Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет енергетики, робототехніки та комп'ютерних технологій

Кафедра електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та електротехніки

МОДЕЛЮВАННЯ БІОЛОГІЧНИХ ФОРМ ЧУДОВИМИ ПЛОСКИМИ КРИВИМИ (СПІРАЛІ)

Методичні вказівки
для самостійного вивчення дисципліни

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та (заочної) форми навчання, спеціальності
163 «Біомедична інженерія»

Харків
2023

Міністерство освіти і науки України
ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
Факультет енергетики, робототехніки та комп'ютерних технологій
Кафедра електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії та електротехніки

МОДЕЛЮВАННЯ БІОЛОГІЧНИХ ФОРМ ЧУДОВИМИ ПЛОСКИМИ КРИВИМИ (СПІРАЛІ)

Методичні вказівки
для самостійного вивчення дисципліни

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та (заочної) форми навчання, спеціальності
163 «Біомедична інженерія»

Затверджено
рішенням Науково-методичної
ради факультету ЕРКТ
Протокол № 2 від 17 листопада 2022 р.

Харків
2023

УДК 681.5 : 631.1(072)

Схвалено
на засіданні кафедри електромеханіки, робототехніки, біомедичної інженерії
та електротехніки
Протокол № 1
від 31 серпня 2022 р.

Рецензент:
О.М. Мороз, д-р тех. наук, проф. кафедри електропостачання та енергетичного менеджменту, Державний біотехнологічний університет.

Моделювання біологічних форм чудовими плоскими кривими (спіралі) : метод. вказівки для самостійного вивчення дисципліни здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної (заочної) форми навч., спец. 163 «Біомедична інженерія» / Державний біотехнологічний університет; уклад.: В.О. Шигимага. – Харків : [б. в.], 2023.– 25 с.

Методичні вказівки з дисципліни "Моделювання біологічних процесів і систем". Видання включає теми для самостійного засвоєння здобувачами, проблемні питання та методичні роз'яснення до них, питання для самоконтролю

Видання призначене здобувачам першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної форми навчання спеціальності 163 Біомедична інженерія.

Відповідальний за випуск: В.О. Шигимага, д. т. н., проф.

Самостійна робота №2

Моделювання біологічних форм чудовими плоскими кривими (спіралі)

1. Мета роботи: Дослідити залежність зовнішнього вигляду кривої від параметрів, що входять до її рівняння. Вивчити застосування чудових плоских кривих – різноманітних спіралей для моделювання біологічних форм у природі.

2. Введення

У сучасному світі при активному розвитку техніки є необхідність в знаннях про чудові криві. У природі ці криві зустрічаються досить часто і мають практичне застосування в житті людини. Математика завдяки своїй універсальності стала використовуватись в природних, гуманітарних науках і у всіх сферах життя людини. Так, наприклад, ми часто зустрічаємося в природі з кривими, які привертають нашу увагу своїми витонченими формами і дивовижними властивостями. Одними з таких цікавих кривих є криві під назвою "спіралі".

Актуальність цієї теми: демонстрація застосування математичних знань у практичному моделюванні біооб'єктів. У математичному курсі вивчення геометрії широко не передбачається вивчення властивостей чудових кривих, які, тім не менш, широко використовуються в житті.

Завдання даної роботи полягає в наступному:

- з'ясувати що таке спіралі;
- встановити, які види спіралей існують;
- дослідним шляхом показати, як змінюються спіралі в залежності від різних значень параметрів;
- побудувати спіралі;
- зробити висновки.

3. Поняття про полярну систему координат

Для початку треба розібратися, що таке полярна система координат, адже всі криві, що будуть досліджувані, задані в ній.

Полярна система координат визначається завданням деякої точки *O*, званої полюсом, променя *OM*, що виходить з цієї точки (позначається також і як *Ox*), званого полярною віссю, і масштабу для зміни довжин. Позитивним напрямком відліку кутів вважається напрямок "проти годинникової стрілки", рис. 1.

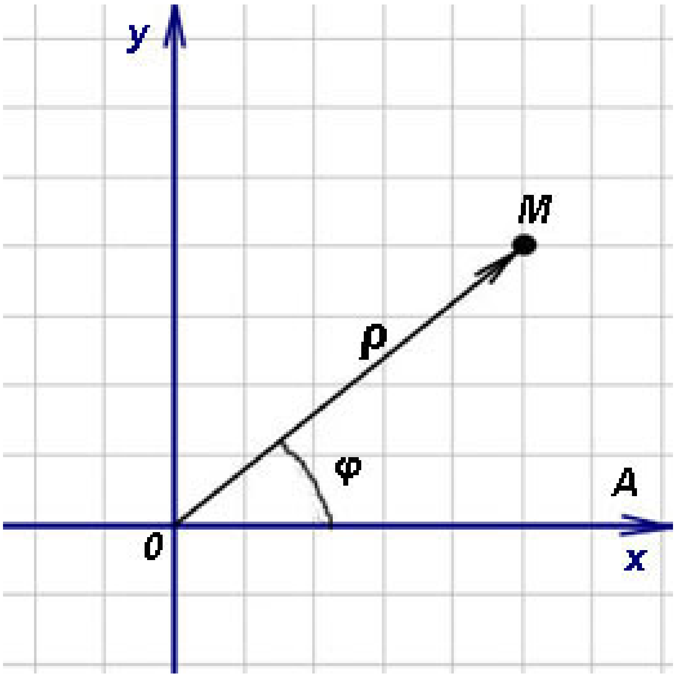


Рис. 1 - Полярна система координат: *OM*, ρ - полярний радіус (відстань від точки *M* до полюса *O*); φ - полярний кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки промінь *Ox* до суміщення з променем *OM*.

