

## ПРОСТОРОВИЙ УДАР СФЕРИЧНОГО ТІЛА ОБ ПЕРЕШКОДУ

**Завгородній О.І., д.т.н., проф., Сіняєва О.В., аспірант**  
(Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка)

*Розглянуто удар сферичного тіла об перешкоду, як частинний випадок просторового співударяння двох тіл. Показано, що, з усіх можливих варіантів протікання просторового удару тіла, у разі сферичної форми досить обмежитися лише двома – повного та частинного ковзання точки дотику тіла з перешкодою. Одержані рівняння удару можна рекомендувати для застосування в задачах вібротранспортування і сепарації зерна.*

**Постановка проблеми.** Насіння багатьох сільськогосподарських культур має кулясту форму, наприклад: ріпак, горох, просо, мак, капуста та ін. Процес їх сепарування та транспортування часто пов'язаний з ударною взаємодією з різними робочими органами відповідних машин [1-3]. Маса кожної зернової частинки несумірно мала у порівнянні з масою робочих органів тому згадану взаємодію слід розглядати як удар частинок об перешкоду. Це викликає необхідність вирішення відповідної задачі про удар сферичного тіла об перешкоду у просторі.

**Аналіз існуючих досліджень.** Рівняння удару, в основі яких лежить теорія пружності [4], із-за високої складності і, як наслідок, заниженої ефективності не знайшли широкого застосування в задачах вібротранспортування і сепарації зерна. В цих задачах, де технологічним процесом передбачаються численні співударяння зернин суміші з робочими органами [1-3], прийнятними є більш прості рівняння, одержані на основі гіпотез сухого чи в'язкого тертя та відновлення нормальної швидкості при ударі. Найбільш близькою до поставленої є задача просторового співударяння двох тіл, розглянута в роботі [5]. Автор, замість згаданої – про відновлення нормальних швидкостей, приймає нову гіпотезу – про відновлення нормальних імпульсів при ударі і допоміжно розкладає взаємодію тіл в точці контакту на етапи (деформування, відновлення форми, ковзання, відносного покою), що надає одержаним рівнянням удару підвищеної точності.

**Мета роботи.** Одержані в роботі [5] рівняння, при переході до

випадку удару тіла об перешкоду вимагають допоміжних перетворень. Суттєвих змін і значної роботи по перетворенню цих рівнянь вимагає також перехід від довільної форми тіла до сферичної. Ми вважаємо доцільним провести вказані перетворення з метою спрощення та знаходження рівнянь удару у вигляді, найбільш зручному для застосування. Це буде сприяти популярності теорії просторового удару тіл [5] та розвитку теорії вібротранспортування і сепарації зернових сумішей.

**Основні результати роботи.** Щоб перейти від випадку просторового співударяння двох тіл [5] до випадку удару тіла об перешкоду, будемо вважати масу одного з тіл – перешкоди (під номером 2) нескінченно великою ( $m_2 \rightarrow \infty$ ), а масу іншого тіла – кулі (під номером 1) – обмеженою. Оскільки тепер буде розглядатися лише одне рухоме тіло сферичної форми, індексом, що вказує на його номер, знехтуємо. Отже, масу кулі позначимо буквою  $m$ . Крім того, будемо враховувати особливості сферичної форми, які частково відображаються на рис.1.

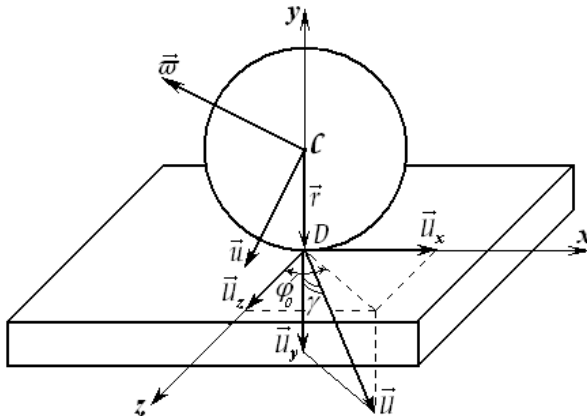


Рис.1. Схема удару кулястої частинки об перешкоду

Введемо позначення (рис.1):

