УДК539.3:534.1

ДО РОЗРАХУНКУ КОЛИВАНЬ МЕХАНІЗМІВ З КОМБІНОВАНИМ СУХИМ ТЕРТЯМ

Бурлака В.В. к. т. н., Ольшанський В.П. д. фіз.-мат. н., Малець О.М. асистент

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка

Методом припасовування розв’язків задач Коші виведено компактну формулу для обчислення амплітуд затухаючих коливань механізмів, які зводяться до системи з одним ступенем вільності, при спільній дії сил сухого і позиційного сухого тертя. Запропоновано також нерівність для оцінки кількості розмахів системи при заданому початковому відхиленні її від положення стійкої рівноваги. Досліджено вплив комбінованого сухого тертя на темп затухання коливань.

Вступ. У техніці використовують механізми, робота яких проходить при дії сил сухого тертя. Тому вивченню особливостей коливань, зумовлених цими силами, приділяється належна увага в теорії механізмів і машин [1], а також в теорії механічних коливань [2], [3]. Але, традиційно в літературі висвітлюють окремо моделі коливань механічних систем при дії сил тільки сухого або тільки позиційного сухого тертя, коли закономірності коливань суттєво відрізняються. Нагадуємо, що у випадку дії кулонової сили тертя затухання амплітуд відбувається за законом арифметичної прогресії [3], [4]. Якщо ж тертя позиційне, то зменшення амплітуд проходить за законом геометричної прогресії [1], [2]. Тому постає питання, як буде відбуватися затухання коливань в умовах комбінованого сухого тертя, тим більше, що воно поширене в реальних конструкціях механізмів.

Метою роботи є одержання та апробація формул для обчислення амплітуд затухаючих коливань системи з одним ступенем вільності при дії комбінаційного сухого тертя.

Основна частина роботи. Горизонтальне переміщення осцилятора x у напрямі координатної вісі ox, що показано на рис.1, описуємо нелінійним диференціальним рівнянням

$$m\ddot{x} + \left(c + \delta \operatorname{sign}\dot{x} \operatorname{sign}x\right)x + fmg \operatorname{sign}\dot{x} = 0 . \qquad (1)$$

У ньому m - маса коливальної системи; c - коефіцієнт пружності системи; δ - коефіцієнт позиційного сухого тертя; f - коефіцієнт сухого тертя Кулона; g - прискорення вільного падіння; крапкою над x позначена похідна за часом t.

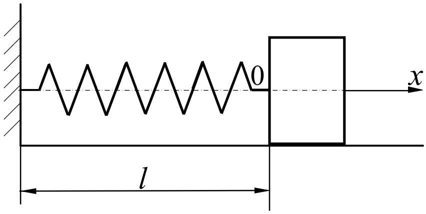

Рис.1. Переміщення осцилятора x у напрямі координатної вісі ox.

Рівняння (1) доповнюємо початковими умовами:

$$x(0) = -a_0 < 0\,; \qquad \dot{x}(0) = 0\,, \tag{2}$$

позначивши символом a_0 стартове відхилення системи вліво від положення рівноваги.

Розглянемо перший розмах, тобто рух осцилятора, що проходить зліва направо, для якого $\mathrm{sign}\dot{x} = 1$. Його поділимо на два етапи: перший, де $x < 0$ і другий, де $x > 0$.

На першому етапі $\mathrm{sign}x = -1$ і (1) зводиться до рівняння:

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = -fg\,, \tag{3}$$

у якому $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{c-\delta}{m}}$; $x_1 = x(t)$.

Загальний розв'язок (3) має вигляд:

$$x_1(t) = в_1 \cos\omega_1 t + в_2 \sin\omega_1 t - \frac{fg}{\omega_1^2}\,, \tag{4}$$

де $в_1, в_2$ - довільні сталі.

Швидкість руху при цьому дорівнює

$$\dot{x}_1(t) = -в_1\omega_1 \sin\omega_1 t + в_2\omega_1 \cos\omega_1 t\,. \tag{5}$$

Підставивши (4) і (5) в (2), знаходимо сталі:

$$в_1 = \frac{fg}{\omega_1^2} - a_0\,; \qquad в_2 = 0\,.$$

Отже, рух на першому етапі описується виразами:

$$x_1(t)=\left(\frac{fg}{\omega_1^2}-a_0\right)\cos\omega_1 t-\frac{fg}{\omega_1^2}; \qquad \dot{x}_1(t)=\frac{a_0\omega_1^2-fg}{\omega_1}\sin\omega_1 t . \tag{6}$$

В кінці першого етапу, при $t=t_1$, $x_1(t_1)=0$, а тому за першим виразом в (6) маємо:

$$\cos\omega_1 t_1=-\frac{fg}{a_0\omega_1^2-fg}; \qquad \sin\omega_1 t_1=\frac{\omega_1\sqrt{(a_0\omega_1)^2-2fga_0}}{a_0\omega_1^2-fg}.$$

Користуючись другим виразом в (6), для цього моменту часу одержуємо:

$$\dot{x}_1(t_1)=\upsilon_0=\sqrt{(a_0\omega_1)^2-2fga_0}. \tag{7}$$

На другому етапі руху $\mathrm{sign}x=1$ і (1) зводиться до рівняння

$$\ddot{x}_2+\omega_2^2 x=-fg, \tag{8}$$

у якому $\omega_2=\sqrt{\frac{c+\delta}{m}}$; $x_2=x(t)$.

