

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФИДУЦИАЛЬНЫХ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ
ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ПРОЧНОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК**

Човнюк Ю.В.¹, к.т.н., доц.; Диктерук М.Г.², к.т.н., доц.;
Почка К.И.², к.т.н., доц.

¹Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

²Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Для случая аппроксимации распределения вероятностей предельной нагрузки законом Вейбулла с априори известными параметром формы и коэффициентом вариации приведены последовательности вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности прочностных характеристик конструкций сельскохозяйственных машин с использованием метода фидуциальных вероятностей. Разработанный метод применён для оценки нижних доверительных границ показателя надёжности сосудов высокого давления (силосов) на основании результатов их испытаний на несущую способность внутренним давлением.

Постановка проблемы. Известно, что наиболее точной аппроксимацией функции распределения вероятностей характеристик прочности конструкционных материалов, используемых в сельскохозяйственном машиностроении, и предельной нагрузки конкретных изделий (рабочих органов сельскохозяйственных машин (СМ)) является трёхпараметрический закон Вейбулла. Этот закон хорошо соответствует физическим представлениям об области определения предельной нагрузки реальных конструкций СМ, так как позволяет задавать ограниченные слева положительной величиной функции распределения вероятностей с различной асимметрией.

Наиболее универсальным методом построения доверительных границ при наличии одного неизвестного параметра является метод фидуциальных вероятностей Фишера. В случае одного неизвестного параметра γ -фидуциальные границы являются и γ -доверительными.

Для реализации данного метода расчёта нижних доверительных границ показателя надёжности СМ следует разработать специальную программу для ПЭВМ.

Анализ публикаций по теме исследования. В ряде работ [1-4] показано, что именно трёхпараметрический закон Вейбулла является достаточно точной аппроксимацией функции распределения вероятностей ха-

рактических прочностей (в частности, СМ), величины предельной нагрузки конкретных изделий. Автор [5] отмечает, что метод фидуциальных вероятностей Фишера является наиболее универсальным методом построения доверительных границ в случае наличия одного неизвестного параметра. Результаты цитированных работ будут использованы в данном исследовании.

Цель работы состоит в обосновании метода фидуциальных вероятностей для вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности прочностных характеристик конструкций сельскохозяйственных машин при аппроксимации распределения их предельной нагрузки законом Вейбулла.

Изложение основного содержания исследования.

Рассмотрим метод фидуциальных вероятностей в качестве основополагающего для вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности изделий сельскохозяйственного машиностроения однократного применения в случае аппроксимации функции распределения предельной нагрузки законом Вейбулла в виде:

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b\right] & \text{при } x > c, \\ 0 & \text{при } x \leq c, \end{cases} \quad (1)$$

где a , b и c – параметры масштаба, формы и сдвига соответственно.

Полагаем, что распределение квазистатической действующей нагрузки, коэффициент вариации v и параметр формы b распределения предельной нагрузки в СМ (или её элементе, например, рабочем органе) известны априори. Это следует, в частности, из опыта обработки изделий-аналогов. Сама выборка значений предельной нагрузки СМ малого объёма и нецензурированная.

Плотность распределения фидуциальных вероятностей неизвестного параметра x , оцениваемого по единичным испытаниям, можно получить на основе функции правдоподобия в виде:

$$\varphi(x) = \frac{L\left(\frac{x}{Q_1, Q_2, \dots, Q_n}\right)}{\int_{x_n}^{x_0} L\left(\frac{x}{Q_1, Q_2, \dots, Q_n}\right) dx}, \quad (2)$$

где $L(\bullet)$ – функция правдоподобия; Q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – значения предельной нагрузки; x_n и x_0 – соответственно возможные нижняя и верхняя границы изменения параметра x .

В качестве верхней границы изменения параметра сдвига можно принять минимальное значение предельной нагрузки Q , полученное при испытаниях СМ:

$$c_g = \min(Q_i). \quad (3)$$

Для трёхпараметрического закона Вейбулла параметр сдвига всегда положителен. Теоретически его величина может быть сколь угодно малой. При построении плотности фидуциальных вероятностей этого параметра нижнюю границу параметра c принимаем в виде:

$$c_n = 0,0001 \cdot c_g \quad (4)$$

(меньшие значения приводят к вычислительным трудностям типа “исчезновения порядка” при построении плотности $\varphi(c)$ на ПЭВМ). Тогда:

$$L\left(\frac{x}{Q_1, Q_2, \dots, Q_n}\right) = \prod_{i=1}^n g\left(\frac{c}{Q_i}\right), \quad (5)$$

где

$$g(Q) = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{Q-c}{a}\right)^{b-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{Q-c}{a}\right)^b\right] - \quad (6)$$

плотность вероятности закона Вейбулла.

Подставляя (5) и (6) с учётом (3) и (4) в (2), получим плотность распределения вероятностей неизвестного параметра сдвига $\varphi(c)$. Практически при построении $\varphi(c)$ вычисляется ряд её дискретных значений $\varphi(c_i)$, соответствующих изменению параметра сдвига в интервале (c_n, c_g) , после чего для этих же значений вычисляется функция распределения параметра сдвига $\psi(c_i)$. Для произвольных значений вероятности параметр сдвига можно определить путём обратной интерполяции полученных значений $\psi(c_i)$.

