

Механіка агротехнологічних матеріалів  
Mechanics of agrotechnological materials

УДК 631.51

## Перспективный метод решения задач почвообработки

В.И.Мельник<sup>1</sup>, Л.Н.Тищенко<sup>2</sup>

*Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства  
им. П.Василенка (Харьков, Украина), <sup>1</sup> victor\_melnik@ukr.net, <sup>2</sup> r.rectorat@yandex.ua*

На примере решения задачи о взаимодействии вертикального плоского жесткого деформатора с почвой показана перспективность подхода к развитию теории почвообработки, который базируется не на усложнении известных математических моделей почвы, а в разработке более эффективных приемов их использования.

**Ключевые слова:** почва, деформатор, взаимодействие, напряженное состояние, квазилинейная система уравнений, граничные условия, опережающая трещина.

**Актуальность.** Теоретическим вопросам почвообработки посвящено большое количество научных трудов отечественных и зарубежных авторов [1-3], но, тем не менее, до сегодняшнего дня математическое моделирование взаимодействия рабочих органов сельхозмашин и орудий с почвой, как сплошной средой, остается проблемой.

**Постановка проблемы.** В идеале разработка новейших почвообрабатывающих органов и машин должна происходить по схеме «математическая модель  $\Rightarrow$  конструкция», которая предусматривает следующие шаги:

- разработка математической модели почвы как среды, которая учитывает, по возможности, все ее свойства;
- формирование перечня условий, при которых должен работать рабочий орган и требований к показателям качества его работы;
- сугубо математический поиск конструктивных параметров рабочего органа и режимов его приложения;
- разработка конструкции и технической документации для подготовки производства.

В соответствии с идеализированным подходом первым на очереди есть разработка математической модели почвы, как среды. Таковых известно много [4, 5], поэтому, дальнейшее их усовершенствование предусматривает введение все новых и новых свойств почвы, а, следовательно, усложнение.

Насколько оправдан такой подход, хотя бы теоретически?

На этот вопрос дает ответ история развития теории пластичности [4, 5]. Первым удачным условием пластичности (математической моделью) была гипотеза максимальных касательных напряжений Сен-Венана (годы жизни 1797 – 1886). Эта модель предусматривала, что пластичная среда характеризуется лишь одним параметром, по-современному, «коэффициентом пластичности». В дальнейшем, приблизительно полсотни лет, научное сообщество нарабатывало все новые и новые математические модели. Каждая следующая была сложнее предыдущей. Так длилось до тех пор, пока Мор (годы жизни 1835 – 1918) разработал методологию создания идеальной математической модели пластичной среды. Позже эту методологию назвали «феноменологическим подходом Мора» [6]. И здесь наступило прозрение. Ученые увидели, что, во-первых, нет и скоро не будет экспериментальной возможности получить все необходимые данные для модели Мора (на сегодня ситуация не изменилась), а, во-вторых, и это главное — в такой модели (формально идеально адекватной) нет никакого смысла.

Причина в том, что после подстановки условия пластичности в дифференциальные уравнения равновесия создается квазилинейная система уравнений в частных производных гиперболического типа. Ее практическое приложение предусматривает поиск характеристического решения, а потом формулировку предельных условий и, наконец, численное решение методами конечных разностей или конечных элементов [5, 6].

Проблема в краевых (граничных и/или начальных) условиях. В соответствии с теоремами существования и единственности, решение можно найти для любых, корректных из математической точки зрения, краевых условий. Ограничения здесь совсем простые. Функции, задающие краевые условия должны быть гладкими, то есть без изломов и разрывов. На сегодня можно построить, так называемые, разрывные решения, почти для любых краевых условий [5, 6].

Формулировка краевых условий обычно происходит на основе анализа ситуации на границе «рабочий орган – среда» и, собственно, напряженное состояние, которое создается в среде не учитывается. Многие предполагают, что это состоится автоматически уже в процессе решения гиперболической системы уравнений, ведь она и является конечной математической формой модели среды. Но здесь стоит вспомнить теоремы существования и единственности. Выражаясь фигурально, решение, которое получаем, является следствием тех односторонних краевых условий, а, значит, никаких особенностей среды не проявляет. Решение полностью подчиняется краевым условиям, которые в действительности формируются в результате взаимодействия определенной массы среды с поверхностью, что на него воздействует. То есть, имеем парадокс: чтобы описать состояние среды в объеме нужно знать краевые условия, а, чтобы знать краевые условия, нам нужно точно знать ситуацию в объеме среды.

Учитывая сказанное, формулируем вывод: *чем более сложная математическая модель, то есть, чем больше особенностей среды она учитывает, тем менее адекватными являются краевые условия и, соответственно, конечное решение.*

Таким образом, проблема не в математических моделях, которые учитывают не все свойства среды, а в сугубо математических методах решения систем уравнений, к которым эти модели сводятся.

Когда научное сообщество, которое занималось практическим применением теории пластичности, дошло до такого вывода, то дружно вернулось к условию пластичности Сен-Венана и до сих пор в 9-ти из 10-ти случаев пользуется именно им.

Теперь о математических моделях почвы. Они также сводятся к системам уравнений в частных производных, но по количеству этих уравнений в системе, в зависимости от того, какие и сколько свойств почвы учитывается, их может быть до десятка и даже больше. Существенно добавляет количество уравнений переход от статичной задачи, к динамической. О нестационарных задачах разговаривать не стоит. Они сверхсложные.

В целом математическая модель почвы может быть системой уравнений эллиптического, параболического и уже упоминавшегося гиперболического типов. Для каждого из них математики разработали свои методы решения. Учитывая собственный опыт, скажем, что большинство моделей почвы сводятся к гиперболическим системам. По нашему мнению другого не должно быть, если, правда, почва не моделируется как жидкость или еще что-то подобное [4, 5].

Следовательно, статика пластичной среды в сравнении с динамикой реальной почвы, это совсем просто. А отсюда выходит, что какая-либо современная модель почвы существенно более сложнее всех моделей пластичности [4 – 8] вместе взятых, а следовательно, с учетом сугубо математических проблем, ожидать от применения таких моделей каких-то практически значимых результатов не стоит.

Можно было бы проанализировать последние диссертации, но ограничимся приведенным выше. Скажем только, что в своей научной работе, касающейся почвообработки, мы сделали попытку повторить историю теории пластичности, то есть вернулись к известным сверх простым моделям почвы и занимались развитием сугубо математических методов решения гиперболических систем уравнений, которые были получены на основе их приложения. Наша новизна в действительности является сугубо математической.

Продемонстрируем наш подход на основе следующей задачи.

**Общие положения.** Далее условимся понимать, что почва соответствует модели сплошной, неупругой, идеально-вязкой среды, обладающей удельным весом  $\gamma$  и характеризующейся вязкостью  $k$ . Всякий раз, когда почва подвергается внешнему силовому воздействию, напряженное состояние, которое возникает в ее объеме, условимся соотносить со статическим состоянием предельного равновесия [4, 5], которое характерно тем, что в каждой точке среды имеется, по меньшей мере одна, элементарная площадка, на которой касательное напряжение  $\tau$  достигает своего критического значения  $\tau_{\max} = k$ . Последнее требование именуют критерием (условием) предельного равновесия.

Напряженное состояние среды, которое возникает в каждой точке области предельного равновесия, опишем посредством определенно-го в ортогональной декартовой системе координат  $Oxyz$  тензора напряжений. Его нормальные компоненты —  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{zz}$ , а касательные —  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  и  $\sigma_{yz}$ . Главные нормальные напря-

жения обозначим  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , упорядочив их в порядке возрастания номера индекса  $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$  [4, 5]. Положительными считаем сжимающие нормальные напряжения [4, 5].

Поскольку решение следующей далее задачи, используя декартову систему координат  $Oxy$ , сведем к плоской постановке, то в последующем компоненты тензора напряжений  $\sigma_{zz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  и главное напряжение  $\sigma_2$  нас интересовать не будут [4]. В отношении последнего положим, что

$$\vec{\sigma}_2 \perp [Oxy], \quad \sigma_2 \in [\sigma_1, \sigma_3], \quad (1)$$

где  $[Oxy]$  — координатная плоскость  $Oxy$  системы координат  $Oxyz$ ;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения, которые от  $z$  не зависят и рассматриваются как функции двух координат  $x, y$ . Последнее означает, что напряженное состояние среды не меняется с изменением координаты  $z$ .

