

**Міністерство освіти і науки України**

**Харківський державний університет харчування та торгівлі**

**Методичні вказівки до підготовки до практичних занять з дисципліни  
«Фізика» для студентів напряму підготовки 6.050502 «Інженерна  
механіка»**

**«Частина 1. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка»**

**Факультет: Обладнання та технічного сервісу**

**Кафедра: Енергетики та фізики**

**Харків 2010**

## Вступ

Вивчення дисципліни «Фізика» призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.050502 «Інженерна механіка».

Мета викладання фізики полягає у створенні передумов для подальшої широкої підготовки студентів у частині технічних дисциплін, володінні фундаментальними поняттями та теоріями класичної та сучасної фізики. Формуванні наукового світогляду та сучасного фізичного мислення.

Фізика викладається на 1 та 2 курсах факультету обладнання та технічного сервісу. Курс фізики повинен забезпечити майбутньому інженеру-механіку основу його теоретичної підготовки, яка дозволяє грамотно орієнтуватись у стрімкому потоці наукової і технічної інформації.

Курс фізики разом з курсами вищої математики і теоретичної механіки становить основу теоретичної підготовки інженерів, є фундаментальною базою, без якої неможлива успішна діяльність інженера. Основне завдання полягає у тому, щоб дати студенту сучасні уявлення про фізичні явища та процеси, найважливіші закони, фундаментальні фізичні поняття, теорію, досліді та факти класичної та сучасної фізики, сучасні методи дослідження фізичних явищ.

Студент повинен володіти методами та навичками розв'язання конкретних задач, застосовувати одержані знання для ефективного опанування інших дисциплін і подальшої практичної діяльності, використовувати фізичну апаратуру у відповідності з вимогами метрології.

## Кінематика

Швидкість прямолінійного руху:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

прискорення:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Рівняння руху:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$v(t) = v_0 + at.$$

Тангенціальне прискорення:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt};$$

нормальне прискорення:

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$

Кутова швидкість:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

кутове прискорення:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Зв'язок між кутовою та лінійною швидкістю:

$$v = \omega R.$$

### Приклади розв'язання задач

Першу половину часу свого руху автомобіль рухався із швидкістю  $v_1 = 80 \text{ км/год}$ , а другу половину часу – з швидкістю  $v_2 = 40 \text{ км/год}$ . Яка середня швидкість  $v$  руху автомобіля?

*Розв'язання:*

Середня швидкість визначається виразом:  $\bar{v} = \frac{s}{t}$ , де

$s = s_1 + s_2 = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2}$ , оскільки  $t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$ . Тобто  $s = \frac{t}{2}(v_1 + v_2)$ , звідси

$$v = \frac{t(v_1 + v_2)}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2} = 60 \text{ км/год}.$$

Першу половину свого шляху автомобіль рухався із швидкістю  $v_1 = 80 \text{ км/год}$ , а другу половину шляху – з швидкістю  $v_2 = 40 \text{ км/год}$ . Яка середня швидкість  $v$  руху автомобіля?

*Розв'язання:*

Середня швидкість визначається виразом:

$$v = \frac{s}{t}, \quad (1)$$

де  $t = t_1 + t_2$ ,  $s_1 = s_2 = \frac{s}{2}$ . Тоді  $t_1 = \frac{s}{2v_1}$ ;  $t_2 = \frac{s}{2v_2}$ , звідки

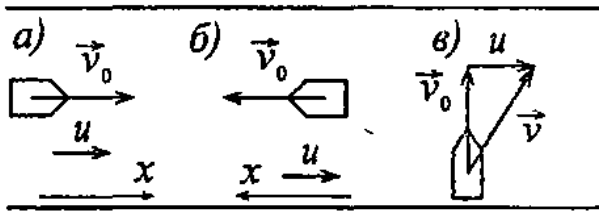
$$t = \frac{s(v_1 + v_2)}{2v_1v_2} \quad (2)$$

Підставляючи (2) в (1), отримаємо  $v = \frac{s2v_1v_2}{s(v_1 + v_2)} = \frac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$ ,

$$v = \frac{2 \cdot 80 \cdot 40}{80 + 40} \approx 53,3 \text{ км/год}.$$

Знайти швидкість  $v$  відносно берега річки: а) човна, що йде за течією; б) човна, що йде проти течії; у) човна, що йде під кутом  $\alpha = 90^\circ$  до течії. Швидкість течії річки  $u=1$  м/с, швидкість човна відносно води  $v_0=2$  м/с.

Розв'язання:



а)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ , або в проекції

на вісь  $x$ :  $v = v_0 + u = 3$  м/с.

б)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ , або в проекції

на вісь  $x$ :  $v = v_0 - u = 1$  м/с.

в)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$ , склавши вектори за правилом трикутників, отримаємо

$$v = \sqrt{v_0^2 + u^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5} \approx 2,24 \text{ м/с.}$$

Літак летить відносно повітря з швидкістю  $v_0 = 800$  км/год. Вітер дме із заходу на схід з швидкістю  $u = 15$  м/с. З якою швидкістю  $v$  літак рухатиметься щодо землі і під яким кутом  $\alpha$  до меридіану треба тримати курс, щоб переміщення було: а) на південь; б) на північ; у) на захід; г) на схід?

Розв'язання:

а)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$  або в скалярному

вигляді:  $v = \sqrt{v^2 - u^2}$ . Підставляючи

числові дані і враховуючи, що

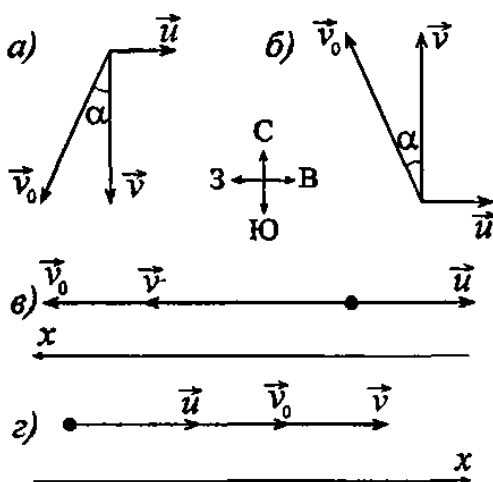
$u = 15 \text{ м/с} = 54 \text{ км/год}$ , отримуємо

$v = 798 \text{ км/год}$ .

З малюнка видно, що  $v = v_0 \cos \alpha$ ,

$\cos \alpha = \frac{v}{v_0}$ ,  $\cos \alpha = 0,998$ ,  $\alpha = 4^\circ$ . Курс

на південний захід.



б)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$  або в скалярному вигляді:  $v = \sqrt{v^2 - u^2}$  або

$v = 798 \text{ км/год}$ . Оскільки  $v = v_0 \cos \alpha$ , то  $\cos \alpha = \frac{v}{v_0}$ ,  $\cos \alpha = 0,998$ ,  $\alpha = 4^\circ$ .

Курс на північний захід.

в)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$  або в проекції на вісь x:  $v = v_0 - u = 800 - 54 = 746 \text{ км/год}$ .

Курс на захід.

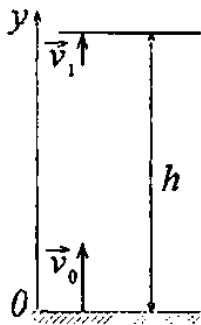
г)  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{u}$  або в проекції на вісь y:  $v = v_0 + u = 800 + 54 = 854 \text{ км/год}$ .

Курс на схід.

Тіло, кинуте вертикально вгору, повернулося на землю через час  $t=3$  с. Яка була початкова швидкість  $v_0$  тіла і на яку висоту  $h$  воно піднялось?

### Розв'язання

Запишемо рівняння кінематики в проекціях на вісь y:



$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$ ,  $v(t) = v_0 - gt$  В найвищій точці підйому

маємо  $y(t_1) = h$ ;  $v(t_1) = 0$ , тобто  $h = v_0 t_1 - \frac{gt_1^2}{2}$  і

$0 = v_0 - gt_1$ , де  $t_1 = \frac{t}{2}$  – час підйому. Звідки  $v_0 = gt_1$ ,

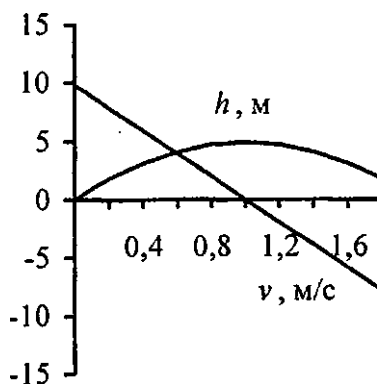
$v_0 = \frac{gt}{2}$ ,  $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$ ;  $h = \frac{gt_1^2}{8}$ . Підставляючи числові дані, отримаємо

$v_0 = 14,7 \text{ м/с}$ ;  $h = 11 \text{ м}$ .

Тіло кинуте вертикально вгору з початковою швидкістю  $v_0 = 9,8 \text{ м/с}$ . Побудувати графік залежності висоти  $h$  і швидкості  $v$  від часу  $t$  для інтервалу  $0 \leq t \leq 2$  с через  $0,2$  с.

### Розв'язання

Залежність швидкості і висоти від часу



виражається наступними формулами

$$v = v_0 - gt, h = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad \text{Для заданого}$$

інтервалу складемо таблицю і побудуємо графік.

t, с	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
v, м/с	8	7,8	5,9	3,9	2,0	0	-	-	-	-	-9,8
h, м	0	1,8	3,1	4,1	4,7	4,9	4,7	4,1	3,1	1,8	0

Залежність пройденого тілом шляху  $s$  від часу  $t$  дається рівнянням  $s = At - Bt^2 + Ct^3$ , де  $A = 2 \text{ м/с}$ ,  $B = 3 \text{ м/с}^2$  та  $C = 4 \text{ м/с}^3$ . Знайти: а) залежність швидкості  $v$  і прискорення  $a$  від часу  $t$ ; б) відстань  $s$ , пройдене тілом, швидкість  $v$  і прискорення  $a$  тіла через час  $t=2\text{с}$  після початку руху. Побудувати графік залежності шляху  $s$ , швидкості  $v$  і прискорення  $a$  від часу  $t$  для інтервалу  $0 \leq t \leq 3\text{с}$  через  $0,5\text{с}$ .

Розв'язання:

а) Швидкість тіла  $v = \frac{ds}{dt}$ ,

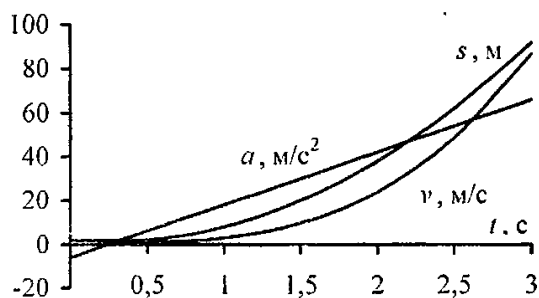
$$s = At - 2Bt^2 + 3Ct^3, s = 2 - 6t + 12t^2 \text{ м/с}.$$

Прискорення тіла  $a = \frac{dv}{dt} = -2B + 6Ct$ ;

$$a = -6 + 24t \text{ м/с}.$$

б) Відстань, пройдена тілом

$$s = 2t - 3t^2 + 4t^3. \text{ Тоді через час } t=2 \text{ с маємо } s=24 \text{ м; } v=38 \text{ м/с; } a=42 \text{ м/с}^2.$$



З башти заввишки  $h=25\text{м}$  горизонтально кинутий камінь із швидкістю  $v_x = 15\text{м/с}$ . Який час  $t$  камінь буде рухатися? На якій відстані  $l$  від підніжжя башти він впаде на землю? З якою швидкістю  $v$  він впаде на землю? Який кут  $\varphi$  складе траєкторія каменя з горизонтом в точці його падіння на землю?

*Розв'язання*

Переміщення каменя по вертикалі

$$S_y = h = \frac{gt^2}{2}, \quad (1)$$

по горизонталі:

$$S_x = l = v_x t. \quad (2)$$

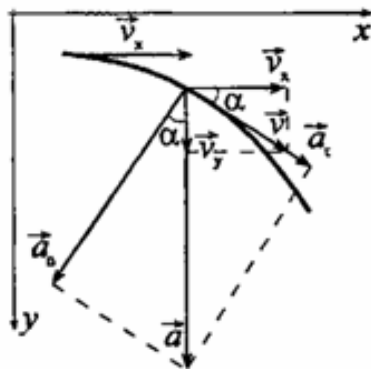
З рівняння (1):  $t = \sqrt{2h/g}$ ,  $t=2,26$  с. З

рівняння (2):  $l = v_x t$ ,  $l=33,9$  м. Швидкість каменя  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Вертикальна

складова швидкості  $v_y = gt$ , отже  $v = \sqrt{v_x^2 + (gt)^2}$ .

Шуканий кут  $\varphi$  - кут між напрямками вектора швидкості  $\vec{v}$  і вектора її горизонтальної складової  $\vec{v}_x$ . З малюнка видно, що  $\cos \varphi = \frac{v_x}{v}$ ;

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (gt)^2}}, \quad \cos \varphi = 0,56; \quad \varphi = 56^\circ$$



Камінь кинутий горизонтально із швидкістю  $v_x = 15\text{м/с}$ . Знайти нормальне  $a_n$  і тангенціальне  $a_\tau$ , прискорення каменя через час  $t=1\text{с}$  після початку руху.

*Розв'язання*

Повне прискорення каменя  $a=g$ ;

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad \text{Повна швидкість } v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

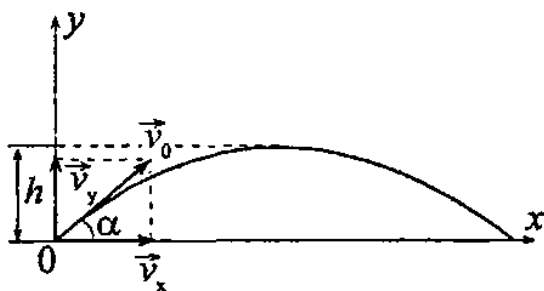


З малюнка видно, що  $\cos \alpha = \frac{v_x}{v} = \frac{a_n}{g}$ ,  $\sin \alpha = \frac{v_y}{v} = \frac{a_\tau}{g}$ . Тоді

$$a_n = \frac{g v_x}{v} = \frac{g v_x}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}, \quad a_\tau = \frac{g v_y}{v} = \frac{g v_y}{\sqrt{v_x^2 - (gt)^2}}. \quad a_n \approx 8,2 \text{ м/с}^2, \quad a_\tau \approx 5,4 \text{ м/с}^2$$

Тіло кинуте із швидкістю  $v_0$  під кутом до горизонту. Час польоту  $t=2,2\text{с}$ . На яку висоту  $h$  підніметься тіло?

