МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний біотехнологічний університет
ФАКУЛЬТЕТ МЕХАТРОНІКИ ТА ІНЖИНІРИНГУ

Кафедра фізики і математики

РЯДИ

Основи теорії та методика розв'язування задач з варіантами індивідуальних завдань

для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей

Затверджено
Рішенням Вченої ради факультету
мехатроніки та інженіренгу ДБТУ
Протокол № 7 від 23.11.2022 р.

Харків
2022

УДК 512.64(076.2)
Л-59

Схвалено
на засіданні кафедри фізики і математики
Протокол № 10 від 19.05.2022 р.

Ряди: основи теорії та методика розв'язування задач з варіантами індивідуальних завдань для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец./ О.І.Завгородній [та ін.]; Держ. біотехнол. ун-т.– Харків: ДБТУ, 2022. – 94 с.

Навчально-методичний посібник призначений для вивчення числових, степеневих та тригонометричних рядів і методів наближених обчислень на їх основі. Для самостійної роботи і придбання практичних навиків розв’язку задач наведена необхідна теоретична інформація та варіанти індивідуальних завдань. З метою поліпшення ефективності сприйняття матеріалу та роботи над індивідуальним завданням у кожному розділі показана достатня кількість розібраних прикладів. Для більш глибокого розуміння матеріалу разом з прикладами дається значна кількість ілюстрацій графічного характеру.

Розрахована на студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навчання інженерних спеціальностей.

Рецензенти:

А. О. Пак, доктор техн. наук, доцент кафедри фізики і математики Державного біотехнологічного університету

О. А. Макаров, кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри прикладної математики Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна.

Відповідальний за випуск О. І. Завгородній, д-р техн. наук., проф.

З М І С Т

ПЕРЕДМОВА

Дослідження закономірностей в природі, інженерному проектуванні, технологічних процесів у виробництві, тощо часто відрізняється високим рівним складності, та вимагає залучення витончених методів досліджень. В цьому сенсі досить успішними стали функціональні ряди, які доповнили дослідження новими можливостями. Досить досяжними та ефективними виявились методи степеневих та тригонометричних рядів, які одержали широке застосування в різних галузях наукових досліджень. Тому володіння вказаними методами в теоретичних дослідженнях і уміння застосовувати їх в наближених обчисленнях є досить важливим, а відповідна тематика міститься в тих розділах вищої математики, які є обов'язковими для вивчення студентами закладів вищої освіти технічних спеціальностей.

Метою посібника є прививання студентам навичок у розв'язуванні задач, пов'язаних зі збіжністю рядів, розкладанням функцій в ряди та наближеними обчисленнями за допомогою рядів.

Перший розділ присвячено числовим рядам. Особлива увага приділена дослідженню цих рядів на збіжність. Матеріал цього розділу є підґрунтям для подальшого опанування функціональних рядів, але має і самостійне значення.

В другому розділі досліджуються степеневі ряди і їх властивості. На основі теореми Абеля розкриті поняття радіуса збіжності, інтервалу та області збіжності, доведені формули для їх обчислення. Розглянуто ряди Тейлора та Маклорена, а також методика розкладання функцій в степеневі ряди на основі формули Тейлора. Наприкінці розділу даються основи наближених обчислень за допомогою степеневих рядів.

Останній розділ присвячений тригонометричним рядам Фур'є. Даються умови розкладання функцій в ряди Фур'є за теоремою Діріхле. Доводяться співвідношення для розкладання функцій в ряд Фур'є на будь-якому відрізку. Розглядаються особливості розкладання парних і непарних функцій.

Для кращого сприйняття матеріалу до кожного розділу додається достатня кількість прикладів та графіків.

Посібник відповідає навчальній програмі з вищої математики і буде корисним для студентів денної і заочної форм навчання.

І. ЧИСЛОВІ РЯДИ

1.1. Числові ряди – загальні поняття. Необхідна ознака збіжності ряду.

Числовим рядом називається вираз виду

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots, \qquad (1.1)$$

де a_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$ – деякі числа – члени ряду.

Член ряду, записаний, як функція його порядкового номера

$$a_n = f(n),$$

називається загальним членом ряду.

Спрощено ряд позначають так:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (читається: сума a_n по n від 1 до ∞).

Приклади.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$, загальний член ряду: $a_n = \frac{1}{n^2}$.

2. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$

Загальний член можна записати по-різному, наприклад:

$a_n = \frac{1}{n}$ або $a_n = \frac{1}{n} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$.

Тоді і продовження ряду буде різним:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdots$ або $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{121}{5} + \frac{721}{6} + \cdots$

Таким чином, задати ряд, значить вказати його загальний член, а не кілька його перших членів.

Сума перших n членів ряду називається його n-ною частинною сумою:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n. \qquad (1.2)$$

Як відомо, для скінченого числа доданків операція додавання підкоряється наступним законам:

1) $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ – переставний (комутативність);

2) $(a_1 + a_2) + a_3 = a_1 + (a_2 + a_3)$ – сполучний (асоціативність);

3) $c(a_1 + a_2) = ca_1 + ca_2$ – розподільний (дистрибутивність).

Для нескінченої суми (1) ці закони виконуються не завжди.

Приклади. **3.** Задано ряд: $a - a + a - a + \cdots$. Сума цього ряду:

$a-(a-a)-(a-a)-(a-a)-\cdots = a-0-0-0-\cdots = a$.

Інакше:

$(a-a)+(a-a)+(a-a)+\cdots = 0+0+0+\cdots = 0$.

Одержано різні результати, чого не може бути, отже, в цьому випадку не спрацьовує сполучний закон.

4. Задано ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} = 1+2+4+8+\cdots$. Підрахуємо його суму.

$S = 1+2+4+8+\cdots$.

Помножимо ліву і праву частину рівності на 2:

$2S = 2+4+8+\cdots$.

Додамо до лівої і правої частини одиницю:

$2S+1 = 1+2+4+8+\cdots$.

Замінимо праву частину рівнозначною величиною S. Після цього будемо мати:

$2S+1 = S \Rightarrow S = -1$.

Так як сума додатних чисел не може бути від'ємною – одержано хибний результат. Як бачимо, в цьому випадку не працює розподільний закон.

Таким чином, ряд (1.1) до визначення смислу нескінченної суми ніякої інформації не несе.

Сумою S ряду називається границя його частинної суми S_n при умові, що номер n необмежено зростає:

$$\boldsymbol{S = \lim_{n\to\infty} S_n} . \qquad (1.3)$$

При цьому, якщо сума ряду – скінчене число, то ряд називають збіжним, якщо ж сума ряду нескінчена, або взагалі не існує – розбіжним.

Нагадаємо, що крім середнього арифметичного існують поняття середнього геометричного та середнього гармонічного:

$a = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n}$ – середнє геометричне;

$\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}\right)$, a – середнє гармонічне.

Приклади. **5.** Відомі півосі еліпсоїда: a, b і c. Знайти радіус сфери рівновеликого об'єму.

Об'єми еліпсоїда та сфери, відповідно, рівні:

$$V_{\text{ел}} = \tfrac{4}{3}\pi abc, \quad V_{\text{сф}} = \tfrac{4}{3}\pi R^3 .$$

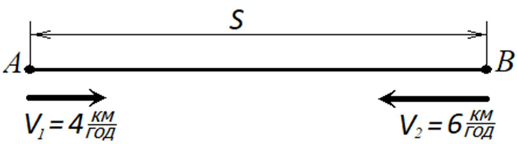
Прирівнюючи ці об'єми, одержимо:

$$\tfrac{4}{3}\pi abc = \tfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow R = \sqrt[3]{abc} .$$

Отже, радіусом сфери рівновеликого об'єму є середнє геометричне півосей еліпсоїда.

6. Пішохід пройшов шлях з п.A в п.B зі швидкістю $V_1 = 4\tfrac{\text{км}}{\text{год}}$. Зворотній шлях він пройшов зі швидкістю $V_2 = 6\tfrac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайти середню швидкість пішохода.

Позначимо: S – відстань між пунктами A і B; t_1, t_2 – час проходження пішоходом шляху S, відповідно, туди і назад.



Щоб знайти середню швидкість поділимо повний шлях $2S$ пішохода на час $t_1 + t_2$ його подолання:

$$V_{\text{ср}} = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{V_1} + \frac{S}{V_2}} = \frac{2}{\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}} = \frac{2V_1V_2}{V_1 + V_2} = \frac{2\cdot 4\cdot 6}{4+6} = 4,8\,\tfrac{\text{км}}{\text{год}}.$$

Записане співвідношення показує, що

$$\frac{1}{V_{\text{ср}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right),$$

тобто середня швидкість пішохода – це середнє гармонічне швидкостей V_1 і V_2.

Розглянемо тепер ряд:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots}\,. \tag{1.4}$$

В ньому: $a_{n-1} = aq^{n-2}$; $a_n = aq^{n-1}$; $a_{n+1} = aq^n$.

Знайдемо середнє геометричне членів a_{n-1} і a_{n+1}.

$$\sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \sqrt{aq^{n-2} \cdot aq^n} = \sqrt{a^2 q^{2(n-1)}} = aq^{n-1} = a_n.$$

Таким чином, кожний член, розпочинаючи з другого, є середнє геометричне його сусідніх членів, тому ряд (1.4) називають <u>геометричним</u>.

Частинна сума ряду:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ця формула відома, як формула для суми n членів геометричної прогресії. Далі маємо:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(a\frac{1}{1-q} - a\frac{q^n}{1-q}\right) = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^n.$$

При $|q| < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 \Rightarrow S = \dfrac{a}{1-q}$ – ряд збігається.

При $|q| > 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ – ряд розбігається.

При $|q| = 1$: $S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n \text{ разів}} = na$ і $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$ –

ряд теж розбігається.

Отже при $|q| < 1$ геометричний ряд збігається, а при $|q| \geq 1$ – ряд розбігається.

Розглянемо ряд:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots} \qquad (1.5)$$

В ньому: $a_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}$; $a_n = \dfrac{1}{n}$; $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Знайдемо середнє гармонічне членів a_{n-1} і a_{n+1}.

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{2}\left(n - 1 + n + 1\right) = n \Rightarrow a = \frac{1}{n} = a_n.$$

Як бачимо, кожний член ряду, крім першого, є середнє гармонічне двох його сусідніх членів, тому цей ряд називають гармонічним.

Складемо частинну суму $N = 2^{n+1}$ членів гармонічного ряду.

$$S_N = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+2}+\cdots+\frac{1}{2^n+2^n}\right) > 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$$

$$+\left(\underbrace{\frac{1}{2\cdot 2^n}+\frac{1}{2\cdot 2^n}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 2^n}}_{2^n \text{ доданків}}\right) = 1+\frac{1}{2}+\underbrace{2\cdot\frac{1}{4}+2^2\cdot\frac{1}{8}+\cdots+2^n\cdot\frac{1}{2\cdot 2^n}}_{n \text{ доданків}} =$$

$$= 1+\frac{1}{2}+n\cdot\frac{1}{2} = \frac{3+n}{2} \Rightarrow S_N > \frac{3+n}{2}.$$

Маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+n}{2} = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} S_N = \infty$ **, а це означає, що гармонічний ряд розбігається.**

Гармонічний ряд розбігається дуже повільно. Є справедливими наступні співвідношення, які можна легко одержати за допомогою комп'ютерних засобів обчислень, наприклад, в середовищі «Mathcad»:

$$\sum_{n=1}^{12366}\frac{1}{n} = 9,99996; \quad \sum_{n=1}^{12367}\frac{1}{n} = 10,00004.$$

Вони показують, що для одержання суми ряду всього в 10 одиниць треба скласти не менше, ніж 12366 перших його членів!

Нехай деякий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і має суму $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Тоді:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Звідси маємо **необхідну ознаку збіжності:**

У кожного збіжного ряду границя його загального члена a_n при необмеженому зростанні номера n дорівнює нулю

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0} \qquad (1.6)$$

Приклад **7.** Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-1}$.

$a_n=\frac{n^2+1}{3n^2-1}$ – загальний член ряду. $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n^2-1}=\frac{1}{3}\neq 0$.

Ряд розбігається, так як не виконана необхідна ознака збіжності (1.6).

Відмітимо, що ознака (1.6) є тільки необхідною і не є достатньою для збіжності. Це значить, що вона може виконуватись і для розбіжних рядів. Наприклад, для гармонічного ряду (1.5)

$$a_n=\frac{1}{n},\quad \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

– необхідна ознака виконується, але сам ряд розбігається. Отже, за допомогою цієї ознаки можна встановити тільки розбіжність ряду у випадку, коли необхідна ознака не виконується.

Якщо відкинути кілька поряд ідущих перших n членів ряду, то одержимо новий ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n+k}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots,$$

який називають n-ним залишком ряду. Залишок ряду відрізняється від усього ряду на стале число S_n (частинну суму ряду) тому, **якщо збігається (розбігається) один із залишків ряду, то збігається (розбігається) і сам ряд.**

Ряд називають **знакододатним**, якщо всі його члени – додатні числа. Ряд називають **знаковід'ємним**, якщо всі його члени – від'ємні числа.

Збіжний знаковід'ємний ряд можна замінити знакододатним, помноживши його на "мінус одиницю".

Властивості збіжних знакододатних рядів

1. Сума збіжного знакододатного ряду не змінюється при будь-якій перестановці його членів.
2. Різниця і сума збіжних знакододатних рядів є також збіжні ряди, сумою яких є різниця і сума сум відповідних рядів.
3. Добуток членів збіжного знакододатного ряду з сумою S на деяке число λ є також збіжний ряд з сумою λS .
4. Сума і різниця збіжного і розбіжного знакододатних рядів – розбіжний ряд.

1.2. Ознаки збіжності знакододатних рядів

Приклади 3 і 4 переконують в тому, що для деяких рядів (нескінченних сум) не виконуються сполучний та розподільний закони, що приводить до хибних результатів. Тепер ми можемо бачити, що названі приклади стосуються розбіжних рядів. Що ж до збіжних рядів, то розглянуті вище властивості вказують на те, що ці закони виконуються для них автоматично. Тому на перший план висуваються задачі з'ясування збіжності-розбіжності рядів. Ці задачі розв'язуються на основі спеціальних стверджень, які називаються ознаками.

1.2.1. Дві ознаки порівняння рядів

Ознака 1. Якщо, розпочинаючи з деякого номера, члени заданого ряду не перевищують відповідних членів збіжного ряду, то і заданий ряд збігається. (1.7*а*)
Якщо ж, розпочинаючи з деякого номера, члени заданого ряду не менші відповідних членів розбіжного ряду, то і заданий ряд розбігається. (1.7*б*)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (a); \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad (б).$$

Нехай ряд (*б*) збігається і $a_{N+i} \le b_{m+i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$. Тоді: $a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_{N+k} \le b_{m+1} + b_{m+2} + \cdots + b_{m+k}$. Позначимо: A_k – частинна сума залишку ряду (*а*) (ліва частина нерівності); B_k – частинна сума залишку ряду (*б*) (права частина нерівності). Для збіжного ряду справедливо: $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$, отже $A_k \le B_k < B \Rightarrow A_k < B$, тобто, частинна сума ряду (*а*) обмежена, а це значить що цей ряд збігається.

Нехай, тепер, ряд (*б*) розбігається і $a_{N+i} \ge b_{m+i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$. Тоді $A_k \ge B_k$. Але частинна сума B_k необмежена ($\lim\limits_{k\to\infty} B_k = \infty$), тому необмеженою є і частинна сума A_k ($\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \infty$), що стверджує розбіжність ряду (*а*). Цим завершується доведення ознаки 1.

Ознака 2. Якщо при $n \to \infty$ границя відношення a_n / b_n загальних членів двох рядів (*а*) і (*б*) є стала величина, відмінна від нуля, то вони збігаються чи розбігаються одночасно:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \ne 0. \tag{1.8}$$

З визначення границі витікає, що в процесі зміни номера n наступить момент, коли для відношення a_n/b_n буде справедливою нерівність: $\left|(a_n/b_n)-c\right|<\varepsilon \ (\varepsilon>0)$. При $\varepsilon=c/2$ будемо мати:

$$-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-c<\varepsilon\Rightarrow-\frac{c}{2}<\frac{a_n}{b_n}-c<\frac{c}{2}\ \Rightarrow\ \frac{c}{2}<\frac{a_n}{b_n}<\frac{3c}{2}\ \Rightarrow\ \frac{c}{2}b_n<a_n<\frac{3c}{2}b_n\,.$$

Нехай ряд (*б*) розбігається. Так, як $a_n>(c/2)b_n$, то за першою ознакою порівняння (1.7*б*) розбігається і ряд (*а*). Нехай, тепер, ряд (*б*) збігається. Так, як $a_n<(3c/2)b_n$, то за першою ознакою порівняння (1.7*а*) збігається і ряд (*а*). Отже, ознака 2 доведена.