Ориентация векторов главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  определяется углом  $\varphi$ , который составляет линия действия вектора  $\sigma_3$  с осью абсцисс координатной системы  $Oxy$  [4, 5], а ориентацию самой системы  $Oxy$  — углом  $\alpha$  между осью ординат и вектором силы веса.

Выбор направления действия векторов касательных напряжений выполняется в соответствии с правилом, которое гласит: *вектор касательной компоненты полного напряжения вне зависимости от знака его модуля всегда ориентирован в сторону площадки действия большего из главных нормальных напряжений* [4, 5]. Знак модуля касательного напряжения, в свою очередь, связан с порядком определения угла  $\varphi$ , который предполагает варианты. В данном случае, этот порядок соответствует рис. 1.

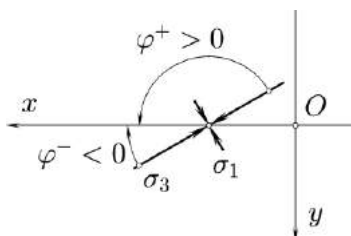


Рис.1. Правило отсчета угла  $\varphi$

Следовательно, приведенное в работах [4, 5] правило знаков касательных напряжений изменится на обратное и формулируется так: *каса-*

*тельная компонента полного напряжения считается положительной, если ее вектор и внешняя нормаль к площадке ее действия либо совпадают с направлением параллельных к ним осей системы координат, либо, наоборот, оба не совпадают.* Теперь, введя полусумму главных нормальных напряжений [4, 5]

$$s = \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1), \quad (2)$$

компоненты тензора напряжений можно определить, используя уравнения [4, 5]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= s + k \cos 2\varphi, \\ \sigma_{yy} &= s - k \cos 2\varphi, \\ \sigma_{xy} &= k \sin 2\varphi, \end{aligned} \quad (3)$$

а напряженное состояние в границах области предельного равновесия модельной среды описать системой [4, 5]:

$$\begin{aligned} &\cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial x} + \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial s}{\partial y} \mp \\ &\mp 2k \left[ \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \\ &= \gamma \left[ \sin \alpha \cos\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) + \cos \alpha \sin\left(\varphi \mp \frac{\pi}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Квазилинейная система уравнений (4) относится к гиперболическому типу. Ее характеристическое решение известно [4, 5]. Оно представляет собою уравнения характеристик (линий скольжения):

$$\cos\left(\varphi \mp \frac{1}{4}\pi\right) dy - \sin\left(\varphi \mp \frac{1}{4}\pi\right) dx = 0 \quad (5)$$

и выполняющиеся на них соотношения:

$$ds \mp 2k d\varphi = \gamma[\sin \alpha dx + \cos \alpha dy], \quad (6)$$

которые могут быть интегрированы:

$$\begin{aligned} s - 2k\varphi &= \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha] + \lambda_1, \\ s + 2k\varphi &= \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha] + \lambda_2, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — постоянные, именуемые параметрами характеристик.

Соотношения (7) в конечном итоге дают:

$$\begin{aligned} s &= \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{2} + \gamma(x \sin \alpha + y \cos \alpha), \\ \varphi &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственно из (5) следует, что характеристики образуют криволинейную ортогональную сетку. Их свойства известны и детально изучены [4, 5].

Далее, имея ввиду частный случай при  $\alpha = 0$ , когда ось абсцисс системы координат  $Oxy$  ориентирована горизонтально слева направо, а ось ординат — вертикально вниз и, воспользовавшись работами [4, 5], запишем частный случай соотношений на декартовых коор-

динатах, которые, во-первых, тождественно удовлетворяют упоминавшейся системе предельного равновесия, а, во-вторых, соответствуют решаемой далее задаче:

а) соотношения на абсциссе ( $y = \text{const}$ ):

$$x|_{y=\text{const}} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_y - \gamma y}{2k} \text{tg} \varphi + C_y^*, \quad (9)$$

$$s|_{y=\text{const}} = -k \ln(\cos^2 \varphi) + C_y^-, \quad (10)$$

где

$$C_y^- = \tilde{C}_y - k \ln(2(C^v)^2), \quad (11)$$

$\tilde{C}_y$ ,  $C_y^*$ ,  $C_y^-$  и  $C^v$  — постоянные величины;

б) соотношения на ординате ( $x = \text{const}$ ):

$$y|_{x=\text{const}} = 2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \text{ctg} \varphi + C_x^*, \quad (12)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln(\sin^2 \varphi) + \gamma y - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (13)$$

$$s|_{x=\text{const}} = -k \ln(\sin^2 \varphi) + 2k \gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \text{ctg} \varphi + C_x^-, \quad (14)$$

где

$$C_x^- = \gamma C_x^* - k \ln(2(C^v)^2) + \tilde{C}_x, \quad (15)$$

$\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$  и  $C_x^-$  — постоянные величины.

Приведенные соотношения по своей сути являются аналогами соотношений на характеристиках. Разница состоит только в том, что выражения ((9) – (15)) выполняются вдоль известных координатных прямых, а упоминавшиеся соотношения на характеристиках, соответственно, вдоль характеристик, положение и форма которых неизвестна до конца решаемой задачи [4, 5]. Собственно использование соотношений ((9) – (15)) является сущностью нового подхода к решению задач почвообработки, базирующегося на применении достаточно простых представлений о почве, как о весомой идеально-связной среде.

Далее применив соотношения ((9) – (15)) в работах [4, 5], получены развернутые выражения для компонентов тензора напряжений:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -k \left[ \ln(\cos^2 \varphi) \mp \cos 2\varphi \right] + C_y^-, \quad (16)$$

$$\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi,$$

выполняющиеся вдоль координатных прямых  $y = \text{const}$ ;

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \end{pmatrix} = -k \left[ \ln(\sin^2 \varphi) - 2\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \text{ctg} \varphi \mp \mp \cos 2\varphi \right] + C_x^-, \quad (17)$$

$$\sigma_{xy} = k \sin 2\varphi,$$

выполняющиеся вдоль координатных прямых  $x = \text{const}$ .

Воспользовавшись выражениями (16) и/или (17) для компонентов тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$ , можно вдоль тех же координатных прямых  $y = \text{const}$  и/или  $x = \text{const}$  определить значения главных нормальных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Для этого следует применять известные выражения [4, 5]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \mp \sqrt{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2} \right]. \quad (18)$$

**Постановка задачи о статическом взаимодействии жесткой вертикальной пластины с массивом идеально-связной среды.**

**Условие.** Сплошной массив идеально-связной среды 1 (рис. 2) находится в статическом взаимодействии с вертикальной жесткой пластиной (деформатором) 2, которая, в свою очередь, нагружена внешней распределенной силой  $\mathbf{P}$ .

Принято, что декартова система координат  $Oxy$  своей базисной точкой  $O$  привязана к вершине гребня — точке  $R^u$  на кривой свободного контура  $L^m R^u$  области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$ .

**Принятые допущения и предположения:**

1) Рост величины внешнего силового воздействия  $\mathbf{P}$  сопровождается смещением влево точки  $L^m$  и подъемом вершины гребня (точки  $R^u$ ) без отрыва ее от лобовой поверхности  $R^u R^d$  деформатора.

2) Размер массива сплошной среды и деформатора, измеренный по нормали к плоскости листа настолько велик, что его можно считать бесконечным. В расчет будем принимать любой его единичный отрезок, и все параметры соотносить именно с ним, как того требуют условия плоской задачи [4, 5].

