УДК 534.1, 539.3

О РЕЗОНАНСНЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЗМОВ ЛИНЕЙНО-ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Ольшанский В.П., д.ф.-м.н., проф.
(Харьковский национальный технический университет сельского хозяйства имени Петра Василенко)
Ольшанский С.В., к.ф.-м.н.,
(Национальный технический университет “ХПИ”)

С привлечением ВБК – метода приближённо описаны нестационарные резонансные колебания механизма линейно-переменной массы, как системы с одной степенью свободы, под действием внешней силы, частота которой и мгновенная собственная частота механической системы совпадают и меняются с течением времени по одному закону.

Введение. В перерабатывающей промышленности, как и в других областях производства, используют механизмы, масса которых меняется в ходе работы. Примером тому являются: виброрешёта, где происходит отделение части смеси, вследствие просеивания проходовой фракции; центрифуги, в которых удаляется часть движущейся массы под действием центробежных сил; различные бункеры и ёмкости, меняющие массу при их загрузке или выгрузке и пр. Моделирование колебаний таких механических систем относится к актуальным научно-прикладным задачам. Отдельный интерес представляют резонансные колебания, особенно когда их используют в качестве интенсификатора технологического процесса. Работа в резонансном режиме сопровождается уменьшением энергетических затрат на привод, но опасна с позиции прочности и долговечности механизма. Поэтому исследованию особенностей резонансных колебаний механических систем посвящено много публикаций. Наиболее полно изучены нестационарные резонансы в осцилляторе постоянных параметров (массы и жёсткости) при линейном и квадратичном изменениях частоты возмущающей силы [1], [2]. Менее исследованы особенности резонансных колебаний в осцилляторах переменной жёсткости или массы. Отметим, что для расчёта таких колебаний разработаны специальные асимптотические методы [3], [4], эффективные при медленном изменении параметров колебательной системы за один период её колебаний. Что касается конкретных численных результатов, то они имеются в [5], где проводилось моделирование резонанса в системе переменной массы на аналоговой машине. Кроме того, амплитудно-частотные характеристики при переходе через резонанс в колебательной системе переменной массы построены, с помощью персонального компьютера, в работах [6], [7]. Здесь, в отличие от упомянутых и других известных публикаций, ВБК – методом найдено приближённое аналитическое решение задачи нестационарных колебаний для случая, когда частота возмущающей силы меняется по тому же закону, что и мгновенная собственная частота осциллятора. При таком выборе внешнего воздействия колебательная система в любой момент времени находится в резонансном состоянии, что является аналогом стационарного резонанса в классическом линейном осцилляторе, вызванном действием гармонической силы.

Целью работы является определение коэффициента динамичности в осцилляторе линейно-переменной массы при его нестационарных резонансных колебаниях под действием внешней силы переменной частоты. Ставится задача построения приближённых формул для расчёта значений коэффициента динамичности осциллятора в “постоянно” резонансном режиме его движения.

Решение задачи при постоянной амплитуде возмущающей силы. Без учёта диссипативной и реактивной сил, вынужденные резонансные колебания осциллятора описываем дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega^2}{1+\gamma t}x=\frac{Q}{m_0\left(1+\gamma t\right)}\sin\left[\frac{2\omega}{\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma t}-1\right)\right]. \qquad (1)$$

В (1) $\omega^2=\dfrac{c}{m_0}$; m_0 – начальная масса осциллятора; γm_0 – скорость изменения массы во времени t; c – коэффициент жёсткости пружины; Q – амплитуда возмущающей силы.

При постоянной массе осциллятора предельный переход $\gamma \to 0$ в (1) приводит к классическому уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{Q}{m_0}\sin(\omega t), \qquad (2)$$

которое описывает обычный стационарный резонанс, без учёта сил вязкого сопротивления. Поэтому (1) можно считать обобщёнием уравнения (2).

