Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича

ТЕОРЕТИЧНА МЕНХАНІКА

Система збіжних сил та аналіз раціонального розташування опор

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт

Харків

2022

Міністерство освіти і науки України

ДЕРЖАВНИЙ БІОТЕХНОЛОГІЧНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ

Факультет мехатроніки та інжинірингу

Кафедра надійності та міцності машин і споруд імені
В.Я. Аніловича

ТЕОРЕТИЧНА МЕНХАНІКА

Система збіжних сил та аналіз раціонального розташування опор

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт

для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання зі спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт

Затверджено рішенням
Методичної ради
ФМІ ДБТУ
Протокол № 5
від 20. 01. 2022 р.

Харків

2022

УДК 531/534 (075.8)

Схвалено на засіданні кафедри надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича

протокол № 5 від 19 січня 2022 р.

Теоретична механіка.. Система збіжних сил та аналіз раціонального розташування опор: методичні вказівки до виконання практичних робіт для студентів денної та заочної форм навчання першого (бакалаврського) рівня вищої освіти, спеціальностей 131 Прикладна механіка, 133 Галузеве машинобудування, 192 Будівництво та цивільна інженерія, 208 Агроінженерія, 274 Автомобільний транспорт; Харків. нац. техн. у-т сіл. госп-ва ім. П. Василенка ; уклад.:. М. В. Сліпченко, О. М. Шукаєва – Харків : [б. в.], 2022.–37 с.

Методичні вказівки призначені для отримання навичок при виконанні практичної роботи з навчальної дисципліни «Теоретична механіка».

В роботі надано визначення термінів, наведені геометрична та аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил. Проаналізовано зміну реакцій в залежності від взаємного розташування опор. Запропоновано задачі для самостійного розвязку.

Методичні вказівки призначені для студентів вищих навчальних закладів технічних спеціальностей.

Рецензенти:

О. І. Завгородній, д-р техн. наук, проф., проф.. фізики та вищої математики Державного біотехнологічного університету.

О. І. Алфьоров, д-р техн. наук, доц., проф. кафедри надійності та міцності машин і споруд імені В.Я. Аніловича

Відповідальний за випуск: М. В. Сліпченко, к.т.н., доцент, зав.каф.

© Сліпченко М.В., Шукаєва О.М. 2022

© ДБТУ, 2022

СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ НА ПЛОЩИНІ

Зміст

1. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

***Збіжними** називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці.*

Якщо перенести всі сили вздовж лінії їх дії в цю точку, дістанемо еквівалентну систему сил, що прикладена до однієї точки.

Рівнодіюча $\overline{R}$ системи сил, яка прикладена до однієї точки, прикладена до цієї ж точки і зображається замикаючою стороною силового багатокутника, що побудований на додаваємих силах, тобто рівнодіюча $\overline{R}$ дорівнює векторній сумі додаваємих сил:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k .$$

Оскільки система збіжних сил може бути замінена однією силою – рівнодіючою, то необхідною і
достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю цієї рівнодіючої:

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + ... + \overline{F}_n = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0 .$$

Геометрично ця умова полягає в тому, щоб кінець останнього вектора збігався з початком першого в векторному (силовому) багатокутнику, побудованому з сил системи, тобто сили повинні утворювати замкнутий багатокутник.

Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох збіжних сил, то силовий багатокутник зводиться до силового трикутника. Розв'язання ж задачі про рівновагу в цьому випадку потребує знаходжепння невідомих елементів трикутника за допомогою тригонометричних формул або вимірювань.

При розв'язанні задач на рівновагу тіла під дією трьох сил часто доводиться користуватися ***теоремою про три сили:***

Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил обов'язково перетинаються в одній точці, тобто сили утворюють збіжну систему сил.

Теорема про три непаралельні сили полегшує розв'язування задач на рівновагу твердого тіла в тих випадках, коли напрям однієї з трьох сил невідомий. Визначивши точку перетину ліній дії двох сил, напрям яких відомий, можна вказати напрям лінії дії третьої сили, оскільки вона повинна пройти через точку прикладення цієї сили і точку перетину ліній дії перших двох сил.

2. Геометричний метод розв'язування задач

Безпосереднє використання багатокутника сил при розв'язуванні задач статики приводить до геометричних побудов з наступним визначенням невідомих елементів за допомогою тригонометричних формул.

При розв'язуванні задач на рівновагу твердого тіла геометричним методом рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити об'єкт, який буде розглядатися в рівновазі.
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З'ясувати характер в'язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Побудувати замкнений силовий багатокутник (побудову треба починати з сил відомих за модулем і за напрямом).
5. З силового багатокутника визначити невідомі сили.

3. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил

Найбільш загальним способом визначення модуля і напрямку рівнодіючої є аналітичний, який базується на аналітичному методі означення сили.

Якщо обрати деяку прямокутну систему координатних осей Oxy (рис.2.1.), то силу $\overline{F}$ за правилом паралелограма (в даному випадку – прямокутника) можна розкласти на дві складові $\overline{F}_x$ і $\overline{F}_y$.

Алгебраїчні значення довжин напрямлених відрізків Oa і $Ов$ називаються проекціями сили на осі Ox і Oy та позначаються F_x і F_y.

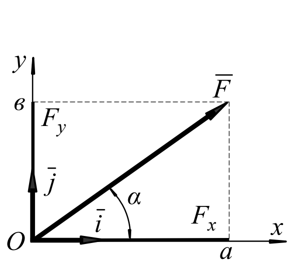


Рис.1.

Якщо $\overline{i}$ та $\overline{j}$ одиничні вектори, що напрямлені за осями Ox та Oy , а F_x і F_y проекції сили на ці осі, то

$$\overline{F} = \overline{i}\, F_x + \overline{j}\, F_y .$$

Модуль та напрям сили за відомими проекціями на взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy* знаходять з наступних формул:

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2};\ \cos\left(\overline{F}\,\widehat{\ }\,\overline{i}\right)=\frac{F_x}{F};\ \cos\left(\overline{F}\,\widehat{\ }\,\overline{j}\right)=\frac{F_y}{F}.$$

При визначенні проекції сили на вісь можливі 4 випадки (рис.2.2).

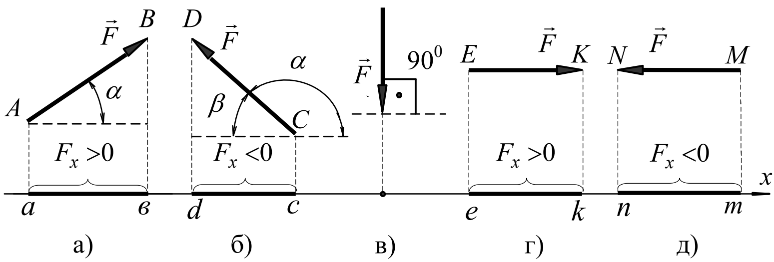


Рис. 2

1. Сила утворює гострий кут α з додатним напрямом осі (рис. 2,а). В цьому випадку проекція сили на вісь має додатній знак і за модулем дорівнює

$$F_x = ab = F\cos\alpha .$$

2. Сила утворює з додатним напрямом осі тупий кут (рис. 2,б). В цьому випадку її проекція на координату вісь має від’ємний знак і дорівнює

$$F_x = -cd = -F\cos\beta = F\cos\alpha .$$

3. Сила утворює прямий кут ($\alpha=90^0$) з координатною віссю (рис. 2.в). В цьому випадку проекція сили на вісь дорівнює нулю .

4. Сила паралельна до координатної осі (рис. 2,г, д). В цьому випадку сила проектується в натуральну величину і проекція додатна, якщо її напрям збігається з додатним напрямом осі (рис. 2.г), та від'ємна, якщо її напрям збігається з від'ємним напрямом осі (рис. 2.д).