<u>Приклади</u>. **8.** Дослідити на збіжність ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}.$

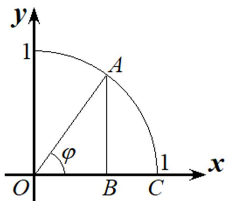
Порівняємо цей ряд зі збіжним геометричним рядом (1.4):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\ =\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}+\cdots,\ a_n=\frac{1}{n!},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots,\ \ b_n=\frac{1}{2^n},\left(q=\frac{1}{2}<1\right).$$

Як бачимо, розпочинаючи з четвертого члена ($n\ge 4$) виконується нерівність: $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^n}$ тому за першою ознакою порівняння (1.7*а*) заданий ряд теж збігається.

9. Дослідити на збіжність ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}.$



$AB=\sin\varphi,\ \ \cup AC=\varphi,\ \ \sin\varphi<\varphi,$

$\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{n}.$

Як бачимо, порівняння з гармонічним розбіжним рядом (1.5) за першою ознакою (1.7*б*) результату не приносить.

Застосовуємо другу ознаку порівняння (1.8). З врахуванням першої визначної границі одержимо:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\,.$$

Оскільки результатом є стале число, яке не дорівнює нулю, то заданий ряд, як і гармонічний, розбігається.

1.2.2. Ознака Даламбера

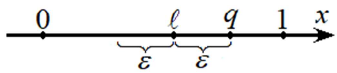
Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя ℓ відношення a_{n+1}/a_n наступного члена до попереднього при $n \to \infty$, то ряд збігається при $\ell < 1$ і розбігається при $\ell > 1$.

Коротко цю ознаку можна записати так:

$$\boxed{\text{Якщо } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \text{ то } \begin{cases} \text{при } \ell < 1 \text{ ряд збігається;} \\ \text{при } \ell > 1 \text{ ряд розбігається.} \end{cases}} \qquad (1.9)$$

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \;\; \ell < 1.$

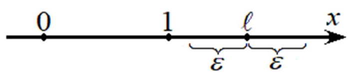
З визначення границі витікає, що при будь-якому, як завгодно малому ε , відношення a_{n+1}/a_n , розпочинаючи з деякого моменту зміни номера $n = N,$ попаде в ε - окіл точки $\ell.$ Це дозволяє вибрати ε - окіл на числовій осі таким чином, щоб його крайня права точка q знаходилась всередині відрізка [0; 1].



Маємо $\dfrac{a_{N+1}}{a_N} < q < 1,$ звідки: $a_{N+1} < a_N q, \;\; a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2,$ $a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3, \ldots, \;\; a_{N+k} < a_N q^k.$ Тобто, члени ряду, розпочинаючи з номера $N,$ менші відповідних членів збіжного геометричного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_N q^k, \;\; (|q| < 1)$. За цих умов, виходячи з першої ознаки порівняння (1.7a), заданий ряд збігається,

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \ell, \;\; \ell > 1.$

Виберемо ε - окіл точки ℓ таким чином, щоб він знаходився справа від одиниці.



Тоді буде справедливою нерівність $a_{N+1}/a_N > 1$ або $a_{N+1} > a_N$. Звідси: $a_N < a_{N+1} < a_{N+2} < \cdots < a_{N+k} < \cdots.$ Як бачимо, тут не виконується необхідна ознака збіжності $\left(\lim\limits_{k\to\infty} a_{N+k} \neq 0\right),$ тому заданий ряд розбігається. Отож, справедливість ознаки Даламбера доведена.

1.2.3. Радикальна ознака Коші

Якщо для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ існує границя ℓ кореня n-го степеня з загального члена a_n, при $n \to \infty$, то ряд збігається, при $\ell < 1$ і розбігається при $\ell > 1$.

Коротко:

$$\boxed{\text{Якщо } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell, \text{ то } \begin{cases} \text{при } \ell < 1 \text{ ряд збігається;} \\ \text{при } \ell > 1 \text{ ряд розбігається.} \end{cases}} \qquad (1.10)$$

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell, \ \ell < 1.$

Такі ж міркування, як і для ознаки Даламбера, приводять до наступної нерівності: $\sqrt[N]{a_N} < q \Rightarrow a_N < q^N \Rightarrow a_{N+k} < q^{N+k}, \ |q| < 1$. Вона показує, що члени заданого ряду, розпочинаючи з деякого номера N, менші відповідних членів збіжного геометричного ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q^{N+k}$, тому і заданий ряд збігається.

Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell, \ \ell > 1.$

Аналогічно, як і у випадку ознаки Даламбера, маємо $\sqrt[N]{a_N} > 1$. Звідси: $a_N > 1, \ a_{N+1} > 1, \ a_{N+2} > 1, \dots$. Необхідна ознака збіжності не виконується, тому заданий ряд розбігається.

<u>Приклади</u>. **10.** Дослідити на збіжність: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{3^n n!}$.

Використаємо ознаку Даламбера.

$$a_n = \frac{n^n}{3^n n!}; \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \cdot \frac{3^n n!}{n^n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n (n+1) n!}{n^n (n+1)!} =$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{\mathrm{e}}{3}$$

Так як $\ell = \dfrac{\mathrm{e}}{3} < 1$, заданий ряд збігається

(до обчислень залучена друга визначна границя $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$).

11. Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{2n+7}\right)^n$.

За радикальною ознакою Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{2n+7}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+7} = \frac{1}{2} < 1$$

Отже, ряд збігається.

12. Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

<u>За ознакою Даламбера</u>.

$$a_n = \frac{1}{n}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}; \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1$$

<u>За ознакою Коші</u>.

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{1} = -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Для обчислення цієї границі застосовано правило Лопіталя – чисельник і знаменник дробу замінено на їх похідні. Показано, що логарифм виразу $\sqrt[n]{a_n}$ прямує до нуля. Тоді, за властивостями логарифмів, сам вираз прямує до одиниці:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

Отже, ні за ознакою Даламбера, ні за ознакою Коші встановити збіжність-розбіжність заданого ряду не вдалося.

П р и м і т к а. Якщо за ознаками Коші чи Даламбера була виявлена розбіжність ряду, то в ньому обов'язково порушується необхідна ознака збіжності (на цьому ґрунтується доведення цих ознак). Тому вказані ознаки збіжності не можуть встановити розбіжність тих рядів, для яких необхідна ознака (1.6) має місце, як і в попередньому прикладі. В цих випадках слід скористатися іншими ознаками.

1.2.4. Інтегральна ознака Коші

Якщо члени знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ не зростають $(a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots)$ і можуть бути представлені, як числові значення неперервної незростаючої функції $f(x)$ при цілих значеннях аргументу $\left(a_1 = f(1),\ a_2 = f(2), \ldots,\ a_n = f(n), \ldots\right)$, то такий ряд збігається, якщо збігається невласний інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ і розбігається, коли цей інтеграл розбігається. (1.11)

Розглянемо ряд:

$$\int_1^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx + \int_3^4 f(x)dx + \cdots + \int_n^{n+1} f(x)dx + \cdots \qquad (1.12)$$

В ньому загальний член і частинна сума, відповідно, рівні: $b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx,\quad S_n = \int_1^{n+1} f(x)dx.$ Але $\lim_{n\to\infty} S_n = \int_1^{\infty} f(x)dx.$ Отже, ряд (1.12) збігається (розбігається) разом з цим невласним інтегралом.

Функція $f(x)$ неперервна і незростаюча, тому можна записати: $f(n) \geq f(x) \geq f(n+1),\ x \in [n, n+1].$

Далі послідовно одержим:

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1) \Rightarrow a_n \geq f(x) \geq a_{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_n^{n+1} a_n dx \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq \int_n^{n+1} a_{n+1}dx \Rightarrow a_n \geq \int_n^{n+1} f(x)dx \geq a_{n+1}$$

Нехай ряд (1.12) збігається. Але $a_{n+1} \leq b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$, тобто збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ за першою ознакою порівняння (1.7*а*).

Нехай, тепер, ряд (1.12) розбігається. Тоді $a_n \geq b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$ і за першою ознакою порівняння (1.7*б*) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбігається.

Таким чином, інтегральна ознака Коші доведена.

Звернемо увагу на те, що специфічне введення функції $f(x)$ (в формулюванні ознаки) дає досить простий спосіб її визначення: треба у виразі загального члена ряду замінити номер n аргументом x. Наприклад:

– для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\quad b_n=\frac{1}{n}, \quad f(x)=\frac{1}{x}$;

– для ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-n^2}$: $\quad b_n=\mathrm{e}^{-n^2}, \quad f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

<u>Приклади</u>. **13.** Дослідити на збіжність: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

За інтегральною ознакою Коші:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{\nu\to\infty}\int_1^{\nu}\frac{dx}{x}=\lim_{\nu\to\infty}\ln|x|\Big|_1^{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(\ln\nu-\ln 1\right)=\infty$$

Інтеграл розбігається, значить розбігається і заданий гармонічний ряд *(розбіжність гармонічного ряду доведена раніше, але, як бачимо, з використанням інтегральної ознаки Коші доведення є набагато простішим).*

14. Дослідити на збіжність узагальнений гармонічний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\frac{1}{4^{\alpha}}+\cdots. \tag{1.13}$$

За інтегральною ознакою Коші: $b_n=\frac{1}{n^{\alpha}}, \quad f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}=x^{-\alpha}$,

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}x^{-\alpha}dx=\lim_{\nu\to\infty}\int_1^{\nu}x^{-\alpha}dx=\lim_{\nu\to\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Bigg|_1^{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\left(\frac{\nu^{1-\alpha}}{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{\alpha-1} & \textit{при } \alpha>1;\\ \infty & \textit{при } \alpha<1.\end{cases}$$

При $\alpha=1$ ряд розбігається, так як перетворюється в простий гармонічний.

Отже, при $\alpha>1$ узагальнений гармонічний ряд (1.13) збігається, а при $\alpha\le 1$ – розбігається.

Коротко:

$$\boxed{\text{Ряд: } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \text{ при } \begin{cases}\alpha>1 & \text{збігається;}\\ \alpha\le 1 & \text{розбігається.}\end{cases}} \tag{1.14}$$

Слід відмітити, що, на відміну від деяких інших ознак (необхідної, Даламбера, радикальної), інтегральна ознака Коші не має виключень і здатна для дослідження будь-якого знакододатного ряду. Але вона має обмежене застосування із-за складності дослідження на збіжність невласних інтегралів. Нехай, наприклад, треба дослідити на збіжність ряд (*a*). Тоді, за інтегральною ознакою Коші треба обчислити інтеграл (*b*). Цей інтеграл, як відомо, в елементарних функціях не береться тому дослідження його на збіжність ускладнюється.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n^2}} \ (a) \qquad \int_1^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} dx \ (b) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{n}} \ (c)$$

Набагато простіше порівняти ряд (*a*) зі збіжним рядом (*c*) – геометричним рядом (1.4), в якому $|q| = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$.

Маємо очевидну нерівність

$$\frac{1}{\mathrm{e}^{n^2}} \le \frac{1}{\mathrm{e}^{n}},$$

яка показує, що за першою ознакою порівняння (1.7*a*) ряд (*a*) збігається.

1.3. Знакозмінні ряди

Знакозмінним числовим рядом називають ряд, членами якого є дійсні числа довільного знаку. (1.15)

Знакозмінний ряд називають <u>абсолютно збіжним</u>, якщо збігається ряд, складений з модулів його членів. (1.16)

Знакозмінний ряд називають <u>умовно збіжним</u>, якщо він збігається, а ряд, складений з модулів його членів, розбігається. (1.17)

1.3.1. Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду

Для того, щоб знакозмінний ряд збігався, достатньо, щоб він збігався абсолютно. (1,18)

Нехай маємо знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ – числа довільного знаку. Замінимо члени ряду їх модулями:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \qquad (1.19)$$

Цей ряд, у відповідності до ознаки, будемо вважати збіжним. Збіжний ряд можна помножити на будь-яке дійсне число і в результаті одержимо теж збіжний ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n| = 2|a_1| + 2|a_2| + 2|a_3| + \cdots + 2|a_n| + \cdots$$

Маємо для любого n очевидну нерівність

$$0 \le a_n + |a_n| \le 2|a_n|,$$

з якої витікає, що наступний ряд за першою ознакою порівняння (1.7*a*) також є збіжним.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + |a_n|\right) = \left(a_1 + |a_1|\right) + \left(a_2 + |a_2|\right) + \cdots + \left(a_n + |a_n|\right) + \cdots \qquad (1.20)$$

Збіжні ряди можна віднімати, що дає теж збіжний ряд. Віднімаючи ряд (1.19) від ряду (1.20), одержимо збіжний (заданий) ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

Ознака доведена.

<u>Приклад</u> **15**. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$.

Розглянемо ряди $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ та $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

Ряд обернених квадратів є збіжним, як узагальнений гармонічний (1.14) при $\alpha = 2 > 1$. Порівнюємо ці ряди між собою:

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

За першою ознакою порівняння (1.7*a*) ряд, складений з модулів членів заданого ряду збігається, а значить заданий знакозмінний ряд **збігається абсолютно** за достатньою ознакою збіжності (1.18).

Властивості абсолютно збіжних рядів

1. Якщо в абсолютно збіжному ряді вибрати тільки додатні або тільки від'ємні члени, то одержані ряди будуть збіжними.
2. Сума абсолютно збіжних рядів не змінюється при будь-якій перестановці їх членів.
3. Сума і різниця абсолютно збіжних рядів є також абсолютно збіжними рядами.

Властивості умовно збіжних рядів

1. Для будь-якого умовно збіжного ряду ряди, складені тільки з додатних і тільки з від'ємних членів – розбігаються.
2. Яким би не було число S, в умовно збіжному ряді можна переставити члени таким чином, що його сума буде дорівнювати S.

1.3.2. Ознака Лейбніца збіжності знакопереміжного ряду

Знакозмінний ряд називається знакопереміжним, якщо знаки його сусідніх членів різні. (1.21)

Знакопереміжний ряд можна записати таким чином:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots. \qquad (1.22)$$

Тут $a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ – дійсні додатні числа.

Очевидно, що такий ряд є частинним випадком знакозмінного, тому, записані вище, властивості знакозмінних рядів стосуються також і знакопереміжного ряду, а його збіжність може бути і абсолютною, і умовною. Умовну збіжність знакопереміжного ряду можна виявити за допомогою ознаки Лейбніца.

Ознака Лейбніца. Якщо абсолютні величини членів знакопереміжного ряду монотонно спадають і границя загального члена ряду при $n \to \infty$ дорівнює нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд збігається.
При цьому сума ряду є число того ж знаку, що і перший член, а абсолютна величина суми менша абсолютної величини першого члена. (1.23)

Д о в е д е н н я.

Нехай: $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$ (1.24)

Розглянемо, спочатку, частинну суму парного числа членів ряду (1.22):

$$S_{2n}=\left(a_1-a_2\right)+\left(a_3-a_4\right)+\left(a_5-a_6\right)+\cdots+\left(a_{2n-1}-a_{2n}\right)>0, \quad (1.25)$$

$$S_{2n+2}=S_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}>S_{2n}. \quad (1.26)$$

З останнього співвідношення бачимо, що ця частинна сума монотонно зростає. Тоді, щоб вона мала границю достатньо того, щоб вона була обмежена зверху.

Перепишемо вираз (1.25) у вигляді:

$$S_{2n}=a_1-\left(a_2-a_3\right)-\left(a_4-a_5\right)-\cdots-\left(a_{2n-2}-a_{2n-1}\right)-a_{2n}<a_1. \quad (1.27)$$

З цього співвідношення бачимо, що парна частинна сума дійсно обмежена зверху ($S_{2n}<a_1$). Отже, справедливо визнати існування границі S парної частинної суми ряду (1.22). З врахуванням нерівності (1,25) можемо записати:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S>0. \quad (1.28)$$

Відмітимо, що знаки першого члена $a_1>0$ і суми S співпадають.

Розглянемо, тепер, непарну частинну суму ряду (1.22).

$$S_{2n+1}=S_{2n}+a_{2n+1}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}+\lim_{n\to\infty} a_{2n+1}. \quad (1.29)$$

Так як $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}=0$ (1.24), то:

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=S. \quad (1.30)$$

Тобто, і парна, і непарна частинні суми, за умов (1.24) мають одну й ту ж границю S, а, значить, взагалі: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=S.$

Нарешті, з врахуванням виразу (1.27), запишемо очевидні співвідношення:

$$S_{2n}<a_1-\left(a_2-a_3\right)=b<a_1, \quad S=\lim_{n\to\infty} S_{2n}\le b<a_1,$$

які показують, що сума ряду S по модулю менша першого члена a_1.

