

харчових технологій. Адреса: вул. Канатна, 112, корпус "А", каб. 142, м. Одеса, 65039. Тел.: (048)712-40-57, факс (048)718-97-10, e-mail: [foodprofi@mail.ru](mailto:foodprofi@mail.ru).

**Беленькая Ирина Ремовна**, канд. техн. наук, доц., кафедра технології ресторанного і оздоровительного питания, Одеська національна академія пищевих технологій. Адрес: ул. Канатная, 112, корпус "А", каб. 142, г. Одесса, 65039. Тел.: (048)712-40-57, факс (048)718-97-10; e-mail: [foodprofi@mail.ru](mailto:foodprofi@mail.ru).

**Bilenka Irina**, Ph.D., Associate Professor, Associate Professor of Technology and health food restaurant, Odessa National Academy of Food Technologies. Address: Kanatnaya str., 112, Building "A" office. 142, Odessa, 65039. Tel.: (048)712-40-57, fax (048)718-97-10, e-mail: [foodprofi@mail.ru](mailto:foodprofi@mail.ru).

**Лазаренко Наталя Анатоліївна**, канд. техн. наук, асист., кафедра технології ресторанного і оздоровчого харчування, Одеська національна академія харчових технологій. Адреса: вул. Канатна, 112, м. Одеса, 65039. Тел.: 0968168811; e-mail: [natali-bylanju@rambler.ru](mailto:natali-bylanju@rambler.ru).

**Лазаренко Наталья Анатольевна**, канд. техн. наук, ассист., кафедра технології ресторанного і оздоровительного питания, Одеська національна академія пищевих технологій. Адрес:ул. Канатная 112, г. Одесса, 65039. Тел.: 0968168811; e-mail: [natali-bylanju@rambler.ru](mailto:natali-bylanju@rambler.ru).

**Lazarenko Natalia**, Ph.D., Assistant of the Department of Technology and health food restaurant, Odessa National Academy of Food Technologies. Address: Kanatnaya str., 112, Odessa, 65039, Tel.: (096)8168811; e-mail: [natali-bylanju@rambler.ru](mailto:natali-bylanju@rambler.ru).

*Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук В.М. Михайловим.*

*Отримано 1.08.2014. ХДУХТ, Харків.*

УДК 539.3:534.1

## **МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ ШАРУВАТИХ ОРТОТРОПНИХ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ ХАРЧОВОГО ОБЛАДНАННЯ**

**С.В. Угрімов, В.А. Куценко, І.В. Лебединець**

*Розглянуто проблему моделювання динамічного напружено-деформованого стану шаруватих ортотропних елементів конструкцій харчового обладнання під час імпульсного навантаження. Нестационарні коливання шаруватих пластин описуються в рамках узагальненої теорії, в основі якої лежить метод степеневих рядів. Запропоновано аналітико-числовий метод розв'язання задачі. Можливості й вірогідність*

запропонованої теорії та методу розв'язання ілюструються на тестових прикладах.

**Ключові слова:** пластина, композит, ортотропія, коливання, імпульс.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТЫХ ОРТОТРОПНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПИЩЕВОГО ОБОРУДОВАНИЯ

**С.В. Угримов, В.А. Куценко, И.В. Лебединец**

*Рассмотрена проблема моделирования динамического напряженно-деформированного состояния слоистых ортотропных элементов конструкций пищевого оборудования при импульсной нагрузке. Нестационарные колебания слоистых пластин описываются в рамках обобщенной теории, в основе которой лежит метод степенных рядов. Предложен аналитико-численный метод решения задачи. Возможности и достоверность предложенной теории и метода решения иллюстрируются на тестовых примерах.*