Уравнение (1) решаем при нулевых начальных условиях:

$$x(0) = 0; \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0. \qquad (3)$$

Согласно Лагранжу, задача Коши, представленная выражениями (1), (3), имеет решение:

$$x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t), \qquad (4)$$

в котором

$$c_{1,2}(t) = \mp\int_0^t \frac{x_{2,1}(t)\sin\left[\frac{2\omega}{\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma t} - 1\right)\right]}{\Delta(t)(1+\gamma t)}; \qquad (5)$$

$$\Delta(t) = x_1(t)\frac{dx_2}{dt} - x_2(t)\frac{dx_1}{dt};$$

$x_1(t), x_2(t)$ – удовлетворяет однородному уравнению:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega^2}{1+\gamma t}x = 0. \qquad (6)$$

Функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выражаются через функции Бесселя индекса единица [8]. Далее, с целью упрощения задачи, используем их ВБК – приближения [9]:

$$x_1(t) = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1/2}\cos(\eta - \eta_0); \quad x_2(t) = \left(\frac{\eta}{\eta_0}\right)^{1/2}\sin(\eta - \eta_0), \qquad (7)$$

в которых $\eta_0 = \dfrac{2\omega}{|\gamma|}$; $\eta = \eta_0\sqrt{1+\gamma t}$.

Подставляя (7) в (5), с учётом того, что:

$$\frac{dt}{d\eta} = \frac{2\eta}{\gamma\eta_0^2}; \quad \Delta(t) = \frac{\gamma\eta_0}{2} = const; \; 1 + \gamma t = \frac{\eta^2}{\eta_0^2},$$

решение (4) сводим к виду:

$$x(t) = \frac{Q}{c}\eta^{1/2}\left[a_1(\eta)\cos(\eta - \eta_0) + a_2(\eta)\sin(\eta - \eta_0)\right], \quad (8)$$

где

$$a_1(\eta) = -\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin^2(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\eta}} d\eta = \sqrt{\eta_0} - \sqrt{\eta} + \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\cos 2(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\eta}} d\eta;$$

(9)

$$a_2(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin(\eta - \eta_0)\cos(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\eta}} d\eta = \frac{1}{2}\int_{\eta_0}^{\eta} \frac{\sin 2(\eta - \eta_0)}{\sqrt{\eta}} d\eta.$$

Функции $a_1(\eta)$ и $a_2(\eta)$ можно выразить через интегралы Френеля $C(\eta)$ и $S(\eta)$. Учитывая, что [10]:

$$\int_0^{\eta} \frac{\cos\eta}{\sqrt{\eta}} d\eta = \sqrt{2\pi}C(\eta); \quad \int_0^{\eta} \frac{\sin\eta}{\sqrt{\eta}} d\eta = \sqrt{2\pi}S(\eta),$$

получаем

$$a_1(\eta) = \sqrt{\eta_0} - \sqrt{\eta} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\cos(2\eta_0)\left[C(2\eta) - C(2\eta_0)\right] + \sin(2\eta_0)\left[S(2\eta) - S(2\eta_0)\right]\right\};$$

(10)

$$a_2(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{\cos(2\eta_0)\left[S(2\eta) - S(2\eta_0)\right] + \sin(2\eta_0)\left[C(2\eta_0) - C(2\eta)\right]\right\}.$$

При медленном изменении массы осциллятора, когда $\eta_0 >> 1$ и $\eta >> 1$, можно упростить вычисление $a_1(\eta)$ и $a_2(\eta)$. Используя асимптотику [10]:

$$C(\eta) - C(\eta_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin\eta}{\sqrt{\eta}} - \frac{\sin\eta_0}{\sqrt{\eta_0}}\right);$$

$$S(\eta)-S(\eta_0)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\cos\eta_0}{\sqrt{\eta_0}}-\frac{\cos\eta}{\sqrt{\eta}}\right),$$

выражение (10) заменяем на:

$$a_1(\eta)=\sqrt{\eta_0}-\sqrt{\eta}+\frac{1}{4\sqrt{\eta}}\sin 2(\eta-\eta_0);\quad a_2(\eta)=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sqrt{\eta_0}}-\frac{1}{\sqrt{\eta}}\cos 2(\eta-\eta_0)\right].\quad(11)$$

Подставляя (11) в (8), получаем приближённую формулу:

$$x(t)=\frac{Q}{c}\sqrt{\eta}\left[\left(\sqrt{\eta_0}-\sqrt{\eta}\right)\cos(\eta-\eta_0)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}+\frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\right)\sin(\eta-\eta_0)\right].\quad(12)$$

Учитывая пределы:

$$\lim_{\gamma\to+0}(\eta-\eta_0)=\omega t;\ \lim_{\gamma\to+0}\sqrt{\eta}\left(\sqrt{\eta_0}-\sqrt{\eta}\right)=-\frac{1}{2}\omega t,$$