Допоміжно підкреслимо, що для збіжності ряду за ознакою Лейбніца необхідне виконання трьох умов:

1) **ряд повинен бути знакопреміжним;**
2) **члени ряду повинні спадати за абсолютною величиною;**
3) **границя загального члена при $n\to\infty$ повинна дорівнювати нулю ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$).**

<u>Приклади</u>. **16.** Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Маємо ряд: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,\quad a_n=\frac{1}{n}.$

Він знакопереміжний, а його члени за абсолютною величиною монотонно спадають. За ознакою Лейбніца:

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Отже ряд збігається. Для визначення виду збіжності розглянемо ряд, складений із модулів членів заданого ряду:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots.$$

Це ряд гармонічний і він, як відомо, розбігається, тому заданий ряд **збігається умовно**.

17. Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}$.

Розглядаємо ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Маємо узагальнений гармонічний ряд (1.14) при $\alpha=\frac{3}{2}>1$, який є збіжним. Отже, заданий ряд за достатньою ознакою збіжності (1.18) **збігається абсолютно.**

18. Дослідити на збіжність: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+5}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n^2+5}{n^2}=-6+\frac{9}{4}-\frac{14}{9}+\frac{21}{16}-\frac{6}{5}+\cdots,\quad a_n=\frac{n^2+5}{n^2}.$$

Заданий ряд знакопереміжний, а його члени монотонно спадають за абсолютною величиною. Отже до ряду доцільно застосувати ознаку Лейбніца:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5}{n^2}=1\neq 0.$$

Умови ознаки Лейбніца не виконані, тому заданий **ряд розбігається**.

II. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

2.1. Степеневі ряди і їх властивості. Теорема Абеля

Ряд, членами якого є степеневі функції, називається степеневим рядом:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad (2.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots \qquad (2.2)$$

Другий ряд приводиться до першого підстановкою $t = x - c$, тому далі будемо розглядати тільки ряди виду (2.1).

Підстановка деякого числа в степеневий ряд замість змінної x перетворює його на числовий ряд, отже, степеневі ряди є невичерпним джерелом числових рядів. При певних значеннях змінної одержаний числовий ряд може буде збіжним, при інших значеннях – розбіжним. Наприклад, ряд (2.1) при $x = 0$, а ряд (2.2) при $x = c$ будуть збіжними. Отже, дослідити степеневий ряд на збіжність означає, що треба знайти всю множину значень x, при яких заданий ряд буде збіжним. Уявлення про вид цієї множини дає наступна теорема.

Теорема Абеля. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при деякому значенні $x = x_1$ ($x_1 \neq 0$), то він абсолютно збігається і при всіх значеннях x з інтервалу $|x| < |x_1|$.

Якщо ж цей ряд розбігається при деякому значенні $x = x_2$ ($x_2 \neq 0$), то він розбігається і при всіх значеннях $|x| > |x_2|$.

Д о в е д е н н я.

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ збігається за умовою теореми. Тоді:

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_1^n \cdot \frac{x^n}{x_1^n}\right| = \left|a_n x_1^n\right| \left(\left|\frac{x}{x_1}\right|\right)^n = \left|a_n x_1^n\right| q^n,$$

де: $q = \left|\frac{x}{x_1}\right| < 1$ при $|x| < |x_1|$.

Для збіжного ряду виконується необхідна умова збіжності $\lim_{n\to\infty} \left|a_n x_1^n\right| = 0$, тому знайдеться таке число M, що $\left|a_n x_1^n\right| < M$, а значить є справедливою нерівність $\left|a_n x^n\right| < M q^n$. Отже, можна стверджувати, що ряд збігається за першою ознакою порівняння (1.7.a) і перша частина теореми доведена.

Припустимо, тепер, що ряд збігається при $|x|>|x_2|$. Тоді за першою частиною теореми він повинен збігатися і в точці $x=x_2$, яка в дійсності є точкою розбіжності. Одержана суперечність доводить неможливість збіжності ряду при $|x|>|x_2|$.

Теорема показує, що має місце нерівність $|x_1|<|x_2|$. При цьому ряд збігається, якщо $|x|<|x_1|$ і розбігається, якщо $|x|>|x_2|$. На самому ж відрізку $|x_1|<x<|x_2|$ знайдеться така точка $x=R$, при переході через яку збіжність замінюється розбіжністю.

Інтервалом збіжності степеневого ряду (2.1) називається числовий проміжок $\boxed{-R<x<R}$, в якому ряд збігається абсолютно, а за межами якого ряд розбігається. Число R називають радіусом збіжності, а точку $x=0$ центром збіжності.

Якщо ряд (2.1) збігається тільки при $x=0$, то $R=0$, а, якщо збіжність спостерігається при всіх значеннях x, то $R=\infty$.

Очевидно, що для рядів виду (2.2) центром збіжності є точка $x=c$ а інтервалом збіжності: $c-R<x<c+R$.

Інтервал збіжності не включає крайніх точок $x=\pm R$, в яких ряд (2.1) може збігатися, чи розбігатися. Якщо ці точки (хоча б одна) виявляться збіжними – вони увійдуть до області збіжності.

Областю збіжності степеневого ряду (2.1) називають множину всіх значень x, при яких ряд збігається (область та інтервал збіжності можуть відрізнятися між собою хіба що двома точками – кінцями інтервалу $x=-R$, $x=R$, якщо ж в цих точках ряд розбігається, то область і інтервал збіжності співпадають).

Для знаходження радіуса збіжності R можна застосувати ознаки Даламбера (1.9) чи Коші (1.10).

Позначимо: $\left|U_n\right|=\left|a_n x^n\right|$ тоді $\left|U_{n+1}\right|=\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|$.

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\Rightarrow|x|\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}<1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|x|<\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}\Rightarrow|x|<\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Але $|x|<R$. Звідси: $\boxed{R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}}$. (2.3)

Аналогічно одержимо з допомогою радикальної ознаки Коші:

$$\boxed{R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}}. \qquad (2.4)$$

П р и м і т к а. Записані формули (2.3), (2.4) слід застосовувати лише тоді, коли степені сусідніх членів заданого ряду відрізняються на одиницю (для таких рядів і одержані ці формули). В противному разі слід застосовувати безпосередньо ознаки Даламбера чи Коші.

Степеневі ряди мають в інтервалі збіжності чудові властивості, завдяки яким вони мають широке застосування.

<u>Властивості степеневих рядів</u>

1. Сума степеневого ряду є неперервна функція на кожному відрізку інтервалу збіжності.
2. Степеневі ряди можна почленно інтегрувати на кожному відрізку інтервалу збіжності.
3. Степеневі ряди можна почленно диференціювати довільне число разів в інтервалі збіжності, при цьому вказаний інтервал не змінюється.

<u>Приклади</u>. **19.** Знайти область збіжності ряду: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n+1}$.

Використаємо спочатку формулу (2.3).

В заданому ряді: $a_n=\frac{2^n}{n+1}$; $\quad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{n+2}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n+1}\cdot\frac{n+2}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1}=\frac{1}{2}.$$

Знайдено інтервал збіжності: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Для знаходження області збіжності розглянемо питання про збіжність на кінцях інтервалу.

При $x = -\frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{2^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Цей ряд знакопеміжний, його члени за абсолютною величиною монотонно спадають і крім того:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

За ознакою Лейбніца (1.23) ряд збігається.

При $x = \frac{1}{2}$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{2^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1}$.

Одержано гармонічний ряд (1.5), який, як відомо, розбігається.

Маємо область збіжності: $\boxed{-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}}$.

20. Знайти область збіжності ряду: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^{n^2}}$.

Для знаходження радіуса збіжності залучимо формулу (2.4).

$$a_n = \frac{1}{5^{n^2}}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 5^n = \infty.$$

Отже ряд збігається при всіх значеннях x, тобто областю збіжності є: $\boxed{-\infty < x < \infty}$.

21. Знайти область збіжності ряду: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!x^n}{3^n}$.

В цьому ряді: $a_n = \frac{n!}{3^n}$; $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$.

За формулою (2.3):

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{3^n} \cdot \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} = 3\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Отже, ряд збігається лише в одній точці $\boxed{x = 0}$.

22. Знайти область збіжності ряду: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n^2}.$

В цьому ряді степені сусідніх членів відрізняються на 3 одиниці, тому формули (2.3), (2.4) застосовувати не можна. Застосуємо безпосередньо ознаку Даламбера. Запишемо n- ний та $n+1$- ший члени ряду:

$$U_n=\frac{x^{3n}}{n^2};\quad U_{n+1}=\frac{x^{3n+3}}{(n+1)^2}.$$

За ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|U_{n+1}|}{|U_n|}\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{3n+3}|}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{|x^{3n}|}=|x^3|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x^3|.$$

Ряд збігається, коли $|x^3|<1$ або $|x|<1$, тобто радіус збіжності дорівнює $R=1$, а інтервалом збіжності є $-1<x<1.$

З'ясуємо про збіжність ряду на кінцях інтервалу.

При $x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$

Одержано ряд обернених квадратів, який збігається, як узагальнений гармонічний (1.14) при $\alpha=2>1.$

При $x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{3n}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^3]^n}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}.$

Цей ряд збігається абсолютно, так, як збігається ряд, складений з модулів його членів – ряд обернених квадратів. Область збіжності заданого ряду одержимо, приєднуючи крайні точки до інтервалу збіжності: $\boxed{-1\le x\le 1}.$

2.2. Ряди Тейлора і Маклорена, формула Тейлора. Умова розкладання функцій в ряд Тейлора.

Розкласти диференційовну функцію в ряд Тейлора – значить представити її у вигляді:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots \qquad (2.5)$$

При $a=0$ маємо розкладання функції в ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dots \qquad (2.6)$$

Теорема. Якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$ збігається на деякому інтервалі $(a-R;\ a+R)$ до функції $f(x)$, тобто $f(x)=c_0+c_1(x-a)+$ $+c_2(x-a)^2+\dots+c_n(x-a)^n+\dots$, то цей ряд є рядом Тейлора (другими словами: функцію $f(x)$, можна розкласти в ряд Тейлора єдиним способом). (2.7)

Запишемо n-ну похідну функції $f(x)$:

$$f^{(n)}(x)=n!c_n+\frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}(x-a)+\dots+\frac{(n+k)!}{k!}c_{n+k}(x-a)^k+\dots.$$

При $x=a$ з цієї похідної визначаємо:

$$f^{(n)}(a)=n!c_n \Rightarrow c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ n=0,1,2,\dots\left(\frac{f^{(0)}(a)}{0!}=f(a)\right).$$

Таким чином, коефіцієнти c_n є коефіцієнтами ряду Тейлора, що і треба було довести.

Якщо функція $f(x)$ має на деякому проміжку $[b;c]$ похідні до $(n+1)$-шої включно і точка $x=a$ належить цьому проміжку, то для всіх $x\in[b;c]$ має місце формула Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \qquad (2.8)$$

У формулі (2.8) $R_n(x)$ – залишковий член, який можна представити у формі Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad (2.9)$$

де **число** ξ **лежить між значеннями** $\boldsymbol{x}$ **і** $\boldsymbol{a}$.

Формулу Тейлора можна переписати у вигляді:

$$f(x)=S_n(x)+R_n(x),$$

де $S_n(x)-$ n-на частинна сума.

$$S_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+$$
$$+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty} f(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)+\lim_{n\to\infty} R_n(x)\,.$$

Звідси, так як $f(x)$ не залежить від n, маємо:

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} S_n(x)+\lim_{n\to\infty} R_n(x)$$

Останнє співвідношення показує: якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0,$ то $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x),$ а це і означає, по визначенню (1.3), що ряд Тейлора збігається до функції $f(x)$. Отже, маємо наступний результат.

Умова розкладання функції в ряд Тейлора: щоб функція $f(x)$ розкладалася в ряд Тейлора достатньо, щоб границя залишкового члена $S_n(x)$ при $n\to\infty$ прямувала до нуля:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} R_n(x)=0} \qquad (2.10)$$

Цю умову будемо використовувати далі при розкладанні функцій в степеневі ряди.

2.3. Розкладання функцій в степеневі ряди.

Щоб розкласти диференційовну функцію в степеневий ряд, треба знати значення всіх похідних в деякій точці $x = a$ (якщо це ряд Тейлора 2.5) або $x = 0$ (якщо це ряд Маклорена 2.6). Крім того, треба бути впевненим в тому, що записаний ряд для заданої функції буде збігатися саме до цієї функції, що гарантується виконанням умови (2.10). Нарешті, треба встановити область значень змінної, для якої буде діяти ця умова.

Спочатку наведемо приклади розкладання в степеневі ряди основних елементарних функцій. Такі розкладання є базовими для інших, більш складних, функцій, які мають широке застосування.

Експоненціальна функція: $\boxed{f(x) = \mathrm{e}^x}$

Похідна n-го порядку від вказаної функції дорівнює:

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Будемо розкладати функцію в ряд Маклорена. Для цього знайдемо значення функції та її похідних в точці $x = 0$.

$$f(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \;\; f^{(n)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

Залишковий член для експоненціальної функції має вид:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x)^{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Покажемо, що $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. Для нього $a_n = \frac{1}{(n+1)!}$, $a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!}$. Радіус збіжності цього ряду(2.3): $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+2) = \infty$, тому він збігається при будь-якому значенні x. Далі маємо:

$$\left|R_n(x)\right| < \frac{\mathrm{e}^{|x|}\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^{|x|}\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} = \mathrm{e}^{|x|} \lim_{n\to\infty} \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!} = 0.$$

Одержаний результат є необхідною ознакою збіжності (1.6) для приведеного ряду, яка виконується, тому що цей ряд збігається. Разом з цим останнє співвідношення дає: $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Отже степеневий ряд (2.6), записаний для функції $f(x) = \mathrm{e}^x$, збігається до неї при будь-якому значенні x. Залишається замінити у виразі (2.6) значення функції та її похідних при $x = 0$ одиницею. Остаточно одержимо:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots, \ \left(-\infty < x < \infty\right)} \quad (2.11)$$

<u>Синус</u>: $\boxed{f(x) = \sin x}$

Знаходимо похідні функції та її значення в точці $x = 0$.

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad f'''(x) = -1;$$

$$f^{(4)}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4 \cdot \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(4)}(x) = 0;$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}\right), \qquad f^{(n)}(0) = \sin\tfrac{\pi n}{2}.$$

Залишковий член і умова розкладання:

$$R_n(x) = \frac{\sin\left(\xi + \frac{\pi}{2}(n+1)\right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad R_n(x) < \frac{\left|x^{n+1}\right|}{(n+1)!}, \quad \lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

при будь-якому значенні x, як і у попередньому прикладі.

Отже слід замінити у формулі Маклорена (2.6) парні похідні нулем, а непарні одиницею зі своїм знаком, при цьому перша похідна є одиниця "з плюсом", а знаки інших похідних чергуються.

$$\boxed{\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \ (-\infty < x < \infty).} \quad (2.12)$$

На рисунку нижче проілюстровано наближене зображення синусоїди степеневим рядом. Приймали до уваги лише один, два, та три перших члена розкладання синуса в ряд:

$$1.\ f\left(x\right) = x; \quad 2.\ f\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3!}; \quad 3.\ f\left(x\right) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Жирною зображена сама синусоїда.

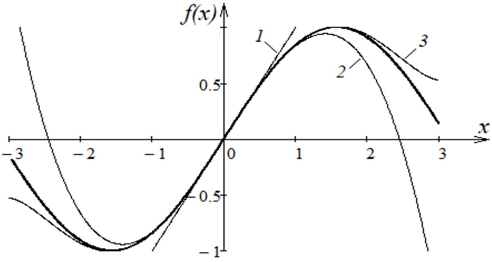


Рисунок показує, що найбільш точне відображення кривої має місце навколо точки розкладання $x=0$: чим ближче до вказаної точки, тим точніше відображення. Крім того, має значення кількість членів ряду, взятих для підрахунку: чим більше включено членів ряду, тим точніший результат. В нашому випадку вже три перших члени ряду дозволяють з високою точністю моделювати синусоїду в достатньо широкому діапазоні. Наприклад, на відрізку $[-\pi/2,\ \pi/2,]$ найбільша похибка наближеного обчислення складає всього 0,45%. Ця похибка зменшується при наближенні до точки $x=0$ і дорівнює нулю в самій точці.

