $F(x,y) = 0$ *(пам'ятаючи при цьому, що* $(x)' = 1$, *а* $(y)' = y'$*);*

2) знайти y'_x з одержаного рівняння.

Приклад 4. Знайти похідну y'_x з рівняння $x^2 + y^2 = a^2$.

Розв'язання:

$$(x^2 + y^2)'_x = (a^2)'_x;$$

$$2x + 2y \cdot y' = 0; \qquad y'_x = -\frac{x}{y}.$$

Приклад 5. Знайти похідну y'_x з рівняння

$$x - y + a^2 - \frac{1}{4}\sin(xy) = 0$$

Розв'язання:

$$1 - y' - \frac{1}{4}\cos(xy) \cdot (y + xy)' = 0,$$

тому що

$$(xy)' = x'y + xy' = y + xy'.$$

Далі:

$$1 - y' - \frac{1}{4}\cos(xy) - \frac{1}{4}xy' \cdot \cos(xy) = 0;$$

$$1 - \frac{y}{4} \cdot \cos(xy) = y'(1 + \frac{x}{4}\cos(xy));$$

$$y' = \frac{1 - \frac{y}{4}\cos(xy)}{1 + \frac{x}{4}\cos(xy)}.$$

5. Логарифмічне диференціювання

Слід пам'ятати, що (за означенням) логарифмом числа N за даною основою a називається показник степеня x, до якого треба піднести основу a, щоб одержати число N. Основу a вважаємо додатною і такою, що дорівнює одиниці.

Позначення: $\log_a N = x$, *звідки* $a^x = N$.

Знаком lg *без зазначення основи позначається десятковий логарифм:* $\log_{10} a = \lg a$

Знаком ln *без зазначення основи позначається натуральний логарифм, тобто логарифм при основі* $e \cong 2{,}71828$.

$$\log_e a = \ln a.$$

Знаком log *без зазначення основи позначається логарифм за довільною основою (в межах однієї формули ця основа мислиться тією самою).*

Далі: $\log_a N$ *існує тільки для* $N > 0$.

$\log 1 = 0$ $\qquad\qquad$ $\log_N N = 1$

$\log(ab) = \log a + \log b$ $\qquad\qquad$ $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

$\log a^n = n \log a$ $\qquad\qquad$ $\log \sqrt[m]{a^n} = \frac{n}{m} \log a$

Перехід від даної до іншої основи :

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N.$$

звідси $\ln N = \frac{1}{M} \lg N$, *де* $M = \log e = 0{,}4343...$

Якщо маємо функцію виду $y = \left[f(x)\right]^{\varphi(x)}$ *(показниково-степенева функція), то для того, щоб знайти її похідну, необхідно:*

а) прологарифмувати ліву та праву частини рівності;

б) знайти похідну лівої та правої частини одержаної рівності, пам'ятаючи, що x - аргумент, а y – функція

аргументу x, тому їх похідні відповідно $(x)'_x = 1$; $(y_x)' = y'_x$;

в) розв'язати одержане рівняння відносно y'_x.

результат застосування цього методу – формула (*) (див. Розділ 3

Приклад 6. Знайти похідну y'_x, *якщо* $y = (tgx)^{x^2}$

Розв'язання:

а) прологарифмуємо обидві частини рівності

$\ln y = \ln(tgx)^{x^2}$, звідси $\ln y - x^2 \cdot \ln(tgx)$;

б) знайдемо похідну лівої та правої частини:

$$(\ln y)' = (x^2 \cdot \ln(tgx);$$

$$\frac{1}{y} \cdot y'_x = 2x \cdot \ln(tgx) + x^2 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

в) знайдемо y'_x, для чого ліву і праву частини помножимо на у, який за умовою дорівнює $y = (tgx)^{x^2}$,

$$y'_x = y(2x \cdot \ln(tgx) + \frac{x^2}{\sin x \cdot \cos x}),$$

$$y'_x = (tgx)^{x^2} \cdot 2x \cdot (\ln tgx + \frac{x}{\sin 2x}).$$

Логарифмувати обидві частини рівності, перед тим як знаходити похідну, доцільно також в тих випадках, коли права частина є складний вираз, що містить в собі добуток, степені, дроби.

Приклад 7. Знайти y'_x, якщо $y = \sqrt{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Розв'язання:

а) про логарифмуємо обидві частини виразу:

$$\ln y = \frac{1}{3}\left[3\ln x + \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right];$$

б) знайдемо похідну:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot (-2x)\right];$$

в) визначимо y'_x:

$$y' = \sqrt[3]{\frac{x^3(x-1)}{\sqrt{1-x}}} \cdot \left(\frac{3-3x^2-x}{3x(1-x^2)}\right)$$

6. Диференціювання функцій, заданих в параметричній формі

Параметрична формула функції часто застосовується в механіці. При цьому крива лінія розглядається як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, а координати (x, y) цієї точки мають вигляд неперервних функцій допоміжних змінної, яка називається параметром. Рівняння плоскої кривої, заданої у параметричної формі, має вигляд:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

де кожному значенню параметра t відповідає одна пара значень x та y. Параметр t змінюється в такому проміжку, щоб точка з координатами x, y описувала всю криву або її частину.

Нехай задана функція в параметричній формі:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

де $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ - диференційовані функції і $\varphi'(t) \neq 0$, тоді:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Приклад 8. Знайти y'_x, *якщо* $\begin{cases} y = t \cdot \cos^2 t \\ x = tg(t^2) \end{cases}$

Розв'язання:

$$y'_t = \cos^2 t + t \cdot 2\cos t(-\sin t) = \cos^2 t - t \cdot \sin 2t;$$

$$x' = \frac{1}{\cos^2(t^2)} \cdot 2t = \frac{2t}{\cos^2(t^2)}$$

Тоді:

$$y'_x = \frac{(\cos^2 t - t \cdot \sin 2t) \cdot \cos^2(t^2)}{2t}.$$

7. Диференціал функції. Застосування диференціала до наближених обчислень.