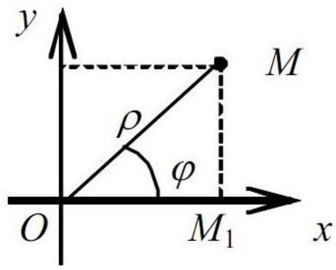
Точку М з полярними координатами позначають символом $M(\rho,\varphi)$. Якщо точка *M* збігається з полюсом, то $\rho = 0$, а полярний кут вважаємо рівним нулю. При заданих нами умовах (ρ,φ), полярні координати будь-якої точки визначаються однозначно.

Введення таких координат дуже природно, адже місцезнаходження будь-якої точки на земній поверхні для нерухомого спостерігача зручно визначати за допомогою відстані від спостерігача до цієї точки і напрямку до точки від спостерігача (в цьому випадку точка, в якій знаходиться спостерігач, служить полюсом).

Полярна система координат особливо корисна у випадках, коли відносини між точками простіше зобразити у вигляді радіусів і кутів; в більш поширеної декартової або прямокутної системі координат такі відносини можна встановити тільки шляхом застосування тригонометричних рівнянь.

Встановимо зв'язок між полярними і декартовими координатами точки. Розташуємо початок декартової прямокутної системи координат в полюсі, таким чином, щоб позитивна піввісь абсцис збігалася з полярною віссю, рис. 2.

$$x = \rho \cos\varphi \qquad y = \rho \sin\varphi$$



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

Рис. 2 - Зв'язок між полярними і декартовими координатами точки.

Нехай точка М має декартові координати x і y і полярні координати ρ і φ. Тоді, навпаки, полярні координати виражаються через декартові за формулами, рис.2.

Для того, щоб знайти величину кута φ, потрібно, використовуючи знаки x і y, визначити квадрант, в якому знаходиться точка М, і, крім того, скористатися формулами переходу, рис.2. Наведені вище формули називаються формулами переходу від декартових координат до полярних.

4. Сімейство чудових плоских кривих - спіралі

Спіраль - це гвинтоподібна крива, яка огинає умовний центр або вісь, поступово віддаляючись або наближаючись до них. Так само є ще одне визначення спіралі - плоска крива лінія, що багаторазово обходить одну з точок на площині. Принцип спіралі часто зустрічається в природі, і цей символ набув широкого поширення ще на зорі людства. Спіраль можна зустріти скрізь: це форма Галактики, вихори, смерчі, воронки, рух частинок, ДНК скручена в спіраль, раковини, листочок, який розправляється, теж виглядає як спіраль, рис. 3.

Рис. 3 – Приклади спіралей у природі і Всесвіті.

Назва "спіраль" пішла від слова "звиватися".

Існують безліч видів спіралей і всі вони дуже цікаві і красиві.

У даній роботі розглянемо наступні види спіралей:

1) Архімеда

2) Ферма

3) гіперболічна

4) логарифмічна

5) Фібоначчі

6) Корню

7) Спіраль Феодора

Розберемо кожну спіраль докладніше.

1) Спіраль Архімеда

Помістимо точку на секундну стрілку годинника і будемо переміщати точку вздовж секундної стрілки з постійною швидкістю, не звертаючи уваги на рівномірний рух стрілки годинника по колу. Тоді точка опише криву, яка зветься спіраллю Архімеда. Ця спіраль відкрита Архімедом в III столітті до н.е. Архімеда спіраль - плоска чудова крива, траєкторія точки *M*, яка рівномірно рухається вздовж променя *OV* з початком в *O*, в той час як сам промінь *OV* рівномірно обертається навколо *O*. Іншими словами, відстань ρ = *OM* пропорційно куту повороту φ променя *OV*, рис. 4.

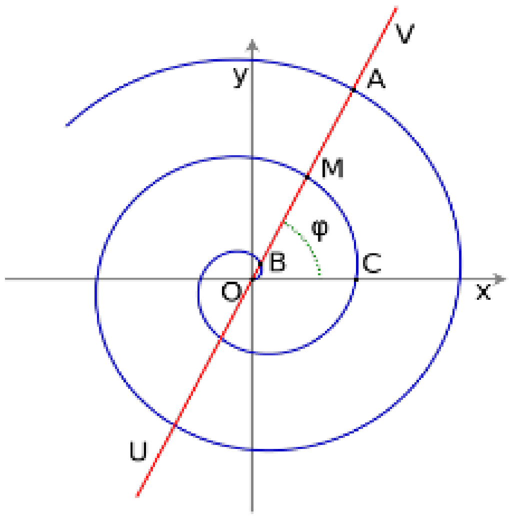


Рис. 4 – Спіраль Архімеда.

Спіралі приводили древніх математиків у захват. У живій природі зустрічається безліч прикладів спіралеподібних утворень, подібних до чудової кривої, яка отримала назву спіраль Архімеда. Рівняння Архімедової спіралі в полярній системі координат записується так:

$$\rho = k\varphi \tag{1}$$

де k — зсув точки *M* по променю *OV*, при повороті на кут рівний одному радіану.