**Известные величины:**  $\gamma$  — плотность сплошной среды (Н/мм<sup>3</sup>);  $f$  — коэффициенты внешнего трения идеально-связной среды по материалу лобовой поверхности деформатора;

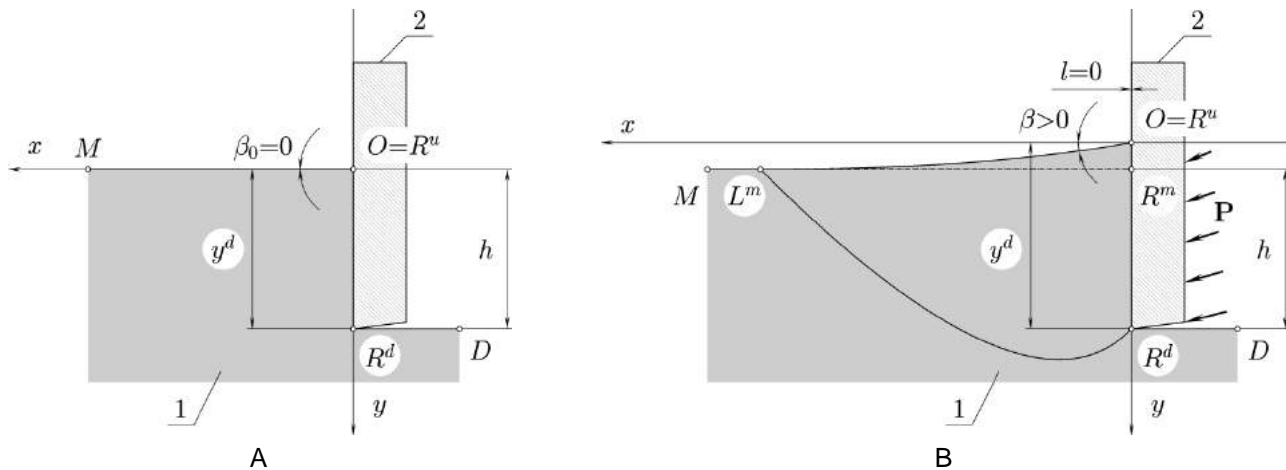


Рис. 2. Схема взаимодействия жесткой вертикальной пластины с массивом сплошной среды, соответственно до (А) и после (В) нагружения

$h$  — глубина погружения деформатора (в мм);  $y^d$  — ордината нижней точки деформатора (в мм);  $\beta$  — угол между осью абсцисс  $Ox$  и касательной к поверхности свободного контура  $L^m R^u$  в точке  $R^u$  (рад.);  $\beta_0$  — начальное значение угла  $\beta$  (если  $\mathbf{P} = 0$ , то  $\beta_0 = 0$ );  $I_{xx}^r$  и  $I_{xy}^r$  — интегральные значения (Н) горизонтальной и вертикальной составляющих внешней распределенной силовой нагрузки  $\mathbf{P}$ .

**Требуется:** а) определить величину коэффициента сцепления  $k$  (Н/мм<sup>2</sup>); б) определить форму кривой  $L^m R^u$  свободного контура; в) определить компоненты тензора напряжений  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  и  $\sigma_{xy}$  для всех точек предельной области  $L^m R^u R^d$ ; г) в границах предельной области построить сетку линий скольжения; д) изучить связь перечисленного в пунктах б), в) и г) с величиной  $\mathbf{P}$ .

**Формулировку граничных условий на свободном контуре  $L^m R^u$**  приводим без обоснования, сославшись на работы [8, 9].

В отношении свободного контура можно сказать, что вдоль его линии  $L^m R^u$  отсутствуют как нормальные  $\sigma$ , так и касательные  $\tau$  напряжения:

$$\sigma|_{L^m R^u} = 0, \quad \tau|_{L^m R^u} = 0, \quad (19)$$

а, значит: во-первых, вся поверхность  $L^m R^u$  состоит из главных площадок; во-вторых, меньшее из главных напряжений  $\sigma_1$  равно нулю:

$$\sigma_1|_{L^m R^u} = 0; \quad (20)$$

в-третьих, векторы наибольшего главного на-

пряжения  $\sigma_3$  располагаются в плоскости рисунка и ориентированы по касательной к линии свободного контура  $L^m R^u$  (рис. 3).

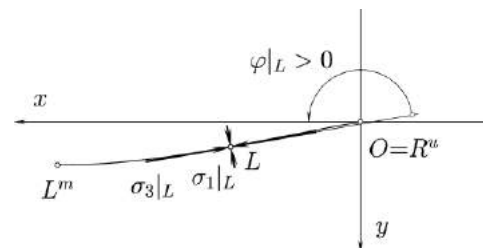


Рис. 3. Ориентация векторов главных нормальных напряжений в произвольной точке  $L$  свободного контура  $L^m R^u$ :  $\varphi|_{L^m R^u} \in [\frac{1}{2}\pi, \pi]$

**Напряженное состояние среды в объеме ближайших окрестностей пятна контакта.** Обратимся к рис. 4, который является развитием рис. 2В, и посвящен изучению напряженного состояния среды в предельной области  $L^m R^u R^d$ , которую ограничивают линия свободного контура  $L^m R^u$ , пятно контакта  $R^u R^d$  и огибающая характеристика  $L^m R^d$ . Форма последней (в качественном смысле) известна [8, 9].

На рис. 4А деформатор 2 мысленно отодвинул от контактирующей с ним поверхности  $R^u R^d$  вправо и вверх. Внешняя нагрузка  $\mathbf{P}$  условно не показана.

Ориентация векторов касательных напряжений  $\tau|_{R^u R^d}$  и  $\tau|_{R^u}$ , действующих в ближайших окрестностях пятна контакта  $R^u R^d$  в целом, и, соответственно, в его верхней точке  $R^u$ , понятна как по формальным (в соответствии с приведенным выше правилом), так и по объективным

(в соответствии с физическим смыслом) признакам [8, 9]. На пятне контакта  $R^u R^d$ , действующие на поверхности среды, векторы касатель

ных напряжений  $\tau|_{R^u R^d}$  и  $\tau|_{R^u}$  направлены вниз, а реактивные к ним векторы, действующие на поверхности деформатора — вверх.

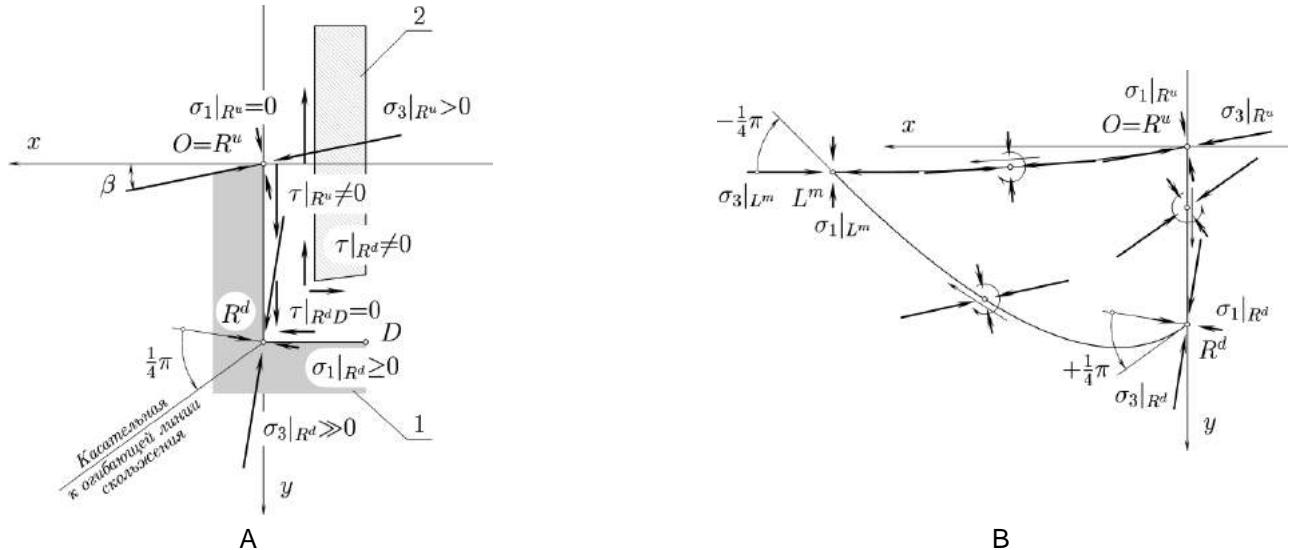


Рис. 4. Схемы действия главных нормальных  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и касательных  $\tau$  напряжений: А) — в области пятна контакта  $R^u R^d$ ; В) — вдоль замкнутой границы области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$

В отношении касательных напряжений  $\tau|_{R^d}$ , действующих в точке  $R^d$  на взаимно перпендикулярных поверхностях, относящихся к пятну контакта  $R^u R^d$  и области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$ , следует напомнить, что они не равны нулю, т.е.  $\tau|_{R^d} \neq 0$ . С ними не следует путать напряжения  $\tau|_{R^d D} = 0$ , действующие на поверхности среды вдоль горизонтальной площадки  $R^d D$ .