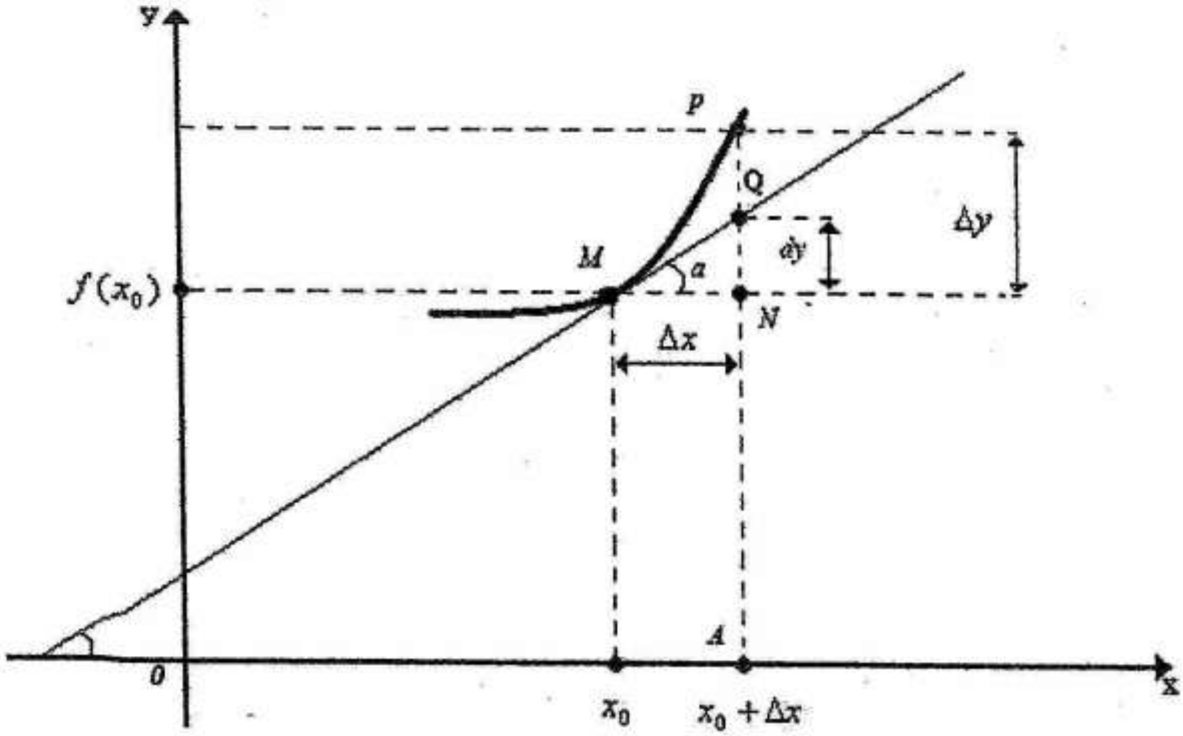
Диференціалом функції $y = f(x)$ *(або диференціалом першого порядку) називається добуток похідної цієї функції* $f'(x)$ *на диференціал аргументу* dx:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Нехай дано:

- *функцію* $y = f(x)$;
- *приріст цієї функції* $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
- *її диференціал* $dy = f'(x) \cdot dx$.

Геометричний зміст диференціалу зрозумілий з рисунка.



Вважаючи, що $\Delta x = dx$, маємо: $PN = \Delta y$,
$QN = MNtga = \Delta x f'(x) = f'(x)dx = dy$.
Таким чином, заміна приросту функції на її диференціал геометричне означає зміну ординати AP кривої ординатою дотичної AQ. Зрозуміло, що така заміна доцільна для достатньо малих значень Δx.

При досить малих Δx маємо $\Delta y \approx dy$. Замінивши приріст функції її диференціалом, дістанемо $f'(x) \cdot dx \approx f(x+\Delta x)$, звідки:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (7.1)$$

Для зручності застосування цієї формули позначимо:

$$x = x_1; \quad x + \Delta x = x_2; \quad \Delta x = x_2 - x_1,$$

Тоді формула (7.1) мaєте вигляд:

$$f(x_2) \approx f(x_1) + f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1).$$

Застосування цієї формули дає значне спрощення при обчислені числового значення функції; геометрично це відповідає заміні ділянки кривої відрізком дотичної.

Приклад 9. Знайти наближене значення $\sqrt[3]{26{,}3}$.

Розв'язання:

Приймаємо $f(x)=\sqrt[3]{x}$, знаходимо її похідну $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

Найближче до 26,3 значення, з якого добувається кубічний корінь, є число 27. Отже $x_1=27$, тоді $f(x_1)=\sqrt[3]{27}=3$.

$$f'(x_1)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x_1{}^2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}=\frac{1}{3\cdot 9}=\frac{1}{27};$$

$$x_2=26{,}3;\quad \Delta x=x_2-x_1=26{,}3-27=-0{,}7.$$

Підставляючи знайдені значення в формулу (7.2), одержимо:

$$\sqrt[3]{26{,}3}=\sqrt[3]{27-0{,}7}\approx 3+\frac{-0{,}7}{27}=3-0{,}026=2{,}974.$$

Приклад 10. Знайти наближене значення $\sin 28^\circ$.

Розв'язання:

Приймемо $f(x)=\sin x;\quad f'(x)=\cos x;\quad x_1=30^\circ;\quad x_2=28^\circ;$

$$x_2-x_1=28^\circ-30^\circ=-2^\circ.$$

Перетворимо в радіани: $-2^\circ=-2^\circ\cdot\dfrac{\pi}{180^\circ}\Rightarrow x_2-x_1=-\dfrac{\pi}{90^\circ}$

підставляючи в вираз (7.2), одержимо:

$$\sin 28^\circ\approx\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}\cdot\pi}{90}=0{,}4698.$$

Отже $\sin 28° \approx 0{,}4698$.

Точне значення $\sin 28°$, знайдене по таблиці, 0,4694.

8. Поняття про похідні та диференціали 2-го та вищих порядків

Похідна, знайдена від похідної деякої функції $y = f(x)$, називається похідною 2-го порядку.

$$y'' = (f'(x))' = f''(x).$$

Взагалі похідною n-го порядку даної функції називається похідна від похідної (n – 1) порядку, тобто:

$$y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Приклад 11.