Косинус: $\boxed{f(x)=\cos x}$

Щоб розкласти косинус в степеневий ряд продиференціюємо ліву і почленно праву частину ряду (2.12).

$$\boxed{\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots,\quad(-\infty<x<\infty).}\qquad(2.13)$$

Підставимо в формулу розкладання експоненціальної функції (2.11) чисто уявну змінну $x=yi$ ($y\in\mathbb{R}$, i – уявна одиниця):

$$e^{yi}=1+\frac{yi}{1!}+\frac{(yi)^2}{2!}+\frac{(yi)^3}{3!}+\frac{(yi)^4}{4!}+\frac{(yi)^5}{5!}+\cdots\qquad(2.14)$$

Для степенів уявної одиниці відомі співвідношення:

$$i^{4k}=1;\quad i^{4k+2}=-1;\quad i^{4k+1}=i;\quad i^{4k+3}=-i.$$

Замінимо у виразі (2.14) парні степені уявної одиниці на ±1, а непарні – на $\pm i$. Крім того, винесемо величину i за дужки.

$$e^{yi}=\underbrace{\left(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\frac{y^6}{6!}+\cdots\right)}_{\cos y}+\underbrace{\left(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\frac{y^7}{7!}+\cdots\right)i}_{\sin y}$$

Порівнюючи знайдений вираз з рядами для синуса (2.12) і косинуса (2.13), знайдемо:

$$\mathrm{e}^{yi} = \cos y + i\sin y; \qquad \mathrm{e}^{-yi} = \cos y - i\sin y. \tag{2.15}$$

Ідея використати при розкладанні експоненти в степеневий ряд комплексну змінну належить Ейлеру, тому співвідношення (2.15) називають формулами Ейлера. Вони мають широке застосування, наприклад, в комплексних числах (показникова форма), теорії лінійних диференціальних рівнянь та ін.

Логарифмічна функція: $\boxed{f(x) = \ln\left(1+x\right)}$

Розглянемо геометричний ряд (1.4) при $a_1 = 1,\ q = -t.$ Як відомо, сума цього ряду при умові $|q| < 1$ дорівнює:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+t}.$$

При цьому, кожний наступний член ряду одержують з попереднього множенням на величину $q.$ Отже, можна записати:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

Проінтегруємо цей ряд на відрізку збіжності $|x| < 1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \ \cdots\right) dt$$

Інтегрування зліва та почленне інтегрування справа дає:

$$\ln\left(1+t\right)\Big|_0^x = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots + (-1)^n\,\frac{t^{n+1}}{n+1} + \cdots\right)\Bigg|_0^x.$$

Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, знайдемо:

$$\boxed{\ln\left(1+x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots,\ -1 < x < 1} \tag{2.16}$$

Обернена тригонометрична функція: $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} x}$

Розглянемо геометричний ряд при $a_1 = 1,\ q = -t^2.$ Тоді, при $|q| < 1,$ аналогічно попередньому будемо мати:

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\cdots$$

Інтегруємо на відрізку збіжності $|x|<1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x \left(1-t^2+t^4-t^6+\cdots+(-1)^n t^{2n}+\ \cdots\right)dt \text{ або}$$

$$\left(\operatorname{arctg} t\right)\Big|_0^x=\left(t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\right)\Bigg|_0^x.$$

Остаточно одержимо:

$$\boxed{\operatorname{arctg} x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots,\ -1<x<1} \qquad (2.17)$$

Розглянемо ще розкладання бінома, яке часто використовується в прикладних питаннях.

$$\boxed{f(x)=\left(1+x\right)^m}$$

Очевидно, що $f(0)=1$. Обчислюємо похідні та їх значення точці $x=0$.

$$f'(x)=m\left(1+x\right)^{m-1}, \qquad f'(0)=m;$$

$$f''(x)=m\left(m-1\right)\left(1+x\right)^{m-2}, \qquad f''(0)=m\left(m-1\right)$$

$$f'''(x)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\left(1+x\right)^{m-3}, \qquad f'''(0)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right);$$

. . . .

$$f^{(n)}(x)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\cdots\left(m-n+1\right)\left(1+x\right)^{m-n},$$

$$f^{(n)}(0)=m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\cdots\left(m-n+1\right).$$

<u>Біноміальний ряд</u>:

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(1+x\right)^m=1+mx+\frac{m\left(m-1\right)}{2!}x^2+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)}{3!}x^3+\cdots\\&\quad+\frac{m\left(m-1\right)\left(m-2\right)\cdots\left(m-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots,\quad -1<x<1\end{aligned}} \qquad (2.18)$$

Пересвідчимось, що інтервал збіжності $(-1 < x < 1)$ для біноміального ряду вказано вірно. Для цього ряду:

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!};$$

$$a_{n+1} = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)(m-n)}{(n+1)!}.$$

Знаходимо радіус збіжності за формулою (2.3).

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{m-n}\right| = 1,$$

що узгоджується з величиною вказаного інтервалу.

Одержані формули (2.11)-(2.13), (2.16)-(2.18) доцільно застосовувати для швидкого розкладання більш складних функцій в степеневі ряди.

<u>Приклади</u>. Розкласти в степеневі ряди задані функції та знайти їх інтервал збіжності. Записати в спрощеному виді перших чотири члени кожного ряду.

23. $f(x) = \sin\dfrac{x^2}{3}$.

Використаємо формулу (2.12)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < \infty),$$

куди замість x внесемо $x^2/3$.

$$\sin\frac{x^2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{3^{2n+1}(2n+1)!} = \frac{x^2}{3} - \frac{x^6}{3^3\cdot 3!} + \frac{x^{10}}{3^5\cdot 5!} - \frac{x^7}{3^7\cdot 7!} + \cdots$$

Знайдемо інтервал збіжності ряду:

$$\left(-\infty < \frac{x^2}{3} < \infty\right) \Rightarrow (-\infty < x < \infty).$$

Для спрощення членів ряду виконаємо відповідні дії. Тоді перші чотири члени ряду можна записати так:

$$\sin\frac{x^2}{3} = \frac{x^2}{3} - \frac{x^6}{162} + \frac{x^{10}}{29160} - \frac{x^7}{11022480} + \cdots.$$

24. $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{5}$.

Візьмемо формулу (2.17)

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad (-1 < x < 1).$$

Підставимо сюди $x/5$ замість x:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{5} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{5^{2n+1}(2n+1)} = \frac{x}{5} - \frac{x^3}{5^3 \cdot 3} + \frac{x^5}{5^5 \cdot 5} - \frac{x^7}{5^7 \cdot 7} + \cdots$$

Інтервал збіжності: $-1 < \dfrac{x}{5} < 1 \Rightarrow (-5 < x < 5)$.

Перші чотири члени ряду:

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{5} = \frac{x}{5} - \frac{x^3}{375} + \frac{x^5}{15625} - \frac{x^7}{546875} + \cdots$$

25. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$.

Приведемо функцію до виду: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}} = \left(1+2x\right)^{-\frac{1}{2}}$ і

застосуємо до неї біноміальний ряд, де приймемо $m = -1/2$, а замість x запишемо $2x$.

$$\left(1+2x\right)^m = 1 + m(2x) + \frac{m(m-1)}{2!}(2x)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}(2x)^3 + \cdots$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}(2x)^n + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\cdot 2x + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\left(2x\right)^2 -$$

$$-\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}\left(2x\right)^3 + \cdots + \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left(2x\right)^n + \cdots$$

Після скорочення на 2 остаточно одержимо:

$$\frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - x + \frac{1\cdot 3}{2!}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{3!}x^3 + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}x^n + \cdots.$$

Інтервал збіжності та перші чотири члени записаного ряду:

$$-1 < 2x < 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right); \quad \frac{1}{\sqrt{1+2x}} = 1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{15}{6}x^3 + \cdots.$$

2.4. Застосування степеневих рядів до наближених обчислень.

Застосування степеневих рядів розглянемо на прикладах наближеного обчислення визначених інтегралів та розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь.

<u>Приклади</u>. Обчислити задані інтеграли з точністю до 0,0001 шляхом розкладання підінтегральних функцій в степеневі ряди та їх почленного інтегрування.

26. $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx.$

Маємо степеневий ряд для синуса (2.12)

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, (-\infty < x < \infty).$ Тоді:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots.$$

Степеневий ряд можна інтегрувати на відрізку [0; 1], який належить інтервалу збіжності.

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} + \cdots\right) dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} + \cdots\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} - \frac{1}{7 \cdot 7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} + \cdots =$$

$$= 1 - 0{,}05555 + 0{,}00166 - 0{,}00002 + \cdots$$

Як бачимо, результатом інтегрування є знакопереміжний ряд, члени якого монотонно спадають і який є збіжним, завдяки властивостям степеневих рядів на інтервалі збіжності. Тобто, одержано ряд для якого виконується ознака Лейбніца (1.23). Друга частина цієї ознаки вказує на те, що сума ряду співпадає по знаку з першим членом, а величина суми за абсолютним значенням менша першого члена. В наближеному розрахунку будемо враховувати лише кілька перших членів ряду, а решту (залишок ряду) відкинемо. Очевидно, що відкинута частина є також рядом Лейбніца і його сума менша першого члена. Отже, щоб точність обчислення інтегралу була не нижчою, ніж задана, треба щоб перший відкинутий член був не більший 0,0001. В нашому випадку це четвертий член 0,00002. Таким чином, з гарантованою точністю 0,0001 заданий інтеграл дорівнює:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx \approx 1 - 0,05555 + 0,00166 = 0,9461$$

(Можна говорити, що точність обчислення навіть більша, ніж 0,0001. Як уже відзначалось, на основі ознаки Лейбніца вона відповідає значенню першого відкинутого члена і визначається числом, меншим 0,00002).

27. $\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx.$

Для експоненціальної функції маємо:

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \ \left(-\infty < x < \infty\right)$$

Підставимо сюди $-x^2$ замість x:

$$\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \cdots.$$

Помножимо цей вираз на $\sqrt{x}$, тоді степені x зростуть на $1/2$.

$$\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1!} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{2!} - \frac{x^{\frac{13}{2}}}{3!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{n!} + \cdots.$$

Залишається провести інтегрування.

$$\int\limits_0^{1/4} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{1/4}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{1!} + \frac{x^{\frac{9}{2}}}{2!} - \frac{x^{\frac{13}{2}}}{3!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{x^{\frac{4n+1}{2}}}{n!} + \cdots. \right)dx =$$

$$= \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7\cdot 1!} + \frac{2x^{\frac{11}{2}}}{11\cdot 2!} - \frac{2x^{\frac{15}{2}}}{15\cdot 3!} + \cdots + \left(-1\right)^n \frac{2x^{\frac{4n+3}{2}}}{(4n+3)n!} + \cdots \right)\Bigg|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{3\cdot 2^2} - \frac{1}{7\cdot 2^6\cdot 1!} + \frac{1}{11\cdot 2^{10}\cdot 2!} - \frac{1}{15\cdot 2^{14}\cdot 3!} + \cdots + \frac{\left(-1\right)^n}{(4n+3)2^{4n+2}n!} + \cdots =$$

$$= 0,08333 - 0,00223 + 0,00004 - \cdots$$

Оскільки третій член ряду менший 0,0001 то для досягнення заданої точності достатньо залишити тільки 2 перших члена:

$$\int_0^{1/4} \sqrt{x}\mathrm{e}^{-x^2} dx \approx 0,08333 - 0,00223 = 0,0811.$$

Приклади. Знайти три перших члени розкладання в степеневий ряд функції, яка є розв'язком заданого диференціального рівняння.

28. $y' = x^2 + y^2 - \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0.$

З початкових умов зрозуміло, що інтегральна крива повинна проходити через точку з абсцисою $x = 0$. Це буде виконуватися, якщо розкладати функцію y в ряд Маклорена:

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots. \quad (2.19)$$

Початкові умови показують, що в точці $x = 0$ функція приймає нульове значення. Тому, щоб знайти 3 члена розкладання, треба знайти значення трьох перших похідних, які не дорівнюють нулю. Значення першої похідної знайдемо з заданого ДР. З врахуванням початкових умов одержимо:

$$y'(0) = 0 + 0 - \mathrm{e}^0 = -1$$

Диференціюємо задане рівняння.

$$y'' = 2x + 2yy' - \mathrm{e}^x$$

Тепер можна знайти значення другої похідної в точці $x = 0$.

$$y''(0) = 0 - \mathrm{e}^0 = -1$$

Проводимо наступне диференціювання.

$$y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'' - \mathrm{e}^x.$$

З врахуванням попередньо знайдених значень, одержимо:

$$y'''(0) = 2 + 2 + 0 - \mathrm{e}^0 = 3$$

Знайдені три ненульових значення перших похідних дозволяє записати три члени розкладання в степеневий ряд шуканої функції:

$$y = -x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \cdots.$$

29. $y'' + xy' + y^2 = 5\cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Запишемо задане рівняння у вигляді:

$y'' = 5\cos x - xy' - y^2$.

Знаходимо значення другої похідної в точці $x = 0.$

$y''(0) = 5\cos 0 - 1 = 4$.

Знаходимо вираз для третьої похідної диференціюванням.

$y''' = -5\sin x - y' - xy'' - 2yy'$.

Обчислюємо значення третьої похідної в точці $x = 0.$

$y'''(0) = -5\sin 0 - 0 = 0$.

Наступне диференціювання дає:

$y^{(4)} = -5\cos x - y'' - y'' - xy''' - 2(y')^2 - 2yy''$.

Значення четвертої похідної в точці $x = 0$:

$y^{(4)}(0) = -5\cos 0 - 4 - 4 - 2 \cdot 1 \cdot 4 = -21$.

Підставляємо знайдені числові значення у вираз (2.19).

$$y = 1 + \frac{4}{2}x^2 - \frac{21}{24}x^4 + \cdots$$

Після спрощень остаточно одержимо:

$$y = 1 + 2x^2 - \frac{7}{8}x^4 + \cdots$$

III. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РЯДИ ФУР'Є

3.1. Умови розкладання функцій в ряд Фур'є

При розкладанні функцій в ряд Тейлора була використана система функцій:

$$1,\ \left(x-c\right),\ \left(x-c\right)^2,\ \left(x-c\right)^3,\ \ldots \tag{3.1}$$

Розкладання функцій в ряд Тейлора вельми корисно, але воно має ряд недоліків. Сумами степеневих рядів, наприклад, можуть бути лише неперервні функції, диференційовні скільки-завгодно разів. Разом з тим, як в самій математиці, так і в її прикладних задачах доводиться досліджувати функції, що мають "зломи", скачки, тобто – функції, які в окремих точках, взагалі, не мають похідної. Виникає питання про розкладання таких функцій в ряд по системам інших функцій, які дозволять уникнути вказаних недоліків. Розкладання матиме вигляд (узагальнений ряд Фур'є):

$$f\left(x\right)=a_1\varphi_1\left(x\right)+a_2\varphi_2\left(x\right)+\cdots+a_n\varphi_n\left(x\right)+\cdots \tag{3.2}$$

(зрозуміло, що цей ряд повинен збігатися до функції $f(x)$).

Порівняно проста і зручна система функцій для розкладання в ряд Фур'є – це система тригонометричних функцій:

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ldots\ \cos nx,\ \ \sin nx,\ldots \tag{3.3}$$

Розкладання по системі цих функцій має вид:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx\ . \tag{3.4}$$

Умови розкладання функції в ряд Фур'є задає наступна

теорема Діріхле: якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[-\pi,\pi]$ і є на ньому кусочно-неперервною, кусочно-монотонною і обмеженою, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається до функції $f(x)$ в усіх точках неперервності цієї функції, а в точках розриву сума ряду:

$$S\left(x\right)=\tfrac{1}{2}\left[f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)\right]. \tag{3.5}$$

Крім того: $$S\left(\pi\right)=S\left(-\pi\right)=\tfrac{1}{2}\left[f\left(-\pi+0\right)+f\left(\pi-0\right)\right]. \tag{3.6}$$

У визначеннях (3.5), (3.6) використані поняття границі, відповідно, зліва $f(a-0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)$ та справа $f(a+0)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x)$.

3.2. Розкладання функцій в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi, \pi]$.

Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам теореми Діріхле і розкладена в ряд (3.4). Домножимо співвідношення (3.4) спочатку на $\cos Nx$, а потім на $\sin Nx$:

$$f(x)\cos Nx = \frac{a_0}{2}\cos Nx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos Nx + b_n \sin nx \cos Nx, \quad (3.7)$$

$$f(x)\sin Nx = \frac{a_0}{2}\sin Nx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \sin Nx + b_n \sin nx \sin Nx. \quad (3.8)$$

Проінтегруємо, тепер, всі члени рядів (3.4), (3.7) і (3.8) в межах від $-\pi$ до π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx, \quad (3.9)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos Nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos Nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos Nxdx +$$
$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos Nxdx, \quad (3.10)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin Nxdx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \sin Nxdx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin Nxdx +$$
$$+ b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin Nxdx. \quad (3.11)$$

Інтеграли від $\cos nx,\ \sin nx,\ \cos Nx,\ \sin Nx$ у співвідношеннях (3.9)-(3.11) дорівнюють нулю, так як беруться на відрізку $[-\pi, \pi]$, кратному періоду ($2\pi/n$ чи $2\pi/N$). Легко перевірити, що інтеграли від добутків синуса і косинуса теж дорівнюють нулю:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos Nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\sin(n-N)x + \sin(n+N)x\right]dx = 0. \quad (3.12)$$

Добутки ж однойменних функцій дорівнюють нулю тоді, коли $n \neq N$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos Nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(n-N)x + \cos(n+N)x\right]dx = 0, \quad (3.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin Nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(n-N\right)x-\cos\left(n+N\right)x\right]dx=0. \quad (3.14)$$

Якщо ж $n=N$, то добутки однойменних функцій перетворюються в їх квадрати і тільки в цьому випадку відповідні інтеграли не дорівнюють нулю:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1+\cos 2nx\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nxdx=\frac{1}{2}\left(x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi, \quad (3.15)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\cos 2nx\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2nxdx=\frac{1}{2}\left(x\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi. \quad (3.16)$$

З урахуванням указаного вище, із співвідношень (3.9)-(3.11), маємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx=a_0\pi;\quad \int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx=a_n\pi;$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx=b_n\pi; \quad (3.17)$$

Звідси знаходяться вирази для знаходження невідомих коефіцієнтів a_0, a_n, b_n. Отже, для розкладання функції в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi,\pi]$ маємо співвідношення:

$$\boxed{\begin{aligned}&f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx+b_n\sin nx;\\&a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)dx;\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\cos nxdx;\\&b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(x\right)\sin nxdx.\end{aligned}} \quad (3.18)$$

<u>Приклад</u> **30**. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію, задану на відрізку $[-\pi;\pi]$:

$$f(x)=\begin{cases} x+\pi & при \ -\pi\le x\le 0; \\ \pi & при \quad 0<x\le\pi. \end{cases}$$

Знайдемо спочатку коефіцієнти a_0, a_n, b_n ряду Фур'є за формулами (3.18):

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi dx=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+\pi x\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}+\pi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{2}+\pi^2\right)+\pi=\frac{3\pi}{2};$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\cos nxdx+$$

$$+\int_{-\pi}^{0}\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\right.$$

$$\left.-\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n^2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi n^2}(\cos 0-\cos n\pi)=$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}=\frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2};$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi\sin nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\sin nxdx+\int_{-\pi}^{0}\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}xd\left(\frac{\cos nx}{n}\right)+$$

$$+\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\left(\pi\frac{\cos n\pi}{n}-\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{0}\right)=-\frac{(-1)^n}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Отже, ряд Фур'є (3.18) для заданої функції має вид:

$$\boxed{f(x)=\frac{3\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx}$$

Відмітимо, що при інтегруванні добутків $x\sin nx$ та $x\cos nx$ застосовувалось правило інтегрування частинами

$$\int_a^b U dV = UV\Big|_a^b - \int_a^b V dU,$$ а саме:

$$\int_a^b x\sin nx dx = -\int_a^b x d\left(\frac{\cos nx}{n}\right) = -x\frac{\cos nx}{n}\Big|_a^b + \int_a^b \frac{\cos nx}{n}dx;$$

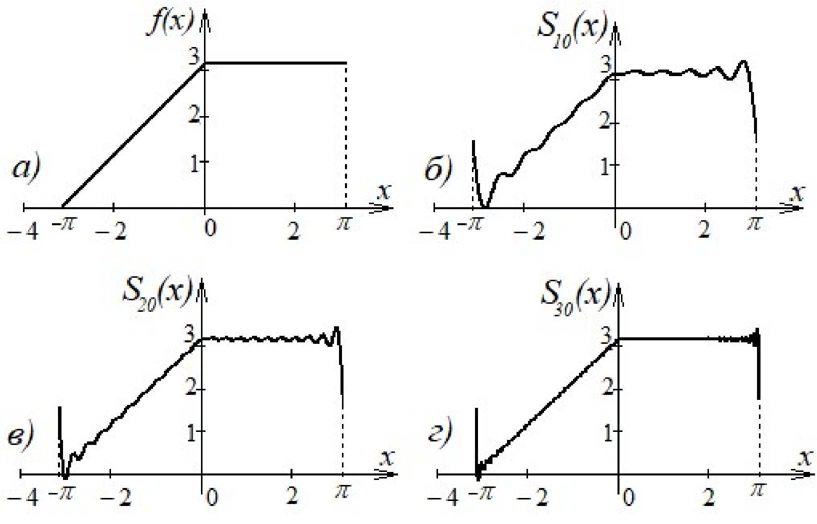
$$\int_a^b x\cos nx dx = \int_a^b x d\left(\frac{\sin nx}{n}\right) = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\sin nx}{n}dx.$$

Крім того, для спрощення враховувалась рівність $\cos n\pi = (-1)^n$.

Введемо позначення:

$$S_\kappa(x) = \frac{3\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\kappa} \frac{1+(-1)^{n+1}}{\pi n^2}\cos nx + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Тоді $f(x) \approx S_\kappa(x)$ і функцію $f(x)$ наближено можна представити обмеженою кількістю членів ряду Фур'є, яка визначається параметром κ.



На рисунку наближене зображення функції $f(x)$ показано при різних значеннях параметра κ: 10-(*б*); 20-(*в*); 30-(*г*). Отже, бачимо, що врахування більшого числа членів ряду Фур'є веде до збільшення точності розрахунків, яка може досягати як завгодно великих значень.

3.3. Розкладання функцій в ряд Фур'є на довільному відрізку.

Розглянемо спочатку розкладання функції на симетричному відрізку $[-\ell;\ \ell]$ довільної довжини. Нехай функція $f(x)$ задовольняє умовам Діріхле на вказаному відрізку. Введемо підстановку:

$$x = \frac{\ell}{\pi} t, \qquad f\left(x\right) = f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right).$$

Очевидно, що функція $f\left((\ell/\pi)t\right)$ задана, тепер, на відрізку $[-\pi, \pi]$ і її можна розкласти в ряд Фур'є за формулами (3.18):

$$f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt + b_n \sin nt,$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \cos ntdt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell}{\pi} t\right) \sin ntdt.$$

Повертаючись до змінної x $\left(t = \frac{\pi}{\ell} x\right)$ остаточно одержимо:

$$\boxed{\begin{aligned} &f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}; \\ &a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f\left(x\right) dx; \quad a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f\left(x\right) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx; \\ &b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f\left(x\right) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx. \end{aligned}} \qquad (3.19)$$

Якщо функція задана на несиметричному відрізку відносно нуля $\left[a; a + 2\pi\right]$ або $\left[a; a + 2\ell\right]$, то, у відповідності до цього, при обчисленні коефіцієнтів ряду Фур'є слід змінити межі інтегрування. Нехай, наприклад, необхідно розкласти функцію $f(x)$ на відрізку $\left[a; b\right]$. Тоді $\ell = (b - a)/2$ і з врахуванням співвідношень (3.19) одержимо:

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{2n\pi x}{b-a}+b_n\sin\frac{2n\pi x}{b-a};\\ &a_0=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\quad;\quad a_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx;\\ &b_n=\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}\,dx.\end{aligned}} \tag{3.20}$$

<u>Приклад</u> **31**. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію, задану на відрізку $[0;2]$:

$$f(x)=\begin{cases}-1 & при\ \ 0\le x\le 1;\\ 2-x & при\ \ 1<x\le 2.\end{cases}$$

Застосуємо формули (3.20) за умов: $a=0;\ b=2.$

$$a_0=\int_0^1(-1)dx+\int_1^2(2-x)\,dx=-(x)\Big|_0^1+2(x)\Big|_1^2-\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=-1+2-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2};$$

$$a_n=\int_0^1(-1)\cos n\pi x dx+\int_1^2(2-x)\cos n\pi x dx=-\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1+2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_1^2-$$

$$-\int_1^2 xd\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)=-x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Bigg|_1^2+\int_1^2\frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx=-\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Bigg|_1^2=$$

$$=-\frac{1}{(n\pi)^2}(\cos 2n\pi-\cos n\pi)=-\frac{1}{(n\pi)^2}\left(1-(-1)^n\right)=\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^2};$$

$$b_n=\int_0^1(-1)\sin n\pi x dx+\int_1^2(2-x)\sin n\pi x dx=\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_0^1-2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_1^2+$$

$$+\int_1^2 xd\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)=\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi-\cos 0-2\cos 2n\pi+2\cos n\pi\right)$$

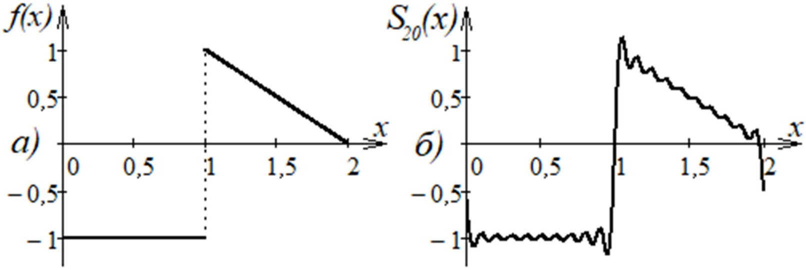
$$+x\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Bigg|_1^2-\int_1^2\frac{\cos n\pi x}{n\pi}dx=\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n-1-2+2(-1)^n\right]+2\frac{\cos 2n\pi}{n\pi}-$$

$$-\frac{\cos n\pi}{n\pi}-\frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Bigg|_1^2=\frac{1}{n\pi}\left[3(-1)^n-3+2-(-1)^n\right]=\frac{2(-1)^n-1}{n\pi}.$$

Таким чином, ряд Фур'є для заданої функції виглядає так:

$$\boxed{f\left(x\right)=-\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\left(n\pi\right)^2}\cos n\pi x+\frac{2\left(-1\right)^n-1}{n\pi}\sin n\pi x}$$

Вид заданої функції і її зображення рядом Фур'є при $\kappa=20$ показано на рисунку.



<u>Приклад</u> **32**: Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію, задану на симетричному відрізку:

$f\left(x\right)=\mathrm{e}^x,\ x\in\left[-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right].$

Коефіцієнти ряду Фур'є знаходимо за формулами (3.19):

$$a_0=\frac{2}{3}\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x dx=\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^x\right)\Big|_{-3/2}^{3/2}=\frac{2}{3}\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right);$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_{-2/3}^{2/3}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx;\quad b_n=\frac{2}{3}\int_{-2/3}^{2/3}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx.$$

Обчислимо інтеграли, що входять в ці вирази, використовуючи інтегрування частинами.

$$\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x d\left(\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\right)=\frac{3\mathrm{e}^x}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Bigg|_{-3/2}^{3/2}-$$

$$-\frac{3}{2\pi n}\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{3}{2\pi n}\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x d\left(\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\right)=$$

$$=\frac{3}{2\pi n}\left(\frac{3\mathrm{e}^x}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Bigg|_{-3/2}^{3/2}-\frac{3}{2\pi n}\int_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{9(-1)^n}{4\pi^2n^2}\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)-\frac{9}{4\pi^2n^2}\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx.$$

$$\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=-\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x d\left(\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\right)=-\frac{3\mathrm{e}^x}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Bigg|_{-3/2}^{3/2}+$$

$$+\frac{3}{2\pi n}\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-3/2}-\mathrm{e}^{3/2}\right)+\frac{3}{2\pi n}\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x d\left(\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\right)=$$

$$=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-3/2}-\mathrm{e}^{3/2}\right)+\frac{9\mathrm{e}^x}{4\pi^2n^2}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Bigg|_{-3/2}^{3/2}-\frac{9}{4\pi^2n^2}\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=$$

$$=\frac{3(-1)^n}{2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-3/2}-\mathrm{e}^{3/2}\right)-\frac{9}{4\pi^2n^2}\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx.$$

З останніх двох виразів, після належних перетворень, будемо мати:

$$\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{\frac{9(-1)^n}{4\pi^2n^2}\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)}{1+\frac{9}{4\pi^2n^2}}=\frac{9(-1)^n\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)}{4\pi^2n^2+9};$$

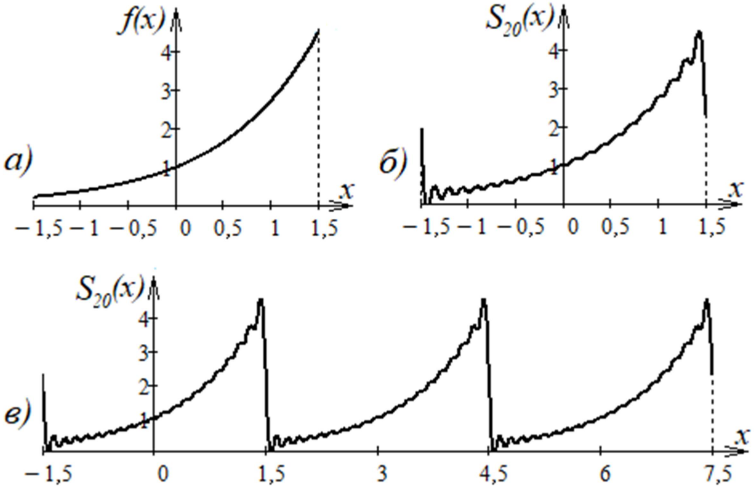
$$\int\limits_{-3/2}^{3/2}\mathrm{e}^x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{\frac{3(-1)^n}{2\pi n}\left(\mathrm{e}^{-3/2}-\mathrm{e}^{3/2}\right)}{1+\frac{9}{4\pi^2n^2}}=-\frac{6(-1)^n n\pi\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)}{4\pi^2n^2+9}.$$

Тепер, для знаходження коефіцієнтів a_n, b_n достатньо помножити знайдені вирази на $2/3$:

$$a_n=\frac{6(-1)^n\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)}{4\pi^2n^2+9};\quad b_n=-\frac{4(-1)^n n\pi\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)}{4\pi^2n^2+9}.$$

Остаточно, з врахуванням виразу (3.19), одержимо розкладання заданої функції в ряд Фур'є, а також геометричну інтерпретацію проведених розрахунків.

$$\boxed{f(x)=\left(\mathrm{e}^{3/2}-\mathrm{e}^{-3/2}\right)\left[\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6(-1)^n}{4\pi^2n^2+9}\cos\frac{2\pi nx}{3}-\frac{4(-1)^n n\pi}{4\pi^2n^2+9}\sin\frac{2\pi nx}{3}\right]}$$



Слід відмітити, що найбільш точними, при моделюванні функцій скінченою сумою ряду Фур'є, виявляються ділянки між точками розриву та кінцями інтервалу. В самих же точках розриву і на кінцях інтервалу значення суми ряду відповідають теоремі Діріхле. Так, для функції $f(x)=\mathrm{e}^x$, $x\in[-3/2;\,3/2]$, точки розриву відсутні, а на кінцях інтервалу сума ряду Фур'є приймає значення:

$$S\left(\tfrac{3}{2}\right)=S\left(-\tfrac{3}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-3/2}+\mathrm{e}^{3/2}\right]=2{,}35.$$

Крім того, з виду формул розкладання функцій в ряд Фур'є, які базуються на періодичних функціях $(\sin nx, \cos nx)$, витікає, що скінчена сума ряду Фур'є завжди періодична, незалежно від того періодичною чи неперіодичною є функція, яка розкладається в цей ряд. Це показано вище на прикладі експоненціальної функції (позиція ***в***), де графік розповсюджений на три періоди суми ряду. При цьому вказаний період неодмінно співпадає з відрізком, на якому розкладена функція. Підкреслимо, що в цьому прикладі сама функція $f(x)=\mathrm{e}^x$, що розкладена в ряд, не є періодичною.

3.4. Розкладання в ряд Фур'є парних і непарних функцій.

Якщо функція $f(x)$ парна $\left(f(x)=f(-x)\right)$, то:

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = 2\int_{0}^{c} f(x)dx.$$

Якщо ж функція $f(x)$ непарна $\left(f(-x)=-f(x)\right)$, то:

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx = 0.$$

Спираючись на ці властивості та співвідношення (3.18) для парних функцій можемо записати:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Таким чином, одержуємо розкладання парної функції $f(x)$ на відрізку $[-\pi,\pi]$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx; \\ a_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)dx; \quad a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx. \end{array}} \qquad (3.21)$$

Ці співвідношення носять назву "розкладання парних функцій на відрізку $[-\pi,\pi]$ <u>по косинусам</u>".