В работах [8, 9] говорится, что огибающая характеристика  $L^m R^d$ , которая выходит из  $R^d$  (рис. 4А), на самом деле является трещиной, а, значит, дальше нее состояние предельного равновесия не распространяется, и правило парности касательных напряжений [4, 5] в окрестностях точки  $R^d$  не выполняется. В таком случае пятно контакта  $R^u R^d$  не содержит главных площадок, включая нижнюю точку  $R^d$ , и в процессе перехода от  $R^u$  к  $R^d$  векторы  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  следует «несколько недоворачивать» до вертикального положения  $\sigma_3|_{R^d}$  (рис. 4В).

На основании анализа напряженного состояния среды вдоль свободного контура  $L^m R^u$  и в ближайших окрестностях пятна контакта

$R^u R^d$  заключаем, что применительно к текущей задаче возможны следующие значения углов:

$$\begin{aligned} \varphi^{ru} &= \pi - \beta, \\ \varphi^{rd} &\in \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi - \beta \right], \\ \varphi^{lm} &= \pi, \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\varphi^{ru}$ ,  $\varphi^{rd}$  и  $\varphi^{lm}$  — значения угла  $\varphi$  в точках  $R^u$ ,  $R^d$  и  $L^m$  соответственно. Им отвечает следующий полный интервал изменения  $\varphi$ :

$$\varphi = \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi \right]. \quad (22)$$

**Формулировка граничных условий, действующих вдоль пятна контакта.** Граничные условия, действующие вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  (рис. 2В и 4А), по существу, являются условиями трения, которые подробно изложены в работах [8, 9]. Тут их приводим без пояснений.

Вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  справедливо следующее условие трения:

$$s \geq -k(f^{-1} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi), \quad (23)$$

где  $f$  — коэффициенты внешнего трения идеально-вязкой среды по материалу лобовой поверхности деформатора, а угол  $\varphi = \varphi|_{R^u R^d}$  укладывается в интервал:

$$\varphi|_{R^u R^d} = \left[ \frac{1}{2}\pi, \pi \right]. \quad (24)$$

Кроме того, для напряженного состояния в точке  $R^u$  справедливо:

$$\sigma_1|_{R^u} = 0, \quad s|_{R^u} = s^{ru} = k, \quad (25)$$

$$\sigma_3|_{R^u} = 2s^{ru} = 2k, \quad \sigma_3|_{R^u} \geq -2k(f^{-1} \sin 2\varphi^{ru} + \cos 2\varphi^{ru}), \quad (26)$$

$$\varphi^{ru} \in [\varphi_{\min}^{ru}, \pi], \quad (27)$$

где

$$\varphi_{\min}^{ru} = \pi + \arctg(-f) \quad (28)$$

— минимальное (из возможных) значение  $\varphi^{ru}$ .

**Определение постоянных  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^*$  и  $C_x^-$ , вошедших в соотношения на ординате ((12) – (15)), выполняющиеся вдоль пятна контакта  $R^u R^d$  подробно расписывать не будем, а приведем лишь финальные выражения:**

$$\tilde{C}_x|_{R^u R^d} = 2k \ln \left( \frac{y^d - y^{ru}}{2k(\operatorname{ctg} \varphi^{rd} - \operatorname{ctg} \varphi^{ru})} \right), \quad (29)$$

$$C_x^*|_{R^u R^d} = -2k \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi^{ru}, \quad (30)$$

$$C_x^-|_{R^u R^d} = k[1 + \ln(\sin^2 \varphi^{ru})] + \gamma C_x^*, \quad (31)$$

где угол  $\varphi = \varphi|_{R^u R^d}$  укладывается в интервал (24), а ординаты  $y^{ru} = y|_{R^u}$ ,  $y^d = y|_{R^d}$  точек  $R^u$ ,  $R^d$  и значения  $\varphi^{ru} = \varphi|_{R^u}$  (21), (27),  $\varphi^{rd} = \varphi|_{R^d}$  (21) угла  $\varphi$  в этих же точках равны следующему:

$$y^{ru} = 0, \quad y^d > 0, \quad \varphi^{ru} > 0, \quad \varphi^{rd} \in [\frac{1}{2}\pi, \varphi^{ru}]. \quad (32)$$

**Преобразование, анализ и графическая интерпретация граничного условия (23), действующего вдоль пятна контакта.** Запишем условие (23) в развернутом виде, т.е. заменив  $s$  его выражением (14):

$$-k \ln(\sin^2 \varphi) + 2k\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^- \geq -k(f^{-1} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \quad (33)$$

Теперь, когда постоянные интегрирования  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (29),  $C_x^*|_{R^u R^d}$  (30) и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  (31) определены, можно приступить к анализу граничного условия (23) и его развернутой формы (33). Чтобы было удобнее отдельно оперировать левой и правой частями условия (33), перепишем его так:

$$s_{al}(\varphi) \geq s_{ar}(\varphi), \quad (34)$$

где

$$s_{al}(\varphi) = -k \ln(\sin^2 \varphi) + 2k\gamma \exp \frac{\tilde{C}_x}{2k} \operatorname{ctg} \varphi + C_x^-, \quad (35)$$

$$s_{ar}(\varphi) = -k(f^{-1} \sin 2\varphi + \cos 2\varphi). \quad (36)$$

На рис. 5 показаны графики полусumm главных нормальных напряжений  $s_{al}$  (35) и  $s_{ar}$  (36), а также главных нормальных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  (18) и ординаты  $y$  (12), которые рассматриваются как функции угла  $\varphi$  при заданных конкретных значениях величин, вошедших в подрисуночную надпись.

Все перечисленные величины ( $s_{al}$ ,  $s_{ar}$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$  и  $y$ ) иллюстрируют то напряженное состояние, которое складывается в области пятна контакта  $R^u R^d$  при взаимодействии деформатора со средой, реализующегося согласно рис. 4А.

Из рис. 5 видно, что для реальных, сопоставимых по удельному весу с водой ( $\gamma = 0,00001 \text{ Н/мм}^3$ ), сред возможны только такие варианты взаимодействия, когда  $\varphi^{rd} > \frac{1}{2}\pi$  (рис. 5В, 5С). Такой вывод полностью согласуется с рис. 4 и пояснениями к нему. Определить угол  $\varphi^{rd}$  можно воспользовавшись алгоритмом **FindPhiRD** [8, 9].

В пространственных пояснениях алгоритм **FindPhiRD** [8, 9] не нуждается. Строгое равенство в (34) достигается в точке пересечения кривых  $s_{al}(\varphi)$  (35) и  $s_{ar}(\varphi)$  (36). При этом должно выполняться требование  $\varphi = \varphi^{rd}$  и такому значению  $\varphi^{rd}$  должны соответствовать постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$  (29),  $C_x^*|_{R^u R^d}$  (30) и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  (31). Поиск точки пересечения кривых  $s_{al}(\varphi)$  (35) и  $s_{ar}(\varphi)$  (36) осуществляется методом «деления отрезка пополам».

**Вывод выражений для интегралов нормальной  $\sigma_{xx}$  и касательной  $\sigma_{xy}$  компонент полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$**  (рис. 2В или 4А). По своей сути далее речь пойдет об интегрировании компонент полного напряжения, действующего вдоль линии  $R^u R^d$ , совпадающей с осью ординат, а, значит, далее будут задействованы соотношения на ординатах ((12) – (15)). При этом напомним об одном из соглашений [8, 9], согласно которому вся область взаимодействия и сам деформатор имеют условную единичную

толщину (размер, измеренный по нормали к плоскости рисунка).

Начнем с интеграла  $I_{xx}^r$  нормальной компоненты  $\sigma_{xx}$ . Его можно определить выражением:

$$I_{xx}^r = \int_{R^u}^{R^d} \sigma_{xx} dy, \quad (37)$$

которое в конечном итоге приводится к следующей форме:

$$I_{xx}^r(y^d) = k \left\{ C_x^* \ln \left( 1 + \frac{(C_x^*)^2}{K} \right) + (y^d - C_x^*) \times \right. \\ \left. \times \ln \left( 1 + \frac{(y^d - C_x^*)^2}{K} \right) \right\} + \left[ \gamma \left( \frac{y^d}{2} - C_x^* \right) + C_x^- - k \right] y^d, \quad (38)$$

$$K = 4k^2 \exp(\tilde{C}_x / k)$$

где интегральное значение  $I_{xx}^r$  представлено, как функция от ординаты  $y^d$ .