Знайти похідну 3-го порядку функції $y = e^{2x}$.

Розв'язання:

$y' = 2e^{2x}$; $y'' = 4e^{2x}$; $y''' = 8e^{2x}$.

Диференціалом n-го порядку функції називається диференціал диференціала (n – 1) порядку. Диференціал n-го порядку функції $y = f(x)$ позначається так: $d^n y$, $d^n f$.

Згідно з визначенням $d^n(y) = d(d^{(n-1)}y)$.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідні до n-го порядку включно, то $d^n y = y^{(n)} dx^n$.

Слід зауважити, що диференціал n-го порядку складної функції не може бути обчислений за цією формулою.

Приклад 12. Знайти $d^4 y$ функції $y = \sin x$.

Розв'язання:

Послідовно знайдемо:

$dy = y'dx = \cos x dx;$ $\quad$ $d^2 y = y''dx = -\sin x \cdot dx^2;$

$d^3 y = y'''dx^3 = -\cos x \cdot dx^3;$ $\quad$ $d^4 y = y^4 dx^4 = \sin x \cdot dx^4.$

9. Механічний зміст першої та другої похідної

При прямолінійному русі точки швидкість v в даний момент $t = t_0$ є похідна $\frac{ds}{dt}$ від шляху s за часом, обчислена при $t = t_0$.

Прискорення a в даний момент $t = t_0$ є похідна $\frac{ds}{dt}$ від швидкості v за часом t, обчислена при $t = t_0$.

Приклад 13.

Точка рухається за знаком $s = 3t^3 - 4t^2 - 1$.

Знайти величину швидкості і прискорення в момент часу $t = 3$ (шлях вимірюється в метрах, а час – у секундах).

Розв'язання:

Швидкість руху $v = s_t' = 9t^2 - 8t$.

Прискорення $a = v_t' = 18t - 8$.

При t=3:

$$v = 9 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 = 57 \ м/с;$$

$$a = 18 \cdot 3 - 8 = 46 \ м/с^2.$$

Варіант 1

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3x^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 2\sqrt[4]{x^3}$

2) $y = e^{3x} \cdot \sin 2x$

3) $y = \frac{ctg 2x}{2^x}$

4) $y = (3x^2 - x + 2)^7$

5) $y = \sin \ln 3x$

6) $y = \sqrt{3tg^3 5x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{2x-4}{2x+4}}$

2) $y = \frac{x^3 \cdot \sqrt[5]{(2x+1)^2}}{\sqrt[3]{(3x-1)^4}}$

3) $y = (2\sqrt{x})^{\cos 2x}$

4) $y = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^{x^3}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $2^{-x} + 2^{y} = 2$

2) $x \cdot e^{x-y} + y^2 = 3x$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = \sin 3t \\ y = \cos 3t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = e^t \\ y = t^3 + 5t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{4x - x^2}{4}, \quad x_0 = 2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 2t^4 - 3t^2 + t - 2, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = x \cdot e^{2x}$; б) $2^x = x^4 + y^4$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, x = 7.76$; б) $\cos 63°$.

Варіант 2

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 5x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 5$

2) $y = tg3x \cdot (x^2 - 5)$

3) $y = \dfrac{x^3 + 2^x}{\sin x}$

4) $y = (5x^3 - x^2 + 2)^5$

5) $y = 2^{\arcsin \sqrt{x}}$

6) $y = \ln tg\, 3x$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{5x-2}}$

2) $y = \dfrac{(x-3)^4 \cdot 2x}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$

3) $y = (\sin 3x)^{ctg 5x}$

4) $y = (5x-1)^{\frac{1}{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\arcsin y + \arccos y = x$

2) $\sin(x+y) = 3x^2$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t\cos t + t^2 \\ y = \dfrac{t^2}{\ln t} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $y = x - x^3$, $x_0 = -1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 - 2t^2 - t + 1, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \ln \sin x$; б) $\sin(xy) + x^2 = 0$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \dfrac{x + \sqrt{5 - x^2}}{2}$, $x = 0{,}98$; б) $\sin 27°$.

Варіант 3

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 5x^3 - \dfrac{1}{x^2} + 3$

2) $y = 5x^4 \cdot \cos 3x$

3) $y = \dfrac{\ln\sqrt{x}}{1+x^3}$

4) $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^4$

5) $y = \ln \sin^2 x$

6) $y = \sqrt{tg^3 \dfrac{x}{2}}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[8]{\dfrac{5x^2 - x}{5x^2 + x}}$

2) $y = \dfrac{(x+5)^4 \cdot \sqrt[5]{x^2+3}}{e^{5x}}$

3) $y = (2x-1)^{\frac{1}{5x+2}}$

4) $y = (\sin^2 x)^{tg\sqrt{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\sin(xy) + x^3 - 2y = 0$;

2) $3^{xy} - \cos y = 3x$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 3\sin^2 t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t^2} \\ y = 3t^2 - 5t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $y = x - \sqrt{x^3}$, $x_0 = 1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 4t^4 - 3t^2 - 2t - 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = e^{tg\, x}$;

б) $\cos(x+y) = \sin x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \arcsin x$, $x = 0{,}08$;

б) $\cos 57°$.

Варіант 4

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 3x^2 - \frac{1}{x^3} - \frac{8}{\sqrt[4]{x^3}}$

2) $y = (3x^2 + 2) \cdot \sin 5x$

3) $y = \frac{tg^2\sqrt{x}}{\ln x}$

4) $y = (x^3 + 2x - 1)^4$

5) $y = \arcsin \ln\sqrt{x}$

6) $y = e^{tg^2 x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[5]{\frac{5x^2 - 3}{5x^2 + 3}}$

2) $y = \frac{x^3 \cdot e^{2x} \cdot \sqrt[4]{x^3 + 1}}{(x-3)^3}$

3) $y = \left(2\sqrt{x}\right)^{\ln\frac{1}{x}}$

4) $y = (\cos^2 x)^{\sin x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\ln(xy) - \sin x = y^3$

2) $3xy^3 + 2x = 5y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = e^{3t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5t^2 - 2t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $\quad y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}, \quad x_0 = 4$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = t^4 - 2t^3 - t^2 + 3, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \sin\frac{1}{x}$;

б) $y = \ln(x+y)$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}$, $x = 26,46$;

б) $tg 46°$.