Якщо сили $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$,...,$\overline{F}_n$ являють собою збіжну систему сил, то рівнодіюча $\overline{R}$ дорівнює їх геометричній сумі, а її проекції на осі:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}; \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky}.$$

Оскільки модуль рівнодіючої визначається за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

то тіло під дією системи збіжних сил буде знаходитись в рівновазі, коли R=0 , а це можливо, коли R_x=0 і R_y=0. В результаті дістанемо наступні аналітичні умови рівноваги тіла під дією збіжної системи сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0.$$

Таким чином, *для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх цих сил на кожну з двох взаємно перпендикулярних осей дорівнювали нулю.*

При розв'язуванні задач аналітичним способом потрібно виконати три перших пункти, що вказані в розділі 2.,а потім наступні:

4. Обрати систему декартових осей координат Oxy.
5. Скласти рівняння рівноваги твердого тіла в проекціях на ці осі координат.
6. Розв'язати систему складених рівнянь та визначити невідомі величини.

4. Контрольні запитання

1. Як визнати напрям рівнодіючої системи збіжних сил при побудові силового багатокутника?
2. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил, що розташована на площині ?
3. Який порядок розв'язування задач статики на рівновагу тіла під дією системи збіжних сил?
4. При яких умовах сили, прикладені до твердого тіла, зрівноважуються.

5. Приклади розв'язування задач

Задача № 1

Ідеальний стержень AB утримується в рівновазі нерозтяжною ниткою ВС. До шарніра B стержня, на нитці, підвішене тіло вагою G (рис.3).

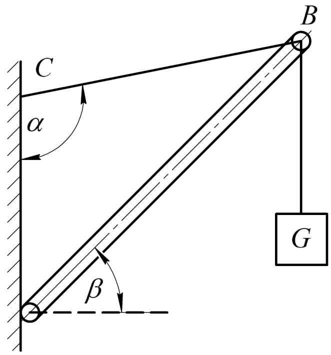


Рис. 3

Визначити натяг нитки BC і реакцію стержня AB, якщо: $\alpha = 45^0$; $\beta = 105^0$; G=500Н. Проаналізувати, як зміняться натяг нитки та реакція стиржня при зміні кутів α і β.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу вузла B (рис. 4). До вузла B прикладена сила $\overline{G}$, яка перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки B (сила $\overline{G}$ геометрично рівна силі натягу нитки на якій висить вантаж G), натяг нитки $\overline{T}$ і реакція стержня $\overline{S}$. Таким чином, вузол B знаходиться в рівновазі під дією трьох сил: $\overline{G}$, $\overline{T}$ та $\overline{S}$, які лежать в одній площині і прикладені до однієї точки.

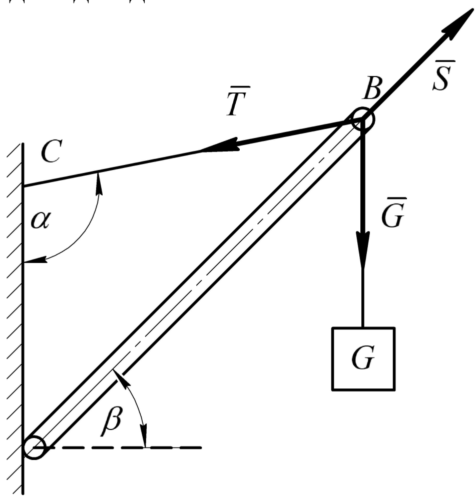


Рис 4.

Величину і напрям зусилля $\overline{S}$ та величину натягу нитки $\overline{T}$ визначимо геометричним методом, скориставшись геометричною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил. Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на точку B:

$$\sum \overline{F}_k = \overline{T} + \overline{G} + \overline{S} = 0.$$

Побудуємо силовий трикутник згідно з записаним рівнянням (рис. 5). Для цього, з довільної точки a відкладемо в деякому масштабі вектор $\overline{G}$. З точки початку вектора проведемо пряму, паралельну до лінії дії реакції $\overline{T}$, а з точки кінця вектора пряму паралельну до лінії дії реакції $\overline{S}$. Проведені прямі перетнуться в точці c, утворивши трикутник abc. Вкажемо напрям сил, керуючись тим, що при додаванні векторів початок кожного наступного вектора повинен виходити з кінця попереднього.

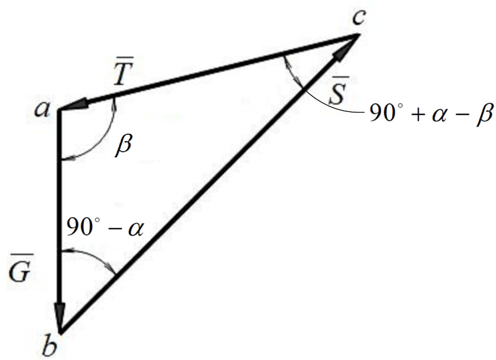


Рис. 5

Знайти невідомі величини можна або помірявши відповідні сторони силового трикутника, або, за відомими кутами трикутника, з теореми синусів:

$$\frac{G}{\sin\left(90^\circ+\alpha-\beta\right)}=\frac{T}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}=\frac{S}{\sin\beta}.$$

Звідки:

$$T=\frac{G\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}{\sin\left(90^\circ+\alpha-\beta\right)}=\frac{G\cdot\cos\alpha}{\cos\left(\alpha-\beta\right)};$$

$$S = \frac{G \cdot \sin\beta}{\sin\left(90^\circ + \alpha - \beta\right)} = \frac{G\sin\beta}{\cos\left(\alpha - \beta\right)}$$

Тут врахували, що:

$$\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = \cos\alpha\ ;$$

$$\sin\left(90^\circ + \alpha - \beta\right) = \cos\left(\alpha - \beta\right),$$

для заданих вище α, β, G маємо:

$$T = \frac{500 \cdot 0,707}{0,5} = 707H\ ;$$

$$S = \frac{500 \cdot 0,966}{0,5} = 966H\ .$$

У випадку,коли: $\alpha \to 0$, $\beta \to 90^\circ$, $\cos\left(\alpha - \beta\right) \to 0$.

Тоді: $T \to \infty$ і $S \to \infty$. Отже, при близькому до горизонтального положенні стержня і такому ж положенні нитки, виникають великі значення *T* і *S*, що може привести до розриву нитки.

Якщо стержень займає вертикальне положення $\alpha = \pm 90^\circ$, то $\cos\alpha = 0$ і $T = 0$, тобто відсутнє зусилля натягу нитки. При $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$, $S = G$ (стержень стиснутий), а при $\beta = 90^\circ$ і $\alpha = -90^\circ$: $S = -G$ (стержень розтягнутий).

Відповідь: *T* = 707 Н; *S* = 966 Н (при $\alpha = 45^0$; $\beta = 105^0$); $T \to \infty$ і $S \to \infty$ (при $\alpha \to 0$, $\beta \to 90^\circ$); $T = 0$ (при $\alpha = \pm 90^\circ$); $S = G$ (при $\beta = 90^\circ$, $\alpha = 90^\circ$); $S = -G$ (при , $\beta = 90^\circ$ $\alpha = -90^\circ$).

Задача № 2

Нитка з двома тілами на кінцях *P* і *Q* перекинута через блоки *A* і *B* (рис. 6). В точці *O* до нитки , що знаходиться між блоками, прикріпили вантаж *G*. При рівновазі системи нитка *OA* утворила з горизонталлю кут α , а нитка *OB* – кут β .