*Розв'язання*



Переміщення по вертикалі

$$S_y = (v_0 \sin \alpha)t - \frac{gt^2}{2} \quad (1)$$

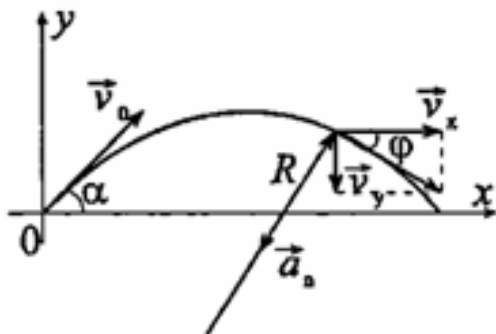
Позначимо  $t_1$  – час підйому тіла на висоту  $h$ . Тоді з (1) отримаємо

$h = v_0 t_1 \sin \alpha - \frac{gt_1^2}{2}$ . У верхній точці  $v_y = 0$ , але  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1$ , отже

$v_0 \sin \alpha = gt_1$ . Тоді  $h = gt_1^2 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{gt_1^2}{2}$ . Оскільки  $t_1 = \frac{t}{2}$ , то  $h = \frac{gt_1^2}{8}$ .

$$h = \frac{9,8 \cdot 2,2^2}{8} = 5,9 \text{ м}$$

Тіло кинуте із швидкістю  $v_0 = 10 \text{ м/с}$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  до горизонту. Знайти радіус кривизни  $R$  траєкторії тіла через час  $t=1\text{с}$  після початку руху.



*Розв'язання:*

Знайдемо час, за яке тіло підніметься до верхньої точки траєкторії. Вертикальна складова його швидкості  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt_1$ . У верхній точці траєкторії  $v_y = 0$ , тому  $v_0 \sin \alpha = gt_1$ ,

звідки  $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ ,  $t_1 = 0,7 \text{ с}$ , тобто при  $t=1 \text{ с}$  тіло знаходиться вже на спуску,

таким чином можна вважати, що тіло кинули горизонтально із швидкістю

$v_x = v_0 \cos \alpha$ . Нормальне прискорення тіла  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , де  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . З

малюнка видно, що  $a_n = g \sin \varphi$ ,  $\sin \varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ . Тоді  $a_n = g \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}$ ,

$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(v_x^2 + v_y^2) \sqrt{v_x^2 + v_y^2}}{v_x g}$  Обчислимо окремо  $v_x$  та  $v_y$ .

$v_x = v_0 \cos \alpha = 5\sqrt{2} \text{ м/с}$ ,  $v_y = g(t - t_1) = 3 \text{ м/с}$ . Підставивши числові значення, отримаємо  $R \approx 6,3 \text{ м}$ .

Вісь з двома дисками, розташованими на відстані  $l=0,5 \text{ м}$  один від одного, обертається з частотою  $n=1600 \text{ об/хв}$ . Куля, що летить уздовж осі, пробиває обидва диски; при цьому отвір від кулі в другому диску зміщений щодо отвору в першому диску на кут  $\varphi = 12^\circ$ . Знайти швидкість  $v$  кулі.

#### Розв'язання

Рівняння обертального руху

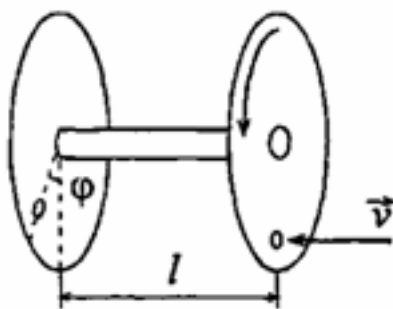
$\vec{\varphi} = \vec{\varphi}_0 + \vec{\omega}t + \frac{\vec{\beta}t^2}{2}$ . Виберемо  $\varphi_0 = 0$ . Із умови

задачі видно, що рух здійснюється з постійною кутовою швидкістю  $\omega = 2\pi n$ , отже, кутове прискорення рівне 0, тобто зсув  $\varphi = \omega t$ , звідки:

$$t = \frac{\varphi}{\omega}, \quad (1)$$

$$\omega = 2\pi n. \quad (2)$$

Швидкість кулі



$$v = \frac{l}{t} \quad (3)$$

Підставивши (2) в (1), а потім (1) в (3) отримаємо:  $v = \frac{l \cdot 2\pi n}{\varphi}$ . Провівши обчислення, знайдемо швидкість кулі  $v = 419$  м/с.

Колесо, обертаючись рівноприскорено, через час  $t=1$ хв після початку обертання набуває частоти  $n=720$  об/хв. Знайти кутове прискорення  $\varepsilon$  колеса і число оборотів  $N$  колеса за цей час.

#### Розв'язання

Кутова швидкість колеса  $\vec{\omega}(t) = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$ . У скалярному вигляді при  $\omega_0 = 0$  отримаємо  $\omega = \varepsilon t$ , крім того,  $\omega = 2\pi n$ . Звідси  $\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{n \cdot 2\pi}{t}$ ,  $\varepsilon = 1,25$  рад/с<sup>2</sup>.

Точка рухається по колу радіусом  $R=20$  см з постійним тангенціальним прискоренням  $a_\tau = 5$  см/с<sup>2</sup>. Через який час  $t$  після початку руху нормальне прискорення  $a_n$  точки буде: а) рівно тангенціальному; б) удвічі більше тангенціального?

#### Розв'язання

За умовою, обертання є рівноприскореним, тому,  $a_\tau = \frac{v}{t}$ ,  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ; звідси  $t = \frac{v}{a_\tau}$ ,  $v = \sqrt{a_n R}$ . Тоді  $t = \frac{\sqrt{a_n R}}{a_\tau}$ . а) Якщо  $a_n = a_\tau$ , то  $t = \sqrt{\frac{R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = 2$ с; б) якщо  $a_n = 2a_\tau$ , то  $t = \sqrt{\frac{2R}{a_\tau}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20}{5}} = 2,8$ с.

## Динаміка

Основний закон динаміки:

$$F = m \frac{dv}{dt} = ma .$$

Робота сили при переміщенні:

$$A = \int_{S_1}^{S_2} F_S dS ,$$

при  $F = const$ :

$$A = FS \cos \alpha .$$

Кінетична енергія тіла:

$$W_k = \frac{mv^2}{2} ,$$

потенціальна в гравітаційному полі:

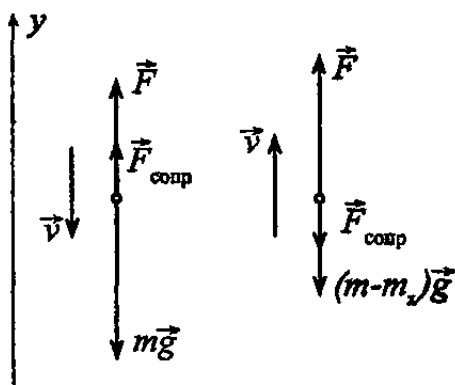
$$W_p = mgh .$$

Закон збереження імпульсу:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 + \dots + m_n v_n = const .$$

### Приклади розв'язання задач

Якої маси  $m_x$  баласт треба скинути з аеростата, що рівномірно опускається, щоб він почав рівномірно підніматися з тією ж швидкістю? Маса аеростата з баластом  $m=1600$  кг, підйомна сила аеростата  $F=12$  кН.



Вважати, що сила опору  $F_{\text{опор.}}$  повітря однакова при підйомі та спуску.

Розв'язання:

По другому закону Ньютона

$$\begin{cases} \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{опор.}} = 0; \\ \vec{F} + \vec{F}_{\text{опор.}} + (m - m_x)\vec{g} = 0 \end{cases} , \quad (1)$$

або в проекціях на вісь  $y$ :

$$\begin{cases} F - mg + F_{\text{опор}} = 0 \\ F - F_{\text{опор}} - (m - m_x)g = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Перше рівняння отриманої системи (2) описує рух аеростату, що опускається, друге – аеростату, що піднімається. Розкривши дужки і склавши перше рівняння з другим, отримаємо:  $m_x = \frac{2(mg - F)}{g} = 2\left(m - \frac{F}{g}\right); m_x = 752 \text{ кг}$ .

До нитки підвішений вантаж масою  $m=1 \text{ кг}$ . Знайти силу натягнення нитки  $T$ , якщо нитку з вантажем: а) піднімати з прискоренням  $a=5 \text{ м/с}^2$ ; б) опускати з тим же прискоренням  $a=5 \text{ м/с}^2$ .

*Розв'язання:*

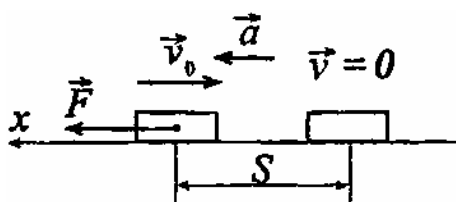
В обох випадках, а і б, використаємо другий закон Ньютона.

а)  $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$  або  $T - mg = ma$ , звідси  $T = ma_1 + mg = m(a_1 + g)$ ;  
 $T=14,8 \text{ Н}$ .

б)  $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$  або  $-mg + T = -ma_2$ , звідси  $T = mg - ma_2 = m(g - a_2)$   
 $T=4,8 \text{ Н}$ .

Автомобіль масою  $m=1020 \text{ кг}$ , рухаючись рівноуповільнено, зупинився через час  $t=5 \text{ с}$ , пройшовши шлях  $s=25 \text{ м}$ . Знайти початкову швидкість  $v_0$  автомобіля і силу гальмування  $F$ .

*Розв'язання:*



По другому закону Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$   
 або в проекції на вісь  $x$ :

$$F = ma. \quad (1)$$

Рівняння руху при рівноуповільненому русі автомобіля мають вид:

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}; \quad (2)$$

$$v_0 - at. \quad (3)$$

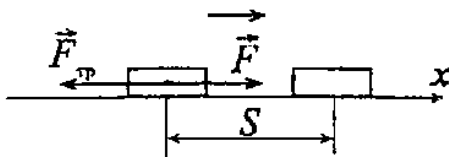
Оскільки кінцева швидкість автомобіля  $v=0$ , то з (3) початкова швидкість автомобіля  $v_0 = at$ . Підставляючи цей вираз у (2), знайдемо

$$a = \frac{2S}{t^2}. \quad (4)$$

Підставивши (4) в (1), отримаємо:  $F = \frac{2Sm}{t^2}$ ;  $F = 2,04\text{кН}$ .

Яку силу  $F$  треба прикласти до вагону, що стоїть на рейках, щоб вагон почав рухатися рівноприскорено і за час  $t=30\text{с}$  пройшов шлях  $s=11\text{ м}$ ? Маса вагону  $m=16\text{ т}$ . Під час руху на вагон діє сила тертя  $F_{\text{тер}}$ , рівна  $0,05$  діючої на нього сили тяжіння  $mg$ .

#### Розв'язання



По другому закону Ньютона  $\vec{F} + \vec{F}_{\text{тер}} = m\vec{a}$  або в проекції на вісь  $x$ :  $F - F_{\text{тер}} = ma$ , звідки  $F = ma + F_{\text{тер}}$ .

Оскільки рух рівноприскорений і  $v_0=0$ , то шлях  $S = at^2/2$ , звідки  $a = \frac{2S}{t^2}$ .

За умовою  $F_{\text{тер}}=0,05mg$ , тоді  $F = m \cdot \frac{2S}{t^2} + 0,05mg$ ;  $F = 8,2\text{кН}$ .

Тіло масою  $m=0,5\text{ кг}$  рухається прямолінійно, причому залежність пройденого тілом шляху  $s$  від часу  $t$  дається рівнянням  $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ , де  $C=5\text{ м/с}^2$  і  $D=1\text{ м/с}^3$ . Знайти силу  $F$ , що діє на тіло в кінці першої секунди руху.

#### Розв'язання

По другому закону Ньютона  $F = ma$ , де  $a = d^2s / dt^2$ .

$$\frac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2; \quad \frac{d^2s}{dt^2} = 2C - 6Dt = a \text{ звідси } F = m(2c - 6Dt); F = 2\text{Н}.$$

Молекула масою  $m=4,65 \cdot 10^{-26}$  кг, що летить із швидкістю  $v=600$  м/с, ударяється об стінку судини під кутом  $\alpha=60^\circ$  до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти імпульс сили  $F\Delta t$ , отриманий стінкою під час удару.

*Розв'язання*

По другому закону Ньютона  $F\Delta t=m\Delta v$ . Вважаючи позитивним напрям нормалі, зовнішній до стінки, отримаємо:  $\Delta v = v_2 \cos \alpha - (-v_1 \cos \alpha)$ ;  $\Delta v = v_2 \cos \alpha + v_1 \cos \alpha$ .

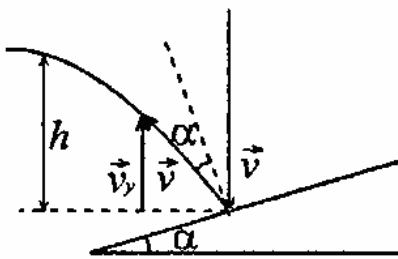
Таким чином, отримаємо  $F\Delta t = 2mv \cos \alpha$ ;  $F\Delta t=2,8 \cdot 10^{-23}$  Н·с.

Струмінь води перерізом  $S=6$  см<sup>2</sup> ударяється об стінку під кутом  $\alpha=60^\circ$  до нормалі і пружно відскакує від неї без втрати швидкості. Знайти силу  $F$ , що діє на стінку, якщо відомо, що швидкість руху води в струмені  $v=12$  м/с.

*Розв'язання*

За час  $\Delta t$  об стінку ударяється маса води:

$$m = lS\rho = Sv\Delta t\rho, \quad (1)$$



де  $S$  – поперечний переріз струменя,  $\rho$  – густина води. За законом збереження імпульсу  $F\Delta t=m\Delta v$ , звідки:

$$F = \frac{m\Delta v}{\Delta t}. \quad (2)$$

Маємо  $\Delta v = v_1 \cos \alpha - (-v_2 \cos \alpha) = \cos \alpha(v_1 + v_2)$ . За умовою  $v_1 = v_2 = v$ , звідси:

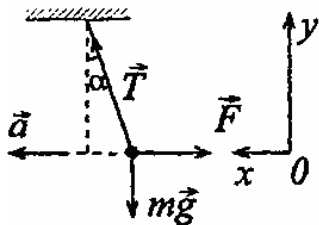
$$\Delta v = 2v \cos \alpha. \quad (3)$$

Підставляючи (1) і (3) в (2), отримаємо

$$F = \frac{Sv\Delta t\rho \cdot 2v \cos \alpha}{\Delta t} = 2Sv^2\rho \cos \alpha = 86 \text{ Н.}$$

Куля на нитці підвішена до стелі трамвайного вагону. Вагон гальмує, і його швидкість за час  $t=3$  с рівномірно зменшується від  $v_1=18$  км/ч до  $v_2=6$  км/ч. На який кут відхилиться при цьому нитка з кулею?