Повороту прямої на 2 π відповідає зміщення a = |BM| = |MA| = 2 $k\pi$. Число a називається кроком спіралі. Рівняння Архімедової спіралі можна переписати так:

$$\rho = \frac{a}{2\pi}\varphi \qquad (2)$$

При обертанні променя проти годинникової стрілки виходить права спіраль (синя лінія), при обертанні за годинниковою стрілкою — ліва спіраль (зелена лінія), рис. 5.

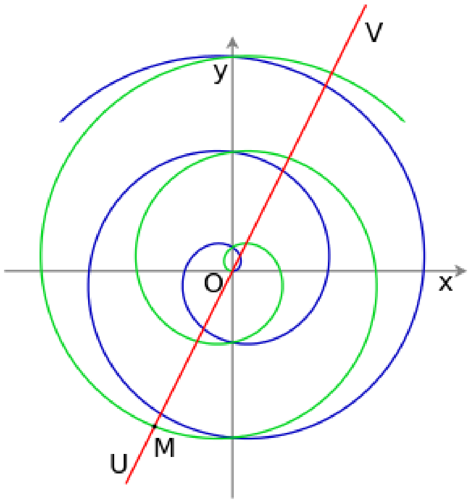


Рис. 5 - Права спіраль (синя лінія) та ліва спіраль (зелена лінія).

Обидві гілки спіралі (права і ліва) описуються одним рівнянням (1). Позитивним значенням відповідає права спіраль, негативним — ліва спіраль. Якщо точка *M* буде рухатись по прямій *UV* з негативних значень через центр обертання *O* і далі в позитивні значення, уздовж прямої *UV*, то точка *M* опише обидві гілки спіралі. Промінь *OV*, проведений з початкової точки O, перетинає спіраль нескінченне число разів. При розкручуванні спіралі відстань від точки *O* до точки *M* прагне до нескінченності, при цьому крок спіралі залишається постійним (кінцевим), тобто чим далі від центру, тим ближче витки спіралі за формою наближаються до кола. Реальний образ спіралі Архімеда можна бачити, наприклад, спостерігаючи туго загорнутий рулон паперу з його торцевого боку.

2) Спіраль Ферма

Спіраль Ферма (іноді *параболічна спіраль*) - спіраль, що задається на площині в полярних координатах рівнянням:

$$\rho^2 = a^2\varphi \tag{3}$$

Дана спіраль названа ім'ям великого французького математика, одного з творців аналітичної геометрії, П'єра Ферма (1601 – 1665). Вона є різновидом Архімедової спіралі, рис. 6.

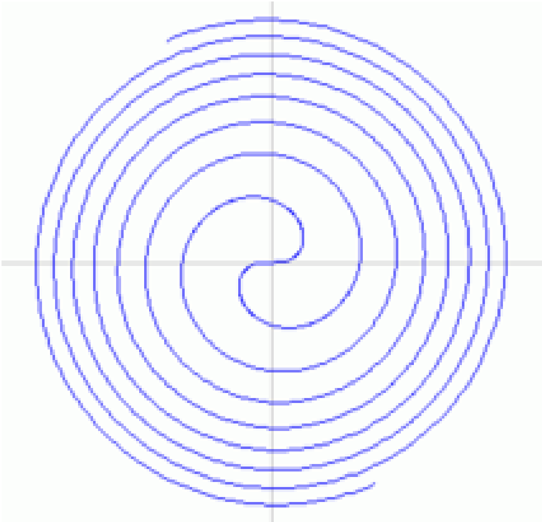
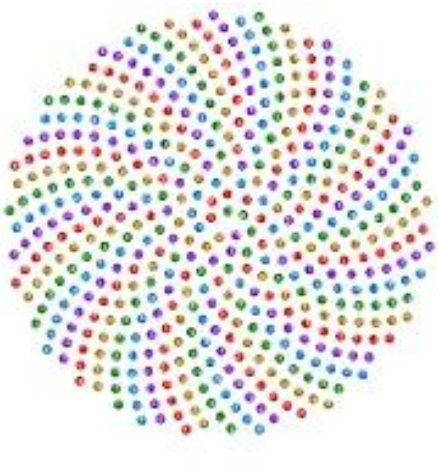


Рис. 6 – Спіраль Ферма.

Вчений Фогель В 1979 році запропонував модель для розподілу квіток і насіння у соняшнику, рис. 7.



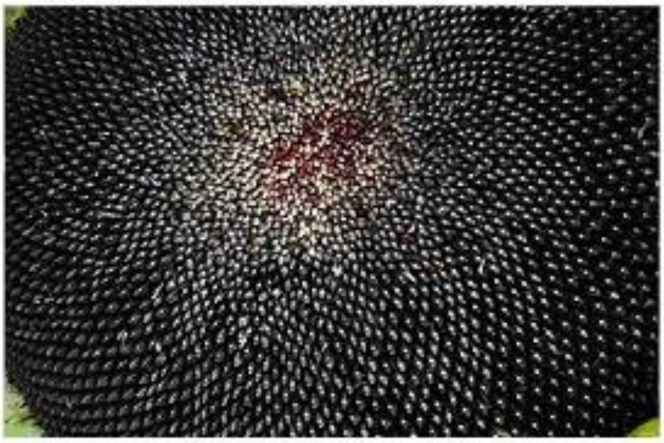


Рис. 7 – Розподілення квіток і насіння у соняшнику.