Визначити вагу тіл *P* і *Q*. Розрахунки привести при : $G = 27{,}3\,H$; $\alpha = 60^\circ$; $\beta = 45^\circ$. Силами тертя в блоках знехтувати і вважати , що: $0 < \alpha \le 90^\circ$; $0 < \beta \le 90^\circ$.

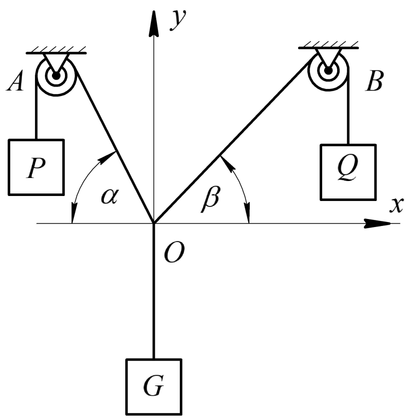


Рис. 6

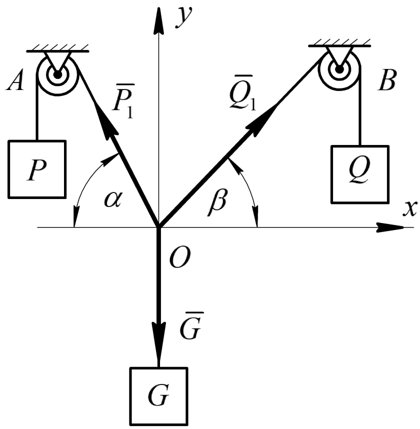


Рис. 7

Розставимо сили (рис. 7). До вузла *O* прикладена сила $\overline{G}$, яка перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки *B* (сила $\overline{G}$ геометрично рівна силі натягу нитки на якій висить вантаж *G*). Реакції ниток P_1 та Q_1 спрямуємо реакції ниток *OA* та *OB* від об'єкту рівноваги (точки *O*) по нитці до точки підвісу.

Використаємо два рівняння рівноваги (умова рівноваги збіжної плоскої системи сил), проектуючи сили на вісі Ox та Oy .

$$\sum F_{kx} = 0\,; \; \sum F_{ky} = 0\,,$$

з яких отримуємо:

$$Q_1 \cos\beta - P_1 \cos\alpha = 0. \quad (1)$$

Звідки:

$$Q_1 = P_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}. \quad (2)$$

Із цієї формули випливає, що при $\alpha = \beta$: $Q_1 = P_1$. Якщо $\beta < \alpha$, то $\cos\alpha < \cos\beta$ і $Q_1 < P_1$.

$$P_1 \cdot \sin\alpha + Q_1 \sin\beta = G \quad (3)$$

Оскільки $|\sin\alpha| \le 1$ і $|\sin\beta| \le 1$, то із цього рівняння видно що:

$$P_1 + Q_1 \ge G \quad (4)$$

Тут рівність маємо при $\alpha = \beta = 90^\circ$.

Підставимо (2) в (3),отримаємо :

$$P_1\left(\sin\alpha + \sin\beta \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right) = G \Rightarrow P_1 = \frac{G\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}; \quad (5)$$

$$Q_1 = Q\frac{G\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \quad (6)$$

Для заданих числових значень :

$$P_1 = \frac{27{,}3 \cdot \cos 45^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{27{,}3 \cdot 0{,}707}{0{,}966} = 19{,}98H$$

$$Q_1 = \frac{27{,}3 \cdot \cos 60^\circ}{\sin 105^\circ} \approx \frac{27{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}966} = 14{,}13H$$

Розрахунки підтверджують виконання нерівності (4).

Зазначимо що при $\alpha \to 0$ і $\beta \to 0$: $\sin(\alpha+\beta) \to 0$ і згідно з (5), (6) $P_1 \to \infty$ і $Q_1 \to \infty$. Отже при малих кутах α і β виникає великий натяг нитки, що може спричинити її розрив.

***Відповідь*:** P = 20 Н; Q = 14,1 Н.

Задача № 3

Однорідний стержень *AB* (рис.8) прикріплений до вертикальної стінки за допомогою шарніра *A* і утримується під кутом α до вертикалі за допомогою троса *BC,* який утворює кут β зі стержнем.

Визначити величину і напрям реакції $\overline{R}_A$ шарніра та натяг троса T_B, якщо: вага стержня G=20 кН; α=60^0; β =30^0. Проаналізувати як зміняться реакції зі зміною кутів.

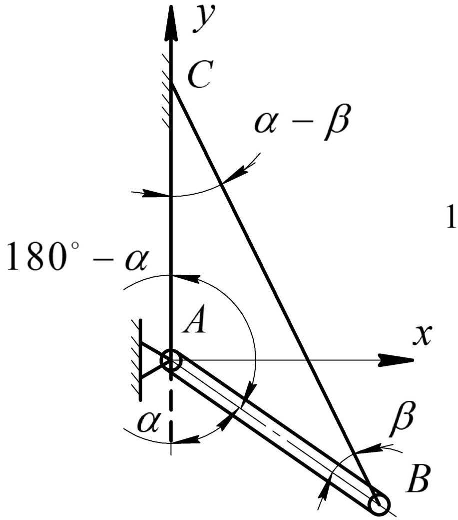


Рис. 8

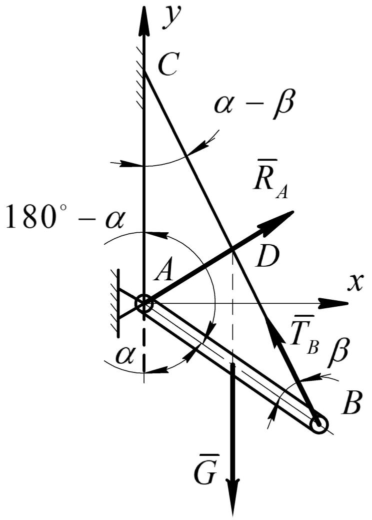


Рис. 9

Розв'язування. Задачу розв'яжемо геометричним і аналітичним способом, використовуючи теорему про рівновагу тіла під дією 3-х сил.

Розглянемо рівновагу стержня *AB*. На стержень діє активна сила - сила тяжіння $\overline{G}$ та реакції в'язей: натяг троса *BC*; реакція циліндричного шарніра *A*.

Напрям натягу троса $\overline{T}_B$ відомий - реакція напрямлена вздовж троса до точки *C*. Напрям реакції шарніра $\overline{R}_A$ попередньо вказати не можна. Для визначення напряму реакції $\overline{R}_A$ скористаємося теоремою про три сили, оскільки стержень знаходиться в рівновазі під дією трьох сил $\overline{T}_B$, $\overline{G}$ і $\overline{R}_A$.

Знайдемо точку перетину ліній дії сили тяжіння $\overline{G}$ і натягу троса $\overline{T}_B$ - точку *D* (рис. 9). Згідно з теоремою про три сили, лінія дії реакції $\overline{R}_A$ теж повинна пройти через цю точку.

На рис.9 ΔBAC рівнобедрений (кути при вершинах *C* і *B* дорівнюють 30^0). Оскільки лінія дії (*DE*) сили тяжіння $\overline{G}$ проходить через середину стержня *AB* і являє собою середню лінію ΔBAC, то точка *D* ділить сторону *BC* навпіл.

Відповідно, відрізок *AD* є одночасно висотою, медіаною і бісектрисою.

Таким чином: $\angle CAD = 60^0$; $\angle CDA = \angle ADB = 90^0$.

Після визначення напряму реакції $\overline{R}_A$, можна переходити до обчислення величин реакцій.

Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на стержень *AB:*

$$\sum \overline{F}_k = \overline{T}_B + \overline{G} + \overline{R}_A = 0.$$

Побудуємо замкнутий силовий трикутник. Для цього з довільної точки *k* (рис. 10), в деякому масштабі, проводимо вектор сили тяжіння $\overline{G}$. Через точку *k* проводимо пряму паралельну до лінії дії реакції $\overline{R}_A$, а через точку ℓ кінця вектора проводимо пряму паралельну до лінії дії $\overline{T}_B$.

Проведені прямі перетинаються в точці *m* утворивши силовий трикутник $k\ell m$. Оскільки ΔADE (рис. 9) і $\Delta mk\ell$ (рис. 10) подібні, то: $\angle m=90^0$; $\angle k=60^0$; $\angle \ell=30^0$.

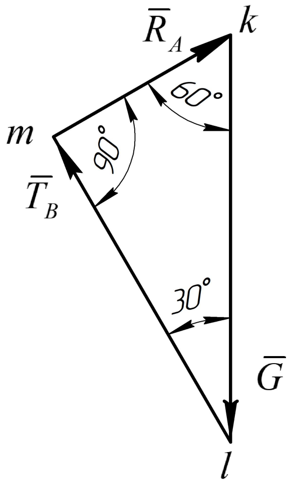


Рис. 10

З силового трикутника знаходимо:

$$R_A = mk = G\sin 30^\circ = 20\cdot 0,5 = 10\ \text{kH}$$
$$T_B = m\ell = G\cos 30^\circ = 20\cdot 0,866 = 17,32\ \text{kH}\ .$$

Розв'яжемо задачу аналітичним способом. Виберемо прямокутну систему координат *Axy* і складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = \sin 60^0 - \sin 30^0 = R_A\cos 30^0 - T_B\cos 60^0 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = R_A\cos 60^0 - G + T_B\cos 30^0 = 0.$$

З першого рівняння виразимо T_B і підставимо в друге рівняння:

$$T_B = R_A\frac{\cos 30^0}{\cos 60^0};$$

$$R_A\cos 60^0 - G + R_A\frac{\cos 30^0}{\cos 60^0}\cos 30^0 = 0.$$

Звідси дістанемо:

$$R_A = \frac{G\cos 60^0}{\cos^2 60^0 + \cos^2 30^0} = \frac{G\cos 60^0}{\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0} = \frac{20 \cdot 0,5}{1} = 10\ kH\ ;$$

$$T_B = 10\frac{0,866}{0,5} \approx 17,32\,\text{kH}.$$

***Відповідь*:** $R_A = 10\,\text{kH}$; $T_B \approx 17,32\,\text{kH}$.

Побудуємо дані ровізок цієї задачі,без використання конкретних значень G, α, β. Вважаємо, що $0 \le \alpha \le 180^\circ$; $0 \le \beta \le 90^\circ$.

У цьому варіанті задачі силовий трикутник (рис. 11). подібний до трикутника ADC НА рис. 9.

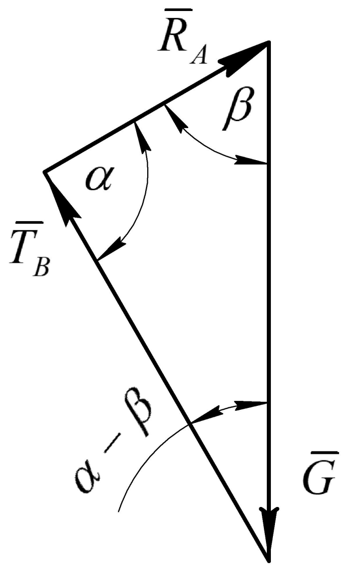


Рис. 11

Тому

$$\frac{AC}{G} = \frac{AD}{R_A} = \frac{CD}{T_B} \qquad (1)$$

Оскільки стиржень однорідний, то: AE=BE і $CD = BD = 0{,}5 \cdot BC$.

За теоремою синусів в трикутнику BAC маємо пропорцію:

$$\frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{AC}{\sin\beta} = \frac{BC}{\sin\left(180^\circ - \alpha\right)} = \frac{BC}{\sin\alpha}.$$

У відповідності до неї:

$$AC = \frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)}\sin\beta;\ BC = \frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)}\sin\alpha. \qquad (2)$$

Із виразу (1) випливає,що :

$$T_B = G\frac{CD}{AC} = \frac{1}{2}G\frac{BC}{AC}.$$

Тому, з урахуванням (2), одержуємо:

$$T_B = \frac{1}{2}G\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}. \qquad (3)$$

За теоремою косинусів в трикутнику ADC на рис. 9 маємо:

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2 - 2AC\cdot CD\cdot\cos(\alpha-\beta)} =$$
$$= \sqrt{AC^2 + \frac{1}{4}BC^2 - AC\cdot BC\cdot\cos(\alpha-\beta)}.$$

Підставивши сюди (2), отримуємо :

$$AD = \frac{AB}{\sin(\alpha-\beta)}\sqrt{\sin^2\beta + \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos(\alpha-\beta)}.$$

Оскільки, згідно з (1):

$$R_A = G\frac{AD}{AC}$$

то:

$$R_A = \frac{G}{\sin\beta}\sqrt{\sin^2\beta + \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\left(\alpha-\beta\right)} \quad (4)$$

Формули (3),(4) дають можливість обислити T_B і R_A в широкому діапазоні значень кутів α і β. Із них випливає ,що коли α не прямує до нуля, а $\beta \to 0$, то $T \to \infty$ і $R_A \to \infty$,що може спричинити розрив троса.

У граничному випадку, коли $\alpha = 0$, або $\alpha = 180^\circ$, $\sin\alpha = 0$ і згідно з (3), (4), при $\beta > 0$, $T_B = 0$, $R_A = G$.

Використовуючи узагальнені розв'язки, обчислимо T_B і R_A для заданих вище числових даних. Розрахунки дають: $\sin\beta = 1/2$; $\cos\left(\alpha-\beta\right) = \sqrt{3}\big/2$.

$$T_B = \frac{1}{2}20\cdot\frac{\sqrt{3}\big/2}{1\big/2} = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32\,\text{kH};$$

$$R_A = 20\cdot 2\sqrt{0{,}25 + \frac{3}{16} - \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10\,\text{kN}.$$

Що узгоджується з числами одержаними вище у відповіді.

Задача № 4

Балка *AB* (рис. 12) закріплена шарнірно-нерухомою опорою в точці *A* і шарнірно-рухомою в точці *B*.

До середини балки, під кутом 45^0, прикладена сила $P = 2\ kN$, довжина балки 4 м.

Визначити реакції опор A і B для двох випадків нахилу рухомої опори. Вагою балки знехтувати.

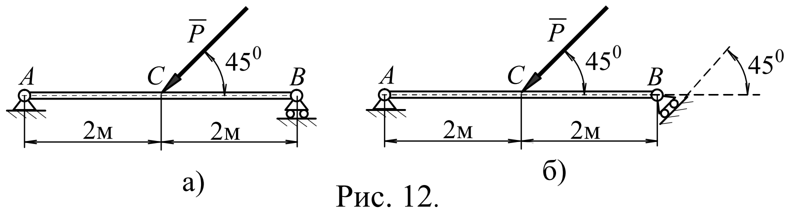


Рис. 12.

Розв'язування. Розглянемо рівновагу балки AB , що зображена на рис. 12, а. На балку діє активна сила P і реакції опор A і B (рис. 13). Опора B шарнірно-рухома, її реакція напрямлена перпендикулярно до опорної поверхні. Оскільки, в даному випадку опорна поверхня паралельна до осі балки, то реакція $\overline{R}_B$ перпендикулярна до AB . Опора A шарнірно-нерухома і напрям її реакції попередньо вказати не можна.

