

РАСЧЁТ ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЁЖНОСТИ МЕТОДОМ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ

Човнюк Ю.В., к.т.н., доц.¹; Диктерук М.Г., к.т.н., доц.²;
Почка К.И., к.т.н., доц.²

¹Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины

²Киевский национальный университет строительства и архитектуры

Метод доверительных множеств использован для вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности прочностных характеристик конструкций сельскохозяйственных машин при аппроксимации распределения их предельной нагрузки законом Вейбулла. Для получения нижних доверительных границ γ -показателя надёжности разработан численный алгоритм, реализованный на ПЭВМ.

Постановка проблемы. Известно, что наиболее точной аппроксимацией функции распределения вероятностей характеристик прочности сельскохозяйственных машин (СМ), их узлов и агрегатов, а также предельной нагрузки рабочих органов указанных машин может служить трёхпараметрический закон Вейбулла.

Этот закон хорошо соответствует физическим представлениям об области определения предельной нагрузки реальных конструкций СМ, так как позволяет задавать ограниченные слева положительной величиной функции распределения вероятностей с различной асимметрией. Простым и эффективным по затратам времени ПЭВМ методом вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности СМ, по мнению авторов данной работы, является метод доверительных множеств, основанный на использовании доверительных интервалов неизвестного параметра. Именно он применён и обоснован в данном исследовании для оценки нижних доверительных границ показателя надёжности сосудов высокого давления (зерносушилки, силосы, бункеры и др.) на основании результатов их испытаний на несущую способность внутренним давлением.

Анализ публикаций по теме исследования. В работах [1-4] трёхпараметрический закон Вейбулла использован для аппроксимации функции распределения вероятностей характеристик прочности конструкций, материалов, предельной нагрузки конкретных изделий (в том числе СМ). В работе [5] предложен метод фидуциальных вероятностей для построе-

ния доверительных границ при наличии одного неизвестного параметра (так называемый метод фидуциальных вероятностей Фишера). Метод доверительных множеств для указанных целей (и, в частности, для анализа надёжности функционирования узлов, агрегатов, элементов СМ) не применялся.

Цель работы состоит в обосновании метода доверительных множеств для вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности прочностных характеристик конструкций сельскохозяйственных машин при аппроксимации распределения их предельной нагрузки законом Вейбулла.

Изложение основного содержания исследования.

По мнению авторов данного исследования, наиболее простым и эффективным по затратам времени ПЭВМ методом вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности СМ является именно метод доверительных множеств, основанный на использовании доверительных интервалов неизвестного параметра.

При вычислении нижних доверительных границ показателя надёжности изделий однократного применения в случае аппроксимации функции распределения предельной нагрузки законом Вейбулла используется следующая его запись:

$$G(x) = \begin{cases} 1 - \exp \left[- \left(\frac{x-c}{a} \right)^b \right] & \text{при } x > c, \\ 0 & \text{при } x \leq c, \end{cases} \quad (1)$$

где a , b и c – параметры масштаба, формы и сдвига соответственно.

Полагаем, что распределение квазистатической действующей на СМ нагрузки, коэффициент вариации v и параметр формы b распределения предельной нагрузки известны априори (скажем, из опыта обработки изделий-аналогов), выборка значений предельной нагрузки малого объёма и нецензурированная.

Если в качестве неизвестного параметра закона Вейбулла, аппроксимирующего распределение предельной нагрузки, принять математическое ожидание, то её доверительную границу β можно представить в виде $Q_\beta = f_1(\hat{Q}, n, v, b, \beta)$, где \hat{Q} – выборочная оценка математического ожидания, n – объём выборки.

Для заданных значений (n, v, b) произвольную доверительную границу Q_β можно получить с использованием метода статистического мо-

делирования путём построения функции распределения $\psi(K_Q)$ величины коэффициента $K_Q = \hat{Q}/Q_0$, где

$$Q_0 = c \cdot \left[1 - \frac{v \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}} \right]^{-1} \quad (2)$$

точное значение математического ожидания распределения предельной нагрузки; $\Gamma(\bullet)$ – гамма-функция. Последующее вычисление доверительных границ для K_Q проводится по формуле: для нижних доверительных границ:

$$1 - \beta = \int_0^{\underline{K}_{Q\beta}} [\psi(K_Q)] dK_Q \quad (3)$$

и для верхних доверительных границ:

$$\beta = \int_0^{\bar{K}_{Q\beta}} [\psi(K_Q)] dK_Q \quad (4)$$

Однако для построения функции $\psi(K_Q)$ времени ПЭВМ требуется не меньше, чем для построения $\psi(c)$ при фидуциальном подходе [5], поэтому предложена упрощённая процедура вычисления доверительных границ Q_β .