Ця модель виражається наступним чином:

$$r = c\sqrt{n} \qquad \theta = n \times 137{,}5^0 \qquad (4)$$

де θ – кут, r - радіус або відстань від центру, n — номер квітки, c - константа. Це форма спіралі Ферма, рис. 7.

3) Гіперболічна спіраль

Гіперболічна спіраль - плоска трансцендентна крива. Рівняння гіперболічної спіралі в полярній системі координат є зворотним для рівняння Архімедової спіралі і записується так:

$$\rho\varphi = a \qquad (5)$$

Спіраль має асимптоту $y = a$, рис. 8.

При x, що прагне до нескінченності, ордината прагне до a (в декартових координатах, рис. 8).

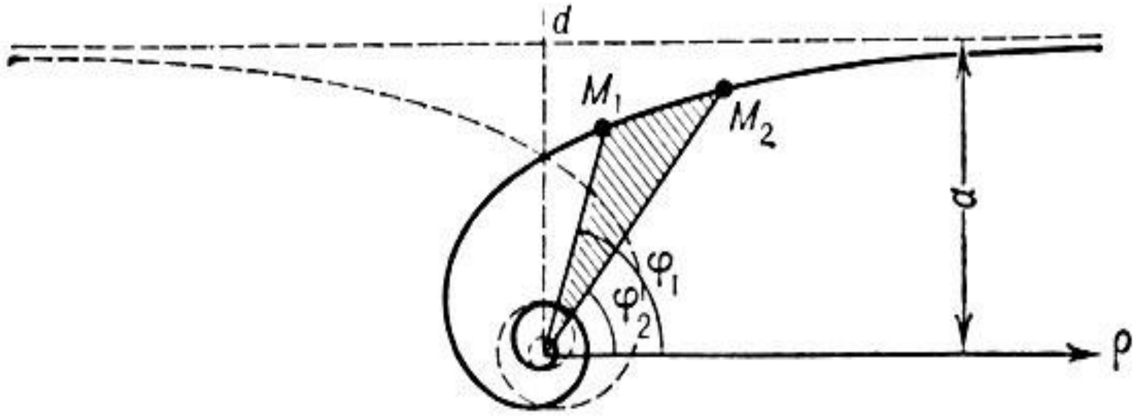


Рис. 8 – Гіперболічна спіраль.

Гіперболічна спіраль і Архімеда спіраль можуть бути отримані одна з одної інверсією щодо полюса O, рис 8. Гіперболічна спіраль - окремий випадок так званих алгебраїчних спіралей.

4) Логарифмічна спіраль

Логарифмічна спіраль або ізогональна спіраль — особливий вид спіралі, що часто зустрічається в природі. Логарифмічна спіраль була вперше описана Декартом і пізніше інтенсивно досліджена Бернуллі, який називав її *Spira* *mirabilis* — "дивовижна спіраль". Власне термін "логарифмічна спіраль" (фр. *spirale logarithmique*) першим вжив П'єр Варіньон. Логарифмічна спіраль - плоска трансцендентна крива. Її рівняння в полярних координатах має вигляд:

$$r = ae^{b\theta} \quad \text{або} \quad \theta = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{r}{a}\right) \qquad (6)$$

де θ - кут відхилення точки від нуля, r - радіус вектор точки, a – коефіцієнт, що відповідає за радіус витків, b – коефіцієнт, що відповідає за відстань між витками. Другий запис формули пояснює назву "логарифмічна" спіраль.

Логарифмічна спіраль - плоска крива, описувана точкою, що рухається по прямій, яка обертається близько однієї зі своїх точок O (полюса логарифмічної спіралі) так, що логарифм відстані рухомої точки від полюса змінюється пропорційно куту повороту; логарифмічна спіраль перетинає під постійним кутом всі прямі, що виходять з полюса (рис. 9).

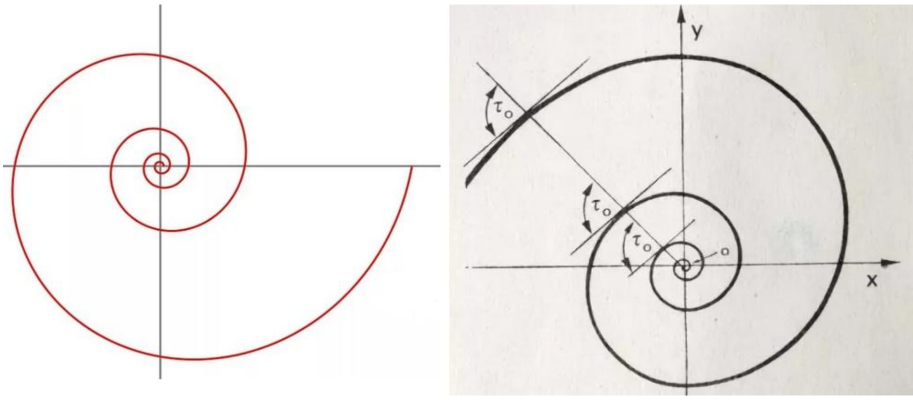


Рис. 9 – Логарифмічна спіраль.