Варіант 5

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = \frac{2}{x^3} - 5x^4 + \sqrt[3]{x^2}$

2) $y = (7x^3 + 4x) \cdot \ln\sqrt{x}$

3) $y = \frac{\sin^3 x}{\sqrt{3x^2 - 1}}$

4) $y = (x^3 - 5x - 1)^5$

5) $y = \sin^3 \frac{1}{x^2}$

6) $y = \ln\cos 5x$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[3]{\frac{x^3 - 4}{x^3 + 4}}$

2) $y = \frac{e^{2x} \cdot \sin 3x \cdot \sqrt[5]{tgx}}{(3x + 5)^6}$

3) $y = \arcsin x^{\ln 2x}$

4) $y = (ctgx)^{3x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $xy = \frac{\sin y}{x}$

2) $y = 5x + \sin(xy)$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5t^3 - 2t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $y = 2x^2 - 3x + 1, \quad x_0 = 1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 + 3t^2 - 5t + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \ln ctg\, x$ б) $xy + x^5 = y^5$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^{11}$, $x = 1{,}021$; б) $\cos 59°$.

Варіант 6

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 7x^3 - \dfrac{1}{x^4} + \sqrt[3]{2x}$

2) $y = \ln 5x \cdot \sin 2x$

3) $y = \dfrac{5^{3x-1}}{\sin^2 x}$

4) $y = (3x^2 - 2x + 1)^7$

5) $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

6) $y = \ln tg\dfrac{1}{x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[6]{\dfrac{3x-1}{3x+1}}$

2) $y = \dfrac{e^{3x} \cdot \sin 5x \cdot (7x-1)^6}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$

3) $y = \left(ctg\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

4) $y = (\ln 5x)^{\cos x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2 + y^2 + 3y = 0$

2) $\ln y + \dfrac{y}{x} = x^3$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 + 1 \\ y = 3t^2 - 1 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $\quad y = \sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 64$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 - t^2 + 2t + 1, \quad t_0 = 1$$

3)Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 3x - 4}$

б) $x + y^2 = e^x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^{21}, x = 0{,}998;$

б) $ctg 47°.$

Варіант 7

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3x^4 - \dfrac{5}{\sqrt{x}} + \sqrt[4]{x^3}$

2) $y = \sin^2 x \cdot \sqrt{3x-5}$

3) $y = \dfrac{ctg5x}{e^x + \ln\sqrt{x}}$

4) $y = (5x^3 - 2x^2 + 5)^6$

5) $y = \arcsin(5x^2 - 3)$

6) $y = ctg(\ln\sqrt{x})$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 7x}{x^3 + 5x^2}}$

2) $y = \dfrac{\sin 5x \cdot e^{\cos x} \cdot (x^2 - 5)^6}{\sqrt{ctgx}}$

3) $y = (ctg2x)^{\sin 3x}$

4) $y = (\sin 5x)^{\sqrt{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^3 + y^3 = 2x^2y^2$

2) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = 5$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = ctg5t \\ y = tg2t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3t^2 - 5 \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $y = 2x^2 + 3, \quad x_0 = -1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 4t^4 - 3t^2 - t + 2, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $e^x = 2^y$; б) $y = \ln\cos x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^6,\ x = 2{,}01$; б) $\sin 32°$.

Варіант 8

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7x^3 - \frac{1}{x^4} + \sqrt[7]{x^2}$

2) $y = \cos 5x \cdot \ln\sqrt{x}$

3) $y = \frac{ctg^3 2x}{\ln \sin x}$

4) $y = (7x^5 + 2x^2 - 1)^6$

5) $y = 2^{arc\,tg\,x}$

6) $y = \sin^3(\ln\sqrt{x})$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[7]{\frac{5x-1}{x^2+3}}$

2) $y = \frac{x^6 \cdot \sqrt[4]{(3+x)^3}}{\sqrt[5]{(1+x^2)^3}}$

3) $y = (arctg\,x)^{\frac{1}{x}}$

4) $y = \left(\frac{1}{x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x \cdot \ln y = x + y$

2) $e^x = 3^y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 1 + \ln\sin t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2} - t \\ y = 2t^3 + t^2 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = 2x + \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 - t^3 + 5t - 1, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = (1 + \sin x)^2$;

б) $e^{xy} = 2x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^7$, $x = 1{,}996$;

б) $tg 43°$.

Варіант 9

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{2}{x^4} + x^7$

2) $y = ctg^2 x \cdot 2^x$

3) $y = \dfrac{3^{\sin x}}{\sqrt[3]{\ln x}}$

4) $y = (5x^4 - 2x^2 + 7)^6$

5) $y = \ln(\sqrt{1 - 5x^3})$

6) $y = \dfrac{7}{arctg 2^x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[9]{\dfrac{3x^2 - 7}{x^4 + x^2}}$

2) $y = \dfrac{x^7 \cdot \sqrt[6]{5x - 7}}{\sqrt[3]{\ln 5x}}$

3) $y = (1 + \sin x)^{1 + \cos x}$

4) $y = (\ln 5x)^{\frac{1}{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\sin x + 5 = 2^{xy}$

2) $e^{xy} = 2x^3$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = \ln^2 t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 - 2t + t \\ y = \dfrac{1}{t^2} + 2 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^5 + 1}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 4t^4 + 2t^3 - 7t^2 - 3, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \sin(\ln x)$; б) $tg(xy) = y$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{4x - 1}, \ x = 2{,}56$; б) $ctg 43°$.

Варіант 10

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = \frac{5}{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + 2x^4$

2) $y = x^2 \cdot \arcsin\sqrt{x}$

3) $y = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{e^x} + \sin^3 x \cdot 2^x$

4) $y = (3\cos x - 2x^3 + 5)^6$

5) $y = \cos(\ln\frac{1}{x})$

6) $y = \sqrt[3]{\ln\sin x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[7]{\frac{4x^2-5}{2x^3-x}}$

2) $y = \frac{x^2 \cdot \sqrt[7]{(x+3)^5}}{\sqrt[3]{(x^2-5)^2}}$

3) $y = \left(\frac{1}{\sin x} + 2x\right)^{\frac{1}{x}}$

4) $y = (ctg2x)^{\sin 3x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\ln(x+y) = tg\, y$

2) $3x^2y^2 - 2x + 5y = 7$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = t\ln t \\ y = t^3 - t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = ctg2t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 3\left(\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x}\right), \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 + t^3 - 2t^2 + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $tgy = e^x$; б) $y = \sin^3 x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8{,}36$; б) $\sin 33°$.