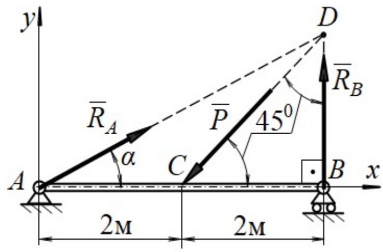


Рис. 13

Для визначення напряму реакції $\overline{R}_A$ (кута α) скористаємося теоремою про три сили. Лінії дії сили $\overline{P}$ і реакції $\overline{R}_B$ перетинаються в точці D.

Таким чином, лінія дії $\overline{R}_A$ те ж повинна пройти через точку D.

З рис. 13 видно, що ΔCBD рівнобедрений і прямокутний, тобто $DB=CB=2м$. Звідки:

$$tg\alpha = \frac{DB}{AB} = \frac{2}{4} = 0{,}5; \qquad \alpha = arctg(0{,}5) = 26{,}6^0.$$

Тепер перейдемо до визначення величин реакцій опор.

Складемо рівняння рівноваги сил в проекціях на осі обраної системи координат *Axy*:

$$\sum F_{kx} = R_A \cos\alpha - P\cos 45^0 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = R_A \sin\alpha - P\sin 45^0 + R_{B.} = 0.$$

З урахуванням числових значень:

$$\sum F_{kx} = 0{,}894 R_A - 2\cdot 0{,}707 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0{,}448 R_A - 2\cdot 0{,}707 + R_B = 0.$$

В результаті дістанемо:

$$R_A = \frac{2\cdot 0{,}707}{0{,}894} = 1{,}58\ \text{кН};$$

$$R_B = 2\cdot 0{,}707 - R_A\cdot 0{,}448 = 1{,}41 - 1{,}58\cdot 0{,}448 = 0{,}71\ \text{кН}.$$

Відповідь: $R_A = 1{,}58$ кН; $R_B = 0{,}71$ кН.

Перейдемо до визначення реакцій опор балки *AB,* що зображена на рис. 12,б.

В цьому випадку, реакція $\overline{R}_B$ складає з віссю балки *AB* кут 45^0. Лінія дії реакції $\overline{R}_A$ (рис.14) проходить через точку *D*, в якій перетинаються лінії дії сили $\overline{P}$ і реакції $\overline{R}_B$.

Визначимо кут α між реакцією $\overline{R}_A$ і віссю балки *AB*:

$$tg\alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3}; \qquad \alpha = arctg\frac{1}{3} = 18{,}4^0.$$

Складемо рівняння рівноваги для системи сил, що діє на балку :

$$\sum F_{kx} = R_A \cos\alpha - P\cos 45^0 - R_B \cos 45^0 = 0;$$
$$\sum F_{ky} = R_A \sin\alpha - P\sin 45^0 + R_{B.} \sin 45^0 = 0.$$

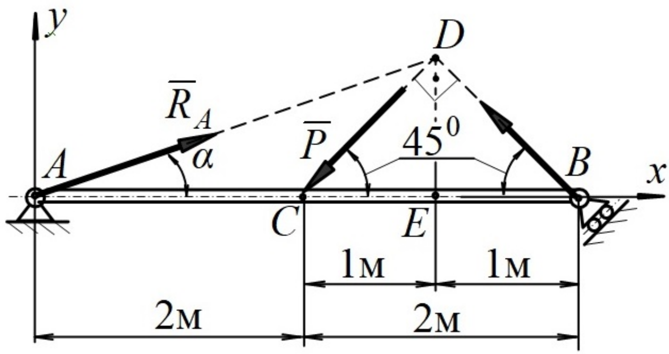


Рис. 14

З урахуванням числових даних:

$$\sum F_{kx} = 0{,}95R_A - 2\cdot 0{,}707 - 0{,}707R_B = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0{,}32R_A - 2\cdot 0{,}707 + 0{,}707R_{B.} = 0.$$

Додавши рівняння дістанемо:

$$1{,}26R_{A;} - 2{,}83 = 0; \quad R_A = \frac{2{,}83}{1{,}26} = 2{,}24\ \text{кН}.$$

Підставивши значення R_A в перше рівняння знайдемо R_B:

$$R_B = \frac{0{,}95R_A - 1{,}41}{0{,}707} = \frac{0{,}95\cdot 2{,}24 - 1{,}41}{0{,}707} = 1{,}0\ \text{кН}.$$

Відповідь: $R_A = 2{,}24$ кН; $R_B = 1$ кН.

Задача №5

Вона відрізняється від задачі №4 лише положенням правої опори

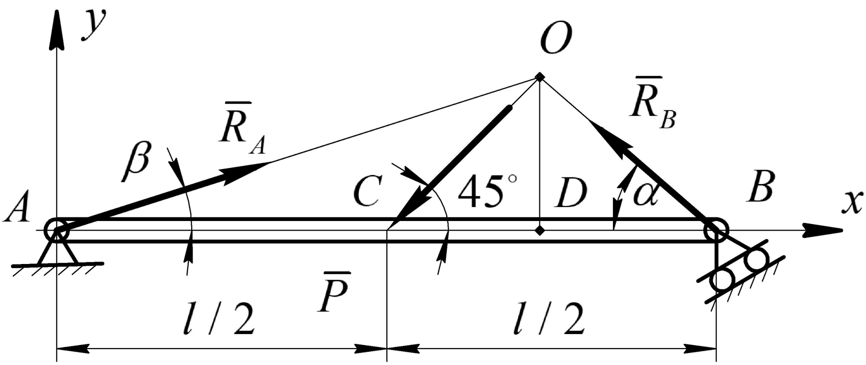


Рис. 15

Як узагальнення попередньої задачі, з'ясуємо вплив куба нахилу правої опори B (кута α на рис. 15) на значення опорних реакцій R_A і R_B. Приймаючи $0 < \alpha \le 90^\circ$, залишаємо попередніми решту вхідних даних.

За рівняннями рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0: \quad R_A \cos\beta - P\cos 45^\circ - R_B \cos\alpha = 0;$$
$$\sum F_{ky} = 0: \quad R_A \sin\beta - P\sin 45^\circ + R_B \sin\alpha = 0.$$

Система має розв'язок :

$$R_A = P\frac{\sin 45^\circ\left(\sin\alpha + \cos\alpha\right)}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta};$$
$$R_B = P\frac{\sin 45^\circ\left(\cos\beta - \sin\beta\right)}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}. \qquad (1)$$

де залишається невідомим кут β. Щоб визначити його звернемося до рис. 15. Там:

$$tg\beta = \frac{OD}{L - DB} = \frac{OB \cdot \sin\alpha}{L - OB \cdot \cos\alpha} \qquad (2)$$

Тут враховано, що OD і DB катети прямокутного трикутника ODB.

З трикутника OCB за теоремою синусів одержуємо :

$$OB = \frac{(l/2) \cdot \sin 45^\circ}{\sin(135^\circ - \alpha)} = \frac{(l/2) \cdot \sin 45^\circ}{\cos(45^\circ - \alpha)} \qquad (3)$$

Підстановка (3) в (2), після елементарних перетворень, дає:

$$tg\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha + 2\sin\alpha} \qquad (4)$$

Значення кута β можна не визначати, бо в формулах (1):

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\beta}}; \ \sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1 + tg^{2\beta}}}. \qquad (5)$$

Таким чином ,обчислення опорних реакцій зводиться до використання формул (1), (4), (5).