Через параметры b , c и v функция распределения закона Вейбулла записывается в виде:

$$G(Q) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\left(\frac{Q-c}{c \cdot f(v, b)}\right)^b\right] & \text{при } Q > c, \\ 0 & \text{при } Q \leq c, \end{cases} \quad (7)$$

где

$$f(v, b) = \left[\frac{1}{v} \cdot \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)} - \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) \right]^{-1}, \quad (8)$$

$\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция. Тогда при постоянной нагрузке F , действующей на СМ, показатель надёжности R определяется из выражения:

$$R = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{F-c}{c \cdot f(y, b)}\right)^b\right] & \text{при } F > c, \\ 1 & \text{при } F \leq c \end{cases} \quad (9)$$

и является функцией неизвестного параметра сдвига c , функция распределения которого известна. Нижние γ -доверительные границы показателя надёжности \underline{R}_γ можно получить при использовании в (9) нижних γ -фидуциальных границ \underline{c}_γ (здесь и далее по тексту подчёркивание функции снизу или сверху означает, что рассматривается соответственно её нижняя или верхняя доверительная граница).

Если действующая на СМ (или её рабочий орган) нагрузка F величина случайная, то методом статистического моделирования можно получить функцию распределения показателя надёжности $\psi(R)$, а произвольные значения \underline{R}_γ определить как корни уравнения:

$$1 - \gamma \cdot \int_0^{\underline{R}_\gamma} \psi(R) dR = 0. \quad (10)$$

Для реализации данного метода расчёта нижних доверительных границ показателя надёжности СМ разработана специальная программа для ПЭВМ. Точность оценок \underline{R}_γ в широком диапазоне изменения входящих в расчёт исходных данных исследована и подтверждена методом статистического моделирования. При этом область (c_n, c_g) разбивали на 100 интервалов, интерполяцию по $\psi(c)$ производили методом касательных.

Пример. Пусть распределение предельной нагрузки конструкции СМ аппроксимируется трёхпараметрическим законом Вейбулла с параметром формы $b = 4$ ($a = 0,25$; $c = 0,906$), действующая нагрузка постоянна, априори известна и равна 1 МПа . По результатам прочностных испытаний конструкции СМ получена оценка математического ожидания предельной нагрузки (давление разрушения) $\hat{Q} = 1,2 \text{ МПа}$.

Выводы

1. Результаты, полученные в данном исследовании, позволяют вычислять нижние доверительные границы показателя надёжности конст-

рукции сельскохозяйственных машин для различных значений коэффициента вариации предельной нагрузки v и объема выборки значений предельной нагрузки n . Это позволяет судить о представительности полученных оценок надёжности узлов, элементов и сельскохозяйственных машин в целом.

2. Метод фидуциальных вероятностей может быть использован в целях уточнения и совершенствования инженерных подходов к оценке надёжности функционирования узлов, агрегатов сельскохозяйственных машин как на стадиях их проектирования/конструирования, так и в режимах реальной эксплуатации указанных машин.

Список использованных источников

1. Беленький Д.М. Исследование распределения механических свойств и связи между ними / Д.М. Беленький, А.И. Элькин, А.В. Русаков // Проблемы прочности. – 1977. – № 12. – С. 93-96.
2. Беленький Д.М. Контроль и сертификация механических свойств металлопроката / Д.М. Беленький, А.Е. Кубарев, А.И. Элькин и др. // Заводская лаборатория. – 1992. – № 2. – С. 47-49.
3. Головченко В.П. Возможности использования распределения Вейбулла в качестве универсальной модели аппроксимации / В.П. Головченко // Труды ГосНИИГА. – 1988. – № 279. – С. 91-98.
4. Сундарарайян К. Вероятностная оценка надёжности сосудов давления и трубопроводов / К. Сундарарайян // Теоретические основы инженерных расчётов. Труды Американского общества инженеров-механиков. – 1986. – Т. 2. – М.: Мир. – С. 160-183.
5. Павлов И.В. Статистические методы оценки надёжности сложных систем по результатам испытаний / И.В. Павлов. – М.: Радио и связь, 1992. – 168 с.

Анотація

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ФІДУЦІАЛЬНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ДОВІРЧИХ ГРАНИЦЬ МІЦНІСНИХ ХАРАКТЕРИСТИК

Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Почка К.І.

Для випадку апроксимації розподілу ймовірностей граничного навантаження законом Вейбулла з апріорі відомими параметром форми та коефіцієнтом варіації наведені послідовності обчислення нижніх довірчих границь показника надійності характеристик міцності

конструкцій сільськогосподарських машин із використанням методу фідучіальних ймовірностей. Розроблений метод застосований для оцінки нижніх довірчих границь показника надійності порожнин високого тиску (силосів) на основі результатів їх випробувань на несучу здатність внутрішнім тиском.

Abstract

APPLICATION OF THE FIDUCIAL PROBABILITIES METHOD FOR THE CALCULATION OF THE CONFIDENTIAL BOUNDS OF STRENGTH CHARACTERISTICS

Chovnyuk Ju.V., Dikteruk M.G., Pochka K.I.

For a case of approximation of distribution of probabilities of a maximum load Veybull's law with apriori known parameter of a form and of coefficient of a variation, one may use sequences of calculation of the lower confidential bounds of an indicator of reliability of strength characteristics of designs of agricultural cars with a help of fiducial probabilities method. The developed method is applied to an assessment of the lower confidential bounds of an indicator of reliability of vessels of a high pressure (silos) on the basis of results of their tests for bearing ability by internal pressure.