$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  – швидкість центра мас тіла до удару;

$\vec{U} = (U_x, U_y, U_z)$  – швидкість точки дотику тіла з перешкодою до удару;

$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$  – швидкість центра мас тіла після удару;

$\vec{V} = (V_x, V_y, V_z)$  – швидкість точки дотику тіла з перешкодою після удару;

$\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  – кутова швидкість тіла до удару;

$\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  – кутова швидкість тіла після удару;

$r, \rho$  – радіус сферичного тіла і його радіус інерції;

$\mu = (\rho/r)^2$  при цьому  $0 < \mu < 2/3$  [7].

Нижні індекси вказують на проекції позначених величин на відповідні осі.

Для знаходження рівнянь удару використовуються теореми про зміну кількості руху та моменту кількості руху тіла [6]:

$$m(\vec{v} - \vec{u}) = \vec{J}, \quad m\rho^2(\vec{\Omega} - \vec{\omega}) = \vec{r} \times \vec{J}. \quad (1)$$

Тут:  $\vec{r} = (0; -r; 0)$  – радіус-вектор, проведений від центра мас тіла до точки дотику (рис.1);

$\vec{J} = (S, J, I)$  – вектор імпульсу, що діє на тіло при ударі .

Враховуючи, що

$$\vec{r} \times \vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -r & 0 \\ S & J & I \end{vmatrix} = -rI\vec{i} + rS\vec{k} \quad (2)$$

теореми (1) в розгорнутому виді запишуться так:

$$\begin{aligned} m(v_x - u_x) &= S, & m(v_y - u_y) &= J, & m(v_z - u_z) &= I, \\ m\rho^2(\Omega_x - \omega_x) &= -rI, & m\rho^2(\Omega_y - \omega_y) &= 0, & m\rho^2(\Omega_z - \omega_z) &= rS. \end{aligned} \quad (4)$$

Для знаходження складових імпульсу  $\vec{J}$  привертають тензор інерції і так-званий тензор зведення. Оскільки для кулястої частинки відцентрові моменти інерції дорівнюють нулю, тензор інерції приймає вид:

$$\bar{P} = \begin{pmatrix} \rho_x^2 & -\rho_{xy}^2 & -\rho_{xz}^2 \\ -\rho_{yx}^2 & \rho_y^2 & -\rho_{yz}^2 \\ -\rho_{zx}^2 & -\rho_{zy}^2 & \rho_z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Тензор зведення містить наступні елементи [5]:

$$\begin{aligned}
 h_x &= 1 + (R_z R_z)_y + (R_y R_y)_z - 2(R_y R_z)_{yz}; \\
 h_y &= 1 + (R_x R_x)_z + (R_z R_z)_x - 2(R_z R_x)_{zx}; \\
 h_z &= 1 + (R_y R_y)_x + (R_x R_x)_y - 2(R_x R_y)_{xy}; \\
 h_{xy} &= -(R_x R_y)_z - (R_z R_z)_{xy} + (R_z R_x)_{yz} + (R_y R_z)_{zx}; \\
 h_{yz} &= -(R_y R_z)_x - (R_x R_x)_{yz} + (R_x R_y)_{zx} + (R_z R_x)_{xy}; \\
 h_{zx} &= -(R_z R_x)_y - (R_y R_y)_{zx} + (R_y R_z)_{xy} + (R_x R_y)_{yz}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Загальний член доданків у правій частині записаних рівностей, який характеризує інерційні властивості тіла, з врахуванням того, що  $m_2 \rightarrow \infty$  відповідає співвідношенню

$$(R_k R_l)_{ij} = \frac{r_k r_l P_{ij}}{\det \bar{P}}, \tag{7}$$

де:  $P_{ij}$  – алгебраїчні доповнення до відповідних елементів тензора інерції;