Проведемо розрахунки при $P = 2$ kH, $\alpha = 90^\circ$. Для таких вхідних даних:

$$tg\beta = 1/2; \ \cos\beta \approx 0,894; \ \sin\beta \approx 0,447;$$

$$R_A = 2\frac{0,707}{0,894} \approx 1,58 \text{ kH}; \quad R_B = 2\frac{0,707 \cdot 0,447}{0,894} \approx 0,71 \text{ kH}.$$

Якщо $\alpha = 45^\circ$,то $tg\beta = 1/3$; $\cos\beta \approx 0,949$; $\sin\beta \approx 0,316$;

$$R_A = 2 \cdot \frac{0,707 \cdot 1,414}{0,707 \cdot 1,265} \approx 2,24 \text{ kH}; \quad R_B = 2 \cdot \frac{0,707 \cdot 0,633}{0,707 \cdot 1,265} \approx 1 \text{ kH}.$$

У другому випадку зменшення кута α призвело до збільшення значень R_A і R_B.

Із розв'язку (1), (4), (5) випливає,що при $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \to 0$; $R_A \to \infty; R_B \to \infty$. Тому варіант правої опори з малими α можна вважати нераціональним в конструктивному відношенні.

Задача № 6

Проведемо узагальнення задачі №4, змінюючи положення точки C прикладання сили і кут нахилу сили α до горизонту. Припускаємо що: $0 < BC < l$; $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.

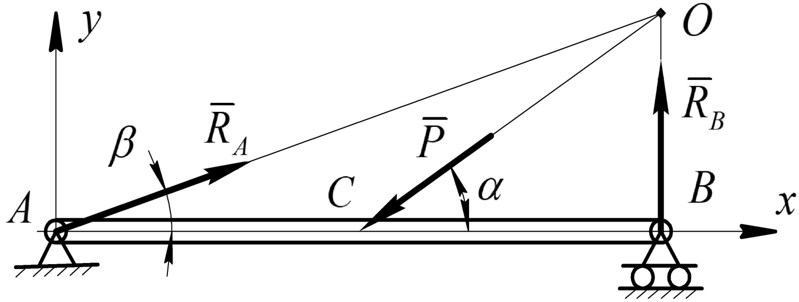


Рис 16

Із прямокутного трикутника OBC випливає,що:

$$OB = BC \cdot tg\alpha$$

Тоді:

$$tg\beta = \frac{OB}{AB} = \frac{BC}{AB} tg\alpha . \qquad (1)$$

Рівняння рівноваги мають вигляд :

$$\sum F_{kx} = 0: \quad R_A \cos\beta - P\cos\alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \quad R_A \sin\beta - P\sin\alpha + R_B = 0.$$

Розв’язком цієї системи є :

$$R_A = P\frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$
$$R_B = P\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = P\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}. \qquad (2)$$

Де

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}; \quad \sin\beta = \frac{tg\beta}{\sqrt{1+tg^2\beta}}. \qquad (3)$$

Обчислення значень опорних реакцій R_A і R_B зводиться до використання формули (1), (2),(3).

Розглянемо окремі випадки.

1. $\alpha = 0$, $tg\alpha = 0$. Згідно з (1) і (3) $tg\beta = 0$, $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$.

За формулами (2), незалежно від BC/AB, отримуємо:

$$R_A = P; \; R_B = 0.$$

2. $\alpha = 180^\circ$, $tg\alpha = 0$. При такому α, незалежно від BC/AB, маємо: $R_A = -P; R_B = 0$.

3. $\alpha = 90^\circ$, тобто балка навантажена вертикальною силою. Згідно з (1), при $\alpha = 90^\circ$, кут $\beta \to 90^\circ$, а відношення:

$$\frac{tg\beta}{tg\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{BC}{AB}.$$

При такому навантаженні замість (2) отримуємо:

$$R_A = P\frac{BC}{AB}; \; R_B = P\left(1 - \frac{BC}{AB}\right).$$

Якщо $BC/AB = 1/2$, тобто сила прикладена по середини балки, то $R_A = R_B = P/2$.У випадку, коли $BC = 0$: $R_A = 0$; $R_B = P$. При $BC/AB = 1$: $R_A = P$; $R_B = 0$, що узгоджується з фізичними уявленнями.

Використовуючи викладений розв'язок, обчислено R_A і

R_B для $P = 2$ kH, $\alpha = 45^\circ$, $BC / AB = 1/2$. При таких числових даних: згідно з (1) $tg\beta = 1/2$ і за формулами (3) $\cos \approx 0,894$; $\sin\beta \approx 0,447$. Підставивши ці значення тригонометричних функцій в (2), одержуємо:

$$R_A = 2 \cdot \frac{0,707}{0,894} \approx 1,58 \text{ kH};$$

$$R_B = 2 \cdot \frac{0,707\left(0,894 - 0,447\right)}{0,894} \approx 0,71 \text{ kH}.$$

Такі значення опорн6их реакцій було обчислено раніше в задачі №4.

Задача №7

Знайти силу $F > P$, прикладену під кутом β до горизонту, щоб перекотити через вертикальну сходинку висотою h трамбовочний коток вагою G і радіусом r (рис. 17). Розрахунки провести для $G = 20$ kH, $r = 0,6$ м; $h = 0,08$ м при $\beta = 0$ і $\beta = 30^\circ$, $\left(h < r\right)$.

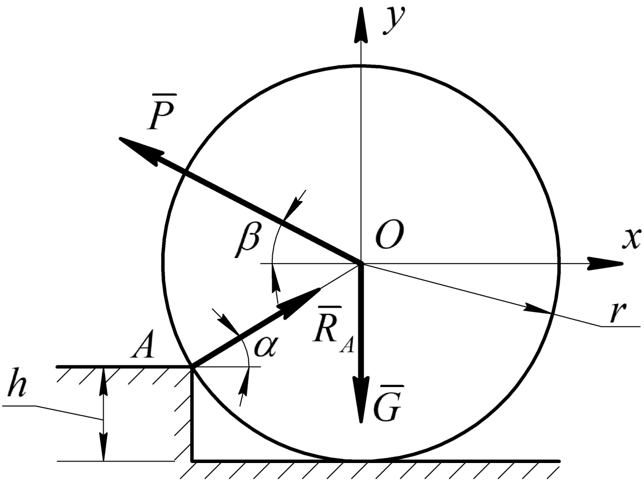


Рис. 17

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = 0:\ R_A \cos\alpha - P\cos\beta = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0:\ R_A \sin\alpha + P\sin\beta = G\ .$$

Звідки:

$$P = G\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} = G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}\ . \qquad (1)$$

Із рисунка видно, що:

$$\sin\alpha = \frac{r-h}{r};\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{\sqrt{h(2r-h)}}{r} \qquad (2)$$

Отже формули (1), (2) дають можливість обчислити P в стані рівноваги, щоб перекотити каток потрібна трохи більша сила, ніж P.

Для заданих числових значень маємо: при $\beta = 0$: $\cos\beta = 1$, $\sin\beta = 0$, $\sin\alpha \approx 0{,}867$, $\cos = 0{,}499$; $P = 11{,}51$ kH, а при $\beta = 30^\circ$: $\cos \approx 0{,}866$; $\sin\beta = 0{,}5$; $P \approx 9{,}98$ kH.

У другому випадку потрібна менша сила, щоб перекотити каток через вертикальну сходинку.

Досліджуючи вираз (1) на екстремум при змінному β приходимо до висновку, що P має мінімальне значення коли $\cos(\alpha+\beta) = 0$ або $\alpha + \beta = 90^\circ$. Ця умова наближено виконується у другому варіанті числових даних де $\beta = 30^\circ$.

Задача №8

Знайти силу $F > P$, прикладену під кутом β до горизонту, щоб перекотити через перешкоду висотою h

колесо радіуса r вагою G. Перешкода має форму частини циліндра радіуса r_0 (рис. 18).