Методом статистического моделирования исследованы свойства доверительных множителей:

$$K_{Q_\beta} = f_2(n, v, b, \beta), \quad Q_\beta = K_{Q_\beta} \cdot \hat{Q}. \quad (5)$$

Показано, что для выборок малого объёма при изменении параметра формы b в широком диапазоне при прочих равных условиях множители K_{Q_β} изменяются весьма незначительно (в пределах нескольких процентов). Экстремальным значениям множителей K_{Q_β} соответствуют крайние значения параметра формы, что позволяет упростить процедуру вычисления множителей K_{Q_β} , исключив параметр b в явном виде из (5).

В качестве нижней границы теоретически возможных значений параметра формы и плотности вероятности распределения предельной на-

грузки можно принять $b_{\min} = 1$ (при $b = 1$ распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное). Максимально возможное значение b_{\max} реализуется в случае равенства нулю параметра сдвига (двухпараметрический закон Вейбулла) и является функцией коэффициента вариации:

$$v = \sqrt{\left[\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b_{\max}}\right)}{\Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b_{\max}}\right)} \right] - 1}. \quad (6)$$

При фиксированных значениях (n, v, b) методом статистического моделирования можно получить коэффициенты: $K'_{Q_\beta} = f_2(n, v, b_{\min} = 1, \beta)$; $K''_{Q_\beta} = f_2(n, v, b_{\max} = f(v), \beta)$. Тогда: $\underline{K}_{Q_\beta} = \min(K'_{Q_\beta}, K''_{Q_\beta})$ и $\overline{K}_{Q_\beta} = \max(K'_{Q_\beta}, K''_{Q_\beta})$.

По выборочному значению математического ожидания распределения предельной нагрузки \hat{Q} , действующей на СМ, с использованием соответствующего доверительного множителя \underline{K}_{Q_β} вычисляется нижняя доверительная граница $\beta - \underline{Q}_\beta$. При известных b и v :

$$\underline{a}_\beta = \frac{\underline{Q}_\beta \cdot v}{\sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)}}, \quad \underline{c}_\beta = \underline{Q}_\beta - \underline{a}_\beta \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right). \quad (7)$$

При постоянной, действующей на СМ, нагрузке F нижние доверительные границы показателя надёжности \underline{R}_y определяются из выражения:

$$\underline{R}_y = \begin{cases} \exp\left[-\left(\frac{F - \underline{c}_\beta}{\underline{a}_\beta}\right)^b\right] & \text{при } F > \underline{c}_\beta, \\ 1 & \text{при } F \leq \underline{c}_\beta. \end{cases} \quad (8)$$

При известном распределении действующей случайной нагрузки F функция $\psi(R)$ вычисляется методом статистического моделирования, а значения \underline{R}_y определяются из зависимости:

$$1 - \gamma \cdot \int_0^{\frac{R_\gamma}{\beta}} \psi(R) dR = 0. \quad (9)$$

Множители K_{Q_β} для ряда различных доверительных вероятностей β и коэффициентов вариации ν достаточно вычислить один раз и хранить их в памяти ПЭВМ (в банке данных). Впоследствии необходимые для расчётов множители для конкретных значений β и ν можно вычислять путём интерполяции имеющихся данных, что делает предложенный метод очень эффективным по времени счёта на ПЭВМ.

Для реализации данного метода разработана специальная программа, которая успешно апробирована на ПЭВМ. Методом статистического моделирования для уровня доверительной вероятности 0,5; 0,9 и 0,95 при широком варьировании исходных параметров подтверждено, что нижние доверительные границы β множителя K_Q позволяют получить нижние доверительные границы γ -показателя надёжности.

При проведении проверочных расчётов функции $\psi(K_Q)$ было получено по 10.000 случайных оценок \hat{Q} , коэффициенты K_{Q_β} вычислялись для $\beta = 0,001; 0,01; 0,025; 0,05; 0,075; 0,1; 0,2; 0,3; 0,5$ и $\nu = 0,03; 0,05; 0,07; 0,1; 0,125; 0,15; 0,2; 0,3$; интерполяцию производили методом касательных.