$k, l, i, j$  – приймають значення  $x, y, z$  при цьому два однакових індекси замінюються одним;

$$\det \bar{P} = \rho^6 \tag{5}$$

Так як маємо лише один ненульовий добуток  $r_y r_y = r^2$  і лише три ненульових алгебраїчних доповнення  $P_x = P_y = P_z = \rho^4$ , то формули (6) дають:

$$h_x = 1 + \frac{r^2}{\rho^2} = 1 + \mu^{-1}; \quad h_y = 1; \quad h_z = 1 + \frac{r^2}{\rho^2} = 1 + \mu^{-1}. \tag{8}$$

Всі інші елементи тензора зведення перетворюються на нуль:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} h_x & h_{xy} & h_{xz} \\ h_{yx} & h_y & h_{yz} \\ h_{zx} & h_{zy} & h_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu^{-1} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Рух тіла визначається рухом його центра мас і обертальним рухом навколо нього. Для переходу від швидкості точки дотику тіла до швидкості центра мас будемо використовувати відому залежність

$$\vec{U} = \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (10)$$

яка записується в проекціях на осі координат таким чином:

$$U_x = u_x + \omega_z r; \quad U_y = u_y; \quad U_z = u_z - \omega_x r. \quad (11)$$

Спрощення виразу для швидкості  $U_y$  пояснюється тим, що і точка дотику  $D$ , і центр мас  $C$  кулі лежать на одній і тій же нормалі – осі ординат (рис.1), проведеної до поверхні перешкоди в точці дотику.

Далі для знаходження складових  $S, J, I$  імпульсу  $\vec{J}$  запропоновано розглядати кілька якісно відмінних випадків [5]. Основними серед них є два, які відрізняються між собою наявністю чи відсутністю зупинки точки дотику по відношенню до перешкоди. В указаних ситуаціях тіло одержує різні імпульси, тому відмічені випадки розглянемо окремо.

**Удар сферичного тіла при наявності частинного ковзання.** При зіткненні тіла з перешкодою спочатку (на першому етапі) відбувається деформація тіла, а потім (на другому етапі) – відновлення його форми. Якщо відносна зупинка точки дотику відбулася на першому етапі, то цей випадок названо “частинним ковзанням - 1” (ЧКЗ1), а якщо на другому – “частинним ковзанням - 2” (ЧКЗ2). У випадку ЧКЗ1 з врахуванням того, що ряд величин  $h_{ij}, H_{ij}$  для кулі приймають нульове значення, для складових імпульсу  $\vec{J}$  одержимо [5]:

$$S = -mU_x \frac{h_z}{H_y}; \quad J = -m(1+e)U_y \frac{H_y}{\det \bar{H}}; \quad I = -mU_z \frac{h_x}{H_y}, \quad (12)$$

де:  $e$  – коефіцієнт відновлення нормальної складової  $J$  імпульсу, який для кулі співпадає з Ньютонівським коефіцієнтом відновлення нормальної швидкості при ударі –  $R$ ;

$H_{ij}$  – алгебраїчні доповнення до відповідних елементів тензора зведення.

З виразу (9) маємо:

$$H_x = 1 + \mu^{-1}; \quad H_y = (1 + \mu^{-1})^2; \quad H_z = 1 + \mu^{-1}; \quad \det \bar{H} = (1 + \mu^{-1})^2. \quad (13)$$

Тоді імпульси (12) з врахуванням виразів (11) знайдуться у вигляді:

$$S = -\frac{m(u_x + \varpi_z r)}{1 + \mu^{-1}}; \quad J = -m(1 + R)u_y; \quad I = -\frac{m(u_z - \varpi_x r)}{1 + \mu^{-1}}. \quad (14)$$

Імпульси (14) сумісно з теоремами (3), (4) дають можливість знайти рівняння удару, які дозволяють по значенням кінематичних параметрів сферичної частинки до удару, знайти кінематичні параметри (швидкість центра мас та кутову швидкість) частинки після удару:

$$v_x = u_x - \frac{\mu(u_x + \varpi_z r)}{1 + \mu}; \quad v_y = -Ru_y; \quad v_z = u_z - \frac{\mu(u_z - \varpi_x r)}{1 + \mu}; \quad (15)$$

$$\Omega_x = \varpi_x + \frac{u_z - \varpi_x r}{r(1 + \mu)}; \quad \Omega_y = \varpi_y; \quad \Omega_z = \varpi_z - \frac{u_x + \varpi_z r}{r(1 + \mu)}. \quad (16)$$

Рівняння (16) показують, що удар не впливає на обертання кулястої частинки навколо вісі ординат –  $u$ . Це пояснюється тим, що точка контакту частинки і центр мас лежать на осі  $u$  і, отже, момент ударного імпульсу відносно цієї осі відсутній.