Аналогічно одержимо розкладання парних функцій <u>по косинусам</u> на відрізку $[-\ell,\ell]$:

$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \dfrac{n\pi x}{\ell}; \\ a_0 = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{0}^{\ell} f(x)dx; \quad a_n = \dfrac{2}{\ell}\displaystyle\int_{0}^{\ell} f(x)\cos \dfrac{n\pi x}{\ell} dx. \end{array}} \qquad (3.22)$$

На основі тих же властивостей та співвідношення (3.18) для непарних функцій запишемо:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Отже, маємо розкладання непарних функцій на відрізку $[-\pi, \pi]$ по синусам:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.} \tag{3.23}$$

Такі ж міркування приводять до "розкладання непарних функцій по синусам на відрізку $[-\ell, \ell]$" у вигляді:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \quad b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.} \tag{3.24}$$

Приклад **33**. Розкласти задану функцію в тригонометричний ряд Фур'є по косинусам:

$$f(x) = \begin{cases} x \ \ \text{при} \ \ 0 \le x \le 1; \\ -x \ \ \text{при} \ -1 \le x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, що функція парна і її можна розкласти по косинусам за співвідношеннями (3.22), де взяти $\ell = 1$.

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = \left(x^2\right)\Big|_0^1 = 1 - 0 = 1,$$

$$a_n = 2\int_0^1 x\cos n\pi x dx = 2\int_0^1 x d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = 2\left(x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \right.$$

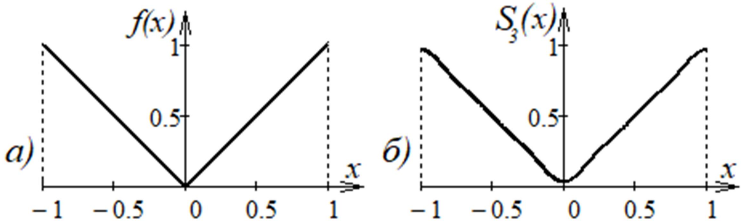
$$\left. - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}dx\right) = 2\frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1 = \frac{2}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n - 1\right].$$

Одержаний вираз показує, що $a_n = 0$ при парному значенні n. В цих умовах для виключення нуля та спрощення обчислень доцільно перейти тільки до непарних значень параметра n $(n = 2k-1,\ k = 1, 2, 3, \ldots)$. Тоді коефіцієнт a_n набуде вигляду:

$$a_k = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

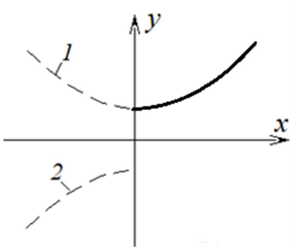
Остаточно ряд косинусів Фур'є для заданої функції запишеться так:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)\pi x}{(2k-1)^2}}$$



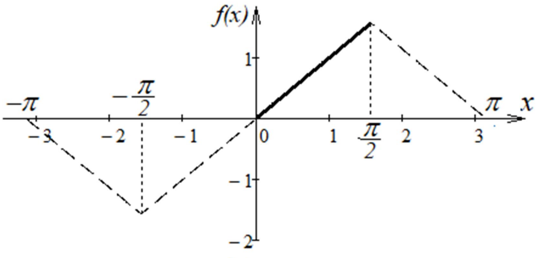
Графічна ілюстрація підтверджує правильність одержаних розрахунків.

Якщо функція $f(x)$ задана на відрізку $[0; \pi]$ або $[0; \ell]$, то її можна продовжити на відрізок $[-\pi; 0[$ або $[-\ell; 0[$. Це можна виконати так, що на всьому відрізку $[-\pi; \pi]$ або $[-\ell; \ell]$ функція буде парною (позиція 1) або непарною (позиція 2), що дозволяє розкласти функцію, відповідно, в ряд косинусів чи синусів. Якщо $f(0) = 0$ і $f(\pi) = 0$ або $f(\ell) = 0$, то з метою кращої збіжності рекомендується розкладати функцію в ряд синусів. Якщо ж $f(0) = 0$, але на правому кінці відрізку функція не дорівнює нулю, то для розкладання в ряд синусів можна допоміжно добудувати її справа заданого відрізку так, щоб згадана умова (рівності нулю функції на кінці відрізку) була виконана.



Приклад **34**. Розкласти задану функцію в тригонометричний ряд Фур'є по синусам: $f(x)=x,\ \ x\in\left[0;\pi/2\right]$.

Доповнимо функцію таким чином, щоб вона була непарною.



$$f(x)=\begin{cases}-\pi-x\ \textit{при}\ -\pi\le x<-\frac{\pi}{2};\\ \quad x\quad \textit{при}\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2};\\ \pi-x\ \textit{при}\quad \frac{\pi}{2}<x\le\pi.\end{cases}$$

Доповнена функція має період 2π і задана на відрізку $[-\pi;\pi]$. Для її розкладання в ряд Фур'є маємо формули (3.23).

Для якнайшвидшої збіжності ряду спочатку функцію доповнили на проміжку $\pi/2<x\le\pi$ *(пунктирна) так, щоб* $f(\pi)=0$. *Далі ліву частину добудували з міркувань симетрії відносно початку координат (тоді і* $f(-\pi)=0$*).*

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}x\sin nxdx+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}x\sin nxdx-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi}x\sin nxdx+2\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\sin nxdx.$$

Інтегрування частинами дає:

$$\int x\sin nxdx=\int xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n}\int\cos nxdx=$$
$$=-\frac{x}{n}\cos nx+\frac{1}{n^2}\sin nx+C$$

З врахуванням цього результату одержимо:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos xn+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_0^{\pi/2}-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos xn+\frac{1}{n^2}\sin nx\right)\Bigg|_{\pi/2}^{\pi}-$$

$$-\frac{2}{n}\cos nx\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \cancel{-\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2} + \cancel{\frac{2}{n}\cos\pi n} - \frac{2}{\pi n^2}\sin\pi n -$$

$$\cancel{-\frac{1}{n}\cos\frac{\pi n}{2}} + \frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2} \cancel{-\frac{2}{n}\cos\pi n} + \cancel{\frac{2}{n}\cos\frac{\pi n}{2}} = \frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

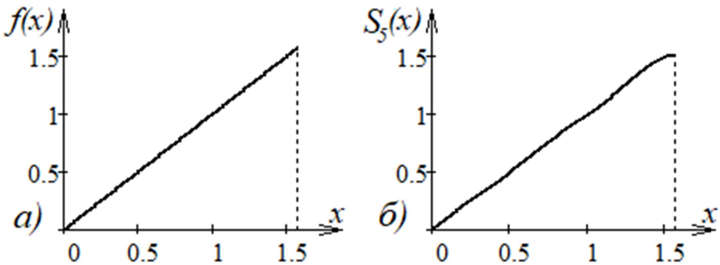
Як бачимо, при парних значеннях параметра n коефіцієнт b_n дорівнює нулю. Щоб відійти від цих нулів і, тим самим, спростити обчислення, виконаємо очевидну підстановку: $n = 2k-1,\ k = 1, 2, 3, \ldots$. Тоді $\sin(\pi n/2) = \sin[\pi(2k-1)/2] = (-1)^{k+1}$ і для шуканого коефіцієнта одержимо вираз:

$$b_n = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}.$$

Тепер, для розкладання заданої функції в тригонометричний ряд достатньо врахувати співвідношення (3.23).

$$\boxed{f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2}\sin(2k-1)x}$$

Ця залежність описує задану функцію на відрізку $\left[0; \pi/2\right]$.



Відмітимо далі, що кожний доданок $a_n\cos nx + b_n\sin nx$ у сумі ряду Фур'є може бути представлений у вигляді $A_n\sin(\omega_n x + \varphi_n)$ і називається n-ною гармонікою. Очевидно що, чим швидше збігається ряд, тим менше гармонік можна взяти при моделюванні функції сумою $S_к(x)$ і тим простішими будуть обчислення. Деякі рекомендації прискорення збіжності рядів Фур'є згадані вище. Існують також спеціально розроблені ефективні прийоми прискорення збіжності тригонометричних рядів, але в цьому курсі вказані питання не розглядаються.

<u>Приклад</u> **35**. Розкласти задану функцію в тригонометричні ряди Фур'є по косинусам та по синусам: $f(x)=\cos\frac{x}{2},\;\; x\in\left[0;\pi\right]$.

Задана функція є парною, тому для її розкладання по косинусам добудова на проміжок $[-\pi;0)$ не потрібна.
Отже, застосовуємо формули (3.21):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\tfrac{x}{2}dx=\frac{4}{\pi}\left(\sin\tfrac{x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{4}{\pi}\left(\sin\tfrac{\pi}{2}-\sin 0\right)=\frac{4}{\pi};$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\tfrac{x}{2}\cos xn\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(\tfrac{x}{2}-nx\right)+\cos\left(\tfrac{x}{2}+nx\right)\right]dx=$$

$$=\frac{2}{\pi(1-2n)}\sin\left(\tfrac{1-2n}{2}x\right)\Big|_0^{\pi}+\frac{2}{\pi(1+2n)}\sin\left(\tfrac{1+2n}{2}x\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{2}{\pi(1-2n)}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-\pi n\right)+\frac{2}{\pi(1+2n)}\sin\left(\tfrac{\pi}{2}+\pi n\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi(1-2n)}\cos\pi n+\frac{2}{\pi(1+2n)}\cos\pi n=$$

$$=\frac{2(-1)^n}{\pi}\left(\frac{1}{1-2n}+\frac{1}{1+2n}\right)=\frac{4(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}.$$

$$\boxed{f(x)=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(1-4n^2)}\cos nx}$$

Для розкладання заданої функції по синусам треба доповнити її на проміжку $[-\pi;0)$ так, щоб на всьому відрізку $[-\pi;\pi]$ вона була непарною. В результаті цього одержимо:

$$f(x)=\begin{cases}-\cos\frac{x}{2} & при\ -\pi\le x<0;\\ \cos\frac{x}{2} & при\quad 0\le x\le\pi.\end{cases}$$

Далі застосовуємо формули (3.23) для розкладання по синусам непарних функцій на відрізку $[-\pi,\pi]$:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\tfrac{x}{2}\sin nx dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(nx-\tfrac{x}{2}\right)+\sin\left(nx+\tfrac{x}{2}\right)\right]dx=$$

$$=-\frac{2}{\pi(2n-1)}\cos\left(\tfrac{2n-1}{2}x\right)\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi(2n+1)}\cos\left(\tfrac{2n+1}{2}x\right)\Big|_0^{\pi}=$$

$$= -\frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\cos\left(\pi n - \tfrac{\pi}{2}\right) - 1\right] - \frac{2}{\pi(2n-1)}\left[\cos\left(\pi n - \tfrac{\pi}{2}\right) - 1\right] =$$

$$= -\frac{2}{\pi(2n-1)}\left(\sin \pi n - 1\right) + \frac{2}{\pi(2n+1)}\left(\sin \pi n + 1\right) =$$

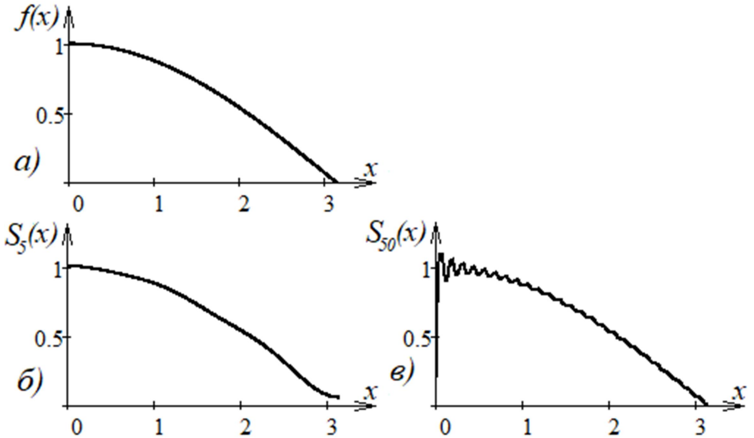
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{8n}{\pi(4n^2-1)}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin nx}$$

При інтегруванні були використані тригонометричні залежності:

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right];$$

$$\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right].$$



Приведений рисунок показує, що ряд косинусів – (*б*) збігається швидше до заданої функції – (*а*), ніж ряд синусів – (*в*), що і слід будо чекати, виходячи з того, що задана функція і є косинус. Для досить прийнятного відображення указаної функції рядом косинусів достатньо було врахувати 5 гармонік проти 50 для ряду синусів. Очевидно, також, що на збіжності тригонометричного ряду синусів негативно позначився розрив функції в точці $x = 0$.

Далі в додатках 1- 4 для кращого засвоєння поданого матеріалу і контролю набутих знань пропонуються контрольні роботи та індивідуальні завдання. Контрольні роботи передбачені за темами "числові ряди" та "степеневі ряди". Очевидно, що ці теми тісно зв'язані між собою тому вони об'єднані в одному індивідуальному завданні. Індивідуальне ж завдання за темою "тригонометричні ряди Фур'є" подано окремо.

ДОДАТОК 1

КОНТРОЛЬНА РОБОТА (числові ряди)

Варіант 1

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+5};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1000^n}{n^2};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+5)^n}.$$

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3};\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+5}.$$

Варіант 2

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^3-n+5};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)^n}{(n+10)^n};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n}.$$

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+5};\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^n}{(n+1)^n}.$$

Варіант 3

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^n}{n!};\quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{12^n}{n^n}.$$

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1};\quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}.$$

Варіант 4

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+7}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{\sqrt[4]{n+5}}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{5^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3^n}$.

Варіант 5

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{4n^2+3}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+6)^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{7^n n!}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+2}$.

Варіант 6

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+11}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+6)^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$.

Варіант 7

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^2+1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{n+5}$.

Варіант 8

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{(n+1)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{10}}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+2}$.

Варіант 9

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+100}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+36)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1,8}$.

Варіант 10

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+5}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{4+5n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^9}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+8}$.

Варіант 11

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{5+n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+9}$.

Варіант 12

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{n^2+1}{n^2+12}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{2n+5}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{(n+6)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^3+2}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+6}$.

Варіант 13

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n^2+9}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4!}{(n+3)!}$; *в)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(2+n)^n}{\ln^n n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+2}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{n^4}$.

Варіант 14

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{5+3n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)^n}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n\cdot\ln^4 n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{5^n}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+8}$.

Варіант 15

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{8n^2+5}{n^2+4}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{7^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{(n+0,2)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2^n}$.

Варіант 16

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+20}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+3)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+3}$.

Варіант 17

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+5n}{n+21}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{12+n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+1)!}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$.

Варіант 18

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+5)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+7}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$.

Варіант 19

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{12+n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+6}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$.

Варіант 20

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+5n}{n+21}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{2^n}$; *в)* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{6}{n \cdot \ln n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3^n}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$.

Варіант 21

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{20^n}{(n+2)!}$ *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{n^3+3}$ *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n}}{5^n n}$

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+32}$ *д)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^7}$

Варіант 22

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+4}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+6)^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n}{n!}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+9}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+2}$.

Варіант 23

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+5n+n^4}{2n^4+3n+2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(3+n)^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n^3}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+2}$.

Варіант 24

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n^3+5}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+n)^n}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$.

Варіант 25

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{(n+4)^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{4n^3+2n+5}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^8}$.

Варіант 26

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+4)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$.

Варіант 27

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^3-n+5}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3+n)^n}{2^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$; *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$.

Варіант 28

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$. *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^4}$.

Варіант 29

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+6}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+6)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^n}{(n+1)^n}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+5}$.

Варіант 30

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2+5}{n^2+4}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4!}{(n+3)!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+6)^n}$.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність рядів:

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+8}$; *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$.

ДОДАТОК 2

КОНТРОЛЬНА РОБОТА (степеневі ряди)

Варіант 1

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{n!}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{\pi}{3}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\sin x = y^2$, $y(0) = 1$.

Варіант 2

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

2. Розкласти функцію e^{-x^2} в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\sin x = y$, $y(0) = 1$.

Варіант 3

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n x^n}{\sqrt{n}}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{x^3}{4}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\sin x = y$, $y(0) = 2$.

Варіант 4

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{6^{n-1}}$$

2. Розкласти функцію $\cos 5x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\sin x = y,\ \ y(0) = 3$.

Варіант 5

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^{n}}{2^{n}}$$

2. Розкласти функцію $\cos\frac{\pi}{4}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = \sin x + yx + 1,\ \ y(0) = 2$.

Варіант 6

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^{n+1}$$

2. Розкласти функцію $1/\sqrt{e^{x}}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = \sin x + yx^{2} + 1,\ \ y(0) = 2$.