В это выражение вошли три постоянные коэффициенты (константы)  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$ ,  $C_x^-$  и два параметра среды — плотность  $\gamma$  и сцепление  $k$ .

Изучив влияние величины коэффициента сцепления среды  $k$ , коэффициента трения  $f$ , угла  $\varphi^{ru}$ , а также высоты  $y^d$  пятна контакта  $R^u R^d$  на закономерности изменения интегрального значения  $I_{xx}^r$  (38) установлено (рис. 6), что функция  $I_{xx}^r = I_{xx}^r(y^d, \varphi^{ru})$  имеет максимум по  $\varphi^{ru}$  (линия AB).

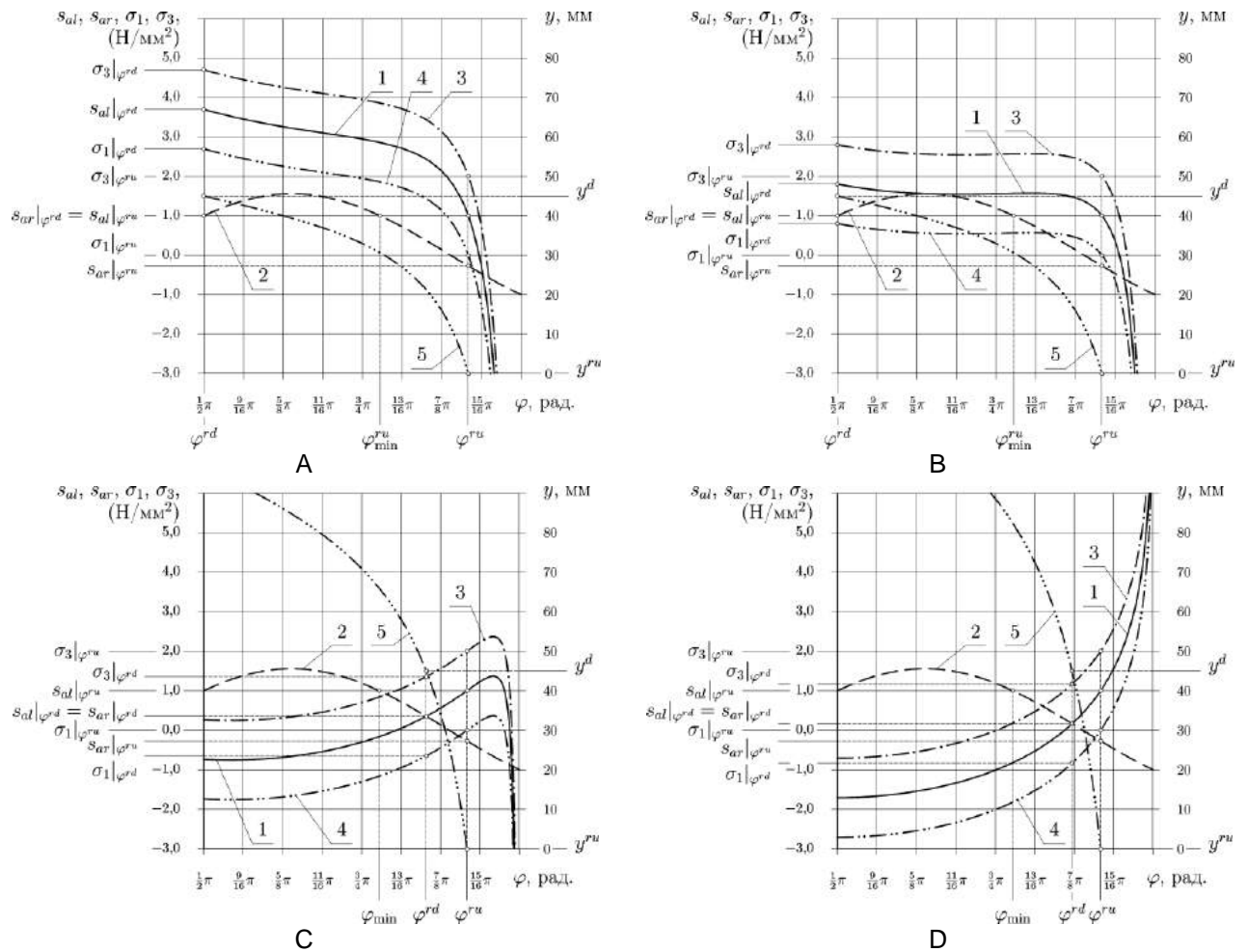


Рис. 5. Графики полусуммы главных нормальных напряжений  $s_{al}$  (9) и  $s_{ar}$  (10), а также напряжений  $\sigma_3$  (11),  $\sigma_1$  (12) и ординаты  $y$  (13), рассматриваемых как функции угла  $\varphi$  для четырех значений удельного веса среды: (А) —  $\gamma = 0,12$  Н/мм<sup>3</sup>; В) —  $\gamma = 0,07784$  Н/мм<sup>3</sup>; С) —  $\gamma = 0,01$  Н/мм<sup>3</sup>; Д) —  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>, если:  $\varphi^{ru} = 2,88$  рад.;  $y^{ru} = 0$  мм;  $y^d = 45$  мм;  $k = 1$  Н/мм<sup>2</sup>;  $f = 0,84$



Физически осмысленной является область значений  $\varphi^{ru}$ , где  $\varphi^{ru} \geq \varphi^{ru}|_{AB}$ . В пределах нее с ростом  $\varphi^{ru}$  величина  $I_{xx}^r$  несколько убывает. На самом деле так и должно происходить (см. рис. 2В или 4А).

Аналогично предыдущему случаю, запишем выражение интеграла  $I_{xy}^r$  касательной (вертикальной) компоненты  $\sigma_{xy}$  полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$ :

$$I_{xy}^r = \int_{R^u}^{R^d} \sigma_{xy} dy, \quad (39)$$

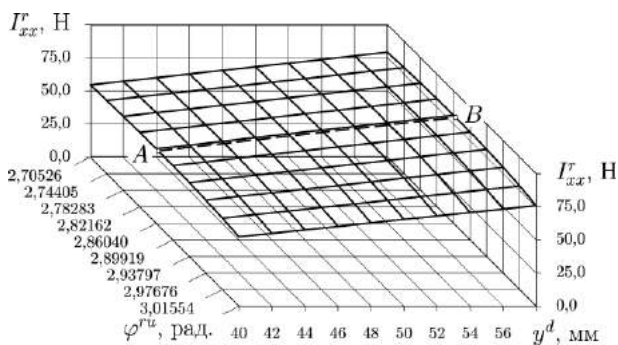


Рис. 6. Иллюстрация закономерностей изменения величины интеграла  $I_{xx}^r$  (38) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от его высоты (ординаты  $y^d$ , которая изменяется от 40 до 58 мм), угла  $\varphi^{ru}$  (изменяется от 2,7053 до 3,0543 рад.) и ряда других параметров:  $k = 1,0$  Н/мм<sup>2</sup>,  $f = 0,8391$  и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>. При этом угол  $\varphi^{rd}$  вычисляется из условия равенства в (34) всякий раз, когда меняется  $\varphi^{ru}$ , а постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  определены по формулам (29), (30) и (31)

В конечном итоге после ряда подстановок и преобразований получаем выражение интеграла  $I_{xy}^r$ , как функции ординаты  $y^d$ :

$$I_{xy}^r(y^d) = 2k^2 \exp(\tilde{C}_x/2k) \times \left\{ C_x^* \ln \left[ 1 + \frac{(y^d - C_x^*)^2}{K} \right] - \ln \left[ 1 + \frac{(C_x^*)^2}{K} \right] \right\}, \quad (40)$$

$$K = 4k^2 \exp(\tilde{C}_x/k)$$

В отличие от выражения (38) для интеграла нормальной компоненты полного напряжения в последнее уравнение (40) вошло два постоян-

ных коэффициента  $C_x^*$ ,  $\tilde{C}_x$  и только один параметр среды — т.е. ее сцепление  $k$ .