из (12), как частный случай, получаем известную формулу резонансных колебаний осциллятора постоянных параметров:

$$x(t)=\frac{Q}{2c}\left[-\omega t\cos\omega t+\sin\omega t\right].\quad(13)$$

Из (12) следует, что изменение амплитуды колебаний во времени t, при $\eta_0>>1$ и $\eta>>1$, описывается нелинейной зависимостью:

$$am\,x(t)=\frac{Q}{c}\sqrt{\eta}\sqrt{\left(\sqrt{\eta_0}-\sqrt{\eta}\right)^2+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}+\frac{1}{\sqrt{\eta_0}}\right)^2}.\quad(14)$$

Учитывая (14), далее можно вычислить резонансный коэффициент динамичности:

$$K_\partial=K_\partial(t)=\frac{c}{Q}am\,x(t),\quad(15)$$

который также является нелинейной функций времени.

Решение задачи Коши для переменной амплитуды возмущающей силы. Рассмотрим простейший вариант резонансных колебаний, когда решение задачи выражается в элементарных функциях. Предполагаем, что изменение возмущающей силы подчиняется зависимости

$$F(t)=Q(1+\gamma t)^{1/4}\sin\left[\frac{2\omega}{\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma t}-1\right)\right].$$

Теперь, вместо (1), надо решить уравнение:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\omega^2}{1+\gamma t}x=\frac{Q}{m_0(1+\gamma t)^{3/4}}\sin\left[\frac{2\omega}{\gamma}\left(\sqrt{1+\gamma t}-1\right)\right],$$

при начальных условиях (3).

Применив, как прежде, ВБК – метод, получаем формулу для расчёта перемещений осциллятора:

$$x(t)=\frac{Q}{c}\frac{\eta^{1/2}}{\eta_0^{1/2}}\left[b_1(\eta)\cos(\eta-\eta_0)+b_2(\eta)\sin(\eta-\eta_0)\right]. \quad (16)$$

Здесь

$$b_1(\eta)=-\int_{\eta_0}^{\eta}\sin^2(\eta-\eta_0)\,d\eta;\quad b_2(\eta)=\int_{\eta_0}^{\eta}\sin(\eta-\eta_0)\cos(\eta-\eta_0)\,d\eta$$

.

Вычислив эти интегралы, находим:

$$b_1(\eta)=\frac{1}{2}(\eta_0-\eta)+\frac{1}{4}\sin 2(\eta-\eta_0);\ b_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2(\eta-\eta_0). \quad (17)$$

Учитывая (17), выражение (16) сводим к виду

$$x(t)=\frac{Q}{c}\frac{\eta^{1/2}}{2\eta_0^{1/2}}\left[(\eta_0-\eta)\cos(\eta-\eta_0)+\sin(\eta-\eta_0)\right]. \quad (18)$$

В пределе, когда $\gamma\to+0$, формула (18) переходит в (13).

Используя (18), для вычисления резонансного коэффициента динамичности получаем выражение

$$K_\partial=K_\partial(t)=\frac{\eta^{1/2}}{2\eta_0^{1/2}}\sqrt{(\eta-\eta_0)^2+1}. \quad (19)$$

Подчёркнём, что в отличие от (15), в (19) не требуется соблюдение ограничений $\eta>>1$ и $\eta_0>>1$.

Численные результаты и их анализ. Построим зависимость резонансного коэффициента динамичности (15) при постоянной амплитуде возмущающей силы. Для проведения расчётов принимаем $\gamma=0{,}1$ с$^{-1}$ и разные значения η_0. На рис. 1 представлена зависимость K_∂ от безразмерного параметра γt. Цифры 1,2,3,4 соответствуют значениям $\eta_0 = 40, 80, 120, 160$.