Початок дослідження цієї спіралі має бути пов'язаний з навігацією. Протягом XVI і XVII століть тисячі суден борознили океани. Мореплавці знали, що на поверхні Землі найкоротшу відстань між двома точками дає дуга кола. Але щоб рухатися по такій дузі слід безперервно міняти напрямок руху. Тому цей оптимальний курс замінювали іншим, таким, щоб кут, під яким корабель перетинав всі меридіани, був постійним. Цей курс залишався постійним. Траєкторії такого виду утворюють на земній поверхні криві, які називаються локсодромами. Однак моряки не працювали на сфері, їх карти були плоскими, вони представляли собою проекції сфери. Ну а проекція сфери на площину перетворює локсодрому на ній в логарифмічну (або рівнокутну) спіраль.

Особливості логарифмічної спіралі вражали не тільки математиків. Її властивості дивують і біологів, які вважають саме цю спіраль свого роду стандартом біологічних об'єктів самої різної природи.

Логарифмічну спіраль описує точка, що рухається по секундній стрілці не з постійною швидкістю (як у випадку архімедової спіралі), а із зростаючою, причому це зростання пропорційно відстані від центру годин.

Логарифмічна спіраль має ряд цікавих властивостей:

* відстані між послідовними витками утворюють геометричну прогресію;

* послідовність довжин радіусів, що утворюють однакові кути один з одним, також становить геометричну прогресію;

* утворені в процесі розширення сектори, відсікаються такими радіусами, що подібні один одному.

В історії математики логарифмічна спіраль згадується вперше в 1638 р Декартом, який визначав нову спіраль, як лінію, у якій відношення довжини дуги до відповідного радіус-вектора є постійним, з цієї причини її називають "рівнокутною".

Логарифмічна спіраль - крива з "твердим" характером. Вона не змінює своєї природи при багатьох перетвореннях, до яких чутливі інші криві. Стиснути або розтиснути цю спіраль щодо її полюса - те ж саме, що повернути її на певний кут. Ця властивість логарифмічної спіралі була відкрита Якобом Бернуллі. Відкриті Бернуллі властивості логарифмічної спіралі залишатися незмінною при різних перетвореннях настільки вразили вченого, що він був схильний надати їм містичний сенс. Якоб Бернуллі заповідав висікти логарифмічну спіраль на своєму надгробному камені, супроводивши зображення латинською фразою "*Eadem mutate resurgo*" – "змінена, відроджуюся колишньою".

5) Спіраль Фібоначчі

Спіраль Фібоначчі - це графічне відображення дивовижної послідовності чисел, яку називають "ряд", або "числа Фібоначчі". Числа Фібоначчі або послідовність Фібоначчі - числова послідовність, що володіє рядом властивостей. Наприклад, сума двох сусідніх чисел послідовності дає значення наступного за ними (1+1=2; 2+3=5 і т. д.), що підтверджує існування так званих коефіцієнтів Фібоначчі, тобто постійних співвідношень. Тобто перші два числа дорівнюють або 1 і 1, або 0 і 1, а кожне наступне число дорівнює сумі двох попередніх чисел. Названі на честь середньовічного математика Леонардо Пізанського (відомого, як Фібоначчі). Більш формально, послідовність чисел Фібоначчі $\{F_n\}$ задається лінійним рекурентним співвідношенням:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \; n \geq 2, \quad n \in Z \qquad (7)$$

Послідовність Фібоначчі починається так: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Співвідношення між усіма цими числами приблизно дорівнює золотому перетину. Прямокутник з шириною і висотою, рівними двом сусіднім числам послідовності, являє собою так званий "Золотий прямокутник", ідеальний прямокутник. Золотий прямокутник можна розбити на більш дрібні, з розмірами, відповідними сусіднім числам Фібоначчі. Якщо Золотий прямокутник розбити на більш дрібні відповідно до послідовності і розділити кожен з них дугою, вийде "спіраль Фібоначчі", рис. 10.

Чудовою властивістю числового ряду Фібоначчі є те, що в міру збільшення чисел ряду відношення двох сусідніх членів цього ряду асимптотично наближається до точної пропорції Золотого перетину (1:1,618) - основі краси і гармонії в навколишньої природі, в тому числі і в людських відносинах.