Варіант 7

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{5^{n-1}}$$

2. Розкласти функцію $\cos\frac{x^2}{3}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = \sin x + yx + 1,\ \ y(0) = -1$.

Варіант 8

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n^2+1}$$

2. Розкласти функцію $e^{\frac{x^2}{2}}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y - \sin x + x,\ \ y(0) = -1$.

Варіант 9

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2^n}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{x}{2}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = \sin x + y + x^2,\ \ y(0) = 2$.

Варіант 10

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)4^n}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{x}{2}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'=\sin x+y+x^2$, $y(0)=2$.

Варіант 11

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$$

2. Розкласти функцію $1/\sqrt{1+x^4}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'=\sin x+y+x^2$, $y(0)=1$.

Варіант 12

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$$

2. Розкласти функцію $\cos\sqrt{x}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'-x\cos x=y^2$, $y(0)=1$.

Варіант 13

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{4^n\sqrt[3]{n}}$$

2. Розкласти функцію $\arcsin 2x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\cos x = y,\ y(0) = 1$.

Варіант 14

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$$

2. Розкласти функцію $1\big/\sqrt{1-x^4}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\cos x = y,\ y(0) = 2$.

Варіант 15

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{n^5}$$

2. Розкласти функцію $e^{-\frac{x}{2}}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x\cos x = y,\ y(0) = 3$.

Варіант 16

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)5^n}$$

2. Розкласти функцію $\ln(1+2x)$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=2$.

Варіант 17

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^n}{2^n}$$

2. Розкласти функцію $e^{-\sqrt{x}}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'=\cos x+yx^2+1,\ y(0)=2$.

Варіант 18

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)(n+2)}$$

2. Розкласти функцію $\sin\sqrt{2x}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=-1$.

Варіант 19

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{(n+1)!}$$

2. Розкласти функцію $\cos\frac{5}{2}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y' = y - \cos x + x,\ y(0) = -1$.

Варіант 20

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[4]{n}}$$

2. Розкласти функцію $\sin^2 x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y' = \cos x + y + x^2,\ y(0) = 2$.

Варіант 21

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з’ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$$

2. Розкласти функцію $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв’язком диференціального рівняння: $y' = \cos x + y + x^2,\ y(0) = 1$.

Варіант 22

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n\left(n-1\right)x^n}{5^n}$$

2. Розкласти функцію $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y'=y^2+x^2-\mathrm{e}^x,\ y(0)=1$.

Варіант 23

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt{n}}$$

2. Розкласти функцію $\operatorname{arctg} x^2$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y'=y^2+2x-\mathrm{e}^x-3,\ y(0)=1$.

Варіант 24

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^{n-1}}{n!}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{x^2}{2}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y=f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y'=y^2+2x+\mathrm{e}^x,\ y(0)=1$.

Варіант 25

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{8^n \sqrt{n}}$$

2. Розкласти функцію $\sin \frac{\pi}{5} x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y + x + x\mathrm{e}^x$, $y(0) = 1$.

Варіант 26

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$$

2. Розкласти функцію $\operatorname{arctg} \frac{x}{3}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' - x \sin x = y$, $y(0) = 1$.

Варіант 27

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n \sqrt{2n+1}}$$

2. Розкласти функцію $2x \sin \frac{x}{2}$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y + x^2 + x\mathrm{e}^x$, $y(0) = 1$.

Варіант 28

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{\pi}{3}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y - x^4 - xe^x$, $y(0) = 1$.

Варіант 29

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{\pi}{6}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y - x^5 - xe^x$, $y(0) = 1$.

Варіант 30

1. Записати перших чотири члени ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність ряду на кінцях інтервалу:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{(n+2)!}$$

2. Розкласти функцію $\sin\frac{2}{3}x$ в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

3. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком диференціального рівняння: $y' = y^2 + x^3$, $y(0) = 2$.

ДОДАТОК 3

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ (числові та степеневі ряди)

1. Дослідити на збіжність задані числові ряди.

2. Дослідити на умовну і абсолютну збіжність або встановити розбіжність заданих знакопереміжних рядів.

3. Записати перших чотири члени заданого ряду, знайти інтервал збіжності та з'ясувати питання про збіжність на кінцях інтервалу.

4. Обчислити визначений інтеграл с точністю до 0,001 шляхом розкладання підінтегральної функції в ряд та почленного інтегрування цього ряду.

5. Розкласти задану функцію в ряд Маклорена та вказати область збіжності ряду.

6. Знайти перших чотири члени розкладання в степеневий ряд функції $y = f(x)$, що є розв'язком заданого диференціального рівняння.

Варіанти даних взяти з таблиці 1.

Таблиця 1.

Варіант 1	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{5+n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+9}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}dx$; **5.** $\cos\sqrt{x}$; **6.** $y' - x\cos x = y^2,\ y(0) = 1$.
Варіант 2	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+12}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+5}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+6)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+2}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{4^n\sqrt[3]{n}}$; **4.** $\int\limits_0^{1/3}x\sqrt{x}\,e^x dx$; **5.** $\arcsin 2x$; **6.** $y' - x\cos x = y,\ y(0) = 1$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 3	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4!}{(n+3)!}$; *в)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2+n)^n}{\ln^n n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^4}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[4]{\left(1+x^4\right)^3}}$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$; **6.** $y'-x\cos x=y,\ y(0)=2$.
Варіант 4	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5+3n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^n}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{n^3-6n+5}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot\ln^4 n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{n^5}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg}x^2}{x}dx$ **5.** $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$; **6.** $y'-x\cos x=y,\ y(0)=3$.
Варіант 5	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2+5}{n^2+4}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+0,2)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+5)}{n+5}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)5^n}$; **4.** $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}dx$; **5.** $\ln(1+2x)$; **6.** $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=2$.
Варіант 6	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^2}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+20}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+3)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)!$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+3}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^n}{2^n}$; **4.** $\int\limits_0^{1/4}\frac{\sin 4x}{x}dx$; **5.** $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$; **6.** $y'=\cos x+yx^2+1,\ y(0)=2$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 7	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+5n}{n+21}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{12+n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+1)!}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)(n+2)}$; **4.** $\int_0^{1/2} x\cos\sqrt{2x}\,dx$; **5.** $\sin\sqrt{5x}$; **6.** $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=-1$.
Варіант 8	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+7n^2}{n^2+3}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^n(n+1)}{(n+1)^n}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+2}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{10}}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n^2+1}$; **4.** $\int_0^1 e^{-x^2}dx$; **5.** $e^{\frac{x^2}{2}}$; **6.** $y'=y-\sin x+x,\ y(0)=-1$.
Варіант 9	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+100}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+36)^n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+1{,}8}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)2^n}$; **4.** $\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x^2}dx$; **5.** $\sin\frac{x}{2}$; **6.** $y'=\sin x+y+x^2,\ y(0)=2$.
Варіант 10	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2+5}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{4+5n^2}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^3+2}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+8}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^9}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{5^n\sqrt{n}}$; **4.** $\int_0^{1/2}\frac{\sin x}{x}dx$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$; **6.** $y'=\sin x+y+x^2,\ y(0)=1$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 11	1. *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{100^n}{n!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+4}{5+n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; 2. *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+9}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{\sqrt{(2n-1)3^n}}$; 4. $\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}dx$; 5. $\cos\sqrt{x}$; 6. $y'-x\cos x=y^2,\ y(0)=1$.
Варіант 12	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2+12}}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+5}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+6)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+2}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{4^n\sqrt[3]{n}}$; **4.** $\int\limits_0^{1/3}x\sqrt{x}\,e^x dx$; **5.** $\arcsin 2x$; **6.** $y'-x\cos x=y,\ y(0)=1$.
Варіант 13	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2+1}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4!}{(n+3)!}$; *в)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(2+n)^n}{\ln^n n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+9}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^4}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{dx}{\sqrt[4]{\left(1+x^4\right)^3}}$; **5.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$; **6.** $y'-x\cos x=y,\ y(0)=2$.
Варіант 14	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5+3n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(n^2+1\right)^n}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{n^3-6n+5}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\cdot\ln^4 n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{5^n}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}x^{n-1}}{n^5}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{\operatorname{arctg} x^2}{x}dx$; **5.** $e^{-\frac{x}{2}}$; **6.** $y'-x\cos x=y,\ y(0)=3$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 15	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2+5}{n^2+4}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+0,2)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+5)}{n+5}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{2^n}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{(2n-1)5^n}$; **4.** $\int\limits_0^{0,2}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x}dx$; **5.** $\ln(1+2x)$; **6.** $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=2$.
Варіант 16	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^2}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+20}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+3)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)!$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+3}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)x^n}{2^n}$; **4.** $\int\limits_0^{1/4}\frac{\sin 4x}{x}dx$; **5.** $\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$; **6.** $y'=\cos x+yx^2+1,\ y(0)=2$.
Варіант 17	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+5n}{n+21}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{12+n^2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+1)!}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)!$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)}{n+4}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+8}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{(n+1)(n+2)}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}x\cos\sqrt{2x}\,dx$; **5.** $\sin\sqrt{2x}$; **6.** $y'=\cos x+yx+1,\ y(0)=-1$.
Варіант 18	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{5^n}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+n^2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{(n+1)!}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+5)^n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+7}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3x^n}{(n+1)!}$; **4.** $\int\limits_0^{1}\sin x^2dx$; **5.** $\cos\frac{5}{2}x$; **6.** $y'=y-\cos x+x,\ y(0)=-1$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 19	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+3}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{12+n^2}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n+6}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{5^n\sqrt[4]{n}}$; **4.** $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-0{,}1x^2}dx$; **5.** $\sin^2 x$; **6.** $y'=\cos x+y+x^2,\ y(0)=2$.
Варіант 20	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+5n}{n+21}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{2^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n^2-5n+6}{12n^3+n^2-1}$; *г)* $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{6}{n\cdot\ln n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{3^n}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n x^n}{5^n\sqrt[3]{n}}$; **4.** $\int\limits_0^{0{,}1}\cos\left(100x^2\right)dx$; **5.** $\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$; **6.** $y'=\cos x+y+x^2,\ y(0)=1$.
Варіант 21	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{20^n}{(n+2)!}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n}{n^3+3}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+32}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^7}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n(n-1)x^n}{5^n}$; **4.** $\int\limits_0^{1/2}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^3}}$; **5.** $\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)$; **6.** $y'=y^2+x^2-\mathrm{e}^x,\ y(0)=1$.
Варіант 22	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+4}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+6)^n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{n!}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+3}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{3^n\sqrt{n}}$; **4.** $\int\limits_0^1 \mathrm{e}^{-0{,}1x^3}dx$; **5.** $\mathrm{arctg}\,x^2$; **6.** $y'=y^2+2x-\mathrm{e}^x-3,\ y(0)=1$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 23	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+5n+n^4}{2n^4+3n+2}$;1 *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(3+n)^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n}{n^2+3}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n^3}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n x^{n-1}}{n!}$; **4.** $\int_0^{0,5}\cos\left(4x^2\right)dx$; **5.** $\sin\frac{x^2}{2}$; **6.** $y'=y^2+2x+e^x$, $y(0)=1$.
Варіант 24	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{n^3+5}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+n)^n}{2^n}$; *в)* $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+3}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+5}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{8^n\sqrt{n}}$; **4.** $\int_0^{1/2}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}dx$; **5.** $\sin\frac{\pi}{5}x$; **6.** $y'=y+x+xe^x$, $y(0)=1$.
Варіант 25	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n)^n}{(n+4)^n}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+6}{2^n}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{4n^3+2n+5}$; *г)* $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^8}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^2 2^n}$; **4.** $\int_0^{0,2}\cos 5x^2dx$; **5.** $\operatorname{arctg}\frac{x}{3}$; **6.** $y'-x\sin x=y$, $y(0)=1$.
Варіант 26	**1.** *а)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+4}{n^2}$; *б)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{(n+1)!}$; *в)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+4)^n}$; *г)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5+4}{n^2}$; **2.** *д)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *е)* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$; **3.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n2^n\sqrt{2n+1}}$; **4.** $\int_0^{1/4}\frac{\sin 2x}{x}dx$; **5.** $2x\sin\frac{x}{2}$; **6.** $y'=y+x^2+xe^x$, $y(0)=1$.

Продовження таблиці 1.

Варіант 27	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2-1}{n^3-n+5}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)^n}{n!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+7}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2}{n^3+33}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{3^n}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+9}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n x^n}{n!}$; **4.** $\int\limits_0^{1/3}\frac{\sin 3x}{x}dx$; **5.** $\sin\frac{\pi}{3}x$; **6.** $y'=y-x^2-xe^x,\ y(0)=1$.
Варіант 28	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2+3}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3^n n}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{n^4}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{n!}$; **4.** $\int\limits_0^{1/7}\frac{\sin 7x}{x}dx$; **5.** $\sin\frac{1}{5}x$; **6.** $y'=y-x^5-xe^x,\ y(0)=1$.
Варіант 29	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+6}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+6)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+5}{56n+1}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n^n}{(n+1)^n}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^2+5}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n x^n}{n!}$; **4.** $\int\limits_0^{0,2}\frac{\sin 5x}{x}dx$; **5.** $\sin\frac{\pi}{6}x$; **6.** $y'=y^2-x^5,\ y(0)=1$.
Варіант 30	**1.** *а)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8n^2+5}{n^2+4}$; *б)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4!}{(n+3)!}$; *в)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+6)^n}$; *г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+12}$; **2.** *д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot n}{n^3+8}$; *е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n x^n}{n!}$; **4.** $\int\limits_0^{1/4}\frac{\sin 4x}{x}dx$; **5.** $\cos\frac{\pi}{4}x$; **6.** $y'=y^2+x^3,\ y(0)=1$.

ДОДАТОК 4

ІНДИВІДУАЛЬНЕ ЗАВДАННЯ (тригонометричні ряди Фур'є)

1. Розкласти в тригонометричний ряд Фур'є функцію $f(x)$, яка задана графічно.

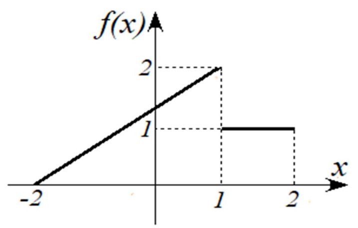
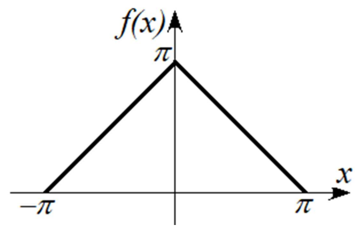
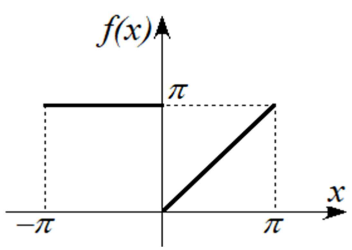
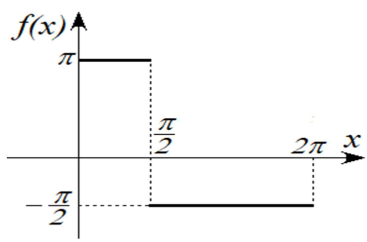
2. Розкласти задану функцію $f(x)$ в ряд Фур'є "по косинусам" або "по синусам".

Варіанти даних взяти з таблиці 2.

П р и м і т к а. При розкладанні функцій в ряд Фур'є їх задають аналітично. Для переходу від графічного виду в першій задачі до аналітичного можна використати відоме рівняння прямої:

$$\boxed{\frac{f(x)-f(x_1)}{f(x_2)-f(x_1)}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}}$$

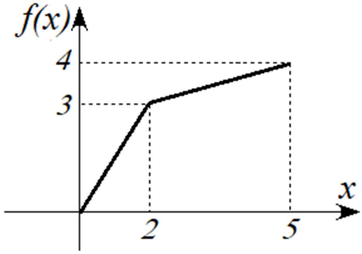
Таблиця 2.

Варіант 1	*Варіант 2*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\begin{cases} 2 \ \ \text{при} \ \ 0\le x<1; \\ -1 \ \ \text{при} \ \ 1\le x<2. \end{cases}$	**2.** $f(x)=\begin{cases} 2\sin x \ \ \text{при} \ \ 0\le x<\frac{\pi}{2}; \\ 2 \ \ \text{при} \ \ \frac{\pi}{2}\le x<\pi. \end{cases}$
Варіант 3	*Варіант 4*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\begin{cases} \sin x \ \ \text{при} \ \ 0\le x<\frac{\pi}{2}; \\ 1 \ \ \text{при} \ \ \frac{\pi}{2}\le x<\pi. \end{cases}$	**2.** $f(x)=\begin{cases} -\sin x \ \ \text{при} \ \ -\pi\le x<-\frac{\pi}{2}; \\ 1 \ \ \text{при} \ \ -\frac{\pi}{2}\le x<0. \end{cases}$

Продовження таблиці 2.