**Поиск путей согласования величин, влияющих на напряженное состояние среды в области пятна контакта.** Возвращаясь к определению постоянных  $C_x^*$  (29),  $\tilde{C}_x$  (30) и  $C_x^-$  (31) напомним только, что для их вычисления необходимо знать:  $k$  — коэффициент связности (сцепления) среды;  $\gamma$  — плотность среды;  $y^{ru}$  и  $y^d$  — ординаты верхней  $R^u$  и нижней  $R^d$  точек пятна контакта;  $\varphi^{ru}$  и  $\varphi^{rd}$  — значения угла  $\varphi$  в  $R^u$  и  $R^d$ . Из перечисленных величин наиболее сложно определить коэффициент связности  $k$  и угол  $\varphi^{rd}$ . Первый по условию задачи считается известным, а второй — нет.

Теперь когда имеем выражения интегралов нормальной  $I_{xx}^r(y^d)$  (38) и касательной  $I_{xy}^r(y^d)$  (40) составляющих полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$ , а также их заданные по условию задачи действительные значения  $I_{xx0}^r$  и  $I_{xy0}^r$ , именуемые как интегральные значения горизонтальной и вертикальной составляющих, внешней распределенной силовой нагрузки  $\mathbf{P}$ , следует сосредоточиться на разработке алгоритмов, позволяющих определять угол  $\varphi^{rd}$  и коэффициент связности  $k$  аналитическим путем. Прежде скажем, что тут есть два варианта. Оба базируются на развитии алгоритма **FindPhiRD** [8, 9]. Перспективным является один из них. Но чтобы их разработать и оценить, следует изучить функциональные связи  $I_{xx}^r = I_{xx}^r(k, \varphi^{rd})$  (рис. 7) и  $I_{xy}^r = I_{xy}^r(k, \varphi^{rd})$  (рис. 8).

Проанализировав рис. 7 и 8 можно установить две закономерности.

*Первая* относится к рис. 7. Ее суть состоит в однозначности положения линии  $A_x B_x$ , когда каждому значению интеграла  $I_{xx}^r$  (38) соответствует уникальная пара значений коэффициента связности  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ . Их уникальность объясняется тем, что они соответствуют случаю, когда в граничном условии (34) при  $\varphi = \varphi^{rd}$  достигается строгое равенство. Таким образом, если этот случай считать достоверным, то, разработав соответствующий алгоритм (**FindKmax** [8, 9]), неизвестные величины  $k$  и

$\varphi^{rd}$  можно вычислить. Экспериментально следует определить значения  $\gamma$ ,  $f$ ,  $y^d$ ,  $\varphi^{ru}$  и, разумеется,  $I_{xx0}^r$ . Измерять величину интеграла  $I_{xy0}^r$  при этом не нужно.

Алгоритм **FindKmax** был разработан [8, 9]. Смысл его состоит в том, что, двигаясь вдоль линии  $A_x B_x$ , «методом деления отрезка попо-

лам» осуществляется поиск такого значения коэффициента сцепления  $k$ , при котором угол  $\varphi = \varphi^{rd}$  удовлетворяет условию (34) по равенству (осуществляется обращением к **FindPhiRD**), а вычисленное значение интеграла  $I_{xx}^r$  (38) горизонтальной составляющей внешней силовой нагрузки **P** равно заданному  $I_{xx0}^r$ .

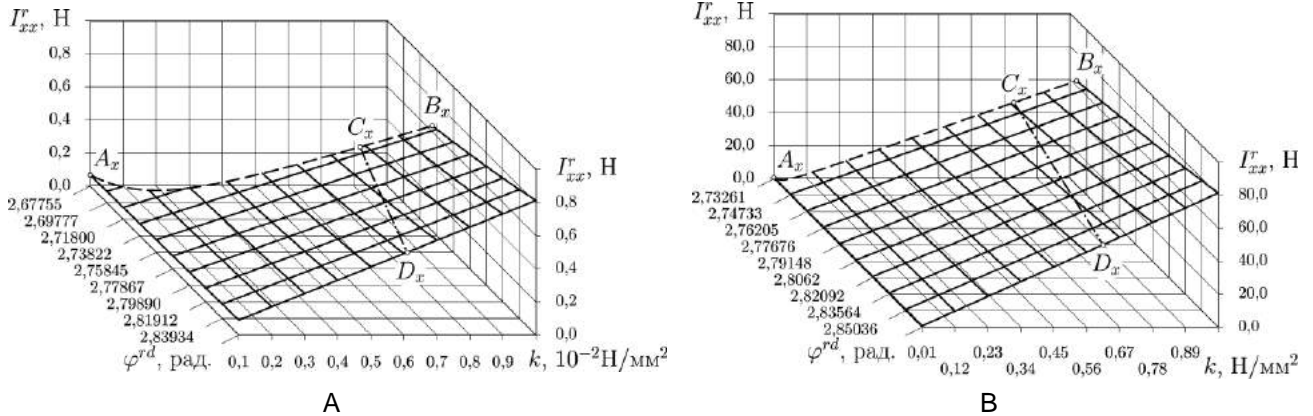


Рис. 7. Иллюстрация закономерностей изменения величины интеграла  $I_{xx}^r$  (38) нормальной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$  в зависимости от величин коэффициента сцепления среды  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ : А) коэффициент сцепления среды  $k$  непрерывно изменяется от 0,001 до 0,01 Н/мм<sup>2</sup>; угол  $\varphi^{rd}$  непрерывно изменяется от 2,67755 до 2,85957 рад.; В) коэффициент сцепления среды  $k$  непрерывно изменяется от 0,01 до 1,0 Н/мм<sup>2</sup>; угол  $\varphi^{rd}$  непрерывно изменяется от 2,73261 до 2,86507 рад.. Все остальные параметры остаются фиксированными:  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>;  $A_x B_x$  — огибающая кривая за которой выполнение граничных условий (23) и (25) невозможно.  $C_x D_x$  — изолиния: А)  $I_{xx}^r = 0,5$  Н; В)  $I_{xx}^r = 50,0$  Н. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (29), (30) и (31)

В конечном итоге алгоритмы **FindPhiRD** и **FindKmax** были объединены в один **FindPhiRDK-I** [8, 9]. В дополнение к уже сказанному, последний осуществляет проверку исходных данных на корректность, в частности условие —  $\varphi_{\min}^{ru} < \varphi^{ru} = \pi - \beta_0$ .

Вторая закономерность относится к рис. 7 и 8. Ее суть в следующем: если величина интеграла  $I_{xx}^r$  (38) нормальной компоненты полного напряжения остается фиксированной в то время, как коэффициент сцепления среды  $k$  и угол  $\varphi^{rd}$  согласовано изменяются (например, при перемещении вдоль линий  $C_x D_x$  (рис. 7)), то величина интеграла  $I_{xy}^r$  (40) касательной ком-

поненты полного напряжения при этом варьирует в широких пределах. Так, при перемещении вдоль  $C_y D_y$  (рис. 8А), которой соответствует фиксированное значение  $I_{xx}^r = 0,5$  Н, величина  $I_{xy}^r$  изменяется от  $-0,21325$  до  $-0,14195$  Н, а при перемещении вдоль  $C_y D_y$  (рис. 8В,  $I_{xx}^r = 50,0$  Н) — от  $-21,327$  до  $-14,187$  Н. Это обстоятельство также весьма важно, поскольку открывает другой путь построения алгоритма для вычисления и угла  $\varphi^{rd}$ , и коэффициента связности  $k$  среды.

Алгоритм **FindPhiRDK-II** [8, 9], базирующийся на использовании этой закономерности, похож на предыдущие. Он тоже задействует «ме-

тод деления отрезка пополам». Его суть состоит в том, что в процессе перемещения вдоль линии  $C_x D_x$  (рис. 7), положение которой определено условием  $I_{xx}^r = I_{xx0}^r$ , отыскивается такая пара значений коэффициента сцепления  $k$  и угол  $\varphi^{rd}$ , при которых достигается равенство  $I_{xy}^r = I_{xy0}^r$ . Ситуация, когда при условии  $I_{xx}^r = I_{xx0}^r$  достижение равенства  $I_{xy}^r = I_{xy0}^r$  является невозможным, трактуется как некоррект-

ность в исходных данных. То же относится и к невыполнению условия  $\varphi_{\min}^{ru} < \varphi^{ru} = \pi - \beta_0$ .