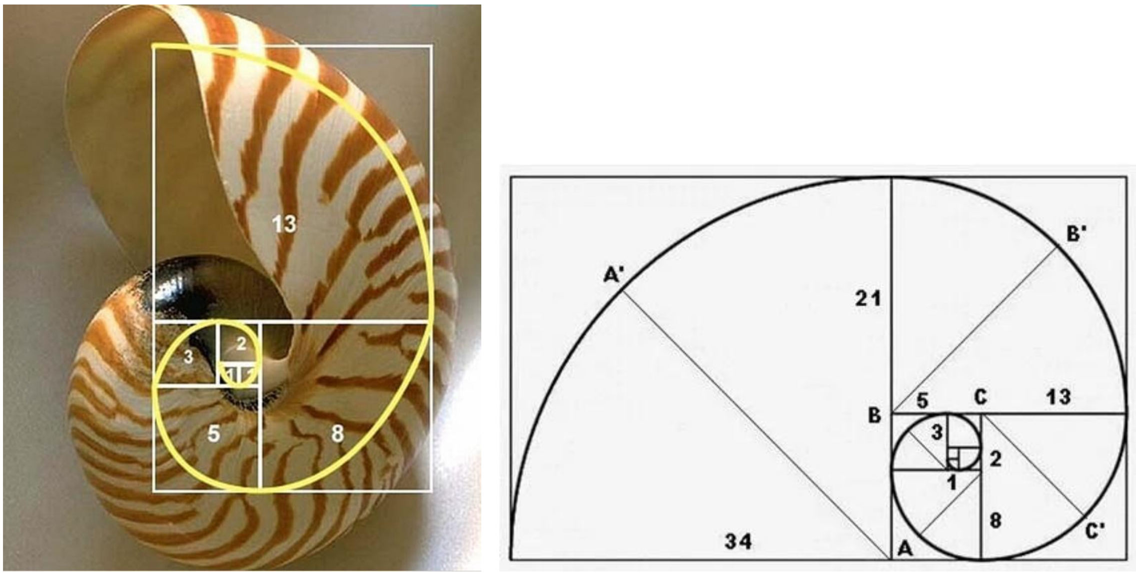


Рис. 10 – Спіраль Фібоначчі.

Відзначимо, що сам Фібоначчі відкрив свій знаменитий ряд, розмірковуючи над завданням про кількість кроликів, які протягом одного року повинні народитися від однієї пари. У нього вийшло, що в кожному наступному місяці після другого число пар кроликів в точності слідує цифровому ряду, яке нині носить його ім'я. Тому не випадково, що і сама людина влаштована по ряду Фібоначчі. Кожен орган влаштований відповідно до внутрішньої, або зовнішньої подвійністю.

Числа Фібоначчі зацікавили біологів своєю особливістю виникати в найнесподіваніших місцях. Помічено, наприклад, що відносини чисел Фібоначчі, взятих через одне, відповідають куту між сусіднім листям на стеблі рослин, точніше, вони говорять, яку частку обороту становить цей кут: 1/2 - для в'яза і липи, 1/3 - для бука, 2/5 - для дуба і яблуні, 3/8 - для тополі і троянди, 5/13 - для верби і мигдалю і т. д. Ці ж числа можна знайти при підрахунку насіння в спіралях соняшнику, в кількості променів, що відбиваються від двох дзеркал, в кількості варіантів маршрутів переповзання бджоли від однієї стільники до іншої, в багатьох математичних іграх і фокусах.

У чому різниця між спіралями золотого перетину і спіраллю Фібоначчі? Спіраль золотого перетину ідеальна. Вона відповідає першоджерелу гармонії.

Ця спіраль не має ні початку, ні кінця. Вона нескінченна. Спіраль Фібоначчі має початок, від якого вона починає "розкрутку". Це дуже важлива властивість. Вона дозволяє природі після чергового замкнутого циклу здійснювати будівництво нової спіралі з "нуля".

Слід сказати, що спіраль Фібоначчі може бути подвійною. Існують численні приклади цих подвійних спіралей, що зустрічаються всюди. Так, спіралі соняшників завжди співвідносяться з рядом Фібоначчі. Навіть у звичайній сосновій шишці можна побачити цю подвійну спіраль Фібоначчі. Перша спіраль йде в одну сторону, друга - в іншу. Якщо порахувати число лусочок в спіралі, що обертається в одному напрямку, і число лусочок в іншій спіралі, можна побачити, що це завжди два послідовних числа ряду Фібоначчі. Число цих спіралей 8 і 13. У соняшниках зустрічаються пари спіралей: 13 і 21, 21 і 34, 34 і 55, 55 і 89. І відхилень від цих пар не буває!.

6) Спіраль Корню

Спіраль Корню (в західній літературі відома так само, як спіраль Ейлера) — крива, у якій кривизна змінюється лінійно як функція довжини дуги, рис.11.

Ця крива названа по імені французького фізика XIX ст. А. Корню (також - клофоїда і спіраль Ейлера). Головною особливістю спіралі є те, що її кривизна прямо пропорційна довжині пройденого по ній шляху. Наведена спіраль включає до свого складу пару симетричних гілок, що закручуються навколо фокусів F_1 та F_2 , рис. 11.

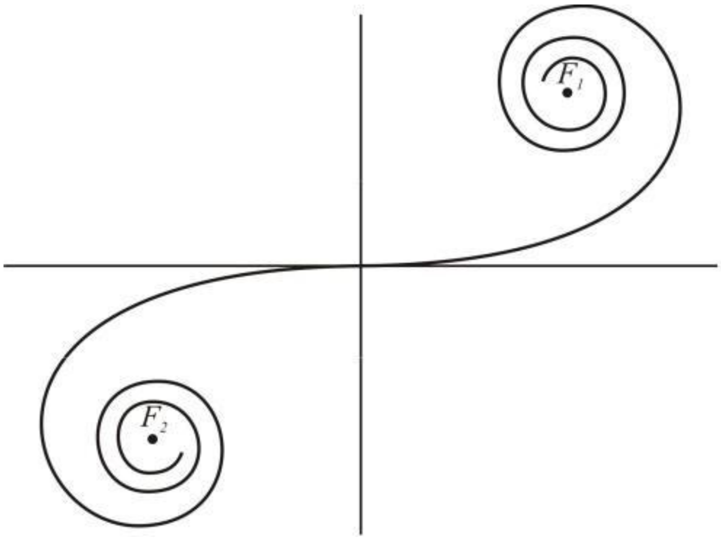


Рис. 11 – Спіраль Корню (клофоїда).

