УДК 534.1:539.3

МІНІМІЗАЦІЯ МАСИ ШАРУВАТИХ ОРТОТРОПНИХ ОБОЛОНОК ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Сметанкіна Н.В., д. т. н., пров. н. с.
Інститут проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України

Розв'язано задачу мінімізації маси шаруватих ортотропних циліндричних оболонок при імпульсному навантаженні. Досліджено вплив радіуса кривини на оптимальний проект двошарової оболонки. Знайдено екстремуми, що відповідають оптимальним оболонкам та пластинам.

Вступ. Розвиток техніки в сучасних умовах важко уявити без застосування композитів. Експлуатаційні властивості композиційних матеріалів повною мірою задовольняють потреби основних галузей виробництва. У будівництві, машинобудуванні і особливо в літакобудуванні й космічних технологіях новітні композиційні матеріали поступово замінюють традиційні. Подальше широке впровадження в практику проектування інженерних об'єктів новітніх технологій безпосередньо залежить від рівня дослідження процесів деформування композиційних матеріалів та конструкцій на їх основі.

Особливо гостро стоять проблеми моделювання конструктивних елементів, які знаходяться в умовах нестаціонарних навантажень [1, 2]. При цьому основна увага приділяється дослідженню напружено-деформованого стану й оптимальному проектуванню таких елементів в умовах статичного навантаження і вільних коливань [2, 3]. Оптимальному проектуванню композитних елементів під впливом динамічних, зокрема нестаціонарних навантажень, присвячена значно менша кількість публікацій [4] через математичну складність розв'язання задачі про нестаціонарне деформування конструкції, а також необхідність оцінки параметрів проектування на деякому часовому інтервалі при заздалегідь невідомих моментах досягнення ними екстремальних значень. Таким чином, не дивлячись на те, що в наш час існує багато чисельних методів розрахунку елементів конструкцій, є нагальна потреба розвитку аналітичних методів, які дають змогу аналізувати вплив окремих факторів на напружено-деформований стан і оптимізувати параметри композитних елементів.

Метою цієї роботи є саме аналітичне розв'язання задачі оптимального проектування шаруватих ортотропних незамкнених циліндричних оболонок при імпульсному навантаженні, для отримання якого було використано метод занурення та пошуковий метод оптимізації з адаптивним керуванням обчислювальним процесом.

Постановка та розв'язання задачі. Розглянемо незамкнену шарувату циліндричну оболонку радіуса R, складену з ортотропних шарів постійної товщини. На координатній поверхні xOy оболонка займає область Ω, обмежену довільним контуром Γ: $x_\Gamma = x_\Gamma(\varphi),\ y_\Gamma = y_\Gamma(\varphi)$. За координатну поверхню приймається зовнішня поверхня першого шару. На оболонку діють нестаціонарні навантаження $\mathbf{P} = \{p_j(x, y, t)\},\ j = \overline{1, 3I + 3}$.

Динамічна поведінка оболонки описується на основі кінематичних гіпотез, які враховують деформації поперечного зсуву, обтиснення по товщині та інерції обертання нормального елемента у межах кожного шару

$$u_k^i = u_k + \sum_{j=1}^{i-1} h_j u_{3+I(k-1)+j} + (z - \delta_{i-1}) u_{3+I(k-1)+i}, \quad k = 1,2,3,\ i = \overline{1, I},$$

де $\delta_i = \sum_{j=1}^{i} h_j$, $\delta_{i-1} \le z \le \delta_i$; h_i - товщина i-го шару; $u_k = u_k(x, y, t)$ $(k = 1,2,3)$ – переміщення точки координатної поверхні в напрямку координатних осей; $u_{3+I(k-1)+i} = u_{3+I(k-1)+i}(x, y, t)$ $(k = 1,2)$ – кути повороту нормального елемента в i-му шарі навколо координатних осей Ox та Oy; $u_{3+2I+i} = u_{3+2I+i}(x, y, t)$ – обтиснення нормального елемента в i-му шарі; t – час, I – кількість шарів.

Координата x змінюється вздовж твірної, координата y – вздовж дуги поперечного перерізу оболонки, координата z – вздовж зовнішньої нормалі до координатної поверхні.

Напруження і деформації в кожному шарі зв'язані законом Гука для ортотропного тіла [1]. Рівняння руху оболонки під впливом нестаціонарних навантажень і граничні умови на контурі Г одержані з варіаційного принципу Остроградського-Гамільтона [5].