**Результат решения задачи.** Используя изложенный выше подход с применением авторских программ **FreeContour**, **FindPhiRDK-III**, **RoundLine**, **PhiSlidingLine** и др. [8, 9], применительно к исходным данным (табл. 1) получены перечисленные в пункте «требуется» искомые величины (табл. 1) и выполнены построения граничных кривых предельной области  $L^m R^d$ , а также характерных линий скольжения из семейств  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (рис. 9).

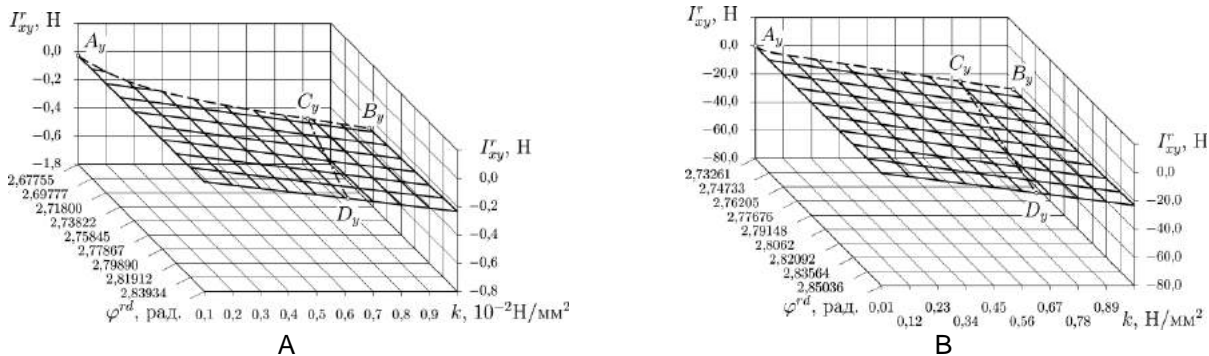


Рис. 8. Иллюстрация закономерностей изменения величины интеграла  $I_{xy}^r$  (40) касательной компоненты полного напряжения, действующего в области пятна контакта  $R^u R^d$ , в зависимости от величин коэффициента сцепления среды  $k$  и угла  $\varphi^{rd}$ : А) коэффициент  $k$  изменяется от 0,001 до 0,01 Н/мм<sup>2</sup>; угол  $\varphi^{rd}$  изменяется от 2,67755 до 2,85957 рад.; В) коэффициент  $k$  изменяется от 0,01 до 1,0 Н/мм<sup>2</sup>; угол  $\varphi^{rd}$  изменяется от 2,73261 до 2,86507 рад.. При этом:  $y^d = 45,0$  мм;  $f = 0,8391$ ;  $\varphi^{ru} = 2,87979$  рад. и  $\gamma = 0,00001$  Н/мм<sup>3</sup>.  $A_y B_y$  — огибающая кривая, за которой выполнение граничных условий (23) и (25) невозможно.  $C_y D_y$  — линия, вдоль которой интеграл  $I_{xx}^r$  нормальной компоненты полного напряжения остается фиксированным: А)  $I_{xx}^r = 0,5$  Н; В)  $I_{xx}^r = 50,0$  Н. Постоянные  $\tilde{C}_x|_{R^u R^d}$ ,  $C_x^*|_{R^u R^d}$  и  $C_x^-|_{R^u R^d}$  рассчитаны по формулам (29), (30) и (31)

Варьируя величиной исходных данных (табл. 1), применительно к рассматриваемой задаче установлен ряд закономерностей:

1. Опережающая трещина  $R^d L^m$  зарождается в точке  $R^d$  и развивается в секторе между пересекающимися в этой же точке характеристиками  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ;

2. В общем случае опережающая трещина  $R^d L^m$  представляет собой кусочносочлененную линию, состоящую из отрезков характеристик (линий скольжения) двух семейств;

3. Наиболее вероятным является случай, когда опережающая трещина  $R^d L^m$  сглаживает

угол, который образуют две характеристики разных семейств, выходящих из начальной и конечной точек ( $R^d$  и  $L^m$ );

4. Если опережающая трещина  $R^d L^m$  представляет собой кусочносочлененную линию, то ее конечные участки всегда совпадают с выходящими из точек  $R^d$  и  $L^m$  характеристиками;

5. В частном случае опережающая трещина  $R^d L^m$  может полностью совпадать с одной из характеристик, которые выходят из точки  $R^d$ ;

6. То, по какому пути пройдет опережающая трещина, в первую очередь определяется вероятностными факторами, но чем меньше связ-

ность среды, тем вероятнее, что кривая  $R^d L^m$  совпадет с характеристикой первого семейства, уходящей из точки  $R^d$  вправо и вверх;

7. В случае реальных сред в процессе развития опережающей трещины переключение между характеристиками в основном определяется неоднородностями среды;

**Таблица 1.** Исходные и расчетные данные, определяющие размеры и форму области предельного равновесия  $L^m R^u R^d$ , образующейся впереди деформатора

Номер рисунка	Исходные данные					Расчетные величины			
	$y^{ru}$	$y^d$	$\gamma$	$f$	$I_{xx0}^r$	$\varphi^{ru}$	$k$	$\varphi^{rd}$	$I_{xy}^r$
	мм	мм	Н/мм <sup>3</sup>	—	Н	рад.	Н/мм <sup>2</sup>	рад.	Н
9А	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,2	3,115413	0,01328682	3,115188	-0,03142609
9Б	—	—	—	—	1,6	3,106686	0,01774356	3,106463	-0,05587538
9В	—	—	—	—	2,0	3,097959	0,02220862	3,097737	-0,08732366
—	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,3	3,115413	0,01439865	3,115205	-0,03404444
—	—	—	—	—	1,7	3,106686	0,01885601	3,106686	-0,05936733
—	—	—	—	—	2,1	3,097959	0,02332184	3,097959	-0,09168967
—	0,0	45,0	0,00001	0,8391	1,2	3,111049	0,01329003	3,110787	-0,03666621
—	—	—	—	—	1,6	3,102323	0,01774931	3,102072	-0,06286634
—	—	—	—	—	2,0	3,093596	0,02221754	3,093351	-0,09606871
—	0,0	45,0	0,000015	0,8391	1,2	3,115413	0,01325941	3,115072	-0,03142988
—	—	—	—	—	1,6	3,106686	0,01771583	3,106349	-0,0558781
—	—	—	—	—	2,0	3,097959	0,02218077	3,097624	-0,08732589

8. Опережающая трещина  $R^d L^m$  распространяется тем дальше, чем больше связность среды (коэффициента сцепления  $k$ ) и соответствующая ей интенсивность силового воздействия (внешняя распределенная сила  $\mathbf{P}$ );

9. Кривизна линии свободного контура  $R^u L^m$  и ее начальный наклон (угол  $\pi - \varphi^{ru}$ ) связаны с коэффициентом сцепления среды и внешним силовым воздействием прямо пропорциональной зависимостью;

10. Линия пятна контакта  $R^u R^d$ , огибающая кривая (опережающая трещина)  $R^d L^m$  и кривая свободного контура  $L^m R^u$  всегда образуют замкнутую область предельного равновесия  $R^u R^d L^m$ .

11. Из числа свойств среды самым основным фактором, который определяет форму и размеры области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  является величина связности, определяемая коэффициентом сцепления  $k$ .

12. Коэффициент внешнего трения среды также влияет на форму и размеры области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$ , но посредством применяющейся математической модели полностью проследить это влияние не удастся. Исходя из логики изучаемых процессов можно утверждать, что уменьшение коэффициента внешнего трения  $f$  должно способствовать проскальзыванию среды вверх вдоль пятна контакта, а, значит, уменьшению угла  $\varphi^{ru}$ . В нашем

случае угол  $\varphi^{ru}$  назначается. Следовательно, если в процессе комплектования исходных данных уменьшить коэффициент трения  $f$ , то в ответ необходимо уменьшить и  $\varphi^{ru}$ . Расчеты показывают, что в таком случае область предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  увеличится в размерах. В частности точка  $L^m$  еще больше удалится от лобовой поверхности  $R^u R^d$ .

13. Увеличение интенсивности силового воздействия (значения  $I_{xx0}^r$ ) при тех же величинах угла  $\varphi^{ru}$  приводит к пропорциональному масштабированию области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате. Коэффициент сцепления  $k$ , угол  $\varphi^{rd}$  и расчетное значение  $I_{xy}^r$  вертикальной составляющей внешнего силового воздействия также увеличиваются.