Варіант 5

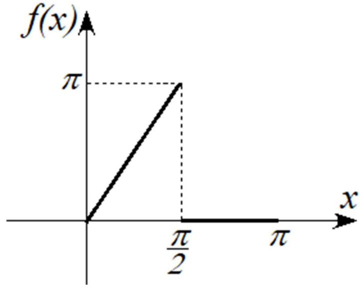
1.



2. $f(x)=\cos\dfrac{x}{2};\quad 0\le x<\pi.$

Варіант 6

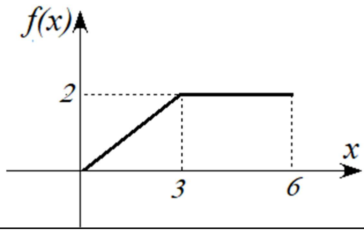
1.



2. $f(x)=\sin\dfrac{x}{2};\quad 0\le x<\pi.$

Варіант 7

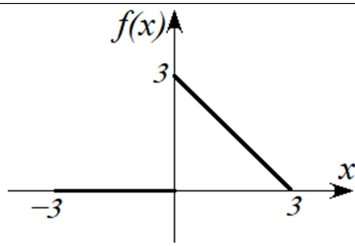
1.



2. $f(x)=\cos\dfrac{3}{2}x;\quad -\pi\le x<0.$

Варіант 8

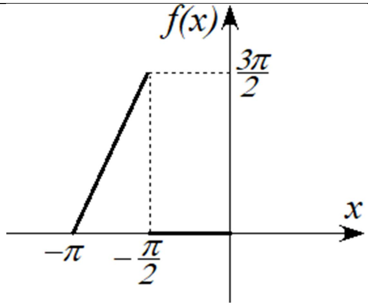
1.



2. $f(x)=\sin\dfrac{3}{2}x;\quad -\pi\le x<0.$

Варіант 9

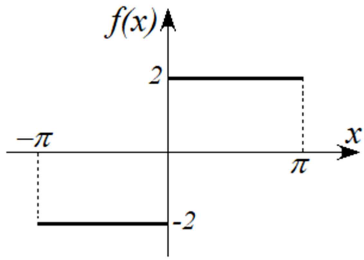
1.



2. $f(x)=\begin{cases}-3\sin x \;\textit{при}\; -\pi\le x<-\frac{\pi}{2};\\ 3 \quad \textit{при} \quad \frac{\pi}{2}\le x<0.\end{cases}$

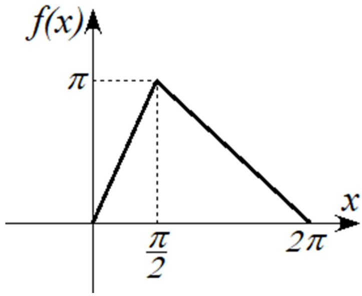
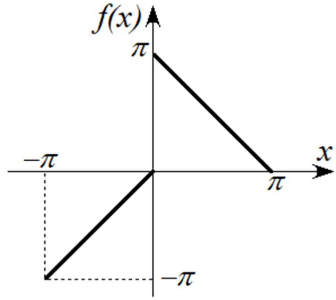
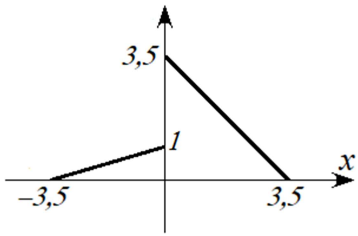
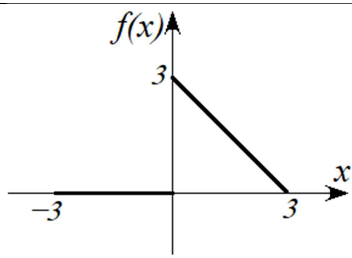
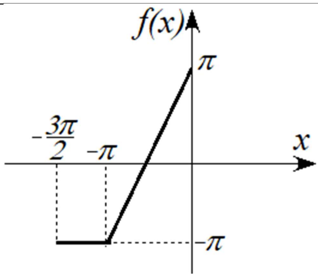
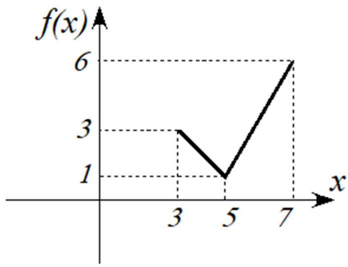
Варіант 10

1.



2. $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{4} \quad \textit{при} \quad 0\le x<\frac{\pi}{2};\\ 2\sin x \;\; \textit{при} \;\; \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$

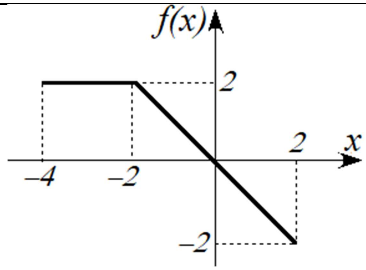
Продовження таблиці 2.

<table>
<tr><td>Варіант 11</td><td>Варіант 12</td></tr>
<tr><td>1.
</td><td>1.
</td></tr>
<tr><td>2. $f(x)=3-x;\quad 0\le x<2.$</td><td>2. $f(x)=3x-1;\quad 0\le x<1.$</td></tr>
<tr><td>Варіант 13</td><td>Варіант 14</td></tr>
<tr><td>1.
</td><td>1.
</td></tr>
<tr><td>2. $f(x)=\begin{cases}-1 & при \quad -\pi\le x<-\frac{\pi}{2};\\ \cos 2x & при \quad -\frac{\pi}{2}\le x<0.\end{cases}$</td><td>2. $f(x)=\begin{cases}3\sin 2x & при \quad 0\le x<\frac{\pi}{2};\\ 0 & при \quad \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$</td></tr>
<tr><td>Варіант 15</td><td>Варіант 16</td></tr>
<tr><td>1.
</td><td>1.
</td></tr>
<tr><td>2. $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi} & при \quad 0\le x<\frac{\pi}{2};\\ \sin x & при \quad \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$</td><td>2. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2} & при \quad -\pi\le x<-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1}{2}\cos 2x & при \quad -\frac{\pi}{2}\le x<0.\end{cases}$</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 2.

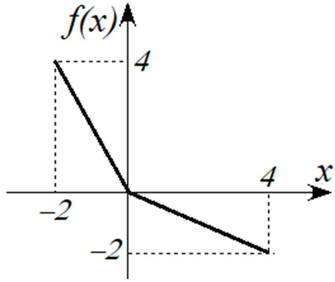
<table>
<tr><td>Варіант 17</td><td>Варіант 18</td></tr>
<tr><td>

1.



</td><td>

1.



</td></tr>
<tr><td>

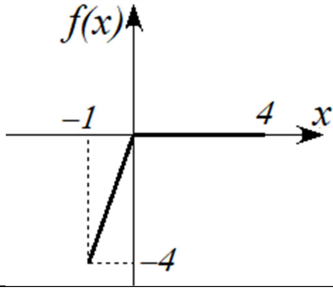
2. $f(x)=\begin{cases}1 \text{ } при \text{ } -2\le x<-1;\\ x \text{ } при \text{ } -1\le x<0.\end{cases}$

</td><td>

2. $f(x)=\begin{cases}-x \text{ } при \text{ } 0\le x<1;\\ 0 \text{ } при \text{ } 1\le x<1{,}5.\end{cases}$

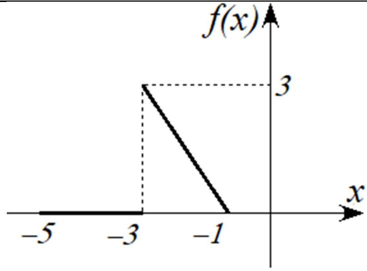
</td></tr>
<tr><td>Варіант 19</td><td>Варіант 20</td></tr>
<tr><td>

1.



</td><td>

1.



</td></tr>
<tr><td>

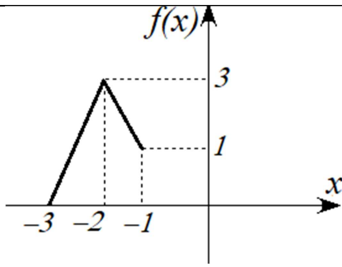
2. $f(x)=\begin{cases}3 \text{ } при \text{ } 0\le x<1;\\ 2x \text{ } при \text{ } 1\le x<2.\end{cases}$

</td><td>

2. $f(x)=\begin{cases}\cos 3x \text{ } при \text{ } 0\le x<\frac{\pi}{2};\\ 0 \text{ } при \text{ } \frac{\pi}{2}\le x<\pi.\end{cases}$

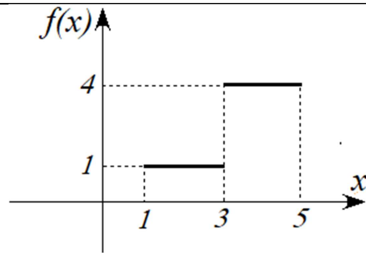
</td></tr>
<tr><td>Варіант 21</td><td>Варіант 22</td></tr>
<tr><td>

1.



</td><td>

1.



</td></tr>
<tr><td>

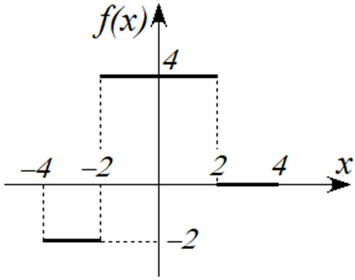
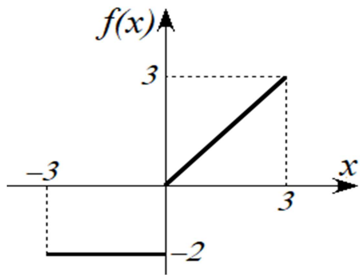
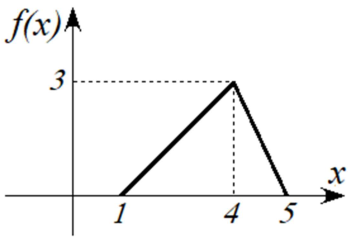
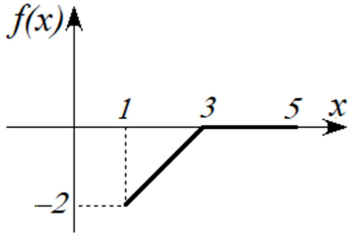
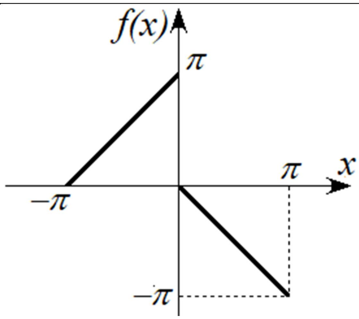
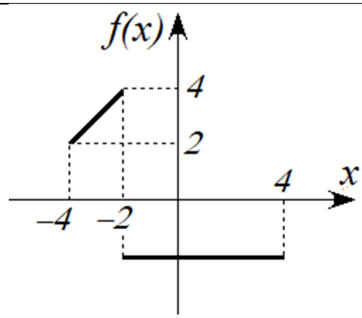
2. $f(x)=\begin{cases}-5x \text{ } при \text{ } 0\le x<1;\\ 0 \text{ } при \text{ } 1\le x<2{,}5.\end{cases}$

</td><td>

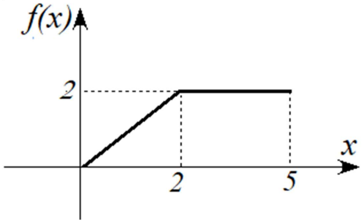
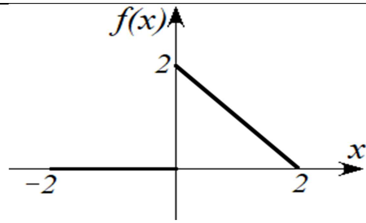
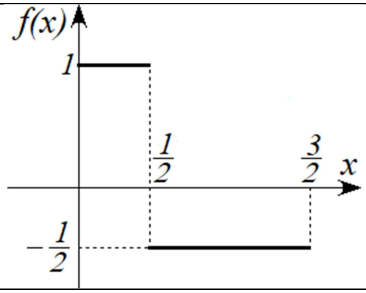
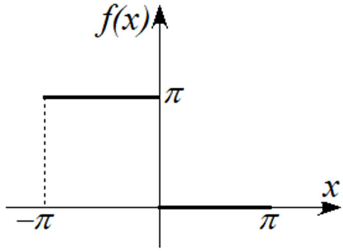
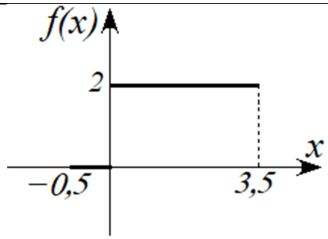
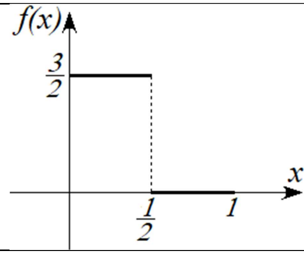
2. $f(x)=\begin{cases}x-\frac{1}{2} \text{ } при \text{ } 0\le x<2;\\ \frac{3}{2} \text{ } при \text{ } 2\le x<3.\end{cases}$

</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 2.

Варіант 23	*Варіант 24*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\begin{cases} 0{,}5 \ \textit{при} \ \ 0\le x<3; \\ 2x \ \textit{при} \ -1\le x<0. \end{cases}$	**2.** $f(x)=\begin{cases} -x \ \textit{при} \ 0\le x<1; \\ -1 \ \textit{при} \ 1\le x<5. \end{cases}$
Варіант 25	*Варіант 26*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\begin{cases} 2 \ \textit{при} \ 0\le x<1; \\ 2x \ \textit{при} \ 1\le x<2. \end{cases}$	**2.** $f(x)=\begin{cases} \cos x \ \textit{при} \ 0\le x<\frac{\pi}{2}; \\ 1 \ \ \textit{при} \ \frac{\pi}{2}\le x<\pi. \end{cases}$
Варіант 27	*Варіант 28*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\begin{cases} 1 \ \textit{при} \ 0\le x<2; \\ 0{,}5x \ \textit{при} \ 2\le x<2{,}5. \end{cases}$	**2.** $f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} \ \textit{при} \ 0\le x<2; \\ \frac{3}{2} \ \ \textit{при} \ 2\le x<3. \end{cases}$

Продовження таблиці 2.

Варіант 29	*Варіант 30*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=3\cos 4x,\ 0\le x<\frac{3\pi}{8}.$	**2.** $f(x)=-\sin\frac{x}{4},\ 0\le x<3\pi.$
Варіант 31	*Варіант 32*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\sin 4x,\ -\frac{\pi}{8}\le x<0.$	**2.** $f(x)=3\cos\frac{x}{3},\ 0\le x<\frac{3\pi}{2}.$
Варіант 33	*Варіант 34*
1. 	**1.** 
2. $f(x)=\sin x,\ -\pi\le x<0.$	**2.** $f(x)=\cos x,\ 0\le x<\pi.$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
2. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – СПб.: Лань, 2002. – 408 с.
3. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика. Повний курс у прикладних задачах. Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Елементи теорії поля. Ряди. Прикладні задачі. Навч. посіб. – К.: Книги України ЛТД, 2009. – 400 с.
4. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды. – М.: Наука, 1986. – 526 с.
5. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Ряды, функции нескольких переменных, кратные и криволинейные интегралы. – К.: Вища шк., 1977. – Ч.2. – 672 с.
6. Шмелев П.А. Теория рядов в задачах и упражнениях. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
7. Сметанкин В.А., Ульянов В.Н. Разложение функций в тригонометрические ряды Фурье. Методические указания к выполнению заданий по курсу высшей математики.– Харьков: ХГТУСХ, 1994. – 64 с.
8. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad 14. – СПб.: Питер, 2007.– 592с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

РЯДИ

Основи теорії та методика розв'язування задач
з варіантами індивідуальних завдань

ЗАВГОРОДНІЙ Олексій Іванович
СОЛОВИЧЕНКО Ольга Володимирівна
ЛЕВКІН Дмитро Артурович

Формат 60х84 1/16. Гарнітура Times New Roman
Папір для цифрового друку. Друк ризографічний.
Ум. друк. арк. 3,9
Наклад 100 пр.
Державний біотехнологічний університет
61002, м. Харків, вул. Алчевських, 44