Пример. Пусть распределение предельной нагрузки конструкции СМ аппроксимируется трёхпараметрическим законом Вейбулла с параметром формы $b = 4$

$$(A = \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{b}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{b}\right)} = 0,25; B = \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = 0,906),$$

действующая нагрузка постоянна, априори известна и равна 1 МПа. По результатам прочностных испытаний конструкции (силоса) получена оценка математического ожидания предельной нагрузки (давления разрушения) $\hat{Q} = 1,2$ МПа.

В табл. 1 приведены результаты вычислений нижних доверительных границ показателя надёжности конструкции для различных значений коэффициента вариации предельной нагрузки ν и объёма выборки значений предельной нагрузки n . Это позволяет судить о представимости получаемых оценок надёжности.

Таблица 1. Значения \underline{K}_{Q_γ} и \underline{R}_γ для различных n , ν и γ

n	ν	γ	\underline{K}_{Q_γ}	\underline{R}_γ
1	0,05	0,5	0,990	0,99983
		0,9	0,960	0,9963
		0,95	0,940	0,987
	0,15	0,5	0,969	0,815
		0,9	0,795	0,388
		0,95	0,725	0,168
5	0,05	0,5	0,998	0,999957
		0,9	0,980	0,99938
		0,95	0,970	0,9984
	0,15	0,5	0,994	0,849
		0,9	0,910	0,709
		0,95	0,880	0,640
	0,25	0,5	0,999	0,999965
		0,9	0,990	0,99983
		0,95	0,985	0,99966
20	0,15	0,5	0,9975	0,853
		0,9	0,955	0,793
		0,95	0,940	0,768

Выводы

1. Обоснован метод доверительных множеств для вычисления нижних доверительных границ показателя надёжности прочностных характеристик конструкций сельскохозяйственных машин при аппроксимации распределения их предельной нагрузки законом Вейбулла.

2. Полученные в работе результаты могут быть в дальнейшем использованы для уточнения и усовершенствования существующих инженерных методов расчёта надёжностных характеристик сельскохозяйственных машин, их элементов, агрегатов и узлов.

Список использованных источников

- Беленький Д.М. Исследование распределения механических свойств и связи между ними / Д.М. Беленький, А.И. Элькин, А.В. Русаков // Проблемы прочности. – 1977. – № 12. – С. 93-96.
- Беленький Д.М. Контроль и сертификация механических свойств металлопроката / Д.М. Беленький, А.Е. Кубарев, А.И. Элькин и др. // Заводская лаборатория. – 1992. – № 2. – С. 47-49.

3. Головченко В.П. Возможности использования распределения Вейбулла в качестве универсальной модели аппроксимации / В.П. Головченко // Труды ГосНИИГА. – 1988. – № 279. – С. 91-98.
4. Сундарарайян К. Вероятностная оценка надёжности сосудов давления и трубопроводов / К. Сундарарайян // Теоретические основы инженерных расчётов. Труды Американского общества инженеров-механиков. – 1986. – Т. 2. – М.: Мир. – С. 160-183.
5. Павлов И.В. Статистические методы оценки надёжности сложных систем по результатам испытаний / И.В. Павлов. – М.: Радио и связь, 1992. – 168 с.

Анотація

РОЗРАХУНОК ПОКАЗНИКІВ НАДІЙНОСТІ МЕТОДОМ ДОВІРЧИХ МНОЖИН

Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Почка К.І.

Метод довірчих множин використаний для обчислення нижніх довірчих границь показника надійності міцнісних характеристик конструкцій сільськогосподарських машин при апроксимації розподілу їх граничного навантаження законом Вейбулла. Для отримання нижніх довірчих границь γ -показника надійності розроблений чисельний алгоритм, реалізований на ПЕОМ.

Abstract

CALCULATION OF INDICATORS OF RELIABILITY BY A METHOD OF CONFIDENTIAL SETS

Chovnyuk Ju.V., Dikteruk M.G., Pochka K.I.

The method of confidential sets is used for calculation of the lower confidential bounds of an indicator of reliability of strength characteristics of designs of agricultural cars at approximation of distribution of their maximum load by Veybull's law. The numerical algorithm realized on the personal electronic computer is developed for receiving the lower confidential bounds of a γ -indicator of reliability.