ІНТЕРПОЛЯЦІЯ СПЛАЙНАМИ

Козир А.В., гр. М-30
Науковий керівник – ст. викл. **Манжос Н.В.**
Харківський державний університет харчування та торгівлі

У техніці, фізиці, економіці, природознавстві та найчастіше всього для запису результатів експерименту використовується табличний спосіб завдання функцій, за допомогою значень (x_k, y_k). Природно виникає питання: який аналітичний вигляд має функція, які значення функція приймає в проміжних точках, за межами інтервалу. Застосування поліноміальної інтерполяції має кілька недоліків: з ростом числа точок порядок многочлена зростає, а разом з ним зростає число операцій, які потрібно виконати для обчислення точки на кривій, також навіть для гладкої функції в інтерполяційній кривій можуть виникнути осциляції. Певною мірою уникнути цих проблем можна за допомогою сплайнів.

Нехай відрізок $[a, b]$ розбито на N рівних частин точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_N=b$, де $x_k=a+kh$, $h=(b-a)/N$, $k=0,1\ldots,N$. Сплайном називається функція, яка разом з кількома похідними неперервна на відрізку $[a,b]$, а на кожному відрізку $[x_k,x_{k+1}]$ є деяким алгебраїчним поліномом. Максимальна по всіх відрізках степінь поліному називається степенем сплайна, а різниця між степенем сплайна і порядком більшої неперервної похідної – дефектом сплайна. На практиці найчастіше застосовують сплайни третього степеня, що мають як найменше першу похідну. Такі сплайни позначають $S_3(x)$. Величини $m_k = S_3'(x_k)$ називають нахилом сплайна в вузлі x_k.

На відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ кубічний сплайн має такий вигляд:

$$S_3(x) = \frac{(x_{k+1}-x)^2(2(x-x_k)+h)}{h^3}y_k + \frac{(x-x_k)^2(2(x_{k+1}-x)+h)}{h^3}y_{k+1} +$$
$$+\frac{(x_{k+1}-x)^2(x-x_k)}{h^2}m_k + \frac{(x-x_k)^2(x-x_{k+1})}{h^2}m_{k+1}$$

За вимоги неперервності другої похідної для значень m_k одержимо систему рівнянь:

$$m_{k-1}+4m_k+m_{k+1} = \frac{3(y_{k+1}-y_{k-1})}{h}; m_0 = \frac{1}{6h}(-11y_0+18y_1-9y_2+2y_3);$$
$$m_N = \frac{1}{6h}(11y_N-18y_{N-1}+9y_{N-2}-2y_{N-3}), k=1\ldots N-1.,$$

Точністю апроксимації функції сплайном можна керувати за допомогою вибору кроку h. Для досить гладких функцій (класу C^2) і для таким чином вибраних m_k точність не перевищує $O(h^4)$.