Відмічені вище випадки “частинного ковзання” реалізуються при певному співвідношенні швидкостей частинки в точці дотику та її фізико-механічних властивостей – шорсткості, пружності, інертності руху. ЧКЗ1 виконується за умови [1]

$$\operatorname{tg} \gamma \leq f(1 + \mu^{-1}), \quad (17)$$

яку можна записати у вигляді (рис.1):

$$f \geq \frac{\mu}{1 + \mu} \cdot \frac{\sqrt{U_x^2 + U_z^2}}{|U_y|}. \quad (18)$$

Що ж стосується “частинного ковзання - 2”, то для цього випадку в роботі [1] приведені вирази складових  $S, J, I$  імпульсу  $\vec{J}$ , які загалом відрізняються від виразів, одержаних для ЧКЗ1. Але пристосування вказаних величин  $S, J, I$  для частинок сферичної форми (аналогічно попередньому) приводить до тих же залежностей (12). Отже, одержані рівняння удару (15), (16) мають місце і для випадку ЧКЗ2, який виконується за умови [1]:

$$f(1 + \mu^{-1}) < \operatorname{tg} \gamma \leq f(1 + R)(1 + \mu^{-1}). \quad (19)$$

Ці умови можна переписати у більш зручному для

використання виді:

$$\frac{\mu}{(1+\mu)(1+R)} \cdot \frac{\sqrt{U_x^2 + U_z^2}}{|U_y|} \leq f < \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \frac{\sqrt{U_x^2 + U_z^2}}{|U_y|}. \quad (20)$$

Як бачимо, розмежування “частинного ковзання” на два випадки має для сферичної форми лише принципіальне значення, а розрахунки в обох випадках проводяться за одними й тими ж залежностями (15), (16). Отже, в межах інтересів визначення результатів удару, як числових значень відповідних параметрів, вказане розмежування втрачає смисл. Тому в подальшому замість двох будемо використовувати лише один випадок удару – “частинне ковзання” (ЧКЗ), який по суті об’єднує в собі два, розглянуті вище, і результатом якого є значення параметрів, одержаних за формулами (15) і (16). Тоді замість двох умов (18) та (20) залишається одна, яка і встановлює факт реалізації зазначеного випадку ЧКЗ:

$$f \geq \frac{\mu}{(1+\mu)(1+R)} \cdot \frac{\sqrt{(u_x + \varpi_z r)^2 + (u_z - \varpi_x r)^2}}{|u_y|}. \quad (21)$$

Тут, у відповідності до рівнянь удару (15), (16), швидкості точки дотику частинки замінені швидкостями її центра мас з використанням залежностей (11).

Удар сферичної частинки при наявності повного ковзання. Якщо коефіцієнт тертя  $f$  достатньо малий або дотична швидкість  $(\vec{U}_x + \vec{U}_z)$  досить велика (або те і інше), то, як уже вказувалось вище, в процесі удару реалізується випадок “повного ковзання” (ПКЗ), при якому точка дотику у відносному русі на протязі удару не зупиняється. В цьому випадку для складових імпульсу  $\vec{J}$  одержано співвідношення [1]:

$$S = mU_y f(1+e)\sin\varphi_0; \quad J = -mU_y(1+e); \quad I = mU_y f(1+e)\cos\varphi_0. \quad (22)$$

Смисл кута  $\varphi_0$  зрозумілий з рис.1. З цього ж рисунка впливає вираз для тангенса кута  $\varphi_0$ , який з врахуванням (11) запишемо таким чином:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{U_x}{U_z} = \frac{u_x + \varpi_z r}{u_z - \varpi_x r}. \quad (23)$$