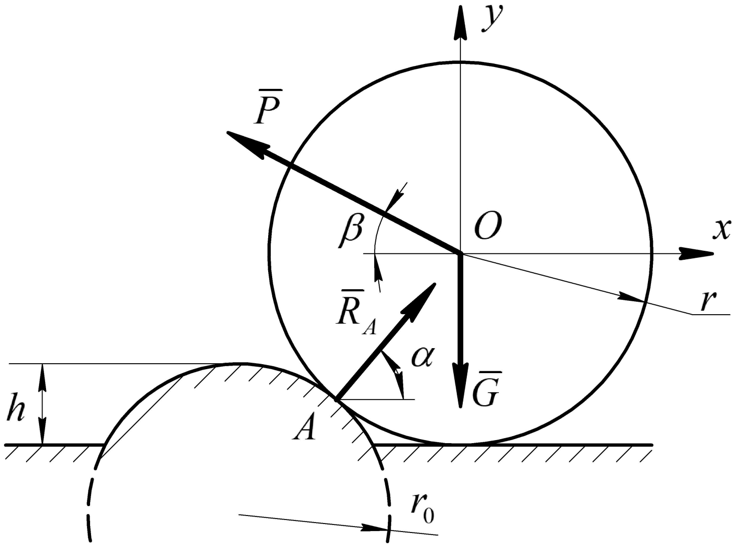


Рис. 18

Згідно з рис.18, при умові, що $h < r_o < r$:

$$\sin\alpha = \frac{r + r_o - h}{r + r_o} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{r + r_0 - h}{r + r_0}.$$

Підставивши це значення α у розв'язок попередньої задачі отримуємо розрахункову формулу:

$$P = G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Як і раніше, P має мінімальне значення, коли $\alpha + \beta = 90^\circ$.

Тоді $\sin\left(\alpha + \beta\right) = 1$,

$$\min P = G\sin\beta.$$

Обчислимо силу P для $G = 20$ kH, $r = 0,6$ м; $h = 0,08$ м; $\beta = 0$ при $r_0 = 0,2$ м і $r_0 = 0,3$ м.

У першому випадку: $\alpha = \arcsin 0,9 \approx 64,158^\circ$; $P = 20 \cdot ctg\alpha \approx 9,69$ kH; $\min P \approx 8,72$ kH.

У другому випадку $\alpha = \arcsin 0,911 \approx 65,659^\circ$; $P \approx 9,05$ kH; $\min P \approx 8,24$ kH.

Збільшення радіуса перешкоди r_0, при $h - const$, призвело до зменшення потрібної сили $F > P$.

Задача № 9

Котел вагою G та радіусом r розташований на різновисоких виступах кам'яної кладки (рис. 19). Відстань між стінками кладки $l < 2r$, а різниця висот стінок $h < l$. Визначити сили тиску котла на стінки кладки.

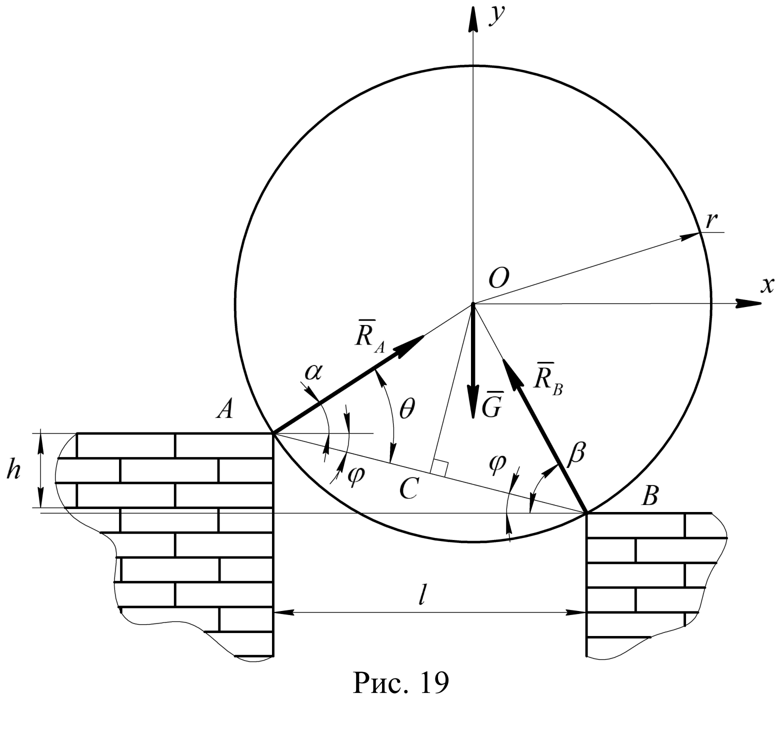


Рис. 19

Із рисунка видно, що: $AB = \sqrt{\ell^2 + h^2}$; $AC = 0,5AB$;

$$\theta = \arccos\frac{AC}{r} = \arccos\frac{0,5\sqrt{\ell^2 + h^2}}{r}; \qquad \varphi = arctg\frac{h}{l};$$

$\alpha = \theta - \varphi$; $\beta = \theta + \varphi$; $\alpha + \beta = 2\theta$.

Рівняння рівноваги мають вигляд:

$$\sum F_{kx} = 0: \ R_A \cos\alpha - R_B \cos\beta = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0: \ R_A \sin\alpha + R_B \sin\beta = G.$$

Із них випливає, що:

$$R_A = G\frac{\cos\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} = G\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = G\frac{\cos\beta}{\sin(2\theta)};$$

$$R_B = G\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = G\frac{\cos\alpha}{\sin(2\theta)}.$$

Варіант конструкції, коли $AC \to r$ не є раціональним,бо в цьому випадку $\theta \to 0$, $\sin(2\theta) \to 0$, $R_A \to \infty$ і $R_B \to \infty$.

Такі реакції опор можуть пошкодити кладку і стінки котла.

Для проведення розрахунків приймаємо: $G = 40$ kH ; $r = 1$ м ; $\ell = 1,6$ м і $h = 0$, $h = 0,2$ м .

У першому випадку $(h = 0)$: $\varphi = 0$; $\alpha = \beta = \theta = \arccos 0,8 \approx 36,870^\circ$; $R_A = R_B \approx 40 \cdot \dfrac{0,8}{0,96} \approx 33,33$ kH .

У другому випадку $h = 0,2$ м : $\varphi = arctg(0,125) \approx 7,125^\circ$; $\theta \approx \arccos 0,806 \approx 36,271^\circ$; $\alpha \approx 29,146^\circ$; $\beta \approx 43,396^\circ$; $R_A \approx 30,47$ kH ; $R_B \approx 36,62$ kH . Нижня опора *B* приймає більше навантаження, ніж верхня опора *A*.