Початковими умовами до (8) приймаємо:

$$x_2(0)=0; \qquad \dot{x}_2(0)=\upsilon_0 . \tag{9}$$

Загальний розв'язок рівняння (8) подаємо у вигляді:

$$x_2(t)=d_1\cos\omega_2 t+d_2\sin\omega_2 t-\frac{fg}{\omega_2^2}, \tag{10}$$

де d_1, d_2 - довільні сталі.

Згідно (10), рух відбувається зі швидкістю:

$$\dot{x}_2(t)=-d_1\omega_2\sin\omega_2 t+d_2\omega_2\cos\omega_2 t . \tag{11}$$

Підставивши (10) і (11) в (9), знаходимо, що

$$d_1=\frac{fg}{\omega_2^2}; \; d_2=\frac{\upsilon_0}{\omega_2}.$$

Таким чином, на другому етапі руху:

$$x_2(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega_2}\sin\omega_2 t-\frac{fg}{\omega_2^2}(1-\cos\omega_2 t);$$

$$\dot{x}_2(t) = \upsilon_0 \cos\omega_2 t - \frac{fg}{\omega_2}\sin\omega_2 t\,. \qquad (12)$$

В кінці другого етапу руху, при $t = t_2$, $\dot{x}_2(t_2) = 0$ і згідно з другим виразом в (12):

$$\cos\omega_2 t_2 = \frac{fg}{\sqrt{(fg)^2 + (\upsilon_0\omega_2)^2}}\,;\ \sin\omega_2 t_2 = \frac{\upsilon_0\omega_2}{\sqrt{(fg)^2 + (\upsilon_0\omega_2)^2}}\,.$$

Тоді, за першим виразом в (12) одержуємо:

$$x_2(t_2) = \frac{1}{\omega_2^2}\left(\sqrt{(fg)^2 + (\upsilon_0\omega_2)^2} - fg\right) = a_1\,, \qquad (13)$$

звідки випливає, що

$$a_1\omega_2^2 + fg = \sqrt{(fg)^2 + (\upsilon_0\omega_2)^2}\,.$$

Піднесення останнього виразу до квадрату, з урахуванням (7), приводить до квадратного рівняння:

$$(a_1\omega_2)^2 + 2fga_1 = \upsilon_0^2 = (a_0\omega_1)^2 - 2fga_0\,,$$

яке має розв’язок:

$$a_1 = \left[\left(a_0\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 - \frac{2fga_0}{\omega_2^2} + \left(\frac{fg}{\omega_2^2}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{fg}{\omega_2^2}\,.$$

Узагальнюючи його на випадок n-го розмаху, приходимо до рекурентного співвідношення для обчислення амплітуд коливань:

$$a_n = \left[(a_{n-1}\frac{\omega_1}{\omega_2})^2 - \frac{2fga_{n-1}}{\omega_2^2} + (\frac{fg}{\omega_2^2})^2\right]^{1/2} - \frac{fg}{\omega_2^2}\,,\ n = 1,2,.... \qquad (14)$$

Із формули (14), як частинні випадки, випливають відомі залежності. Так, коли відсутнє тертя Кулона (f=0), то

$$a_n = \frac{\omega_1}{\omega_2}a_{n-1} = \sqrt{\frac{c-\delta}{c+\delta}}\ a_{n-1}\,.$$

Цю залежність можна знайти в роботах [1], [2]. Амплітуди коливань зменшуються за законом геометричної прогресії, знаменник якої $q = \sqrt{\frac{c-\delta}{c+\delta}} < 1$.

При відсутності позиційного тертя $\delta = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = \omega = \sqrt{c/m}$ формула (14) зводиться до наступної:

$$a_n = a_{n-1} - 2\frac{fgm}{c}.$$

Тут спадання амплітуд коливань відбувається за законом арифметичної прогресії, що відзначається в [3], [4] та інших виданнях.

У випадку комбінованого сухого тертя зменшення амплітуд коливань описується більш складною залежністю і осцилятор повністю припинить рух, коли

$$a_n < \frac{mgf}{c-\delta}\left(1 + \sqrt{\frac{2\delta}{c+\delta}}\right).$$

Обчислити a_{n+1} по формулі (14) далі неможливо, бо підкореневий вираз в ній стає від'ємним.