Варіант 11

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 8 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x^3}$

2) $y = \sqrt{1-x^2} \cdot arctg\, x$

3) $y = \frac{1+x^2}{2^x}$

4) $y = (2tgx - x^2 + \sqrt{x})^5$

5) $y = \frac{1}{\ln tgx}$

6) $y = \sin^3(2^x)$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[10]{\frac{\sin x}{\cos 2x}}$

2) $y = \frac{e^{\cos x} \cdot \sqrt[3]{1+x}}{\sqrt[4]{x^2-5}}$

3) $y = \left(\frac{1}{\sin x} + x^2\right)^x$

4) $y = (\cos 2x)^{tg3x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\arccos x = e^{xy} + \sin y$

2) $tg\, y = e^{x+5}$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 2\sin^2 t \\ y = 3\cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2^{\sin t} \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x}{x^2+1}, \;\; x_0 = -2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 + 4t^3 - 5t^2 - 1, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = x^7$, $x = 2{,}002$; б) $\sin 28^{\circ}$.

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^7$, $x = 2{,}002$; б) $\sin 28°$.

Варіант 12

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3x^3 - \dfrac{6}{x^2 + \sqrt[3]{x^2}}$ 4) $y = (\ln x + \sin x - x^2)^4$

2) $y = ctgx \cdot e^{\cos x}$ 5) $y = 3^{\frac{x}{\sin x}}$

3) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sin^2 x}$ 6) $y = \ln^2 (tg\ x)$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{3 - x^3}{2 + x^2}}$ 3) $y = (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$

2) $y = \dfrac{x^{10} \cdot \sqrt[7]{(x-3)^5}}{\sqrt[6]{(x+1)^5}}$ 4) $y = \left(\dfrac{1}{x} + \cos x\right)^{\arcsin x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^6 + y^6 = 2xy$ 2) $tgx = e^y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 2\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = \ln^2 t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 4t^4 - 3t^3 - 5t^2 - 1, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $\ln y = tgx;$ б) $y = \cos^2 x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{x^3}, \quad x = 0{,}98;$ б) $\cos 62°$.

Варіант 13

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 5x^3 - \frac{7}{x^2} + 11$

2) $y = \ln 5x \cdot \sin x$

3) $y = \frac{\cos 5x}{2^{\sin x}}$

4) $y = (3tgx + \ln\sqrt{x} - 7x)^6$

5) $y = \cos^2(5x-1)$

6) $y = \sin^3(\ln\sqrt{x})$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[8]{\frac{x^7-5}{x^7+5}}$

2) $y = \frac{\sqrt{x-3}\cdot e^{tgx}}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$

3) $y = \left(2 + \frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

4) $y = (ctg3x)^{x^2+5x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \cos(xy) = x^2y^2$

2) $\ln y = tgx$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 3\sin^2 t \\ y = 4\cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \frac{1}{t^2} \\ y = t^3 + 1 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:
$$y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:
$$S(t) = 5t^4 - 6t^3 + 5t - 2, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \frac{x^2-1}{x^4}$

б) $x^2 + \ln y = xy$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[5]{x^2}, \quad x = 1{,}03;$

б) $\sin 33°$.

Варіант 14

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = \dfrac{3}{x^2} - \sqrt[5]{x^2} + 7x^4$

2) $y = \ln 5x \cdot tg\sqrt{x}$

3) $y = \dfrac{\cos^2 x}{2^x}$

4) $y = (\sin 2x - \ln x + x^3)^5$

5) $y = \dfrac{1}{\cos^2 \sqrt{x}}$

6) $y = \sin^3(\ln\sqrt{x})$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[5]{\dfrac{3x^2 - 6}{3x^2 + 6}}$

2) $y = \dfrac{e^x \cdot ctg\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt[5]{x^2 - 2x}}$

3) $y = (\sin^3 x)^{1-x^2}$

4) $y = \left(\sqrt{2x}\right)^{\sin\frac{x}{2}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $y = x + \arcsin y$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 + t^2 - t + 1 \\ y = 2' \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = 3\sqrt[4]{x} - \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 - 2t^3 + 7t - 2, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $\sin(x + y) = x^2$

б) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x^3 + 7x}, \quad x = 1{,}012;$

б) $\sin 47°$.

Варіант 15

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7 - \frac{11}{x^3} + \sqrt[6]{x^5}$

2) $y = ctg2x \cdot (x^3 + 1)$

3) $y = \frac{2^{3x}}{\sin 5x}$

4) $y = (\ln\sqrt{x} - ctg2x + x^3)^4$

5) $y = \frac{1}{ctg^2 5x}$

6) $y = \sin^3(\arccos x)$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[5]{\frac{x^4 - 3}{x^4 + 3}}$

2) $y = \frac{\sqrt{2x+5} \cdot e^{\cos x} \cdot 2^x}{\sqrt[5]{(3x-2)^3}}$

3) $y = (ctg2x)^{x^3}$

4) $y = (1 + \sin 2x)^{\cos x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\sin(x + y) = xy$

2) $x^3 + y^3 = 3x + 2y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = a \cdot \sin t \\ y = b \cdot \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = ctgt \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^2}{10} + 3. \quad x_0 = 2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 + 5t^3 - 2t^2 + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = x^7(x-1)^3$

б) $x = \ln(xy)$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 27{,}54;$

б) $ctg44°$.