Рівняння клофоїди або спіралі Корню записується, як:

$$r = \frac{a}{s} \tag{8}$$

де a – const, r - радіус кривизни, s - довжина дуги.

Ця спіраль використовується, як перехідна дуга в дорожньому будівництві. Коли ділянка дороги в плані має форму частини клофоїди, кермо автомобіля при поворотах повертається без ривків. Такий вигин дороги дозволяє проходити поворот без істотного зниження швидкості.

Клофоїда запропонована Корню для полегшення розрахунку дифракції в прикладних оптичних задачах.

7) Спіраль Феодора

В геометрії, спіраль Феодора (також звана спіраллю кореня квадратного з кута, спіраллю Ейнштейна або спіраллю Піфагора) — наближення до архімедової спіралі, що складається з суміжних прямокутних трикутників, що примикають один до одного. Вона вперше виявлена Феодором Кіреньським, давньогрецьким вченим, відомим як учитель Платона, що жив в V столітті до нашої ери на території Лівії. На рис. 12 показана ця спіраль.

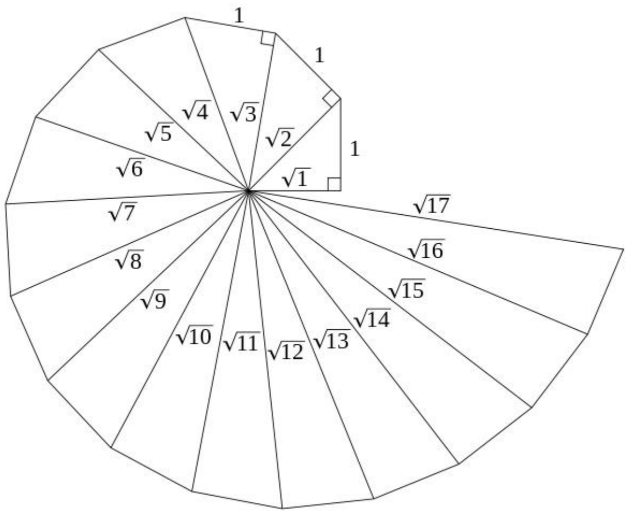


Рис. 12 – Спіраль Феодора.

Спіраль Феодора починається з рівнобедреного прямокутного трикутника, кожен катет якого має одиничну довжину. Потім додається ще один прямокутний трикутник, чий катет є гіпотенузою попереднього трикутника (з довжиною √2), а інший катет має довжину 1; довжина гіпотенузи другого трикутника √3. Потім процес повторюється; n-й трикутник в послідовності являє собою правий трикутник з катетами √n і 1 і з гіпотенузою √n + 1. Наприклад, 16-й трикутник має сторони розміром 4 (=√16), 1 і гіпотенузою √17.

Спіраль Феодора наближається до Архімедової спіралі. Так як відстань між двома витками Архімедової спіралі дорівнює постійної Пі=3,14..., то коли кількість оборотів спіралі Феодора прагне до нескінченності, відстань між двома послідовними витками стрімко наближається до π.

5. Практичне застосування спіралей

Спіраль Архімеда

У III столітті до нашої ери Архімед на основі своєї спіралі винайшов гвинт, який успішно застосовували для передачі води в зрошувальні канали з водойм, розташованих нижче, рис.13. Крім того, цей пристрій також використовувався для відвойовування землі біля моря в Голландії та інших місцях при створенні польдерів. Ділянка моря перекривалась дамбою і вода віддалялась з нього, починався процес осушення землі для використання в землеробстві.

Архімедові гвинти використовувалися в установках по обробці стічних вод, тому що вони успішно справляються з різними потужностями потоку і з суспензіями.

На основі гвинта Архімеда створили шнек ("равлик"). Його дуже відомий різновид - гвинтовий ротор в м'ясорубці. Шнек використовують в механізмах для перемішування матеріалів різної консистенції.

В автомобільній техніці Архімедові гвинти можуть застосовуватися замість коліс. Принцип руху шнекороторного всюдихода простий. Машина обладнана двома або більше співвісними з напрямком руху роторами — гвинтами Архімеда. При обертанні вони відштовхуються від кашоподібної або рідкої субстанції, по якій рухається всюдихід, і просувають його вперед, рис. 13.

У техніці знайшли застосування антени у вигляді спіралі Архімеда. Самоцентруючий патрон виконаний по спіралі Архімеда. Звукові доріжки на CD і DVD дисках також мають форму спіралі Архімеда.

Спіраль Архімеда знайшла практичне застосування в математиці, техніці, архітектурі, машинобудуванні.