Задача про коливання оболонки розв'язується методом занурення [5]. Згідно з цим методом замість вихідної оболонки розглядається допоміжна шарнірно оперта циліндрична оболонка прямокутної форми у плані того ж радіуса кривини з такою ж композицією шарів. В області Ω допоміжна оболонка навантажена так само, як і вихідна оболонка. Тотожність напружено-деформованого стану в області Ω допоміжної оболонки стану вихідної оболонки забезпечується шляхом додавання компенсуючих навантажень $q_j^{\text{comp}}(\varphi, t)$ ($j = \overline{1,3I + 3}$), які неперервно розподілені вздовж сліду контуру Γ

$$p_j^{\text{comp}}(x,y,t)=\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} L_{jk} q_k^{\text{comp}}(\varphi,t)\delta(x-x_\Gamma, y-y_\Gamma)\mathrm{d}\varphi\,, \qquad j,k=\overline{1,3I+3}\,,$$

де $\delta(x-x_\Gamma, y-y_\Gamma)$ – двовимірна функція Дірака. Ненульові елементи матриці L_{jk} мають вигляд

$$L_{11}=L_{22}=L_{3+i\,3+i}=L_{3+I+i\,3+I+i}=y'_\Gamma\,,\ L_{33}=L_{3+2I+i3+2I+i}=1\,,$$

$$L_{12}=L_{3+i\,3+I+i}=x'_\Gamma\,,\ L_{21}=L_{3+I+i\,3+i}=-x'_\Gamma\,,\ i=\overline{1,I}\ ;\ x'_\Gamma=\frac{dx_\Gamma}{ds},\ y'_\Gamma=\frac{dy_\Gamma}{ds}\,.$$

Компенсуючі навантаження визначаються з розв’язку системи інтегральних рівнянь, в основі якої лежать граничні умови вихідної оболонки. Розвинення функцій компенсуючих навантажень і граничних функцій у тригонометричні ряди в області допоміжної оболонки та у ряд уздовж контуру Г дозволяє перетворити систему інтегральних рівнянь на систему алгебраїчних рівнянь щодо коефіцієнтів розвинень компенсуючих навантажень, а систему рівнянь руху – на систему звичайних диференціальних рівнянь другого порядку. Система диференціальних рівнянь інтегрується методом розвинення розв’язку в ряд Тейлора [5].

Задача оптимізації формулюється у термінах нелінійного програмування [6]. Змінними параметрами задачі мінімізації маси шаруватої оболонки є товщини шарів $\mathbf{X}=\{h_i\}$ ($i=\overline{1,I}$) та радіус її кривини. Необхідно знайти значення незалежних параметрів $\mathbf{X}^*=\{h_k^*\}$, за яких маса оболонки $F_M(\mathbf{X})$ набуває мінімального значення, тобто

$$F_M^*=\min F_M(\mathbf{X}),\ F_M=S\sum_{i=1}^{I}\rho_i h_i\left[1+\frac{1}{2R}(\delta_i+\delta_{i-1})\right], \tag{1}$$

де S – площа координатної поверхні оболонки; ρ_i – густина матеріалу шарів.

Обмежуються мінімальне значення товщини кожного шару h_i^- і максимальне значення товщини оболонки H^+, що обумовлено конструктивними, технологічними або експлуатаційними вимогами. Для оцінки міцності шарів використовується критерій Хоффмана [1]

$$\max_{[0,T]}\max_{x,y\in\Omega}\Big[C_1^i(\sigma_2^i)^2+C_2^i(\sigma_1^i)^2+C_3^i(\sigma_1^i-\sigma_2^i)^2+C_4^i\sigma_2^i+$$

$$+C_5^i\sigma_1^i+C_6^i(\tau_{23}^i)^2+C_7^i(\tau_{13}^i)^2+C_8^i(\tau_{12}^i)^2\Big]\le 1\,, \tag{2}$$

де $C_1^i=\left(2/\left(Y_T^iY_C^i\right)-1/\left(X_T^iX_C^i\right)\right)/2$, $C_2^i=C_3^i=1/\left(2X_T^iX_C^i\right)$, $C_4^i=1/Y_T^i-1/Y_C^i$,

$C_5^i = 1/X_T^i - 1/X_C^i$, $C_6^i = 1/\left(R^i\right)^2$, $C_7^i = C_8^i = 1/\left(S^i\right)^2$; X_T^i, Y_T^i – межі міцності матеріалу *i*-го шару при розтягненні, X_C^i, Y_C^i – стисненні, R^i, S^i – зсуві; σ_k^i – компоненти напружень у головних осях матеріалу.