Варіант 16

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3x^6 - \frac{1}{x^3} + \sqrt[4]{x^3}$

2) $y = ctg2x \cdot \ln^2 x$

3) $y = \frac{\cos 5x}{\sin\sqrt{x}}$

4) $y = (\ln x - 3ctgx + x^3)^5$

5) $y = \sin^3(\sqrt{x})$

6) $y = \frac{7}{\ln\sin x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[7]{\frac{x^3+3}{x^3-3}}$

2) $y = \frac{\sqrt[5]{x^2-2} \cdot e^{\sin x} \cdot ctg2x}{\sqrt[4]{(2-5x^2)^3}}$

3) $y = (tg3x)^{\frac{1}{\sin x}}$

4) $y = (\arcsin x)^{\sqrt{1+x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^3 y = \ln(xy)$

2) $y = x \cdot \cos y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = \ln t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 - t^2 + 1 \\ y = \sin t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 3t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $3^{xy} = x$

б) $y = x^3 \cdot (x+2)^2$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x + 5}, \quad x = 0{,}97;$

б) $\sin 63°$.

Варіант 17

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 5 - \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}} + x^4$

2) $y = 5x^3 \cdot \cos 2x$

3) $y = \dfrac{\ln 5x}{x^4 + 2x}$

4) $y = (\ln 3x - x^3 + tgx)^5$

5) $y = \ln^2(7x - 2)$

6) $y = 2^{\frac{1}{\sin x}}$.

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \dfrac{x \cdot \sqrt[5]{(x-7)^4}}{\sqrt[6]{(3x^2-7)^5}}$

2) $y = \ln\sqrt[6]{\dfrac{x^5 - 3}{x^5 + 3}}$

3) $y = (x^2 + 3x)^{\frac{1}{\cos x}}$

4) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $y^5 + x^5 + 5x^4 = 3$

2) $\arcsin(xy) + x^2 - y = 0$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \dfrac{t}{t+1} \\ y = t^3 + 3 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $\quad y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = 4$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = t^4 + 3t^3 - 2t + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \sqrt{x} \cdot \cos x$ б) $y =_, e^{x+y}$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{x^2 + x + 3}, \quad x = 1{,}97;$ б) $\cos 27°$.

Варіант 18

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7 + 2x^3 - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$

2) $y = \sin 7x \cdot \ln \dfrac{1}{x}$

3) $y = \dfrac{ctg2x}{3^x}$

4) $y = (\ln 2x - tgx + x^3)^4$

5) $y = \sin^3(\ln x)$

6) $y = \sqrt[3]{\cos^2 5x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \dfrac{2^x \cdot \sqrt[7]{x^2 - 1} \cdot \cos 3x}{\sqrt[3]{(x+5)^2}}$

2) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{4-x}{4+x}}$

3) $y = (ctg5x)^{\ln x}$

4) $y = (\sin 3x)^{\frac{1}{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\ln(x+y) = x^3 - 7$

2) $2^{x-y} = x^3 + y^3$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = 5\sin^2 t \\ y = \ln\sqrt{t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^3 - t^2 + 7 \\ y = \sin 3t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \sqrt[3]{x^2} - 20, \quad x_0 = -8$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 5t^4 - 6t^3 + 4t^2 - t, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = (\ln x)^3$ б) $x^4 = y^3$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 1{,}21;$ б) $tg62°$.

Варіант 19

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3x^4 - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3\sqrt{x}$

2) $y = tg5x \cdot (x^3 + 1)$

3) $y = \dfrac{ctg3x}{e^x + 5}$

4) $y = (\cos 3x - \ln x + x^2)^3$

5) $y = ctg^2(\ln x)$

6) $y = \dfrac{7}{\ln \sin x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{2-x}{2+x}}$

2) $y = \dfrac{e^{\cos x} \cdot \sqrt[5]{(x+3)^2}}{ctgx \cdot 2^x}$

3) $y = (1 + x^2)^{\sin^2 x}$

4) $y = (2\cos x)^{\ln x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $y = \sqrt{1+x^2} - \ln y$

2) $e^{x+y} = x^3 y^3$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t^2 + 3\ln t \\ y = t^4 - 2t^3 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $\quad y = 4\left(\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x}\right), \quad x_0 = 1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 4t^4 - 6t^2 + 2t - 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ б) $xy = e^y$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x^2}, \quad x = 1{,}03;$ б) $tg58°$.

Варіант 20

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 5x^3 - \dfrac{2}{x^2} + \sqrt[5]{x^4}$

4) $y = (\ln x - \sin x - x^3)^4$

2) $y = \ln\sqrt{x}\cdot(x^2+5)$

5) $y = \ln^3(\sin 2x)$

3) $y = \dfrac{\sin 5x}{3^x}$

6) $y = 3^{1-\sin^3 x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{5x^2-4}{5x^2+4}}$

3) $y = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^{ctgx}$

2) $y = \dfrac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt[5]{(x+3)^2}\cdot\sqrt[3]{(x^2-7)^2}}$

4) $y = (tg3x)^{1+x^2}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2 - y^2 = xy$

2) $e^{3x} = \ln(x+y)$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = a\cdot\cos^2 t \\ y = b\cdot\sin^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \sin^2 3t \\ y = \sqrt{5t} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = 8\cdot\sqrt[4]{x} - 70, \quad x_0 = 16$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 3t^4 + 6t^3 - 2t^2 + t, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = 2\sin^3 x$

б) $y^4 + x = xy$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 8{,}24;$

б) $\cos 32°$.

Варіант 21

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7x^2 - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} + \sqrt[3]{x^2}$

2) $y = \sin 3x \cdot \log_2 x$

3) $y = \dfrac{ctg5x}{1+x^2}$

4) $y = (2x - \ln x + ctgx)^7$

5) $y = tg^2(5x)$

6) $y = \dfrac{\sqrt{7\cos^2 3x}}{6}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[3]{\dfrac{7-x^2}{7+x^2}}$

2) $y = \dfrac{2^{\cos x} \cdot \sqrt[5]{(x-3)^2}}{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}$

3) $y = (1+x^2)^{\sin\frac{1}{x}}$

4) $y = (\sin 2x)^{\cos\sqrt{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\cos(x+y) = x^4 y^4$

2) $\dfrac{1}{\sin x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = tg\, t \\ y = \sin^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5t^2 - t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}, \quad x_0 = 3$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 - 5t^3 + 10t^2 - t, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \sin x - \cos^2 x$ б) $arctgy = 3x^2$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 7{,}64;$ б) $\sin 59°$.