Кількість розмахів *n*, які зробить осцелятор за час руху задовольняє нерівності [5].

$$n \le \text{ціла частина числа}\,\frac{1}{2}\left(\frac{ca_0}{fmg} + 0{,}99999\right). \quad (15)$$

Вище припускали, що коливання відбуваються внаслідок початкового відхилення системи від положення стійкої рівноваги. З'ясуємо як розрахувати коливання, спричинені початковою швидкістю υ_0, що може одержати осцилятор при миттєвій дії силового імпульсу $Q = m\upsilon_0$. При такому збуренні коливань, значення υ_0 треба підставити в формулу (13) і обчислити перше амплітудне відхилення a_1. Наступні амплітуди коливань, як і раніше, будуть визначатись формулою (14).

Аналіз числових результатів. Для проведення розрахунків приймаемо: $m = 3$ *кг*; $c = 1962\ Н/м$; $x_0 = 0{,}0615\,м$. Одержані по формулі (14) амплітуди коливань при $f = 0{,}2$ і чотирох значеннях $\delta = 0$; 30; 90; 150 $Н/м$, записано в табл.1.

Розрахунки показують, що зі збільшенням коефіцієнта δ зростає темп затухання коливань і за час руху здійснюється менше розмахів (напівциклів).

У табл. 2 наведено результати обчислень по формулі (14) при $f = 0{,}3$.

Таблиця 1. Значення a_n при $f = 0{,}2$

n	$100\,a_n$, м			
	$\delta = 0$	$\delta = 30\ \frac{H}{м}$	$\delta = 90\ \frac{H}{м}$	$\delta = 150\ \frac{H}{м}$
1	5,550	5,461	5,286	5,116
2	4,950	4,782	4,461	4,157
3	4,350	4,114	3,673	3,269
4	3,750	3,456	2,920	2,446
5	3,150	2,807	2,200	1,683
6	2,550	2,168	1,512	0,974
7	1,950	1,539	0,853	0,312
8	1,350	0,919	0,220	-
9	0,750	0,308	-	-
10	0,150	-	-	-

Таблиця 2. Значення a_n при $f = 0{,}3$.

n	$100\,a_n$, $м$			
	$\delta = 0$	$\delta = 30\frac{H}{м}$	$\delta = 90\frac{H}{м}$	$\delta = 150\frac{H}{м}$
1	5,250	5,163	4,992	4,824
2	4,350	4,191	3,885	3,596
3	3,450	3,233	2,827	2,456
4	2,550	2,289	1,816	1,398
5	1,650	1,360	0,846	0,408
6	0,750	0,442	0,001*	-
7	0,150*	-	-	-

*) розмахи, при яких осцилятор не проходить положення $x = 0$.

Збільшення коефіцієнта f прискорило затухання коливань і скоротило кількість розмахів за час руху.

Перевірка підтверджує що для всіх розрахованих варіантів руху виконується нерівність (15). У табл.1 $n \le 10$, а в табл. 2 $n \le 7$.

Користуючись формулою (13), обчислимо яким буде амплітудне відхилення коливальної системи від положення рівноваги при $m_0 = 3\,кг$; $c = 1962\,H/м$; $\delta = 150\,H/м$; $f = 0{,}3$; $\upsilon_0 = 1{,}5\,м/с$. Для цих числових даних знаходимо, що $a_1 = 0{,}053\,м$. Подальші амплітуди коливань слід обчислювати по формулі (14).

Висновки. Апробація одержаних формул підтвердила придатність їх для проведення розрахунку амплітуд вільних затухаючих коливань механізмів при наявності комбінованого сухого тертя.

Список використаних джерел.

1. Сурьянинов Н.Г. Теоретические основы динамики машин / Н.Г. Сурьянинов, А.Ф. Дащенко, П.А.Белоус. – Одесса: ОГПУ, 2000. – 306 с.
2. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
3. Лойцянский Л.Г. Курс теоретической механики. Т.2 / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М.: Дрофа, 2006. – 720 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, 1980. – 270 с.
5. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчетах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П. Ольшанский, С.В. Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.

Аннотация

К РАСЧЕТУ КОЛЕБАНИЙ МЕХАНИЗМОВ С КОМБИНИРОВАННЫМ СУХИМ ТРЕНИЕМ

Бурлака В.В., Малец О.Н., Ольшанский В.П.

Методом припасовывания решений задач Коши выведено компактную формулу для вычисления амплитуд затухающих колебаний механизмов, которые приводятся к системе с одной степенью свободы, при совместном действии сил сухого и позиционного сухого трения. Предложено также неравенство для оценки количества размахов системы при заданном начальном отклонении ее от положения устойчивого равновесия. Исследовано влияние комбинированного сухого трения на темп затухания колебаний.

Abstract

TO CALCULATION OF THE FLUCTUATIONS MECHANISM WITH MULTIFUNCTION DRY FRICTION.

V. Burlaka, O. Malets,V. Olishansikiy

The method of припасовывания decisions of the problems Koshi выведено compact formulas for calculation of the amplitudes fading fluctuations mechanism, which happen to to system with one degree of the liberty, under joint action of power dry and positional dry friction. Inequality is offered also for estimation amount range of the system under given initial deflection her(it) from position of the firm balance. The explored influence of multifunction dry friction on rate of the fading the fluctuations.