### Розв'язання



Розглянемо положення кулі щодо системи відліку, пов'язаної із стелею вагону. Оскільки вагон рухається з прискоренням, то система є неінерціальною. Рівняння руху у векторній формі:

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F} = 0, \quad (1)$$

де  $F = -ma$ , тоді рівняння (1) в проєкціях на вісь  $x$ :

$$T \sin \alpha = ma \quad (2)$$

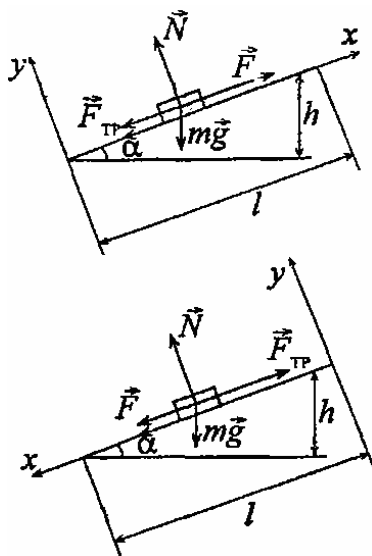
і на вісь  $y$ :

$$T \cos \alpha - mg = 0. \quad (3)$$

Розділивши (2) на (3), отримаємо  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$ , звідки  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a}{g}$  або

враховуючи, що  $a = \frac{\Delta v}{t}$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg}(\Delta v / gt)$ . Підставляючи числові данні,

отримаємо  $\alpha \approx 6^\circ$ .



На автомобіль масою  $m=1$  т під час руху діє сила тертя  $F_{\text{тер}}$ , рівна 0,1 його ваги. Знайти силу тяги  $F$ , що розвивається мотором автомобіля, якщо автомобіль рухається з постійною швидкістю: а) в гору з ухилом 1 м на кожних 25 м шляху; б) під гору з тим же ухилом.

### Розв'язання

Рівняння руху автомобіля у векторній формі

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + F_{\text{тер}} + \vec{F}; \quad v = \text{const}, \quad \text{отже } a=0.$$

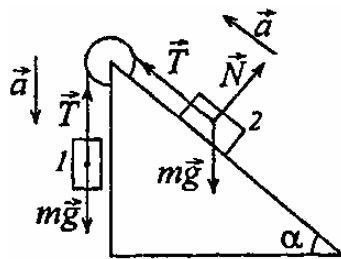


а) У проекції на вісь  $x$ :  $0 = -mg \sin \alpha - F_{\text{тер.}} + F$ ; на вісь  $y$ :  $0 = N - mg \cos \alpha$ , де  $\sin \alpha = \frac{h}{l} = 0,04$ ,  $\cos \alpha = 0,999$ , звідки  $N = mg \cos \alpha$ .  
 $F_{\text{тер.}} = kN = kmg \cos \alpha$ ;  $F = mg \sin \alpha + kmg \cos \alpha$ ;  $F = mg(\sin \alpha + k \cos \alpha)$  або  $F = 1,37$  кН.

б) У проекції на вісь  $x$ :  $0 = F + mg \sin \alpha - F_{\text{тер.}}$ , на вісь  $y$ :  $N = mg \cos \alpha$ .  
 $F = F_{\text{тер.}} - mg \sin \alpha$ ;  $F = kmg \cos \alpha - mg \sin \alpha$ ;  $F = mg(k \cos \alpha - \sin \alpha)$ .  
 $F = 590$  Н.

Невагомий блок укріплений у вершині похилої площини, що складає з горизонтом кут  $\alpha = 30^\circ$ . Гирі 1 і 2 однакової маса  $m_1 = m_2 = 1$  кг зв'язані ниткою і перекинуті через блок. Знайти прискорення  $a$ , з яким рухаються гирі, і силу натягнення нитки  $T$ . Тертям гирі об похилу площину і тертям в блоці нехтувати.

*Розв'язання:*



Нехай  $m_1 = m_2 = m$ . Запишемо рівняння другого закону Ньютона для першої і другої гирі в проекціях на напрям їх руху з урахуванням  $T_1 = T_2 = T$ :

$$\begin{cases} mg - T = ma \\ T - mg \sin \alpha = ma \end{cases} \quad (1)$$

З першого рівняння системи (1) маємо:

$$T = m(g - a). \quad (2)$$

Підставимо (2) в (1), отримаємо:  $g(1 - \sin \alpha) + 2a$ , звідки  $a = g(1 - \sin \alpha) / 2$ . Підставимо числові значення, отримаємо:  $a = 2,45$  м/с<sup>2</sup> і  $T = 7,35$  Н.

При підйомі вантажу масою  $m = 2$  кг на висоту  $h = 1$  м сила  $F$  здійснює роботу  $A = 78,5$  Дж. З яким прискоренням  $a$  піднімається вантаж?

### Розв'язання

По другому закону Ньютона в проекції на напрям руху вантажу маємо  $ma = F - mg$ , звідки  $F = ma + mg$ .

За умовою роботу  $A$  здійснює сила  $F$ , отже

$$A = Fh \cos 0 = Fh = mah + mgh, \quad (1)$$

тобто робота  $A$  йде на збільшення потенційної енергії вантажу і на надання йому прискорення. З рівняння (1) знайдемо  $a = \frac{A - mgh}{hm}$ ;  $a = 29,4 \text{ м/с}^2$ .

Яку роботу  $A$  необхідно виконати, щоб змусити тіло масою  $m=2\text{кг}$ : а) збільшити швидкість  $v_1=2 \text{ м/с}$  до  $v_2=5 \text{ м/с}$ ; б) зупинитися при початковій швидкості  $v_0=8 \text{ м/с}$ ?

### Розв'язання

Виконана робота піде на приріст кінетичної енергії:

$$\text{а) } A_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}; A_1 = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}; A_1 = 21 \text{ Дж.}$$

$$\text{б) } A_2 = W_{k2} - W_{k1}. \text{ Оскільки } W_{k2} = 0 \text{ то } A_2 = -W_{k1} = -mv_0^2 / 2; A = -6,4.$$

Знак «-» говорить про те, що робота здійснюється силою тертя.

Знайти роботу  $A$ , яку необхідно виконати, щоб збільшити швидкість руху тіла масою  $m=1 \text{ т}$  від  $v_1=2 \text{ м/с}$  до  $v_2=6 \text{ м/с}$  на шляху  $s=10\text{м}$ . На всьому шляху діє сила тертя  $F_{\text{тер.}}=2 \text{ Н}$ .

### Розв'язання

Частина виконаної роботи піде на приріст кінетичної енергії, а інша частина – на подолання сили тертя.  $A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + A_{\text{тер.}}$ , де  $A_{\text{тер.}} = F_{\text{тер.}} \cdot s$

$$\text{тоді } A = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + F_{\text{тер.}} \cdot s; A = 16,02 \text{ кДж.}$$

Яку масу  $m$  бензину витрачає двигун автомобіля на шляху  $s=100$  км, якщо при потужності двигуна  $N=11$  кВт швидкість його руху  $v=30$  км/ч? К.п.д. двигуна  $\eta=0,22$ , питома теплота згорання бензину  $q=46$  МДж/кг.

*Розв'язання*

При переміщенні автомобіля на відстань  $s$  його двигун здійснює роботу

$$A = \frac{Nt}{\eta} = \frac{Ns}{\eta v}. \text{ При цьому витрачається маса бензину } m = \frac{A}{q} = \frac{Ns}{q\eta v}; m = 13 \text{ кг.}$$

Камінь падає з деякої висоти протягом часу  $t=1,43$  с. Знайти кінетичну  $W_k$  і потенційну  $W_n$  енергії каменя в середній точці шляху. Маса каменя  $m=2$ кг

*Розв'язання*

У верхній точці камінь володів потенційною енергією  $W_n = mgH$  де

$$H = \frac{gt^2}{2} \text{ (} t \text{ – час падіння до землі). Потенційна енергія каменя в середній}$$

точці шляху  $W_n = mgh$  де  $h = \frac{H}{2}$ . Таким чином

$$W_n = mg \frac{H}{2} = \frac{mg^2 t^2}{4}; W_n = 98 \text{ Дж. Кінетичну енергію камінь набув за рахунок}$$

спаду потенційної енергії. У середній точці шляху  $W_k = W_n = 98$  Дж, оскільки

$$mgH - mgh = mg \frac{H}{2} = W_k.$$

Тіло масою  $m=10$ г рухається по колу радіусом  $R=6,4$  см. Знайти тангенціальне прискорення  $a_\tau$  тіла, якщо відомо, що до кінця другого обороту після початку руху його кінетична енергія  $W_k=0,8$  МДж.

*Розв'язання*

Знайдемо кутове прискорення:

$$a_\tau = \varepsilon R; \tag{1}$$

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t}. \quad (2)$$

Кутова швидкість  $\omega = 2\pi n = \frac{2\pi N}{t}$ , звідси

$$t = \frac{2\pi N}{\omega}. \quad (3)$$

З іншої сторони:

$$\omega = \frac{v}{R}. \quad (4)$$

Швидкість знайдемо з рівняння кінетичної енергії:  $W_k = \frac{mv^2}{2}$ , звідси

$$v = \sqrt{\frac{2W_k}{m}}. \quad (5)$$

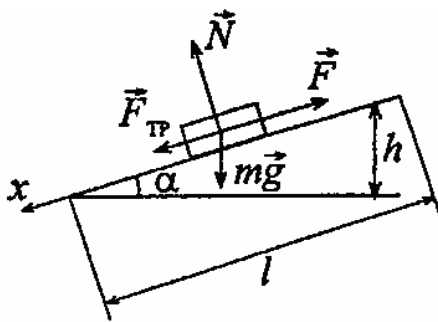
Підставивши рівняння (5) в (4), отримаємо

$$\omega = \sqrt{\frac{2W_k}{mR^2}}. \quad (6)$$

Підставивши рівняння (3) в (2), з урахуванням (6), знайдемо:

$$\varepsilon = \frac{\omega^2}{2\pi N} = \frac{2W_k}{mR^2\pi N}. \text{ Тоді з (1): } a_\tau = \frac{W_k R}{mR^2\pi N} = \frac{W_k}{mR\pi N}; a_\tau \approx 0,2 \text{ м/с}^2.$$

Автомобіль масою  $m=2$  т рухається в гору з ухилом 4 м на кожних 100м шляху. Коефіцієнт тертя  $k=0,08$ . Знайти роботу  $A$ , що здійснюється двигуном автомобіля на шляху  $s=3$ км., і потужність  $N$  що розвивається



двигуном, якщо відомо, що шлях  $s=3$  км був пройдений за час  $t=4$  хв.

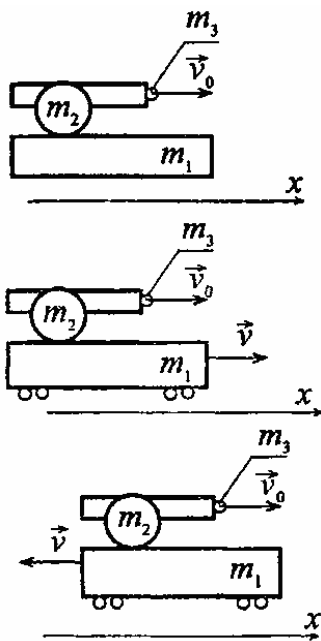
*Розв'язання*

У разі рівномірного руху автомобіля  $a=0$ , тоді згідно другому закону Ньютона сила тяги двигуна  $F = F_{\text{тер.}} + mg \sin \alpha$  або

$F = mg(k \cos \alpha + \sin \alpha)$  де  $\sin \alpha = h/l$ ;  $\sin \alpha = 0,04$ ;  $\cos \alpha = 0,999$ . Робота сили  $F$  на шляху  $s$ :  $A = Fs = mgs(k \cos \alpha + \sin \alpha)$ ;  $A = 7 \text{ МДж}$ . Потужність двигуна  $N = A/t$ ;  $N = 29,2 \text{ кВт}$ .

На рейках стоїть платформа масою  $m_1 = 10 \text{ т}$ . На платформі закріплено гармата масою  $m_2 = 5 \text{ т}$ , з якого робиться постріл уздовж рейок. Маса снаряда  $m_3 = 100 \text{ кг}$ ; його початкова швидкість відносно гармати  $v_0 = 500 \text{ м/с}$ . Знайти швидкість  $u$  платформи в перший момент після пострілу, якщо: а) платформа стоїть нерухомо; б) платформа рухалася із швидкістю  $v = 18 \text{ км/год}$  і постріл був зроблений в напрямі, протилежному напрямку її руху.

*Розв'язання:*



а) При нерухомій платформі початкова швидкість снаряда відносно землі рівна його швидкості  $v_0$  відносно гармати. Систему «платформа-гармата-снаряд» можна вважати замкненою в проекції на вісь  $x$  за умови, що силою тертя кочення платформи можна нехтувати. Тоді в проекції на вісь  $x$  імпульс системи до пострілу  $p = (m_1 + m_2 + m_3)v = 0$ , оскільки  $v = 0$ . Імпульс системи після пострілу  $p' = m_3 v_0 + (m_1 + m_2)u$ . За законом збереження імпульсу  $p = p'$  або

$m_3 v_0 + (m_1 + m_2)u = 0$ , звідки  $u = \frac{m_3 v_0}{m_1 + m_2} = 5,14 \text{ км/год}$ . Знак «-» вказує, що

платформа почала рухатися в напрямі, протилежному напрямку руху снаряда.

б) Якщо постріл був зроблений у напрямі руху платформи, то початкова швидкість снаряда відносно землі рівна  $v_0 + v$ . На підставі закону збереження імпульсу маємо:

$$(m_1 + m_2 + m_3)v = m_3(v_0 + v) + (m_1 + m_2)u \quad (1),$$

звідки  $u = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v - m_3(v_0 + v)}{m_1 + m_2}$ ;  $u = 6 \text{ км / год}$ .

в) Якщо постріл був зроблений в напрямі, протилежному напрямку руху платформи, то при  $v_0 > 0$  маємо  $v < 0$ . Тоді рівняння (1) має вигляд:

$$-(m_1 + m_2 + m_3)v = m_3(v_0 - v) + (m_1 + m_2)u, \quad \text{звідки}$$

$$u = -\frac{(m_1 + m_2 + m_3)v + m_3(v_0 - v)}{m_1 + m_2} = -30 \text{ км / год}$$

Ковзаняр масою  $M=70 \text{ кг}$ , стоячи на ковзанах на льоду, кидає в горизонтальному напрямі камінь масою  $m=3 \text{ кг}$  із швидкістю  $v=8 \text{ м/с}$ . На яку відстань  $s$  відкотиться при цьому ковзаняр, якщо коефіцієнт тертя ковзанів об лід  $k=0,02$ ?