Напруження, що входять у критерій міцності (2), оцінюються на відрізку часу $[0, T]$, який обирається так, щоб на його протязі проявилися всі основні фактори, що характеризують процес нестаціонарного деформування оболонки у всій області змінення параметрів.

Обмеження (2) є неопуклими, рухомими, які змінюються від кроку до кроку. При відносно невеликій розмірності задачі алгоритмічна реалізація обмежень також збільшує час процесу пошуку екстремуму. Тому для розв'язання задачі оптимізації застосовується гібридний пошуковий метод оптимізації з адаптивним керуванням обчислювальним процесом [6]. Його основні переваги в порівнянні з іншими методами полягають у тому, що з набору методів-гібридиєнтів автоматично обирається метод, який найкращим чином розв'язує задачу у виникаючій обчислювальній ситуації. Гібридиєнти є модифікаціями методів екстремального пошуку (умовного або безумовного).

Аналіз результатів чисельних досліджень. Як приклад розглядається задача про мінімізацію маси шарнірно опертої двошарової циліндричної оболонки. Контур оболонки Γ описується рівняннями кривих Ламе

$$x(\varphi) = \alpha \cos^{2/k}(\varphi), \quad y(\varphi) = \beta \sin^{2/k}(\varphi),$$

де $\alpha = \beta = 0{,}25$ м, $k = 10$, $A = B = 2\alpha$.

Оболонка знаходиться під дією імпульсного навантаження, рівномірно розподіленого в області Ω_p

$$p_j = 0, \; j = \overline{1, 3I+3}, \; j \neq 3; \; p_3 = P_0 H(t),$$

де P_0 – інтенсивність навантаження, $P_0 = 0{,}03$ МПа, $H(t)$ – функція Хевісайда, Ω_p: $-c \le x \le c$, $-d \le x \le d$, $c = d = 0{,}125$ м.

Шари оболонки виконані з епоксидного вуглепластику з наступними характеристиками: $E_2^i = 21$ ГПа, $E_1^i = 25E_2^i$ (модулі пружності); $G_{12}^i = G_{13}^i = G_{23}^i = 0{,}5E_2^i$ (модулі зсуву); $\nu_1^i = 0{,}25$ (коефіцієнт Пуассона); $\rho_i = 800$ кг/м^3 (густина матеріалу); $X_T^i = 1515$ МПа, $X_C^i = 1697$ МПа, $Y_T^i = Y_C^i = 43{,}8$ МПа, $R^i = 67{,}6$ МПа, $S^i = 86{,}9$ МПа; $i = 1, 2$; $\theta_1 = 0^\circ$, $\theta_2 = 90^\circ$ (кути армування).

Мінімальна товщина шару і максимальна товщина оболонки мають такі значення: $h_i^- = 0{,}5$ мм, $H^+ = 3{,}5$ мм. Тривалість характерного відрізка часу дорівнює 3,5 мс. Як стартові задавалися значення товщин шарів з області допустимих значень, а також значення, що лежать на межі і поза межами цієї області. Досліджено вплив радіуса кривини оболонки R на мінімальну масу оболонки. Область змінення радіуса кривини обмежувалася з однієї сторони пластинами, а з іншого боку – оболонками з центральним розгорнутим кутом.

Для кожного фіксованого значення радіуса кривини знайдено дві екстремальні точки. Надалі розглядаються проекти, що має найменшу масу.

На рис. 1 наведена залежність товщин шарів h_1^* та h_2^* від значення радіуса кривини в точках екстремуму. Суцільною лінією показана залежність для першого шару, штриховою – для другого. Видно, що товщина першого шару зростає зі збільшенням радіуса кривини, а товщина другого шару практично не змінюється, тобто екстремальна точка знаходиться на межі допустимої області.

На рис. 2 наведена залежність оптимальних значень функції цілі F_M^* (1) від значення радіуса кривини (суцільна лінія). Штрихова пряма відповідає мінімальній масі пластини з тією же композицією шарів. При необмеженому збільшенні радіуса кривини мінімальна маса оболонки асимптотично наближається до мінімальної маси пластини. Найкращий проект, отриманий у результаті оптимізації, відповідає оболонці з центральним розгорнутим кутом при $R^* = 0{,}159$ м, $F_M^* = 0{,}2001$ кг.