Варіант 22

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7\sqrt[3]{x^2} + 5x^3 - \dfrac{2}{x^4}$

2) $y = ctg2x \cdot \ln\sqrt{x}$

3) $y = \dfrac{3^{2x}}{\cos 5x}$

4) $y = (5x^2 - x + 1)^7$

5) $y = 2ctg^{2\sqrt{x}}$

6) $y = \dfrac{1}{\ln\sin^3 x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \sqrt{\dfrac{5x^2 - 7}{5x^2 + 7}}$

2) $y = \dfrac{e^{\sin x} \cdot \sqrt[5]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(2 + x^2)^2}}$

3) $y = (ctg3x)^{\sin\frac{x}{2}}$

4) $y = (\sin^2 x)^{\ln x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\sin(xy) = x^3 + y^3$

2) $x^4 y^4 - x = 3y^2$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = \ln t + 5 \\ y = \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 5\sin t \\ y = 3\cos t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^3 + 2}{x^3 - 2}, \quad x_0 = 2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 2t^4 - 2t^3 + t^2 - 2, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y^2 = x\cos y$

б) $y = x^3 e^x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x^2 + x + 1}}, \quad x = 1{,}016;$

б) $\cos 33°$.

Варіант 23

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = \frac{5}{x^2} - \sqrt[5]{x^2} + 7$

2) $y = ctg2x \cdot 3^x$

3) $y = \frac{4\cos 5x}{x^3 + 2}$

4) $y = (3x + 2^x - 3ctgx)^5$

5) $y = 5\sin^3 \sqrt{2x-1}$

6) $y = \ln^2 \sin 3x$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln\sqrt[6]{\frac{6x-1}{6x+1}}$

2) $y = \frac{\sqrt[4]{(x^3+2)\cdot(x-5)^3}}{x^3 \cdot \sqrt{(x^3-3)^5}}$

3) $y = \left(1 + \sqrt{x}\right)^{\sin^2 x}$

4) $y = (ctg2x)^{\ln^3 x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $e^{xy} = \sin(x + y)$

2) $3x^2 - x^2y^3 + y = 5$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = t^4 - 3t \\ y = \cos 2t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = ctg^2 t \\ y = \sin 2t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^{29} + 6}{x^4 + 1}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = t^4 + 3t^3 - 3t^2 + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \frac{x^2}{e^x}$

б) $arctgx = y^2$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x = 4{,}16;$

б) $\cos 28°.$

Варіант 24

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 2x^4 - \dfrac{1}{x^5} + 3\sqrt[3]{x^2}$

2) $y = \cos 5x \cdot 3^x$

3) $y = \dfrac{ctg2x}{\sin 5x}$

4) $y = (\cos 2x - x^4 + \ln x)^5$

5) $y = \sin^3 \ln x$

6) $y = \dfrac{7}{\cos^2 5x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{3x-5}{2x+7}}$

2) $y = \dfrac{x^7 \cdot \sqrt[6]{(x-5)^5}}{\sqrt[7]{(2x-3)^4}}$

3) $y = \left(\dfrac{1}{\sin x}\right)^{ctg 2x}$

4) $y = (1 + \cos 2x)^{\ln \frac{1}{x}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^4 + y^3 = 5xy^2$

2) $\ln x + \ln y = xy$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = 1 + t^2 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = -2 \cdot \frac{2 \cdot (x^8 + 2)}{3 \cdot (x^4 + 1)}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 4t^4 - 3t^3 - 2t^2 - 1, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = x^2 \ln x$

б) $xy = e^{2x}$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{4x-3}, \quad x = 1,78;$

б) $ctg 28°.$

Варіант 25

Вправа 1. Знайти похідну y'_x:

1) $y = 7x^3 - \frac{2}{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$

2) $y = \ln x \cdot 2^x$

3) $y = \frac{\sin 5x}{e^x}$

4) $y = (3x^2 - \cos 2x + tgx)^6$

5) $y = \ln \arcsin \sqrt{x}$

6) $y = \frac{\sin^2 3x}{5ctg^3 x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x:

1) $y = \ln \sqrt[4]{\frac{7-2x}{7+2x}}$

2) $y = \frac{e^{\cos x} \cdot \sqrt[3]{(3x-2)^2}}{\sqrt[7]{(5x-1)^6}}$

3) $y = (\ln x)^{\sin x}$

4) $y = (1 + \cos x)^{tgx}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $e^{x-y} = x^2 y^2$

2) $\sin(x+y) = \cos(xy)$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x:

1) $\begin{cases} x = a \cdot \sin t \\ y = b \cdot \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 2^t \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^{16} + 9}{1 - 5x^2}, \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 - 2t^2 + 10t - 3, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $\ln(x+y) = x^3 + 5$

б) $y = \frac{x^2}{x+1}$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^5, \quad x = 2{,}997;$

б) $ctg33°.$

Варіант 26

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = \sqrt[5]{x^4} - \dfrac{1}{x^2} + 2x^3$

2) $y = \ln x \cdot tg3x$

3) $y = \dfrac{\sin^2 x}{3^x}$

4) $y = (tgx - \ln 2x + x^2)^3$

5) $y = \arccos\sqrt{3x^2 - 1}$

6) $y = 2^{\arcsin\sqrt{x}}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[7]{\dfrac{5x-3}{2x^2+1}}$

2) $y = \dfrac{\sqrt[6]{(3x-1)^5 \cdot (7x+1)}}{e^{\cos x} \cdot \sqrt[5]{(2x+1)^2}}$

3) $y = (\sin 5x)^{1+\cos x}$

4) $y = (\arcsin 3x)^{1+x^2}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x + \ln y = \sqrt{x^2 + y^2}$

2) $\ln(xy) = \arcsin x + y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = a \cdot ctg\, t \\ y = b \cdot tg\, t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \sin^3 t \\ y = 2\cos 2t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{1}{3x+2}, \quad x_0 = 2$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 2t^4 + 5t^3 - 4t^2 - t, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $\sqrt{y} = \sin x$

б) $y = x\ln y$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = x^4, \quad x = 3{,}998;$

б) $tg61°$.