#### Розв'язання

Рух ковзаняра є рівноуповільненим, пройдений ним шлях  $s = \frac{v_0^2}{2a}$ . За

законом збереження імпульсу  $Mv_0 = mv$ , звідки  $v_0 = \frac{mv}{M}$ .

Прискорення  $a$  можна знайти по другому закону Ньютона:  $F_{\text{тер}} = ma$ .

Оскільки  $F_{\text{тер}} = kmg$ , то  $ma = kmg$ ;  $a = kg$ . Підставивши отримані вирази в

перше рівняння, отримаємо  $s = \frac{m^2 v^2}{2M^2 kg}$ ;  $s = 0,3 \text{ м}$ .

Із гармати масою  $m_1=5 \text{ т}$  вилітає снаряд масою  $m_2=100 \text{ кг}$ . Кінетична енергія снаряда при вильоті  $W_{k2}=7,5 \text{ Мдж}$ . Яку кінетичну енергію  $W_{k1}$  отримує гармата унаслідок віддачі?

### Розв'язання

Згідно закону збереження імпульсу  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ . Кінетична енергія гармати відразу після пострілу  $W_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ . Кінетична енергія снаряда

$$W_{k2} = \frac{m_1 v_2^2}{2}; \quad v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1}, \text{ а } v_2^2 = \frac{2W_{k2}}{m_2} \text{ тоді } v_1^2 = \frac{m_2^2 2W_{k2}}{m_1^2 \cdot m_2}.$$
 Таким чином,

$$\text{отримаємо } W_{k1} = \frac{m_1 2m_2 W_{k2}}{2m_1^2} = \frac{m_2}{m_1} W_{k2}; W_{k1} = 150 \text{ кДж}$$

Тіло масою  $m_1=5$  кг ударяється об нерухоме тіло масою  $m_2=2,5$  кг. Кінетична енергія системи двох тіл безпосередньо після удару стала  $W_k=5$  Дж. Вважаючи удар центральним і непружним, знайти кінетичну енергію  $W_{k1}$  першого тіла до удару.

### Розв'язання

Рух здійснюється уздовж горизонтальної осі. Згідно закону збереження імпульсу

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u, \quad (1)$$

де  $v_1$  – швидкість першого тіла до удару,  $u$  – швидкість системи двох тіл після удару.

Кінетична енергія першого тіла до удару:

$$W_{k1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} \quad (2)$$

$$\text{З (1) } v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u}{m_1}.$$

Знайдемо  $u$  із виразу для кінетичної енергії системи двох тіл після удару:  $W_k = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u^2}{2}$ , звідки  $u = \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}$ , тоді

$$v_1 = \frac{(m_1 + m_2) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot W_k}{(m_1 + m_2)}}}{m_1}, \text{ або } v_1 = \frac{\sqrt{2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}}{m_1}. \quad (3)$$

Підставивши (3) в (2) отримаємо  $W_{k1} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot W_k \cdot (m_1 + m_2)}{2 \cdot m_1^2}$ ;

$$W_{k1} = \frac{W_k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}. \quad W_{k1} = 7,5 \text{ Дж.}$$

Куля, що летить горизонтально, потрапляє в тіло, підвішене на невагомому жорсткому стрижні, і застряє в ньому. Маса кулі в 1000 разів менше за масу тіла. Відстань від центру тіла до точки підвісу стрижня  $l=1$  м. Знайти швидкість  $v$  кулі, якщо відомо, що стрижень з тілом відхилився від удару кулі на кут  $\alpha=10^\circ$ .

#### Розв'язання

Силу опору повітря не враховуємо, отже, систему «куля - тіло» можна вважати замкнутою. Запишемо закон збереження імпульсу і закон збереження енергії для даної системи:

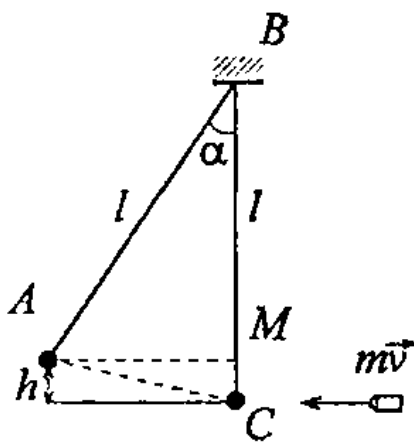
$$mv = (m + M) \cdot u, \quad (1)$$

де  $u$  – швидкість тіла разом з кулею після удару. В результаті взаємодії тіла з кулею, він набув кінетичну енергію, яка після відхилення стрижня на кут  $\alpha$  перейшла в потенціальну енергію:

$$\frac{(m + M) \cdot u^2}{2} = (M + m) \cdot g \cdot h \quad (2)$$

З (1) виразимо  $u$ :  $u = \frac{mv}{(m + M)}$ , або

$$u = \frac{mv}{1001 \cdot m} = \frac{v}{1001}. \quad \text{З (2) отримаємо}$$





$$\frac{u^2}{2} = g \cdot h. \quad \frac{v^2}{2 \cdot (1001)^2} = g \cdot h. \quad \text{Знайдемо } h: \quad BM = l \cdot \cos \alpha;$$

$$h = l - l \cdot \cos \alpha = l \cdot (1 - \cos \alpha). \text{ Тоді } v = 1001 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)}.$$

$$v \approx 550 \text{ м/с}$$

На яку частину зменшиться вага тіла на екваторі унаслідок обертання Землі навколо осі?

### *Розв'язання*

На екваторі на тіло діє сила тяжіння:

$$F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2}, \quad (1)$$

( $M$  – маса Землі;  $m$  – маса тіла;  $R$  – радіус Землі;  $G$  – гравітаційна постійна) та сила реакції опори, при цьому тіло бере участь у добовому обертанні Землі і рухається по колу радіусом  $R$ . Запишемо рівняння на підставі другого

закону Ньютона  $F - N = m\omega^2 R$ , де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  – кутова швидкість;  $T$  – період

обертання Землі навколо своєї осі ( $T=86400$  с). Тоді  $F - N = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$ ,

звідки:

$$N = F - m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R. \quad (2)$$

По третьому закону Ньютона вага тіла на екваторі:

$$P_E = N \quad (3)$$

Вага тіла, що покоїться, для будь-якої точки Землі чисельно рівній силі тяжіння:

$$P = mg. \quad (4)$$

Відносна зміна ваги тіла:

$$\delta = \frac{P - P_E}{P} \quad (5)$$

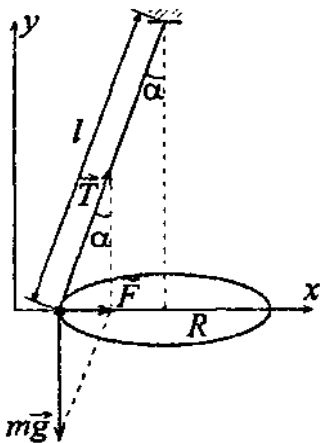
Вирішуючи спільно рівняння (1) - (3), отримаємо

$$P_E = G \frac{m \cdot M}{R^2} - \frac{4\pi^2 m R}{T^2}. \quad (6)$$

Підставляючи (4) і (6) в (5) отримаємо:

$$\delta = 1 - \frac{G \cdot M}{gR^2} - \frac{4\pi^2 R}{gT^2}. \quad (7)$$

Прийmemo прискорення вільного падіння  $g=9,8$  м/с. Підставляючи числові дані в (7), отримаємо  $\delta=0,34\%$ .



Гирка масою  $m=50$  г, прив'язана до нитки завдовжки  $l=25$  см, описує в горизонтальній площині коло. Частота обертання гирки  $n=2$  об/с. Знайти силу натягнення нитки  $T$ .

#### Розв'язання

У горизонтальній площині на гирку діє сила  $F = T \cdot \sin \alpha$ . Тоді за другим законом Ньютона

$$T \cdot \sin \alpha = m a_n, \quad \text{де} \quad \sin \alpha = \frac{R}{l}. \quad \text{Враховуючи,}$$

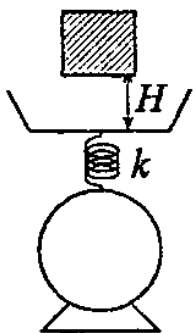
$$\text{що } a_n = \omega^2 R = (2\pi \cdot n)^2 R, \quad \text{запишемо:} \quad (2\pi \cdot n)^2 R m = T \frac{R}{l}, \quad \text{звідки}$$

$$T = (2\pi \cdot n)^2 l m. \quad T=1,96 \text{ Н.}$$

Груз масою  $m=1$  кг падає на чашку вагів з висоти  $H=10$  см. Які показання вагів  $F$  у момент удару, якщо після заспокоєння гойдань чашка вагів опускається на  $h=0,5$  см?

### Розв'язання

За законом збереження енергії у момент удару



$$W_{n1} = W_{n2}, \text{ де } W_{n1} = mgH, \text{ а } W_{n2} = \frac{kx_1^2}{2}. \text{ Звідси } mgH = \frac{kx_1^2}{2};$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2mgH}{k}} - \text{деформація пружини вагів у момент удару.}$$

Після заспокоєння гойдань наступає рівновага  $mg = F_2$ , де

$$F_2 = kx_2, \text{ за законом Гука, причому } x_2 = h. \text{ Тоді } mg = kh;$$

$$k = \frac{mg}{h}. \text{ Свідчення вагів у момент удару } F = mg + F_1, \text{ де } F_1 = kx_1 = k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}$$

$$- \text{ за законом Гука } F = mg + k\sqrt{\frac{2mgH}{k}}; \quad F = mg + \sqrt{2mgHk};$$

$$F = mg + \sqrt{2mgH \frac{mg}{h}}; \quad F = mg + mg\sqrt{\frac{2H}{h}}; \quad F = mg\left(1 + \sqrt{\frac{2H}{h}}\right). \quad \text{Звідки}$$

$$F = 72,5 \text{ Н.}$$

М'яч радіусом  $R=10$  см плаває у воді так, що його центр мас знаходиться на  $H=9$  см вище за поверхню води. Яку роботу необхідно виконати, щоб занурити м'яч у воду до діаметральної площини?

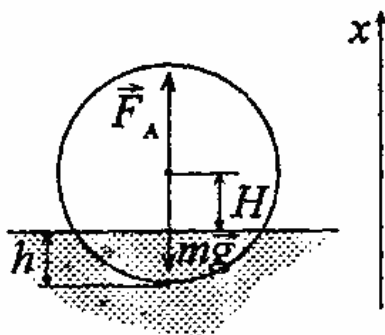
### Розв'язання

М'яч плаває, якщо сила тяжіння, що діє на нього, врівноважується силою Архімеда, тобто  $mg = F_A$ , або:

$$mg = \rho_0 V_0 g \quad (1)$$

$V_0$  – об'єм сегменту заввишки  $h$ , що знаходиться у воді в рівновазі,  $\rho_0$  – щільність

води,  $m$  – маса м'яча.



Очевидно, що  $H + h = R$ , тобто радіусу м'яча. Якщо тепер занурити м'яч у воду на глибину  $x$ , то сила Архімеда перевищить силу тяжіння, що діє на м'яч, і результуюча сила, що виштовхує м'яч з води, буде:

$$F_x = F'_A - mg. \quad (2)$$

Проти цієї сили  $F_x$  і повинна бути виконана робота. Сила Архімеда:

$$F'_A = \rho_0 V g, \quad (3)$$

де  $V$  – об'єм сегменту заввишки  $h + x$ . З (1) - (3) маємо  $F_x = \rho_0 V g - \rho_0 V_0 g = \rho_0 g (V - V_0) = \rho_0 g V_x$ ,  $V_x$  – об'єм кульового шару висотою  $x$ . Кульовий сегмент заввишки  $x$  має об'єм кульового шару

$$V_x = V - V_0 = \frac{\pi(x+h)^2}{3}(3R - (x+h)) - \frac{\pi h^2}{3}(3R - h). \text{ Тоді:}$$

$$F_x = \rho_0 g V_x = \frac{\pi \rho_0 g}{3} (3R(x+h)^2 - (x+h)^3 - h^2(3R-h)). \quad (4)$$

Робота, яку необхідно виконати при зануренні м'яча до діаметральної площини, буде:

$$A = \int_0^H F_x dx. \quad (5)$$

Підставимо (4) в (5), проінтегруємо і врахуємо, що  $H + h = R$ , отримаємо, після підстановки даних завдання,  $A = 0,74$  Дж.

Знайти силу гравітаційної взаємодії  $F$  між двома протонами, що знаходяться на відстані  $r = 10^{-6}$  м один від одного. Маса протона  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг.

#### Розв'язання

Сила гравітаційної взаємодії виражається  $F = G \frac{m^2}{r^2}$ . Підставляючи числові дані, отримаємо:  $F = 1,86 \cdot 10^{-11}$ .

Порівняти прискорення вільного падіння у поверхні Місяця  $g_1$  з прискоренням вільного падіння у поверхні Землі  $g_3$ .

*Розв'язання*

Відповідно до закону унесвітнього тяжіння, тіло масою  $m$ , що знаходиться у поверхні Землі, притягується нею з силою  $P = G \frac{m \cdot M_3}{R_3^2}$ , де  $M_3$

– маса Землі,  $R_3$  – її радіус. З іншого боку,  $P = mg$ . Прирівнюючи ці величини, знайдемо, що  $g_3 = G \frac{M_3}{R_3^2}$ . Прискорення вільного падіння у

поверхні Місяця:  $g_M = G \frac{M_M}{R_M^2}$ , де  $M_M$  і  $R_M$  – маса і радіус Місяця. Звідси

$$\frac{g_M}{g_3} = \frac{M_M \cdot R_3^2}{R_M^2 \cdot M_3}, \quad g_M = 0,165 \cdot g_3.$$

Знайти лінійну швидкість  $v$  руху Землі по круговій орбіті.

*Розв'язання*

Лінійна швидкість руху по колу  $v = \omega \cdot R$ , де  $\omega$  – частота обертання,  $R$  – відстань до Сонця.  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , де  $T$  – період обертання Землі навколо Сонця.

Звідси  $v = 30$  км/с.

На якій висоті до від поверхні Землі прискорення вільного падіння  $g = 1 \frac{M}{c^2}$ ?