Задача №10

Однорідний вагомий стержень AB довжиною $2a$ обпирається на криволінійну напрямну, що має форму півкола радіуса R. Визначити положення рівноваги стержня (знайти кут φ в положенні рівноваги (рис.20)

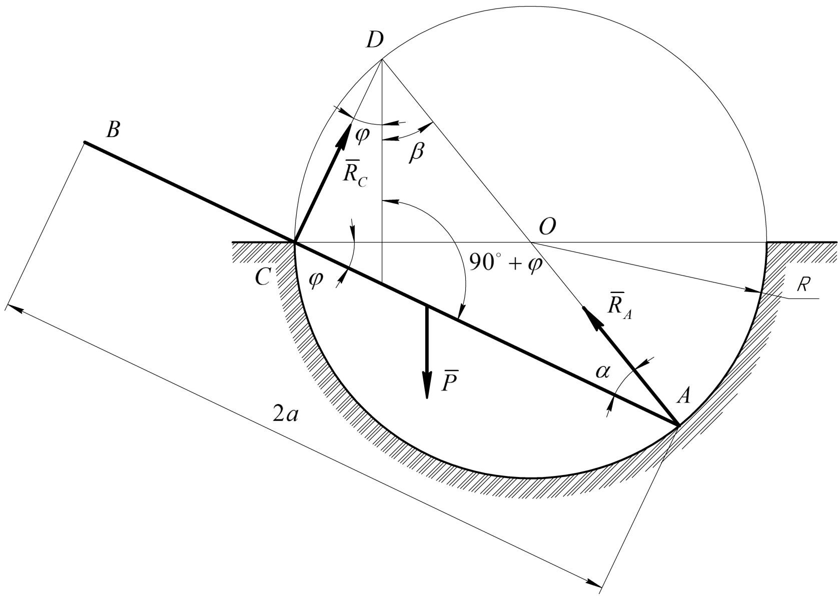


Рис. 20

За теоремою про три сили лінії дії ваги стержня $\overline{P}$ і реакції в'язів $\overline{R}_A$ і $\overline{R}_C$ перетинаються в точці D. Оскільки трикутник AOC рівнобічний, то $\alpha = \varphi$. Із трикутника AED випливає, що:

$$\beta = 180^\circ - \alpha - 90^\circ - \varphi = 90^\circ - 2\varphi$$

Враховуючи,що $AE = \alpha$ (стержень однорідний) з трикутника AED за теоремою синусів маємо:

$$\frac{\sin(90+\varphi)}{2R}=\frac{\cos\varphi}{2R}=\frac{\sin\beta}{a}=\frac{\sin\left(90^{\circ}-2\varphi\right)}{a}=\frac{\cos(2\varphi)}{a}.$$

Тоді $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1 = \dfrac{a}{2R}\cos\varphi$ або

$$\cos^2\varphi-\frac{a}{4R}\cos\varphi-\frac{1}{2}=0$$

Це квадратне рівняння має розв'язок:

$$\cos\varphi=\frac{a}{8R}\left(1+\sqrt{1+\frac{32R^2}{a^2}}\right).$$

Отже: $\varphi=\arccos\left[\dfrac{a}{8R}\left(1+\sqrt{1+\dfrac{32R^2}{a^2}}\right)\right].$

Задачі для самостійного розв’язку

Для самостійного розв'язування заданою темою рекомендуємо наступні задачі, взяті з задачника І.В. Мещерського: 2.21, 2.23, 2.27, 2.31 [2].

Задача № 1

Кулька *B* (рис. 11) вагою *P* підвішена в нерухомій точці *A* за допомогою нерозтяжної нитки *AB* і розташовується на поверхні гладенької сфери з радіусом *r*; відстань від точки *A* до поверхні сфери *AC=d*, довжина нитки *AB=l*, пряма *AO* вертикальна. Визначити натяг *T* та реакцію *Q* сфери. Розмірами кульки знехтувати.

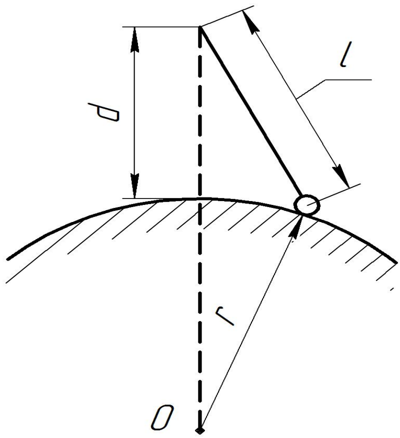
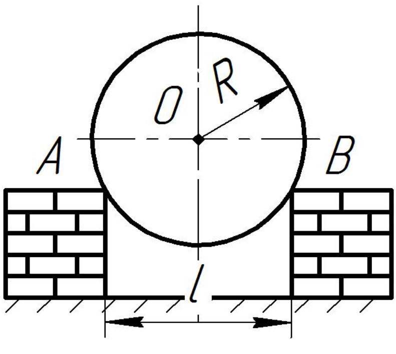


Рис. 21

Задача № 2



Котел (рис. 22) з рівномірно розподіленою по довжині вагою $P=40$ кН та радіусом $R=1$ м розташований на виступах кам'яної кладки. Відстань між стінками кладки $l=1{,}6$ м. Визначити силу тиску котла на кладку в точках *A* і *B*. Тертям знехтувати.

Рис. 22

Задача № 3

Верхній кінець *A* однорідного брусу *AB* (рис. 13), довжина якого 2 м, а вага 50 Н, обпирається об гладеньку вертикальну стіну. До нижнього кінця *B* прив'язано трос *BC*. Знайти на якій відстані *AC* необхідно прикріпити трос до стіни, щоб брус знаходився в рівновазі, утворюючи кут $BAD=45°$. Визначити натяг троса і реакцію *R* стіни.

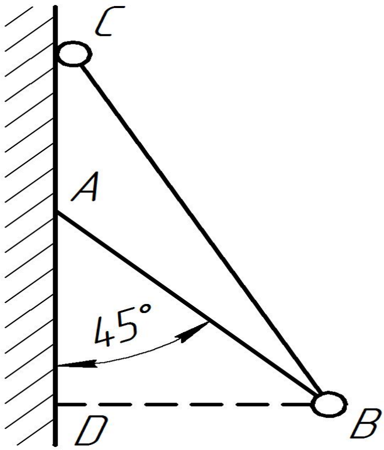


Рис. 13

Задача № 4

На малюнках (рис. 22, а,б) зображено балки *AB*, які утримуються в горизонтальному стані вертикальними стрижнями *CD*. На кінцях балок діють сили *F=30* кН, спрямовані під кутом 60° до горизонту. Використовуючи розміри з малюнків, визначити зусилля *S* в стрижнях *CD* і силу тиску балок на стіни, якщо кріплення *A*, *C* і *D* є шарнірами. Вагою стрижней і балок знехтувати.

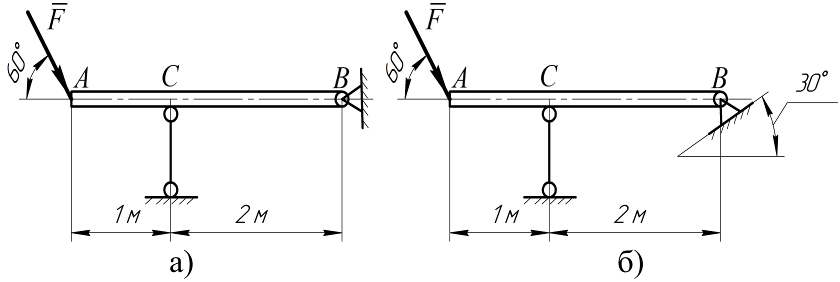


Рис. 22

Список літератури

1. Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І., Тіщенко Л.М. Курс теоретичної механіки, Харків: Око, 2002.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике, М.: Наука, 1973.
3. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Курс лекцій. Харків, 2013. 544с.
4. Бурлака В.В., Сліпченко М.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка: Збірник задач для курсових робіт. Навчальний посібник. Харків: Міськдрук, 2016. 309 с.
5. Кучеренко С.І., Бурлака В.В., Тіщенко Л.М. Теоретична механіка. Навчальний посібник / за ред. С.І. Кучеренка. Харків, 2012. 568с.

Навчальне видання

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ ТА АНАЛІЗ РАЦІОНАЛЬНОГО РОЗТАШУВАННЯ ОПОР

Методичні вказівки

до виконання практичних робіт

Укладачі

СЛІПЧЕНКО Максим Володимирович
ШУКАЄВА Ольга Миколаївна

Формат 60х84\16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 2,3
Наклад 30 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44