Враховуючи, що  $e = R$ ,  $U_y = u_y$ , а також відомі

тригонометричні залежності між функціями  $\sin x$ ,  $\cos x$  і  $\operatorname{tg} x$ , для величин (22) знайдемо:

$$S = m \frac{u_y f(1+R) \operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}; \quad J = -m u_y (1+R); \quad I = m \frac{u_y f(1+R)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}. \quad (24)$$

Використовуючи сумісно співвідношення (3), (4) і (24), одержимо рівняння удару для випадку ПКЗ:

$$v_x = u_x + \frac{u_y f(1+R) \operatorname{tg} \varphi_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}; \quad v_y = -R u_y; \quad v_z = u_z + \frac{u_y f(1+R)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}; \quad (25)$$

$$\Omega_x = \varpi_x - \frac{u_y f(1+R)}{\mu r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}; \quad \Omega_y = \varpi_y; \quad \Omega_z = \varpi_z + \frac{u_y f(1+R) \operatorname{tg} \varphi_0}{\mu r \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}}. \quad (26)$$

Цей випадок має місце тоді, коли не може реалізуватися ЧКЗ. Отже, умова застосування рівнянь (25), (26) впливає з нерівності (21):

$$f < \frac{\mu}{(1+\mu)(1+R)} \cdot \frac{\sqrt{(u_x + \varpi_z r)^2 + (u_z - \varpi_x r)^2}}{|u_y|}. \quad (27)$$

### Список літератури

1. Завгородний А.И., Синяева О.В. Движение шара в воздушном потоке между вибрирующими плоскостями // Вібрації в техніці та технологіях: Всеукраїнський науково-технічний журнал, №3(67).– Вінниця: ВНАУ, 2012.– С.20-27.
2. А.с. 1251967 (СССР). Вибрационная очистительно-сортировальная машина для разделения зерновых смесей по коэффициенту парусности /А.И.Завгородний, В.А.Сметанкин, А.Б.Азарова и др.– Оупул. в Б.И.,1986, №31.
3. Патент на корисну модель 64488 від 10.11.2011. Вібросепаратор вертикального типу з повітряним потоком для розділення сипучих сумішей / Синяева О.В., Завгородній О.І.: Україна, Український інститут промислової власності.
4. Кильчевский Н.А. Теория соударений твердых тел. – Киев: “Наукова думка”, 1969. – 248с.
5. Плявниекс В.Ю. Пространственное соударение двух тел. // Вопросы динамики и прочности, №20.– Рига: “Зинатне”, 1970. – С.75-88.
6. Бондаренко А.А., Дубінін О.О., Переяславцев О.М. Теоретична механіка (динаміка). – Київ: “Знання”, 2004. – 592с.
7. Завгородний А.И., Обыхвост А.В. К исследованию движения



частиц округлой формы по рабочим поверхностям машин. “Галузеве машинобудування, Будівництво”: Зб. наук. праць ПНТУ імені Юрія Кондратюка, Вип. 3(25), Том 1, Полтава, 2009.– С.119-125.

#### **Аннотация**

### **ПРОСТРАНСТВЕННЫЙ УДАР сферической ТЕЛА ОБ ПРЕПЯТСТВИЕ**

*Рассмотрены удар сферического тела о препятствие, как частный случай пространственного соударения двух тел. Показано, что, из всех возможных вариантов протекания пространственного удара тела, в случае сферической формы достаточно ограничиться лишь двумя - полного и частного скольжения точки соприкосновения тела с препятствием. Полученные уравнения удара можно рекомендовать для применения в задачах вибротранспортирования и сепарации зерна.*

#### **Abstract**

### **PROSTRANSTVENNYY BLOW sferycheskoy PE OB PREPYATSTVYE**

*Rassmotrenyy sferycheskoho body blow at prepyatstvyem, How Private The case of spatial soudarennyya two bodies. It is shown, that, of vseh vozmozhnykh varyantov protekanyya spatial body blows in sluchae sferycheskoy forms dostatochno ohranychytsya lysh dvumya - and full of chastnykh skolzhennyya point soprykosnovenyya body with prepyatstvyem. Poluchennyye equation can be to recommend to kick in problems of application and vybrotransportuvannya separatsyy grain.*