*Розв'язання*

У поверхні Землі на тіло масою  $m$  діє сила  $P = mg = G \frac{m \cdot M}{R^2}$ , де  $M$  та  $R$  – маса та радіус Землі, а на висоті  $h$  –  $P_h = mg_h = G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}$ . Тоді

$$\frac{g_h}{g} = \frac{R^2}{(R+h)^2}. \text{ Виразимо } h: (R+h)^2 = \frac{g \cdot R^2}{g_h}; h = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{g_h}} - R. \text{ Підставимо}$$

числові значення та отримаємо:  $h = 13590$  км.

### Динаміка обертального руху

Момент сили:

$$\vec{M} = [\vec{F}, \vec{r}],$$

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon},$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення.

Момент інерції матеріальної точки:

$$I = mr^2.$$

Момент інерції твердого тіла відносно до його осі обертання:

$$I = \int r^2 dm$$

Момент інерції для тіл правильної геометричної форми:

а) однорідний циліндр (диск):

$$I = \frac{1}{2} mr^2;$$

б) однорідна куля:

$$I = \frac{2}{5} mr^2;$$

в) однорідний стрижень з віссю, що проходить через середину перпендикулярно до його довжини:

$$I = \frac{1}{12} ml^2$$

Теорема Штейнера:

$$I = I_0 + md^2,$$

де  $d$  – відстань від осі до центра тяжіння.

Кінетична енергія тіла, що обертається:

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}.$$

### *Приклади розв'язання задач*

Знайти момент інерції  $J$  і момент імпульсу  $L$  земної кулі відносно осі обертання.

#### *Розв'язання*

Момент інерції кулі  $J = \frac{2}{5}MR^2$ , підставляючи значення маси і радіусу

Землі, отримаємо  $J = 97,36 \cdot 10^{36} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Момент імпульсу  $L = J \cdot \omega$ , де  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,

отже  $L = \frac{2J\pi}{T}$ . Період обертання Землі  $T=24$  години. Підставляючи числові

дані, отримаємо  $L = 7 \cdot 10^{33} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$ .

Маховик, момент інерції якого  $J = 63,6 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$  обертається з кутовою швидкістю  $\omega=31,4$  рад/с. Знайти момент сил гальмування  $M$ , під дією якого маховик зупиняється через час  $t=20$  с. Маховик вважати однорідним диском.

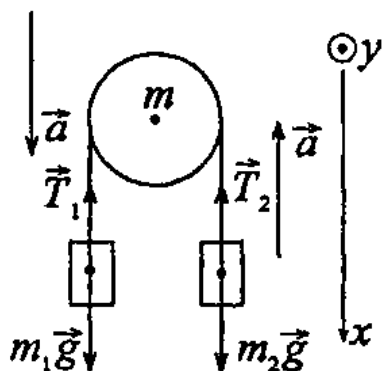
#### *Розв'язання*

Момент сил гальмування  $M = J \cdot \varepsilon$ , де  $\varepsilon$  – кутове прискорення, яке дорівнює  $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ , оскільки маховик обертається рівносповільнено. Тоді

$$M = \frac{\omega \cdot J}{t}; M \approx 100 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Дві гири з масами  $m_1=2$  кг і  $m_2=1$  кг зв'язані ниткою, перекинutoю через блок масою  $m=1$  кг. Знайти прискорення  $a$ , з яким рухаються гири, і сили натягнення  $T_1$  і  $T_2$  ниток, до яких підвішені гири. Блок вважати однорідним диском. Тертям нехтувати.

### Розв'язання



Запишемо у векторній формі рівняння поступального руху першої і другої гири:  $m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1$ ;  $m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$  і рівняння обертального руху диска  $J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ , де  $M_1$  – момент сили натягнення нитки  $T_1$ ,  $M_2$  – момент сили натягнення нитки  $T_2$ .

Спроектуємо перші два рівняння на вісь  $x$ , а останнє на вісь  $y$  і додамо рівняння кінематичного зв'язку. Отримаємо систему 4 рівнянь:

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \quad (1)$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2; \quad (2)$$

$$J \varepsilon = R T_1 - R T_2; \quad (3)$$

$$a = \varepsilon R. \quad (4)$$

Підставимо (4) в (3):

$$J \frac{a}{R} = R(T_1 - T_2). \quad (5)$$

Віднімемо (2) з (1), підставимо в отриманий вираз (5) і знайдемо:

$$a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}} = 2,8 \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (1) і (2), отримаємо  $T_1 = m_1(g - a)$ ;  $T_1 = 14 \text{ Н}$ .  
 $T_2 = m_2(g - a)$ ;  $T_2 = 12,6 \text{ Н}$ .

Диск масою  $m=2 \text{ кг}$  котиться без ковзання по горизонтальній площині із швидкістю  $v=4 \text{ м/с}$ . Знайти кінетичну енергію  $W_k$  диска.

### Розв'язання

У завданні розглядається так званий «плоский рух». Повна кінетична енергія диска складається з кінетичної енергії поступальної руху точки



центру мас і кінетичної енергії обертання відносно осі, що проходить через

центр мас:  $W_k = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}$ . Оскільки  $J = \frac{mR^2}{2}$  і  $\omega = \frac{v}{R}$ , де  $m$  – маса диска,

$R$  – радіус диска, то  $W_k = \frac{3mv^2}{4}$ .  $W_k = 24$  Дж.

Обруч та диск однакової маси  $m_1 = m_2$  котяться без ковзання з однією і тією ж швидкістю  $v$ . Кінетична енергія обруча  $W_{k1} = 40$  Н. Знайти кінетичну енергію  $W_{k2}$  диска.

### Розв'язання

Припустимо  $m_1 = m_2 = m$ . Кінетична енергія обруча і диска складається з кінетичної енергії поступального руху і кінетичної енергії обертання:

$$W_{k1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_1\omega_1^2}{2}, \quad (1)$$

$$W_{k2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J_2\omega_2^2}{2}. \quad (1)$$

Момент інерції обруча  $J = mR_1^2$ . Кутова швидкість  $\omega_1 = \frac{v}{R_1}$ . Момент

інерції диска  $J = \frac{1}{2}mR_2^2$ ; частота  $\omega_2 = \frac{v}{R_2}$ . Проведемо наступні

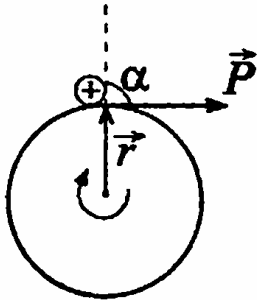
перетворення:  $J_1\omega_1^2 = mR_1^2 \frac{v^2}{R_1^2} = mv^2$ ;  $J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}mR_2^2 \frac{v^2}{R_2^2} = \frac{1}{2}mv^2$ . Тоді, з

урахуванням (1) та (2), можна записати  $W_{k1} = mv^2$ ,  $W_{k2} = \frac{3mv^2}{4}$  або

$$W_{k2} = \frac{3W_{k1}}{4}. W_{k2} = 30 \text{ Дж.}$$

Кінетична енергія валу, що обертається з частотою  $n=5$  об/с,  $W_k = 60$  Дж. Знайти момент імпульсу  $L$  валу.

*Розв'язання*



Момент імпульсу – вектор, напрям якого визначається за правилом векторного добутку  $\vec{L} = [\vec{R} \times \vec{p}]$ , де  $\vec{p} = m\vec{v}$ , а модуль рівний:

$$L = Rp \sin \alpha = mvR, \quad (1)$$

оскільки  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Кінетична енергія валу:

$$W_k = \frac{J\omega^2}{2}, \quad (2)$$

де

$$J = \frac{mR^2}{2}, \quad (3)$$

$$\omega = 2\pi n. \quad (4).$$

Вирішуючи спільно рівняння (2) - (4) отримаємо:  $W_k = mR^2 \pi^2 n^2$ , звідки:

$$m = \frac{W_k}{R^2 \pi^2 n^2}, \quad (5)$$

$$v = 2\pi nR. \quad (6).$$

Підставивши (5) і (6) в (1), знайдемо  $L = \frac{2W_k}{\pi n}$ ;  $L = 7,6 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$ .

Мідна куля радіусом  $R=10$  см обертається з частотою  $n=2$  об/с навколо осі, що проходить через її центр. Яку роботу  $A$  необхідно виконати, щоб збільшити кутову швидкість  $\omega$  обертання кулі удвічі?

### Розв'язання

Кінетична енергія обертання кулі  $W_k = \frac{J\omega^2}{2}$ , де момент інерції кулі  $J = \frac{2}{5}mR^2$ . Робота зі збільшення кутової швидкості обертання кулі буде дорівнювати приросту її кінетичної енергії.  $A = W_{k2} - W_{k1}$ , де  $W_{k1} = \frac{J\omega_1^2}{2}$ ;

$$W_{k2} = \frac{J\omega_2^2}{2} = \frac{4J\omega_1^2}{2}. \text{ Звідси:}$$

$$A = \frac{4J\omega_1^2 - J\omega_1^2}{2} = \frac{3}{2}J\omega_1^2; \quad (1)$$

$$\omega_1 = 2\pi n. \quad (2)$$

Маса кулі  $m = V\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$ ,  $\rho = 8,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ , тоді

$$J = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \rho R^2 = \frac{8}{15} \pi R^2 \rho. \quad (3)$$

Підставивши (2) і (3) в (1), отримаємо

$$A = \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{15} \pi R^5 \rho 4\pi^2 n^2 = \frac{16}{15} \pi^3 R^5 \rho n^2; \quad A=34,1 \text{ Дж.}$$

Колесо, обертаючись рівноуповільнено, зменшило за час  $t=1$  хв. частоту обертання від  $n_1=300$  об/хв. до  $n_2=180$  об/хв. Момент інерції колеса  $J = 2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ . Знайти кутове прискорення  $\varepsilon$  колеса, момент сил гальмування  $M$ , роботу  $A$  сил гальмування і число обертів  $N$ , зроблених колесом за час  $t=1$  хв.

### Розв'язання

Перетворимо числові одиниці в систему СІ:  $t=60$  с,  $n_1=5$  об/с,  $n_2=3$  об/с. Оскільки обертання рівноуповільнене, то число обертів можна

визначити так:  $N = \frac{n_1 + n_2}{2} t$ ;  $N = 240 \text{ об.}$  Кутове прискорення  $\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{t}$ .

Маємо:  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1)$ , таким чином,  
 $\varepsilon = \frac{2\pi(n_2 - n_1)}{t}$ . Підставивши числові значення, отримаємо  $\varepsilon = -0,21 \text{ рад} / \text{с}^2$ .

Момент сил гальмування  $M = J\varepsilon$ ;  $M = 0,42 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Робота сил гальмування

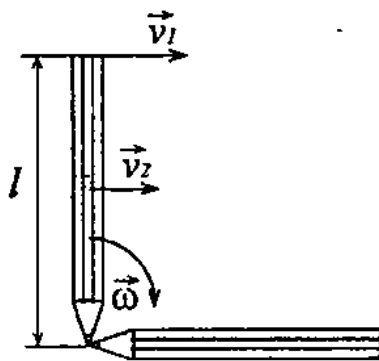
дорівнює приросту кінетичної енергії  $-A = W_{k1} - W_{r2} = \frac{J\omega_2^2 - J\omega_1^2}{2}$ ;

$$A = \frac{J}{2} \left( (2\pi n_1)^2 - (2\pi n_2)^2 \right) = 2\pi^2 J (n_1^2 - n_2^2); A = 630 \text{ Дж.}$$

Олівець завдовжки  $l = 15 \text{ см}$ , поставлений вертикально, падає на стіл. Яку кутову швидкість  $\omega$  і лінійну швидкість  $v$  матиме в кінці падіння середина і верхній кінець олівця?

#### Розв'язання

Розглянемо рух центру мас олівця. У вертикальному положенні він має потенціальну енергію, яка при падінні переходить в кінетичну енергію обертання:



$$\frac{J\omega_1^2}{2} = mg \frac{l}{2}. \quad (1)$$

Момент інерції олівця відносно осі, що проходить через його кінець, знайдемо за

теоремою Штейнера:

$$J = \frac{1}{12} ml^2 + m \left( \frac{l}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} ml^2. \quad (2)$$

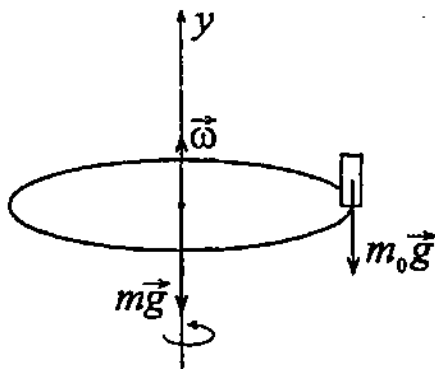
Підставивши (2) в (1), отримаємо  $\frac{l\omega_1^2}{3} = g$ , звідки  $\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ ;

$\omega_1 = 14 \text{ рад} / \text{с}$ . Оскільки  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , а лінійна швидкість  $v = \omega R$ , то

швидкість кінця олівця  $v_1 = \omega \cdot l = 2,1 \frac{m}{c}$ . Швидкість середини  $v_2 = \omega \cdot \frac{l}{2} = 1,05 \frac{m}{c}$ .

Горизонтальна платформа масою  $m=100$  кг обертається навколо вертикальної осі, що проходить через центр платформи, з частотою  $n_1=10$  об/хв. Людина масою  $m_0=60$  кг стоїть при цьому на краю платформи. З якою частотою  $n_2$  почне обертатися платформа, якщо людина перейде від краю платформи до її центру? Вважати платформу однорідним диском, а людину – точковою масою.

### Розв'язання



Система «людина - платформа» замкнута в проекції на вісь  $y$ , оскільки моменти сил  $M_{mg} = 0$  та  $M_{m_0g} = 0$  в проекції на цю вісь. Отже, можна скористатися законом збереження моменту імпульсу. У проекції на вісь  $y$ :  $J_1\omega_1 = J_2\omega_2$ , де  $J_1$  – момент інерції платформи з людиною, що стоїть на її краю,  $J_2$  – момент інерції платформи з людиною, що стоїть в центрі,  $\omega_1$  та  $\omega_2$  – кутові швидкості платформи в обох випадках. Причому:

$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + m_0R^2, \quad (1)$$

$$J_2 = \frac{mR^2}{2}, \quad (2)$$

де  $R$  – радіус платформи. Підставляючи (2) в (1) і враховуючи, що  $\omega = 2\pi n$ , де  $n$  – частота обертання платформи, отримаємо

$$\left(\frac{mR^2}{2} + m_0R^2\right)2\pi n_1 = 2\pi n_2 \frac{mR^2}{2}; \quad n_2 = n_1 \frac{mR^2 + 2m_0R^2}{mR^2} = n_1 \frac{m + 2m_0}{m};$$

$$n_2 = 22 \text{ об/хв.}$$

Обруч діаметром  $D=56,5$  см висить на цвяху, вбитому в стінку, і здійснює малі коливання в площині, паралельній стіні. Знайти період коливань  $T$  обруча.