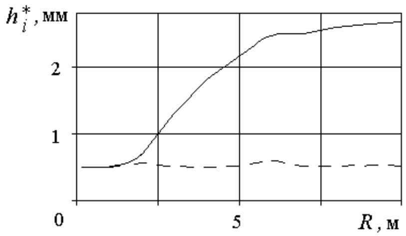

Рис.1. Залежність оптимальних значень товщин шарів від радіуса кривини

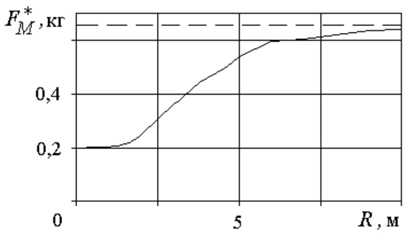

Рис.2. Залежність маси оптимальної оболонки від радіуса кривини

На рис. 3 показана залежність напруження σ_x^2 від часу у точці $x = 0$, $y = 0$, $z = \delta_2$ в оболонці з оптимальними параметрами, шаг за часом $\Delta t = 10^{-5}$ с.

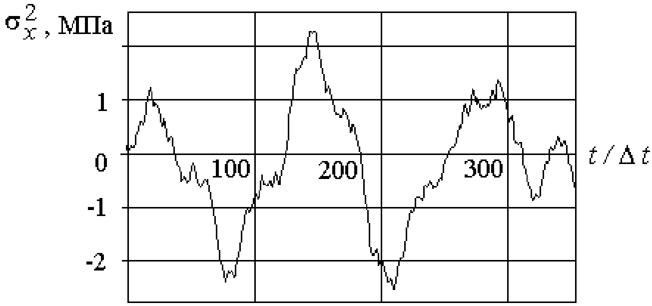

Рис.3. Змінення у часі напруження σ_x^2

Висновки. Таким чином, розроблена методика оптимального проектування ортотропних шаруватих оболонок мінімальної маси при імпульсному навантаженні, що враховує геометричні обмеження й обмеження на міцність. Досліджено вплив радіуса кривини на оптимальні параметри оболонок. Ефективність чисельної реалізації запропонованої методики досягнута завдяки застосуванню методу занурення для розв'язання задачі про нестаціонарні коливання оболонок та гібридного методу оптимізації для розв'язання задачі мінімізації маси оболонок. Розроблена методика може бути використана для проектування шаруватих елементів енергетичних, транспортних і будівельних конструкцій під впливом високошвидкісних інтенсивних навантажень. Отримані залежності дозволяють конструктору підібрати відповідні параметри шаруватих конструкцій та оцінити їх міцність та надійність за різних умов експлуатації.

Список використаних джерел

1. Кристенсен Р.М. Введение в механику композитов.– М.: Мир, 1982.– 334 с.
2. Тетерс Г.А., Рикардс Р.С., Нарусберг В.Л. Оптимизация оболочек из слоистых композитов.– Рига: Зинатне, 1978.– 240 с.
3. Narita Y., Robinson P. Maximizing the fundamental frequency of laminated cylindrical panels using layerwise optimization // Int. J. Mech. Sciences.– 2006.– V. 48, № 12.– P. 1516-1524.
4. Pathak K.K., Arora V. Dynamic response of composite laminated plates using artificial neural networks // IE(I) Journal-AS.– 2004. – V. 85, №4. – P. 25–28.
5. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек. – Харьков: Изд-во «Міськдрук», 2011.– 376 с.

6. Шелудько Г.А., Шупіков О.М., Сметанкіна Н.В., Угрімов С.В. Прикладний адаптивний пошук. – Харків: Око, 2001. – 192 с.

Аннотация

МИНИМИЗАЦИЯ МАССЫ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Сметанкина Н.В.

Решена задача минимизации массы слоистых ортотропных цилиндрических оболочек при импульсном нагружении. Исследовано влияние радиуса кривизны на оптимальный проект двухслойной оболочки. Обнаружены экстремумы, отвечающие оптимальным оболочкам и пластинам.

Abstract

MINIMIZATION OF THE MASS OF LAMINATED ORTHOTROPIC SHELLS AT IMPULSE LOADING

Smetankina N.V.

The problem of the mass minimization of laminated orthotropic cylindrical shells at impulse loading is solved. Effect of a radius of curvature on optimum design of two-layer shell is investigated. Extremums corresponding to optimum shells and plates are found.