Варіант 27

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = \frac{1}{x^5} - 3\sqrt[3]{x^2} + x^5$

2) $y = 2^x \cdot \sin 3x$

3) $y = \frac{ctg5x}{3 + x^2}$

4) $y = (\cos x - x^3 + ctg2x)^7$

5) $y = 3^{\sin^2 \sqrt{x}}$

6) $y = \arccos \ln \frac{1}{x}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{3x^2 - 7}{3x^2 + 7}}$

2) $y = \frac{\sqrt[5]{2x^3 - 7} \cdot e^{\sin^3 x}}{\sqrt[6]{(3x-5)^5}}$

3) $y = (\sin 2x)^{\cos x}$

4) $y = (\arcsin x)^{\sin^2 x}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2 + y^2 = 7x^2 y^3$

2) $x^2 + \ln y = \sin(xy)$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 7 \cdot \sin^2 t \\ y = 2 \cdot \cos^2 t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \frac{1}{t^2} \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 3}{3}, \quad x_0 = 3$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t) = 3t^4 + 2t^3 - t^2 + 1, \quad t_0 = 2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = x^2 e^x$

б) $x \sin y = y^2$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{1 + x + \sin x}, \quad x = 0{,}01;$

б) $tg59^\circ$.

Варіант 28

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 3\sqrt[7]{x^2} - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}} + 2x^3$

2) $y = \sin 3x \cdot 2^{5x}$

3) $y = \dfrac{ctg5x}{\sin 3x}$

4) $y = (\cos^2 x - \dfrac{1}{x} + \ln x)^6$

5) $y = 2^{\arcsin\frac{1}{x}}$

6) $y = \ln^2 \arcsin x$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln\sqrt[4]{\dfrac{3x^2 - 5}{3x^2 + 5}}$

2) $y = \dfrac{2^x \cdot \sqrt[5]{(3x-5)^3}}{\sqrt[6]{2x^2 - 4}}$

3) $y = (2x^2 + 3)^{\arccos x}$

4) $y = (\ln(1 + x^2))^{\frac{x^2}{2}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^2y^2 = \ln\dfrac{y}{x}$

2) $tg(x + y) = x + y$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = \sin^2 \sqrt{t} \\ y = \cos^2 \sqrt{t} \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = \ln\sin t \\ y = 2^t \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = -2 \cdot \left(\sqrt[3]{x} + 3\sqrt{x}\right), \quad x_0 = 1$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = 3t^4 - 3t^3 + 2t^2 - t, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $xy = \ln(xy)$

б) $y = tg^2 x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt[4]{2x - \sin\dfrac{\pi \cdot x}{2}}, \quad x = 1,02;$

б) $ctg31°.$

Варіант 29

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y=\frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}+7x^3-\sqrt[4]{x^3}$

2) $y=3^x\cdot\cos 5x$

3) $y=\frac{\ln 5x}{3\cos 3x}$

4) $y=(5x^2-tgx+2^x)^7$

5) $y=arctg^3\ln x$

6) $y=\frac{5}{\ln\sin^3\sqrt{x}}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y=\ln\sqrt[7]{\frac{5x^2-3}{5x^2+3}}$

2) $y=\frac{3^x\cdot\sqrt[7]{(2x^2-5)^3}}{\sqrt[5]{(3x+7)^2}}$

3) $y=\left(x^2-2x\right)^{\cos^2 x}$

4) $y=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^{x^3+1}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $x^3y-xy^3=\ln y$

2) $y^2x^2=e^{\frac{y}{x}}$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases}x=a\cdot\cos^2 t\\ y=b\cdot tgt\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=3t^3-2t+1\\ y=\frac{3t+1}{2t}\end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0: $y=14\sqrt{x}-15\cdot\sqrt[3]{x}+2,\quad x_0=1$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S=S(t)$ в заданий момент часу t_0:

$$S(t)=2t^4+4t^3-t^2+t,\quad t_0=2$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y^3=\sin(x+y)$ б) $y=x\ln(x+l)$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y=\sqrt[3]{3x+\cos x},\quad x=0{,}01;$ б) $\cos 31°$.

Варіант 30

Вправа 1. Знайти похідну y'_x :

1) $y = 4x^3 - \frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + 7 \cdot \sqrt[4]{x^3}$

2) $y = 4^x \cdot \cos 2x$

3) $y = \frac{ctg 5x}{\ln 3x}$

4) $y = (2^x + \sin 3x - x^3)^4$

5) $y = \sin^3 \ln \sqrt{2x+5}$

6) $y = 3ctg\, e^{x^2-1}$

Вправа 2. Знайти за допомогою логарифмічного диференціювання похідну y'_x :

1) $y = \ln \sqrt[5]{\frac{3x^2-7}{3x^2+7}}$

2) $y = \frac{3^{tgx} \cdot \sqrt[6]{(x+7)^5}}{\sqrt[3]{(x^2-3)^2}}$

3) $y = (ctg 3x)^{x^3+2x}$

4) $y = (1 + \ln 5x)^{\frac{1}{x^2}}$

Вправа 3. Знайти похідну неявно заданої функції:

1) $\ln x = \arcsin \frac{y}{x}$

2) $tg(xy) = x^2 + y^2$

Вправа 4. Знайти похідну y'_x :

1) $\begin{cases} x = 2 \cdot \sin t \\ y = 3 \cdot \cos t \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = 3^{t+5} \\ y = 3t^2 - 5 \end{cases}$

Вправа 5.

1) Скласти рівняння дотичної та нормалі до заданої кривої в точці з абсцисою x_0 :

$$y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 2x - 3\right), \quad x_0 = 4$$

2) Знайти швидкість і прискорення руху точки, заданого рівнянням $S = S(t)$ в заданий момент часу t_0 :

$$S(t) = t^4 + 5t^3 - 4t^2 + 2, \quad t_0 = 1$$

3) Знайти другі похідні функцій:

а) $y = \sin x + \cos y$

б) $y = x^3 \ln^2 x$

Вправа 6. Обчислити наближено за допомогою диференціала:

а) $y = \sqrt{x^2+5}, \quad x = 1{,}97;$

б) $\sin 61°.$

ЗМІСТ