#### *Розв'язання*

Центр мас знаходиться в центрі обруча, тоді період малих коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mRg}} = 2\pi \sqrt{\frac{2J}{mDg}}, \quad \text{де } J = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2), \quad R_1 = R_2, \quad \text{таким чином,}$$

$$J = mR^2 = m \frac{D^2}{4}. \quad \text{Звідси } T = 2\pi \sqrt{\frac{2mD^2}{4mDg}} = 2\pi \sqrt{\frac{D}{2g}}; \quad T=1,5 \text{ с.}$$

### **Механіка газів та рідин**

Рівняння Бернуллі:

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gh = \text{const}$$

Формула Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v$$

#### **Приклади розв'язання задач**

Знайти швидкість  $v$  руху вуглекислого газу по трубі, якщо відомо, що за час  $t=30$  хв. через поперечний переріз труби протікає маса газу  $m=0,51$  кг. Густина газу  $\rho=7,5$  кг/м<sup>3</sup>. Діаметр труби  $D=2$  см.

#### *Розв'язання*

За час  $t$  через поперечний переріз труби проходить деякий об'єм газу циліндричної форми (маса цього об'єму газу нам відома):

$$V = \pi \frac{D^2}{4} l = \frac{m}{\rho}. \quad (1)$$

Швидкість течії вуглекислого газу  $v = \frac{l}{t}$ . З рівняння (1) знайдемо

$$l = \frac{4m}{\pi D^2 \rho}, \text{ тоді } v = \frac{4m}{\pi D^2 \rho t}; v=0,12 \text{ м/с.}$$

В дні циліндричного посуду діаметром  $D=0,5$  м є круглий отвір діаметром  $d=1$  см. Знайти залежність швидкості пониження рівня води в посуді від висоти  $h$ . Знайти значення цієї швидкості для висоти  $h=0,2$  м.

#### Розв'язання

За теоремою Бернуллі  $\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho gh = \frac{\rho v_2^2}{2}$  або

$$v_1^2 + 2gh = v_2^2, \quad (1)$$

де  $v_1$  – швидкість пониження рівня води в посуді,  $v_2$  – швидкість витікання води з отвору. В силу нерозривності струменя  $v_1 S_1 = v_2 S_2$ , звідки

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2}, \quad (2)$$

де  $S_1$  – площа поперечного перерізу посуду,  $S_2$  – площа поперечного перерізу отвору. Підставляючи (2) в (1), отримаємо  $v_1 = \frac{S_2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}$ . Оскільки

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{4} \quad \text{і} \quad S_2 = \frac{\pi d^2}{4}, \quad \text{то} \quad v_1 = \frac{d^2 \sqrt{2gh}}{\sqrt{D^4 - d^4}}. \quad \text{Оскільки} \quad d^4 \ll D^4, \quad \text{то}$$

$$v_1 \approx \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh}. \quad \text{При } h=0,2 \text{ м швидкість } v=0,8 \text{ мм/с.}$$

Кулька спливає з постійною швидкістю  $v$  в рідині, густина  $\rho_1$ , якої в 4 рази більше густини матеріалу кульки. У скільки разів сила тертя  $F_{тер}$ , що діє на спливаючу кульку, більше сили тяжіння  $mg$ , що діє на цю кульку?

*Розв'язання*

По другому закону Ньютона:

$$F_A - mg - F_{тер} = 0, \quad (1)$$

де  $F_A = \rho_1 V g$  – сила Архімеда. Враховуючи, що

$$m = \rho_2 V, \quad (2)$$

із (2)  $V = \frac{m}{\rho_2}$ , тоді:

$$F_A = 4\rho_2 \frac{m}{\rho_2} g = 4mg. \quad (3)$$

Перетворюючи (1) з урахуванням (3) отримаємо  $F_{тер} = 3mg$  або

$$\frac{F_{тер}}{mg} = 3.$$

Сталева кулька діаметром  $d=1$  мм падає з постійною швидкістю  $v=0,185$  см/с у великому сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну в'язкість  $\eta$  касторової олії.

*Розв'язання*

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона

$$mg - F_A - F = 0, \quad (1)$$

де маса кульки

$$m = \rho_c V = \rho_c \frac{\pi d^3}{6}. \quad (2)$$

Сила Архімеда

$$F_A = \rho_M V g = \rho_M g \times \frac{\pi d^3}{6}. \quad (3)$$



Сила опору масла за законом Стокса

$$F = 3\pi\eta dv. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо:  $18\eta v = d^2 g \times (p_c - p_M)$ , звідси  $\eta = \frac{d^2 g (p_c - p_M)}{18v}$ ;  $\eta = 2$  Па·с.

Пробкова кулька радіусом  $r=5$ мм спливає в сосуді, наповненому касторовою олією. Знайти динамічну і кінематичну в'язкість касторової олії, якщо кулька спливає з постійною швидкістю  $v=3,5$  см/с.

*Розв'язання:*

Оскільки кулька рухається рівномірно, то по другому закону Ньютона:

$$F_A - F - mg = 0, \quad (1)$$

де маса кульки:

$$m = \rho_n V = \rho_n \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (2)$$

Сила Архімеда:

$$F_A = \rho_M V g = \rho_M \frac{4\pi r^3}{3}. \quad (3)$$

Сила опору масла за законом Стокса:

$$F = 6\pi\eta r v. \quad (4)$$

Підставляючи рівняння (2) – (4) в (1), після нескладних перетворень отримаємо  $18\eta v = 4r^2 g (p_n - p_M)$ , звідки динамічна в'язкість:

$$\eta = \frac{2r^2 g (p_n - p_M)}{9v}; \quad \eta = 1,09 \text{ Па}\cdot\text{с. Кінематична в'язкість масла: } \nu = \eta / \rho_M;$$

$$\nu = 12,1 \text{ см}^2/\text{с}.$$

## Молекулярно-кінетична теорія та термодинаміка

Рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT.$$

Основне рівняння МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}.$$

Енергія теплового руху молекул:

$$W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT.$$

Середньоквадратична швидкість:

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Середньоарифметична швидкість:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Перший закон термодинаміки:

$$dQ = dW + dA.$$

Другий закон термодинаміки:

$$dS = \int \frac{dQ}{T} \geq 0$$

### *Приклади розв'язання задач*

Яку температуру  $T$  має маса  $m=2$  г азоту, що займає об'єм  $V=820\text{см}^3$  при тиску  $p=0,2$  МПа.

*Розв'язання:*

Температуру азоту можна визначити з рівняння Менделєєва-Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (1)$$

звідки температура азоту:

$$T = \frac{pV\mu}{mR}. \quad (2)$$

Молярна маса азоту  $\mu = 0,028$  кг/моль. Підставляючи числові дані, отримаємо:  $T = \frac{0,2 \cdot 10^6 \cdot 820 \cdot 10^{-6} \cdot 0,028}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8,31} = 280\text{K}$  або  $T = 7^\circ\text{C}$ .

У скільки разів густина повітря  $\rho_1$ , що заповнює приміщення взимку ( $t_1=7^\circ\text{C}$ ), більше його густини  $\rho_2$  влітку ( $t_2=37^\circ\text{C}$ ). Тиск газу вважати постійним.

*Розв'язання:*

Згідно рівнянню Менделєєва - Клапейрона для першого стану:

$$\frac{pV_1}{T_1} = \frac{m}{\mu} R, \quad (1),$$

для другого стану:

$$\frac{pV_2}{T_2} = \frac{m}{\mu} R. \quad (2)$$

Розділивши (1) на (2), при  $p = \text{const}$  маємо:  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m/V_2}{m/V_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ , звідки

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{T_2}{T_1}, \text{ де } T_1 = 280\text{K}, T_2 = 310\text{K}. \text{ Тоді } \frac{\rho_1}{\rho_2} = 1,1.$$

Масу  $m=5$  г азоту, що знаходиться, в закритому сосуді об'ємом  $V=4$  л при температурі  $t=20^\circ\text{C}$ , нагрівають до температури  $t=40^\circ\text{C}$ . Знайти тиск  $p_1$  і  $p_2$  газу до і після нагрівання.

### Розв'язання

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu}RT$ . За умовою

$m = const$ , тоді для першого стану  $p_1V_1 = \frac{m}{\mu}RT_1$ , для другого стану

$p_2V_2 = \frac{m}{\mu}RT_2$ , звідки  $p_1 = \frac{mRT_1}{\mu V}$ ,  $p_2 = \frac{mRT_2}{\mu V}$ . Підставляючи числові дані,

отримаємо  $p_1 = 108$  кПа;  $p_2 = 116$  кПа.

Загальновідоме жартівливе питання: «Що важче: тонна свинцю або тонна пробки?» На скільки дійсна вага пробки, яка в повітрі важить 9,8 кН, більше дійсної ваги свинцю, який в повітрі важить також 9,8 кН? Температура повітря  $t=17^\circ\text{C}$ , тиск  $p=100$  кПа.

### Розв'язання

На тіла, що знаходяться в повітрі, діє виштовхуюча сила Архімеда  $F_A = \rho gV$ , де  $\rho$  – густина повітря,  $V$  – об'єм тіла. Тобто тіло втрачає у вазі стільки, скільки важить повітря в об'ємі даного тіла. Об'єм свинцю  $V_1 = \frac{m}{\rho_1}$ .

Повітря в даному об'ємі важить  $m_1g$ . Відповідно до рівняння Менделєєва-

Клапейрона  $p_1V_1 = \frac{m_1}{\mu}RT$ , звідки  $m_1 = \frac{\mu p V_1}{RT}$ . Тоді  $m_1g = \frac{\mu p m g}{RT} = \frac{\mu p m g}{\rho_1 RT}$ .

Об'єм пробки  $V_2 = \frac{m}{\rho_2}$ . Вага повітря в даному об'ємі  $m_2g = \frac{\mu p m g}{\rho_2 RT}$ . Дійсна

вага свинцю  $P_1 = g(m + m_1)$ , дійсна вага пробки  $P_2 = g(m + m_2)$ . Тоді

$$\Delta P = g(m_2 - m_1) = \frac{\mu p m g}{RT} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right); \Delta P = 58,6 \text{ Н.}$$

Якою повинна бути вага оболонки дитячої повітряної кульки, наповненої воднем, щоб результуюча підйомна сила кульки  $F=0$ , тобто щоб

кулька знаходилася в зваженому стані? Повітря і водень знаходяться за нормальних умов. Тиск усередині кульки рівний зовнішньому тиску. Радіус кульки  $r=12,5$  см.

*Розв'язання*

Результуюча підйомна сила  $F = m_1 g - (m_2 g + P)$ , де  $m_1$  – маса повітря в об'ємі кульки,  $m_2$  – маса водню в об'ємі кульки. Оскільки  $F=0$ , то

$P = g(m_1 - m_2)$ . З рівняння Менделєєва-Клапейрона знайдемо  $m = \frac{\mu p V}{RT}$ . Тоді

$$P = g \frac{pV}{RT} (\mu_1 - \mu_2) = \frac{4\pi r^2 p g}{3RT} (\mu_1 - \mu_2); P=96 \text{ мН.}$$

У закритій посуді об'ємом  $V=1 \text{ м}^3$  знаходиться маса  $m_1=1,6$  кг кисню і маса  $m_2=0,9$  кг води. Знайти тиск  $p$  в посуді при температурі  $t=500^\circ\text{C}$ , знаючи, що при цій температурі вся вода перетворюється на пару.

*Розв'язання*

За законом Дальтона  $p = p'_1 + p'_2$ , де, згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона,  $p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V}$  – парціальний тиск кисню,  $\mu_1=0,032$  кг/моль;

$p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}$  – парціальний тиск водяної пари,  $\mu_2=0,018$  кг/моль. Звідки

$$p = \frac{RT}{V} \left( \frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right), p=640 \text{ кПа.}$$

У посуді об'ємом  $V=0,5$  л знаходиться маса  $m=1$  г пароподібного йоду ( $\text{I}_2$ ). При температурі  $t=1000^\circ\text{C}$  тиск в посуді  $p=93,3$  кПа. Знайти ступінь дисоціації  $\alpha$  молекул йоду на атоми. Молярна маса молекул йоду  $\mu=0,254$  кг/моль.

### Розв'язання

Ступенем дисоціації  $\alpha$  називають відношення числа молекул, що розпалися на атоми, до загального числа молекул газу, тобто ступінь дисоціації показує, яка частина молекул розпалася на атоми. В результаті дисоціації маємо  $\nu_1 = \frac{2\alpha m}{\mu}$  атомарного йоду і  $\nu_2 = \frac{(1-\alpha)m}{\mu}$  молекулярного йоду. Їх парціальний тиск:

$$p_1 = \frac{2\alpha mRT}{\mu V}, \quad (1)$$

$$p_2 = \frac{(1-\alpha)mRT}{\mu V}. \quad (2)$$

Згідно із законом Дальтона  $p_c = p_1 + p_2$ . Підставляючи (1) і (2), отримаємо  $p_c = \frac{mRT}{\mu V}(1 + \alpha)$ , звідки  $\alpha = \frac{\mu p_c V}{mRT} - 1$ ;  $\alpha = 0,12$ .

У посуді об'ємом  $V=4$  л знаходиться маса  $m=1$  г водню. Яке число молекул  $n$  містить одиниця об'єму посуду?

### Розв'язання

Число молекул водню  $N$ , що міститься у посуді, можна знайти із співвідношення:  $N = \frac{m}{\mu} N_A$ . Тоді число молекул в одиниці об'єму  $n = \frac{N}{V}$  або

$$n = \frac{mN_A}{\mu V}; \quad n = 7,5 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}.$$

Яке число молекул  $N$  знаходиться в кімнаті об'ємом  $V=80 \text{ м}^3$  при температурі  $t=17^\circ\text{C}$  і тиску  $p=100 \text{ кПа}$ ?

### Розв'язання

Число молекул  $N$ , що знаходяться в кімнаті, можна знайти із співвідношення:  $N = \frac{m}{\mu} N_A$ . Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ звідки } \frac{m}{\mu} = \frac{pV}{RT}. \text{ Тоді } N = \frac{pVN_A}{RT}; N = 2 \cdot 10^{27}.$$

Знайти середню квадратичну швидкість  $\langle v_{кв} \rangle$  молекул повітря при температурі  $t=17^\circ\text{C}$ . Молярна маса повітря  $\mu=0,029$  кг/моль.

### Розв'язання

Середня квадратична швидкість молекул  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ . Для молекул повітря  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 8,31 \cdot 290}{0,029}} = 500 \text{ м/с}$ .