14. Уменьшение угла  $\varphi^{ru}$ , при тех же величинах интенсивности силового воздействия (интегрального значения  $I_{xx0}^r$ ), также приводит к пропорциональному увеличению размеров области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате с одновременным уменьшением угла  $\varphi^{rd}$ . Коэффициент сцепления  $k$  и расчетное значение  $I_{xy}^r$  модуля вертикальной составляющей внешнего силового воздействия при этом увеличиваются.

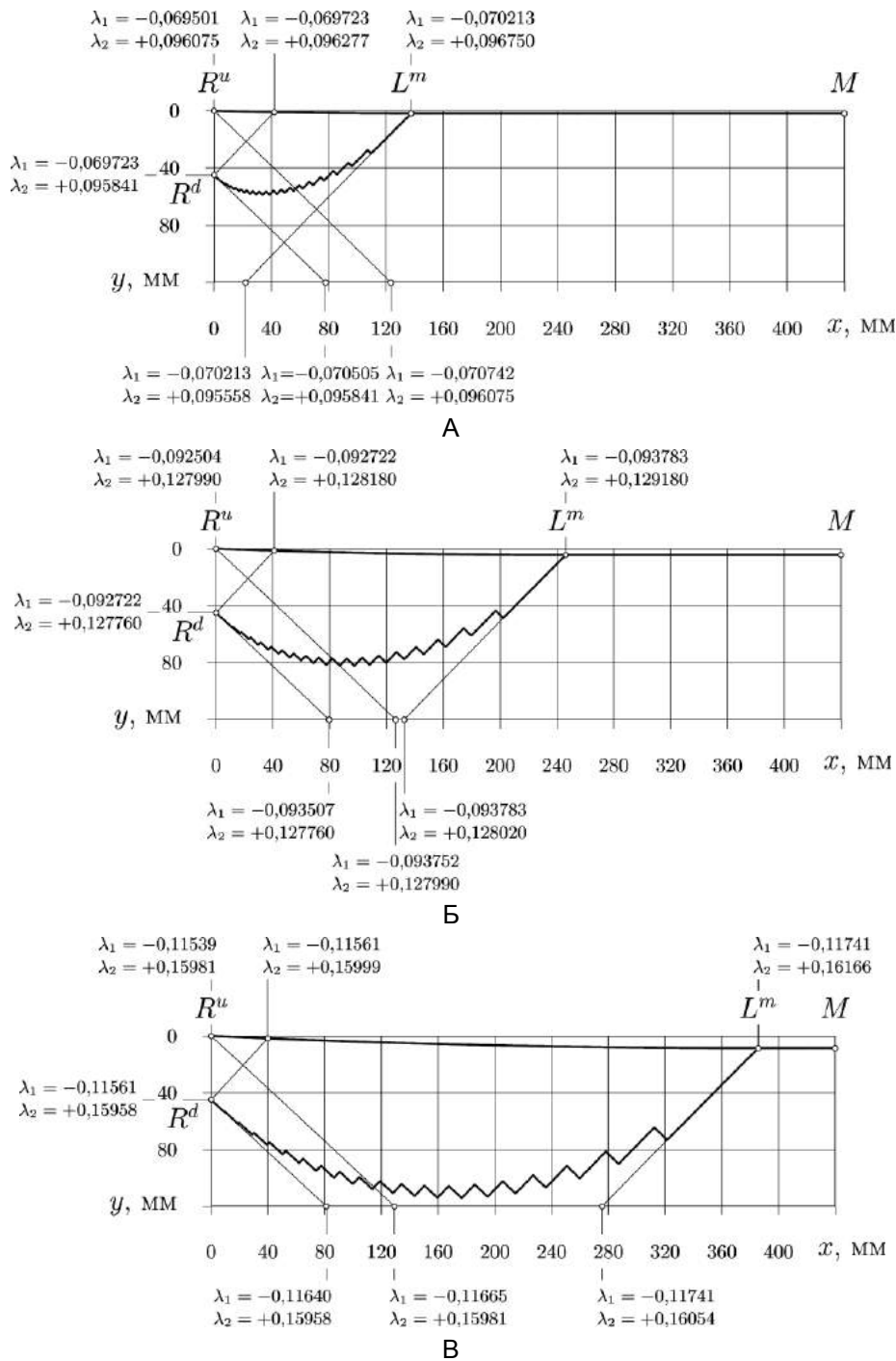


Рис. 9. Кривая  $L^m R^u$  свободного контура, дневная поверхность  $L^m M$  и огибающая кривая  $R^d L^m$ , которые изображены жирными линиями, а также четыре линии скольжения по две из каждого семейства ( $\lambda_i, i = 1, 2$ ), которые изображены тонкими линиями. Рисунки 2А, 2Б и 2В соответствуют исходным данным из табл. 1

15. Увеличение удельного веса среды  $\gamma$ , при тех же величинах остальных исходных данных, приводит к пропорциональному уменьшению размеров области предельного равновесия  $R^u R^d L^m$  как по абсциссе, так и по ординате с одновремен-

ным уменьшением угла  $\varphi^{rd}$  и коэффициента сцепления  $k$ . Расчетное значение  $I_{xy}^r$  модуля вертикальной составляющей внешнего силового воздействия при этом увеличиваются.

**Выводы.** Приведенное решение задачи о воздействии вертикального плоского жесткого деформатора на почву демонстрирует высокую адекватность, и тем подтверждает правильность подхода к развитию теории почвообработ-

ки, который базируется не на усложнении уже имеющихся математических моделей почвы, а в разработке более эффективных приемов использования имеющихся известных моделей.

### Литература

1. Кулен А., Куиперс М. Современная земледельческая механика / Пер. с англ. А.Э.Габриэляна; Под ред. и с предисл. Ю.А.Смирнова. – М.: Агропромиздат, 1986. – 349 с.
2. Пашенко В.Ф. Моделирование взаимодействия рабочих органов сельскохозяйственных машин и орудий с почвой. – Харьков: РИО Харьковского государственного аграрного университета им. В.В.Докучаева, 1999. – 140 с.
3. Панченко А.Н. Теория измельчения почв почвообрабатывающими орудиями. – Днепропетровск: РИО Днепропетровского государственного аграрного университета, 1999. – 140 с.
4. Мельник В.И. Предельное равновесие сплошных неупругих сред: Монография. – Харьков: КП «Типография №13», 2006. – 368 с.
5. Мельник В.И. Предельное равновесие связанных и сыпучих сред: Монография. –

Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 357 с.

6. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для вузов. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.

7. Томленов А.Д. Теория пластического деформирования материалов. – М.: Metallurgia, 1972. – 408 с.

8. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: в 2 ч., – К.: Выща шк., 1991. – Ч. 1. – 264 с.

9. Мельник В.И. Внутрипочвенное внесение жидкостей в растениеводстве: Монография. – Харьков: «Міськдрук», 2010. – 439 с.

10. Мельник В.И. Распределение жидкостей под слоем почвы: Монография. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012. – 441 с.

### Анотація

## Перспективний метод розв'язання задач ґрунтообробки

В.І.Мельник, Л.М.Тищенко

*На прикладі розв'язування задачі про взаємодію вертикального плоского жорсткого деформатора із ґрунтом показана перспективність підходу до розвитку теорії ґрунтообробки, який базується не на ускладненні відомих математичних моделей ґрунту, а в розробці більш ефективніших прийомів їх використання.*

**Ключові слова:** ґрунт, деформатор, взаємодія, напружений стан, квазілінійна система рівнянь, граничні умови, випереджаюча тріщина.

### Abstract

## Prospective method of problem solving of soil tillage

V.I.Mel'nyk, L.M.Tischenko

*Prospectivity of approach of interacting vertical flat hard plate with soil in the development of soil tillage theory, unbased on complication of the known mathematical models of soil, and based on developing more effective ways of their use is shown in the article.*

**Keywords:** soil, working organ, interacting, tense state, system of equalizations, border terms, passing ahead crack.

Представлено: Л.И.Завгородний / Presented by: L.Zavgorodniy

Рецензент: В.Ф.Пашенко / Reviewer: V.Paschenko

Подано до редакції / Received: 28.01.2013