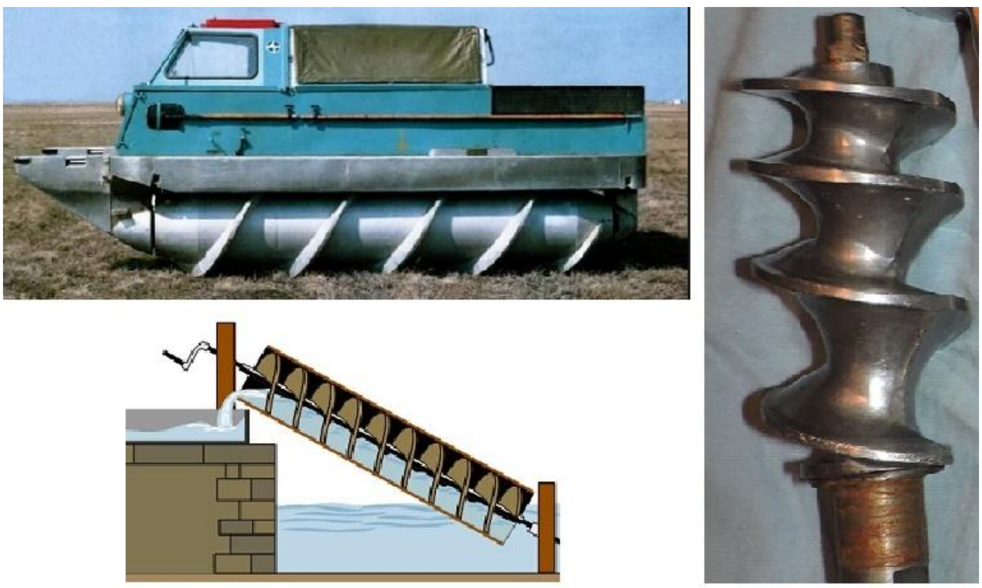


Рис. 13 – Застосування спіралі Архімеда.

Логарифмічна спіраль

Логарифмічна спіраль часто зустрічається в природі і пов'язана з певними видами зростання. У багатьох молюсків послідовні витки раковини не однакові, а все більш і більш товщають, рис. 3, 10, 14.

У багатьох випадках наближені значення товщини послідовних витків утворюють геометричну прогресію. Хоча саму раковину молюска не можна назвати живою, вона утворюється зростаючим організмом. Один з найпростіших способів нарощування нової речовини автоматично призводить до утворення деякої фігури, дуже близької до логарифмічної спіралі.

Рис. 14 – Логарифмічна спіраль в природі.

У багатьох раковинах виявляється вражаюче близький збіг між результатами вимірювань і теоретичними значеннями, очікуваними для точної логарифмічної спіралі.

Застосування логарифмічної спіралі в техніці засновані на властивості цієї кривої перетинати всі свої радіус-вектори під одним і тим же кутом. Так, обертові ножі в різних ріжучих машинах мають профіль, окреслений по дузі спіралі, завдяки чому кут різання (кут між лезом ножа і напрямком його швидкості обертання) залишається постійним уздовж всієї кромки рухомого ножа, що забезпечує менший його знос, рис. 15.

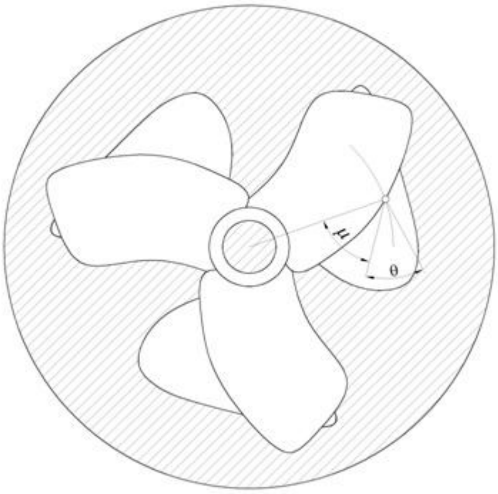


Рис. 15 – Розташування ножів в різних ріжучих машинах

Труба, що підводить струмінь води до лопатей турбінного колеса гідроелектростанції, має профіль, окреслений по дузі логарифмічної спіралі. Це дозволяє забезпечити мінімальні втрати енергії на зміну напрямку течії, і, отже, натиск води використовується з максимальною продуктивністю.

Спіраль Корню

При будівництві залізних і шосейних доріг виникає необхідність зв'язати прямолінійні ділянки з ділянками шляху, де засоби транспорту рухаються по дугах кіл. При цьому важливо, щоб кривизна колії змінювалась рівномірно, і спіраль Корню є ідеальною перехідною кривою для заокруглення залізничної колії, рис.16. При цьому пряма ділянка шляху повинна переходити в дугу спіралі Корню, починаючи з її центру. А з шляхом по колу спіраль Корню стикується в тій її точці, де її кривизна дорівнює кривизні даної окружності.

Рис. 16 – Застосування спіралі Корню.

Клофоїда запропонована Корню також для полегшення розрахунку дифракції в прикладних оптичних задачах (дифракція Френеля).

Питання та завдання для самоконтролю:

1. Назвіть приклади для застосування спіралей в природі та техніці.

2. Як полярні координати виражаються через Декартові?

Література

1. Бюшгенс С.С. Дифференциальная геометрия.
2. Гильберд Д. Наглядная геометрия.
3. Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применение (справочное руководство)
4. Тайманов И.А. Лекции по дифференциальной геометрии
5. https://ru.wikipedia.org/wiki/полярная система координат
6. Математическое моделирование живых систем : [учеб. пособие] под общ. ред. О. Э. Соловьевой. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2013. — 328 с.

Навчальне видання

МОДЕЛЮВАННЯ БІОЛОГІЧНИХ ФОРМ ЧУДОВИМИ ПЛОСКИМИ КРИВИМИ (СПІРАЛІ)

Методичні вказівки
для самостійного вивчення дисципліни

ШИГИМАГА Віктор Олександрович

Формат 60х84/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 1,45
Наклад 100 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44