Середня квадратична швидкість молекул деякого газу  $\langle v_{кв} \rangle = 450$  м/с. Тиск газу  $p=50$  кПа. Знайти густину  $\rho$  газу за цих умов.

### Розв'язання

Тиск газу визначається основним рівнянням МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \quad (1)$$

де  $n$  – число молекул в одиниці об'єму,  $m_0$  – маса молекули. Крім того,  $n$  і  $m_0$

зв'язані співвідношенням:  $n = \frac{\rho}{m_0}$ . Тоді рівняння (1) можна записати таким

чином:  $p = \frac{\rho \langle v_{кв} \rangle^2}{3}$ , звідки  $\rho = \frac{3p}{\langle v_{кв} \rangle^2}$ ;  $\rho = 0,74$  кг/м<sup>3</sup>.

Знайти енергію  $W_{об}$  обертального руху молекул, що містяться в масі  $m=1$  кг азоту при температурі  $t=7^{\circ}\text{C}$ .

*Розв'язання*

Внутрішня енергія газу  $W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$ . Оскільки молекула азоту складається з двох атомів, то для неї кількість ступенів свободи обертального руху  $i=2$ . Тоді  $W_{об} = \frac{m}{\mu} RT$ ;  $W_{об} = 83$  кДж.

Знайти внутрішню енергію  $W$  двоатомного газу, що знаходиться в посуді об'ємом  $V=2$  л під тиском  $p=150$  кПа.

*Розв'язання*

Згідно рівнянню стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (1)$$

Внутрішня енергія газу  $W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$ , або з урахуванням (1):  $W = \frac{i}{2} pV$ .

Для двоатомного газу кількість ступенів свободи  $i=5$ , тоді  $W = \frac{5}{2} pV$ ;  $W=750$  Дж.

Енергія поступального руху молекул азоту, що знаходиться в балоні об'єм  $V=20$  л –  $W=5$  кДж, а середня квадратична швидкість його молекул  $\langle v_{кв} \rangle = 2 \cdot 10^3$  м/с. Знайти масу  $m$  азоту в балоні і тиск  $p$ , під яким він знаходиться.



### Розв'язання

Енергія поступального руху молекул азоту  $W = \frac{m \langle v_{кв} \rangle^2}{2}$ , звідки

$m = \frac{2W}{\langle v_{кв} \rangle^2}$ ;  $m=2,5$  г. Згідно основному рівнянню МКТ:

$$p = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2}, \quad (1)$$

де  $n$  – число молекул в одиниці об'єму,  $m_0$  – маса молекули. Очевидно, що добуток  $n \cdot m_0 = \rho$  – густина азоту. Тоді  $n \cdot m_0 \cdot V = \rho \cdot V = m$  – масі всього азоту, що знаходиться в балоні. Помноживши праву і ліву частини рівняння

(1) на  $V$ , отримаємо  $pV = \frac{2}{3} n \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{2}{3} m \frac{\langle v_{кв} \rangle^2}{2}$ . Але  $\frac{m \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = W$ , таким

чином  $pV = \frac{2}{3} W$ , звідки  $p = \frac{2W}{3V}$ ;  $p=167$  кПа.

Маса  $m=1$  кг двоатомного газу знаходиться під тиском  $p=80$  кПа і має густина  $\rho=4$  кг/м<sup>3</sup>. Знайти енергію теплового руху  $W$  молекул газу за цих умов.

### Розв'язання

Енергія теплового руху двоатомного газу  $W = \frac{i}{2} \nu RT = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT$ . Згідно

рівнянню Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , тоді  $W = \frac{5}{2} pV$ . Оскільки

$V = \frac{m}{\rho}$ , то остаточно маємо  $W = \frac{5}{2} \frac{pm}{\rho}$ ;  $W=50$  кДж.

Знайти питому теплоємність  $c$  кисню для: а)  $V=\text{const}$ ; б)  $p=\text{const}$ .

### Розв'язання

Молярна теплоємність  $C$  і питома теплоємність  $c$  зв'язані співвідношенням  $C = \mu c$ . Звідси  $c = \frac{C}{\mu}$ .

а) При  $V = \text{const}$ :  $c_V = \frac{C_V}{\mu}$ , де  $C_V = \frac{i}{2}R$ . Для кисню  $i=5$ , отже,  $C_V = \frac{5}{2}R$ .

Тоді питома теплоємність кисню при постійному об'ємі  $c_V = \frac{5R}{2\mu}$ ;

$$c_V = 650 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}.$$

б) При  $p = \text{const}$ :  $C_p = C_V + R = \frac{7}{2}R$ . Звідси  $c_p = \frac{7R}{2\mu}$ ;

$$c_p = 910 \frac{\text{Дж}}{(\text{кг} \cdot \text{К})}.$$

Маса  $m=10$  г кисню знаходиться при тиску  $p=0,3$  МПа і температурі  $t=10^\circ\text{C}$ . Після нагрівання при  $p = \text{const}$  газ зайняв об'єм  $V_2=10$  л. Знайти кількість теплоти отриману газом і енергію теплового руху молекул газу  $W$  до і після нагрівання.

### Розв'язання

Енергія теплового руху молекул кисню до нагрівання:

$$W_1 = \frac{5mRT_1}{2\mu}, \quad (1)$$

після нагрівання:

$$W_2 = \frac{5mRT_2}{2\mu}. \quad (2)$$

При розширенні газу була здійснена робота:

$$\Delta A = p\Delta V = p(V_2 - V_1). \quad (3)$$

Кількість теплоти, отримана газом відповідно до першого закону термодинаміки:

$$\Delta Q = \Delta W + \Delta A. \quad (4)$$

Зміна внутрішньої енергії газу:

$$\Delta W = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} R(T_1 - T_2). \quad (5)$$

Невідомі  $V_1$  і  $T_2$  можна знайти з рівнянь початкового і кінцевого станів газу:

$$pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1, \quad (6)$$

$$pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2. \quad (7)$$

Із (6)  $V_1 = \frac{mRT_1}{\mu p}$ . Із (7)  $T_2 = \frac{pV_2\mu}{mR}$ . З рівняння (1)  $W_1 = 1,8$  кДж.

Підставивши (7) в (2), отримаємо  $W_2 = \frac{5}{2} pV_2$ ;  $W_2 = 7,6$  кДж. З (4), з

урахуванням (3) і (6)  $\Delta Q = (W_2 - W_1) + p\left(V_2 - \frac{mRT_1}{\mu p}\right)$ ;  $\Delta Q = 7,9$  кДж.

У сосуді об'ємом  $V=0,1$  м<sup>3</sup> знаходиться азот при тиску  $p=0,1$  МПа. Яку кількість теплоти  $Q$  необхідно передати азоту, щоб: а) при  $p=\text{const}$  об'єм збільшився удвічі; б) при  $V=\text{const}$  тиск збільшився удвічі?

#### Розв'язання

а) При  $p=\text{const}$  кількість теплоти:

$$Q = \Delta W + A = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T + \frac{m}{\mu} R \Delta T = \frac{m}{\mu} C_p \Delta T. \quad (1)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона  $pV_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$  і  $pV_2 = \frac{m}{\mu} RT_2$ ,

звідки  $p\Delta V = \frac{m}{\mu} R\Delta T$  або  $\frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{p\Delta V}{R}$ . Тоді з (1) отримаємо

$$Q = \frac{C_p p \Delta V}{R} = 700 \text{ Дж.}$$

б) При  $V=\text{const}$  маємо:

$$Q = \Delta W = \frac{m}{\mu} C_V \Delta T. \quad (2)$$

Згідно рівнянню Менделєєва-Клапейрона  $p_1 V = \frac{m}{\mu} R T_1$  і  $p_2 V = \frac{m}{\mu} R T_2$ ,

звідки  $V \Delta p = \frac{m}{\mu} R \Delta T$  або  $\frac{m}{\mu} \Delta T = \frac{V \Delta p}{R}$ . Тоді з (2) отримаємо  $Q = \frac{C_V V \Delta p}{R} = 500$

Дж.

При якій температурі  $T$  середня квадратична швидкість молекул азоту більше їх найбільш вірогідної швидкості на  $\Delta v = 50$  м/с?

*Розв'язання*

За визначенням найбільш вірогідної швидкості  $v_e = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2RT}{\mu}}$ , а

середня квадратична  $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ . За умовами завдання

$\langle v_{\text{кв}} \rangle = v_e + \Delta v$ , тоді  $\Delta v = \langle v_{\text{кв}} \rangle - v_e = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} - \sqrt{\frac{2RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{RT}{\mu}} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$ . Звідси

$$\sqrt{\frac{RT}{\mu}} = \frac{\Delta v}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}; \quad T = \frac{\mu (\Delta v)^2}{R (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}; \quad T = 83,37 \text{ К.}$$

На якій висоті  $h$  тиск повітря складає 75% від тиску на рівні моря? Температуру повітря вважати постійною і рівною  $t = 0^\circ\text{C}$ .

*Розв'язання*

Закон убунання тиску газу з висотою в полі сили тяжіння дає барометрична формула:  $p = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$ , звідки  $\frac{p}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT}\right)$ .

Логарифмуючи обидві частини рівняння, отримаємо  $\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\mu gh}{RT}$ , звідки

$$h = -\frac{RT \ln\left(\frac{p}{p_0}\right)}{\mu g} = 2296 \text{ м.}$$

5.110. Знайти густину  $\rho$  повітря: а) у поверхні Землі; б) на висоті  $h=4$ км від поверхні Землі. Температуру повітря вважати постійною і рівною  $t=0^\circ\text{C}$ . Тиск повітря у поверхні Землі  $p_0=100$  кПа.

*Розв'язання*

а) З рівняння Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu}RT$  густина буде

дорівнювати  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ . У поверхні Землі  $p = p_0$ , тоді

$$\rho_1 = \frac{p_0\mu}{RT_1} = 1,278 \text{ кг/м}^3.$$

б) На висоті  $h_2=4$ км густина повітря  $\rho_2 = \frac{p_2\mu}{RT_2}$ . Для знаходження  $p_2$

скористуємося барометричною формулою  $p_2 = p_0 \exp\left(-\frac{\mu gh}{RT_2}\right)$ . Тоді

$$\rho_2 = \frac{p_0\mu}{RT_2} \exp\left(-\frac{\mu gh_2}{RT_2}\right) = 0,744 \text{ кг/м}^3.$$

Знайти середню довжину вільного пробігу  $\lambda$  молекул вуглекислого газу при температурі  $t=100^\circ\text{C}$  і тиску  $p=13,3$  Па. Діаметр молекул вуглекислого газу  $\sigma=0,32$  нм.

### Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул газу  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$ , де  $\bar{z} = \sqrt{2}\sigma^2 v \pi n$  – середнє число зіткнень кожної молекули з іншими в одиницю часу. Концентрація молекул  $n = \frac{p}{kT}$ , тоді  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma^2 n \pi} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p \pi}$ ;

$$\bar{\lambda} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{\sqrt{2} \cdot 0,32^2 \cdot 10^{-18} \cdot 13,3 \cdot 3,14} = 850 \text{ мкм.}$$

Знайти середнє число зіткнень  $\bar{z}$  в одиницю часу молекул вуглекислого газу при температурі  $t=100^\circ\text{C}$ , якщо середня довжина вільного пробігу  $\bar{\lambda}=870$  мкм.

### Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$ , де  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – середня арифметична швидкість молекул. Тоді  $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \cdot \frac{1}{\bar{\lambda}} = 4,87 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$ .

У сферичній колбі об'ємом  $V=1$ л знаходиться азот. При якій густині  $\rho$  азоту середня довжина вільного пробігу молекул азоту більше розмірів сосуду?

### Розв'язання

Оскільки колба сферична, то її об'єм  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{\pi D^3}{6}$ . Звідси діаметр колби  $D = \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}$ . Середня довжина вільного пробігу молекул

$$\bar{\lambda} = \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A}. \text{ За умовою } \bar{\lambda} > D, \text{ таким чином } \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}} < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A}.$$

$$\text{Звідки густина повинна бути } \rho < \frac{\mu}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 \rho \cdot N_A \cdot \sqrt[3]{\frac{6V}{\pi}}}; \rho < 9,38 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^3.$$

Знайти середнє число зіткнень  $\bar{z}$  в одиницю часу молекул деякого газу, якщо середня довжина вільного пробігу  $\bar{\lambda} = 5$  мкм, а середня квадратична швидкість його молекул  $\langle v_{кв} \rangle = 500$  м/с.

#### Розв'язання

Середня довжина вільного пробігу молекул  $\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$ . Тоді середнє число зіткнень в одиницю часу  $\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\lambda}}$ . Оскільки середня квадратична швидкість

молекул  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3} \sqrt{\frac{kT}{m}}$ , то  $\sqrt{\frac{kT}{m}} = \frac{\langle v_{кв} \rangle}{\sqrt{3}}$ . Середня арифметична

швидкість молекул  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{кв} \rangle$ . Тоді  $\bar{z} = \frac{\sqrt{\frac{8}{3\pi}} \langle v_{кв} \rangle}{\bar{\lambda}} = 9,21 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ .

Знайти коефіцієнт дифузії  $D$  водню за нормальних умов, якщо середня довжина вільного пробігу  $\bar{\lambda} = 0,16$  мкм.

#### Розв'язання

За визначенням коефіцієнт дифузії  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ , де  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – середня арифметична швидкість молекул. Тоді коефіцієнт дифузії водню при нормальних умовах  $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda} = 9,06 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ .

Знайти масу  $m$  азоту, що пройшов унаслідок дифузії через площадку  $S=0,01\text{м}^2$  за час  $t=10\text{с}$ , якщо градієнт густини в напрямі, перпендикулярному до площадки майданчика,  $\frac{\Delta\rho}{\Delta x}=1,26\text{ кг/м}^4$ . Температура азоту  $t=27^\circ\text{С}$ .

Середня довжина вільного пробігу молекул азоту  $\bar{\lambda}=10\text{ мкм}$ .

*Розв'язання*

Згідно із законом Фіка  $m = -D \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t$ . Коефіцієнт дифузії

$$D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda}. \text{ Маса азоту } m = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \bar{\lambda} \frac{\Delta\rho}{\Delta x} \Delta S \Delta t = 19,9 \text{ г.}$$

Знайти діаметр  $\sigma$  молекули кисню, якщо при температурі  $t=0^\circ\text{С}$  в'язкість кисню  $\eta=18,8\text{ мкПа}\cdot\text{с}$ .