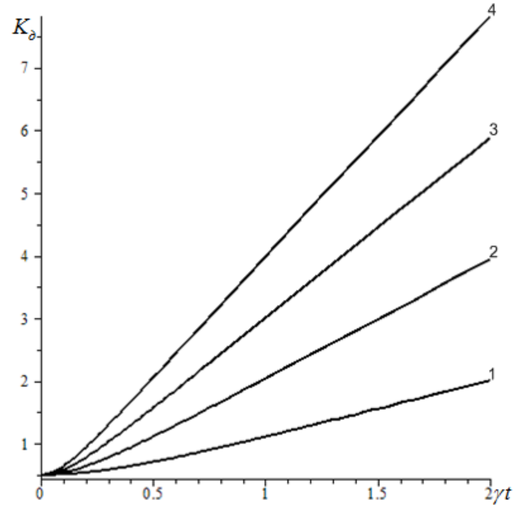

Рис. 1. Зависимость K_∂ от безразмерного параметра γt при разных η_0

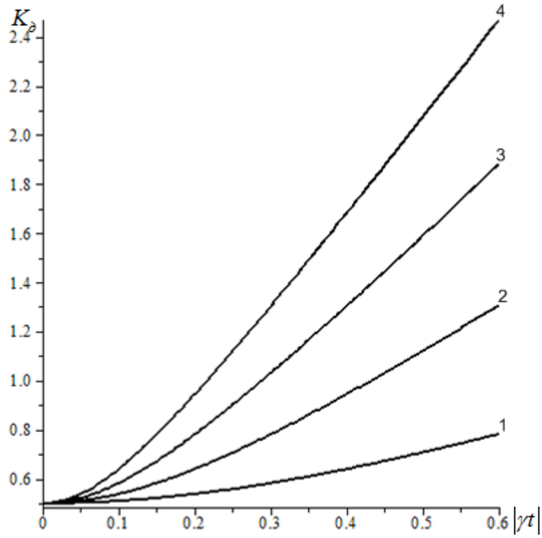

Рис. 2 – Зависимость K_∂ от безразмерного параметра γt при разных η_0

Проведём расчёты для осциллятора убывающей массы. Для проведения расчётов принимаем $\gamma = -0{,}1$ с$^{-1}$ и разные значения η_0. На рис. 2 представлена зависимость K_∂ от безразмерного параметра γt. Цифры 1,2,3,4 соответствуют значениям $\eta_0 = 40{,}80{,}120{,}160$.

Выводы. ВБК – метод позволил получить компактные формулы для вычисления амплитуд резонансных колебаний механизма линейно-переменной массы. Коэффициент динамичности перемещений возрастает с течением времени и по ограничению на его величину представляется возможность оценить допустимое время работы механизма в резонансном режиме.

Список литературы

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П.Филиппов – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
2. Голоскоков Е.Г. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г.Голоскоков, А.П.Филиппов. – К.: Наукова думка, 1977. – 340 с.
3. Митропольский Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах / Ю.А.Митропольский. – К.: Изд-во АН УССР, 1955. – 283 с.
4. Боголюбов Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
5. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. / А.П.Бессонов – М.: Наука, 1967. – 280с.
6. Ольшанский В.П. Резонансные колебания осциллятора линейно-переменной массы / В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский // Вісник НТУ “ХПІ”. Серія: Динаміка та міцність машин. – Х.: НТУ “ХПІ”, 2013. – 58(1031) – С. 157-162.
7. Ольшанский В.П. Метод ВБК в расчётах нестационарных колебаний осцилляторов / В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский. – Х.: Міськдрук, 2014. – 264 с.
8. Ольшанский В.П. Моделирование колебаний осциллятора линейно-переменной массы при импульсном нагружении / В.П.Ольшанский, С.В.Ольшанский // Вісник НТУ “ХПІ”: Математичне моделювання в техніці та технологіях, 2013, № 37(1010). – С. 125-130.
9. Образцов И.Ф. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкцій / И.Ф.Образцов, Б.В.Нерубайло,

И.В.Андрианов – М.: Машиностроение, 1991. – 416с.
10. Янке Е. Специальные функции / Е.Янке, Ф.Эмде, Ф.Лёш – М.: Наука, 1977. – 344с.

Анотація

ПРО РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ МЕХАНІЗМІВ ЛІНІЙНО-ЗМІННОЇ МАСИ

Із застосуванням ВБК – методу наближено описано нестаціонарні резонансні коливання механізму лінійно-змінної маси, як системи з одним ступенем свободи, під дією зовнішньої сили, частота якої та миттєва власна частота механічної системи співпадають та змінюються з плином часу по одному закону

Abstract

ABOUT THE RESONANCE VIBRATIONS OF MECHANISM WITH LINEAR-VARIABLE MASS

With the use of WBK - approximately described transient method to resonance linearly variable mass as a system with one degree of freedom under the action of an external force, and instantaneous frequency is the natural frequency of the mechanical system, and I agree with the passage of time are on the same law.