*Розв'язання*

Динамічна в'язкість кисню визначається співвідношенням

$$\eta = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda} \rho, \quad (1)$$

де  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}$  – середня арифметична швидкість молекул,  $\bar{\lambda} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma^2 p \pi}$  –

середня довжина вільного пробігу,  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$  – густина газу. Підставляючи

дані вирази в (1), отримаємо  $\eta = \frac{2k}{3\pi\sigma^2} \sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}}$ , звідки  $\sigma = \sqrt{\frac{2k}{3\pi\eta}} \cdot \sqrt{\frac{\mu T}{R\pi}} = 0,3\text{ нм}$ .

Знайти коефіцієнт дифузії  $D$  й і в'язкість  $\eta$  повітря при тиску  $p=101,3\text{ кПа}$  і температурі  $t=10^\circ\text{С}$ . Діаметр молекул повітря  $\sigma=0,3\text{ нм}$ .



*Розв'язання*

Коефіцієнт дифузії  $D = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}} \frac{T}{\sqrt{2\pi\sigma^2\rho}}$ ;  $D = 1,45 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . Крім

того, коефіцієнт дифузії  $D = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{\lambda}$ , а коефіцієнт в'язкості  $\eta = \frac{1}{3\rho} \bar{v} \bar{\lambda}$ . Таким

чином,  $\eta = \rho D$ , де густину  $\rho$  можна виразити з рівняння Менделєєва-

Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , звідки  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}$ . Тоді  $\eta = \frac{p\mu}{RT} D = 18,27 \text{ мкПа}\cdot\text{с}$ .

У сосуді об'ємом  $V=2\text{л}$  знаходиться  $N=4 \cdot 10^{22}$  молекул двоатомного газу. Теплопровідність газу  $K=14 \text{ мВт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ . Знайти коефіцієнт дифузії  $D$  газу.

*Розв'язання*

Коефіцієнт теплопровідності  $K = c_V \rho \bar{v} \lambda / 3$ , а коефіцієнт дифузії  $D = \bar{v} \lambda / 3$ , отже, коефіцієнти теплопровідності і дифузії зв'язані співвідношенням  $K = c_V \rho D$ . Теплоємність при постійному об'ємі  $c_V = \frac{i R}{2 \mu}$ ,

де  $i=5$ , оскільки газ двоатомний. Число частинок в одиниці об'єму  $n = \frac{\rho}{\mu} N_A$ ,

а в об'ємі  $V$  –  $N = nV = \frac{\rho V N_A}{\mu}$ . Тоді  $K = \frac{5 R}{2 \mu} \frac{\mu N}{V N_A} D = \frac{5kND}{2V}$ ; звідки

$$D = \frac{2VK}{5kN} = 2,02 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Маса  $m=6,5 \text{ г}$  водню, що знаходиться при температурі  $t=27^\circ\text{C}$ , розширюється удвічі при  $p=\text{const}$  за рахунок притоку тепла ззовні. Знайти роботу  $A$  розширення газу, зміну  $\Delta W$  внутрішньої енергії газу і кількість теплоти  $Q$ , передану газу.

*Розв'язання*

Робота розширення газу  $A = p \int_V^{2V} dV = p(2V - V) = pV$ . Відповідно

рівнянню Менделєєва-Клапейрона  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , робота  $A = \frac{m}{\mu} RT = 8,1$  Дж.

Зміна внутрішньої енергії  $\Delta W = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} RT$ , де  $i=5$ . Оскільки  $p=\text{const}$ , то

$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$ , отже,  $\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1} = 2$ . Звідси  $T_2 = 2T_1$  і  $\Delta T = T_2 - T_1 = 2T_1 - T_1 = T_1$ . Тоді

$\Delta W = \frac{5}{2} \frac{m}{\mu} RT_1 = 20,25$  кДж. Згідно першому закону термодинаміки

$Q = \Delta W + A = 28,35$  кДж.

При ізобарному розширенні двоатомного газу була здійснена робота  $A=156,8$  Дж. Яка кількість теплоти  $Q$  була передана газу?

*Розв'язання*

Кількість теплоти, передана газу,  $dQ = C_p dT$ , звідки:

$$Q = C_p \int_{T_1}^{T_2} dT = C_p (T_2 - T_1). \quad (1)$$

Елементарна робота, що здійснюється при розширенні газу  $dA = p dV$ ,

тоді  $A = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p(V_2 - V_1)$ . З рівняння Менделєєва-Клапейрона

$p\Delta V = \nu R \Delta T$ , тоді:

$$A = \nu R (T_2 - T_1). \quad (2)$$

Вирішуючи спільно (1) і (2), отримаємо  $Q = C_p \frac{A}{\nu R}$ , де  $C_p = \nu \frac{7}{2} R$ ,

звідки  $Q = \frac{7}{2} A = 550$  Дж.

Об'єм  $V_1=7,5$ л кисню адіабатично стискається до об'єму  $V_2=1$ л, причому в кінці стиснення встановився тиск  $p_2=1,6$  МПа. Під яким тиском  $p_2$  знаходився газ до стиснення?

*Розв'язання*

Згідно рівнянню Пуассона  $pV^\gamma = const$ , де показник адіабати  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$

для кисню  $\gamma = 1,4$ . Оскільки  $p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$ , то  $p_1 = p_2 \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = 95$  кПа.

Ідеальна теплова машина, що працює по циклу Карно, за цикл отримує від нагрівача кількість теплоти  $Q_1=2,512$  кДж. Температура нагрівача  $T_1=400$  К, температура холодильника  $T_2=300$  К. Знайти роботу  $A$ , здійснювану машиною за один цикл, і кількість теплоти, що віддається холодильнику за один цикл.

*Розв'язання*

Робота, що здійснюється тепловою машиною, визначається за формулою  $A = Q_1 - Q_2 = \eta Q_1$ , де  $Q_1$  кількість теплоти, отримана машиною від нагрівача;  $Q_2$  кількість теплоти, що віддається холодильнику,  $\eta$  – коефіцієнт корисної дії машини, який дорівнює  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 0,25$ . Звідки  $A=630$  Дж;

$$Q_2 = Q_1 - A = 1,88 \text{ кДж.}$$

Ідеальна холодильна машина, що працює по зворотному циклу Карно, здійснює за один цикл роботу  $A=37$  кДж. При цьому вона бере тепло від тіла з температурою  $t_2=-10^\circ\text{C}$  і передає тепло тілу з температурою  $t_1=17^\circ\text{C}$ . Знайти к. к. д.  $\eta$  циклу, кількість теплоти  $Q_2$ , що відняте у холодного тіла за один цикл, і кількість теплоти  $Q_1$ , передане гарячішому тілу за один цикл.

### Розв'язання

Оскільки холодильна машина працює по зворотному циклу, то для переходу тепла від менш нагрітого тіла до більш нагрітого необхідно, щоб зовнішні сили виконали позитивну роботу. Кількість теплоти  $Q_2$  відняте у холодного тіла, разом з роботою зовнішніх сил  $A$  дорівнює кількості теплоти  $Q_1$  переданій більш нагрітому тілу,  $Q_2 = Q_1 - A = \frac{A}{\eta} - A = \frac{1-\eta}{\eta} A$ . Оскільки

$$\eta = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} = 0,093, \text{ то } Q_2 = 360 \text{ кДж}; Q_1 = Q_2 + A = 379 \text{ кДж.}$$

Таким чином холодильна машина за кожен цикл передає гарячішому тілу кількість теплоти 397кДж, з яких 37кДж за рахунок механічної роботи, а 360кДж від холодного тіла.

У циліндрах карбюраторного двигуна внутрішнього згорання газ стискається політропічного до  $V_2=V_1/6$ . Початковий тиск  $p_1=90$  кПа, початкова температура  $t_1=127^\circ\text{C}$ . Знайти тиск  $p_2$  і температуру  $t_2$  газу в циліндрах після стискання. Показник політропи  $n=1,3$ .

### Розв'язання

Рівняння політропічного процесу:

$$p_1 V_1^n = p_2 V_2^n \quad (1)$$

За умовою  $V_2 = \frac{V_1}{6}$ , таким чином,  $p_1 V_1^n = p_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^n$ , звідки

$p_2 = p_1 \cdot 6^n = 934$  кПа. З рівняння політропічного процесу:

$$T_1 V_1^{n-1} = T_2 V_2^{n-1} \text{ або } T_1 V_1^{n-1} = T_2 \left(\frac{V_1}{6}\right)^{n-1} \quad (2)$$

Звідки:  $T_2 = T_1 \cdot 6^{n-1} = 684,7$  К.

Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії при перетворенні маси  $m=1$  г води ( $t=0^\circ\text{C}$ ) в пару ( $t_n=100^\circ\text{C}$ ).

### Розв'язання

Загальна зміна ентропії  $\Delta S$  складається із зміни ентропії  $\Delta S_1$  при нагріванні маси  $m$  води від температури  $T$  до температури  $T_n$  і зміни ентропії  $\Delta S_2$  при випаровуванні маси  $m$  води.  $\Delta S_1 = mc \ln \frac{T_n}{T}$ , де  $c=4,19$  кДж/(кг·К) – питома теплоємність води.  $\Delta S_2 = \frac{mr}{T_n}$ , де  $r=2,26$  МДж/кг – питома теплота пароутворення. Тоді  $\Delta S = m \left( c \ln \frac{T_n}{T} + \frac{r}{T_n} \right) = 7,4$  Дж/К.

Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії при плавленні маси  $m=1$  кг льоду ( $t=0^\circ\text{C}$ ).

### Розв'язання

При плавленні маси  $m$  льоду при температурі  $T$  маємо  $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$ , де  $\lambda=0,33$  МДж/кг – питома теплота плавлення.  $\Delta S=1209$  Дж/К.

Масу  $m = 640$  г розплавленого свинцю при температурі плавлення  $t_{\text{пл}}$  вилили на лід ( $t=0^\circ\text{C}$ ). Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії при цьому процесі.

### Розв'язання

Припустимо, що система «свинець-лід» замкнута, тобто втрат тепла в зовнішнє середовище не відбувається і вся пара, що утворилася, сконденсувалася і залишилася усередині системи у вигляді води. Тоді зміна ентропії системи  $\Delta S$  складатиметься із зміни ентропії свинцю  $\Delta S_1$  при твердінні, зміни ентропії свинцю  $\Delta S_2$  при охолодженні до  $t=0^\circ\text{C}$  і зміни ентропії льоду при розтаненні  $\Delta S_3$ . Тобто  $\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3$ . Завдання розглядаємо за умови, що кількість льоду достатня для підтримки температури  $t=0^\circ\text{C}$ . Температура плавлення свинцю  $T_1=600$  К, температура льоду –  $T_2=273$  К. Маємо  $dS_1 = \frac{dQ_1}{T}$  або  $\Delta S_1 = -\int_1^2 \frac{dQ_1}{T_1} = -\frac{m\lambda}{T_1}$ , де  $\lambda=22,6$

кДж/кг – питома теплота плавлення (кристалізації) свинцю.  $dS_2 = \frac{dQ_2}{T_2}$ ,

звідки  $\Delta S_2 = - \int_{T_1}^{T_2} \frac{mc_c dT}{T} = mc_c \ln \frac{T_2}{T_1}$ , де  $c_c = 126$  Дж/(кг·К) – питома

теплоємність свинцю.  $dS_3 = \frac{dQ_3}{T}$  або  $\Delta S_3 = \frac{Q_3}{T_2}$ . Відповідно до закону

збереження енергії  $Q_3 = Q_1 + Q_2 = \lambda m + cm(T_1 - T_2)$ , звідки

$\Delta S_3 = \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$ . Отже, повна зміна ентропії системи

$\Delta S = - \frac{m\lambda}{T_1} + mc_c \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{\lambda m + cm(T_1 - T_2)}{T_2}$ . Підставляючи в отриману формулу

числові дані, остаточно отримуємо  $\Delta S = 62,2$  Дж/К.

Маса  $m = 10$  г кисню нагрівається від температури  $t_1 = 50^\circ\text{C}$  до температури  $t_2 = 150^\circ\text{C}$ . Знайти зміну  $\Delta S$  ентропії, якщо нагрівання відбувається ізохорично.

#### Розв'язання

а) При ізохоричному нагріванні  $dQ = c_V m dT$ , тоді зміна ентропії

$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = c_V m \int_1^2 \frac{dT}{T} = \frac{i}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1}$ . Оскільки кисень – двоатомний газ, то

число мір свободи  $i = 5$  і зміна ентропії  $\Delta S = \frac{7}{2} \frac{m}{\mu} R \ln \frac{T_2}{T_1} = 1,75$  Дж/К.

Яку температуру  $T$  має маса  $m = 2$  г азоту, що займає об'єм  $V = 820$  см<sup>3</sup> при тиску  $p = 0,2$  МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

### Розв'язання

а) Ідеальні гази підпорядковуються рівнянню Менделєєва-Клапейрона

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \text{ звідки } T = \frac{\mu p V}{m R} = 280 \text{ К.}$$

б) Реальні гази підпорядковуються рівнянню Ван-дер-Ваальса

$$\left( p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT, \quad \text{таким чином температура}$$

$$T = \frac{\mu}{m R} \left( p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = 280 \text{ К. Таким чином при даному тиску газ}$$

поводиться як ідеальний.

Яку температуру  $T$  має маса  $m=3,5$  г кисню що займає об'єм  $V=90$  см<sup>3</sup> при тиску  $p=2,8$  МПа? Газ розглядати як: а) ідеальний; б) реальний.

### Розв'язання

Якщо розглядати кисень в даних умовах як ідеальний газ, то його стан

описується рівнянням Менделєєва-Клапейрона:  $pV = \frac{m}{\mu} RT$ , звідки

$$T = \frac{\mu p V}{m R} = 277 \text{ К.}$$

Якщо розглядати газ як реальний, то його стан описується рівнянням

Ван-дер-Ваальса  $\left( p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = \frac{m}{\mu} RT$ , таким чином температура

$$T = \frac{\mu}{m R} \left( p + \frac{m^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left( V - \frac{m}{\mu} b \right) = 285,7 \text{ К.}$$

Навчально-методичне видання

Укладачі:

ЦУРКАН Микола Михайлович

ПАК Андрій Олегович

ІГНАТЬЄВА Яна Володимирівна

**Методичні вказівки до підготовки до практичних занять з дисципліни  
«Фізика» для студентів напряму підготовки 6.050502 «Інженерна  
механіка»**

**«Частина 1. Механіка, молекулярна фізика та термодинаміка»**

Факультет: **Обладнання та технічного сервісу**

Кафедра: **Енергетики та фізики**

Підп. до др.

Формат 60x84 1/16

Папір газет. Друк офс. Ум. друк арк. 3,1 Обл.-вид. арк. 2,8

Ум. фабр. – відб. 3,1 Тираж прим. Зам.

---

Харківський державний університет харчування та торгівлі  
61051 Харків – 51, вул. Клочківська 333

---

ДОД ХДУХТ, Харків – 51, вул. Клочківська 333