**Ключевые слова:** пластина, композит, ортотропия, колебания, импульс.

## MODELING OF NON-STATIONARY VIBRATIONS OF LAYERED ORTHOTROPIC STRUCTURE ELEMENTS OF FOOD EQUIPMENT

**S. Ugrimov, V. Kutsenko, I. Lebedinec**

*The problem of modeling of the dynamic stress-strain state of laminated orthotropic structural elements of food equipment under impulse loading is considered. Multilayer structure elements in the form of rectangular plates are investigated. Unsteady oscillations of laminated plates are described within the framework of the generalized theory based on the method of power series. The proposed theory has a wide range of application and allows reliable description of the stress-strain state of laminated orthotropic plates with arbitrary compositions of the layers and thicknesses of the package. The generalized theory belongs to a class of discrete-structural theories and allows reception of high-precision approximation of displacements and all stress components (including the cross one) for each layer. Analytical and numerical method for solving the problem of unsteady oscillations of laminated plates under impulse loading based on the expansion of the unknown displacement components in series on functions, satisfying the boundary conditions is developed. Capabilities and reliability of the proposed theory and method of solution illustrated by an example of calculation of the deformation process of two-layer composite under impulse loading. The results of calculation on the proposed theory are compared with data of the calculation on a refined theory.*

**Keywords:** plate, composite, orthotropic, vibration, impulse.

**Постановка проблеми у загальному вигляді.** Сучасний розвиток харчової та хімічної промисловості ставить жорсткі вимоги до матеріалів, що використовуються під час виготовлення конструкцій. Надійність та довговічність обладнання залежать від правильного вибору матеріалу. Корозія технологічного обладнання, його абразивний знос, значні хімічні та теплові впливи – ось небагато з тих чинників, які необхідно враховувати під час вибору матеріалів для харчової промисловості. Проблема у використанні традиційних матеріалів пов'язана з їх обмеженим вузько-функціональним діапазоном властивостей. Тому на сьогодні актуальним є отримання матеріалів нового покоління, що мають широкий комплекс властивостей і можуть забезпечити надійність і безвідмовність роботи обладнання. Зазначеним вимогам повною мірою відповідають композиційні матеріали. Перевагою композитів є можливість підібрати індивідуальні параметри кожної із складових композиції. Крім забезпечення хімічної стійкості, композити можуть витримувати високі конструкційні навантаження та працювати в умовах, що вимагають стійкості до корозії у вологому ґрунті, у присутності кислот, окиснювачів. Сфера застосування тонкостінних шаруватих конструкцій постійно розширюється. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці нових та удосконаленні існуючих методів їх аналізу. При цьому нові методи повинні не тільки з достатньою точністю описувати напружено-деформований стан (НДС) конструкції, а й мати високу універсальність.

Композити експлуатуються в умовах дії як стаціонарних, так і нестаціонарних силових навантажень. Нестационарні навантаження виникають при деяких аварійних ситуаціях, що характеризуються короткочасним впливом інтенсивних імпульсних та ударних навантажень. Для оцінки міцності композиту і впливу різних чинників (структури композиту, геометричних розмірів, характеристик навантаження) на НДС необхідна наявність високоефективних методів розрахунку. Тому розробка методів аналізу НДС композитів при імпульсному навантаженні є актуальним завданням.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Унаслідок анізотропії та шаруватої структури композиту тривимірна динамічна задача є досить складною математичною проблемою, що вимагає, у загальному випадку, використання чисельних методів. Тому на практиці широке застосування отримали різні двовимірні теорії, що дозволяють істотно зменшити час розв'язання задачі. Проте під час використання двовимірних моделей необхідно враховувати той факт, що вони не є універсальними та мають певні границі застосування.

На сьогодні розроблено багато уточнених двовимірних методів розрахунку шаруватих конструкцій, в основному для випадку їх статичного навантаження [1–7]. Одним із способів побудови уточнених моделей є застосування розвинень переміщень у степеневі ряди за поперечною координатою [4–8]. Теорії, що описують деформування шаруватих конструкцій, зазвичай виходять з того, що деформації лінійно залежать від поперечної координати [3; 6]. При цьому поперечними деформаціями нехтують або вважають, що вони не змінюються за товщиною шару. Однак відомо, що при збільшенні товщини конструкції або при локальному її навантаженні ці залежності носять істотно нелінійний характер. Аналогічний вигляд має розподіл зсувних поперечних напружень по товщині навіть для відносно тонких пластин при розподілених навантаженнях [8–10].

В останні десятиріччя спостерігається стрімкий розвиток обчислювальних засобів і математичних методів для аналізу динаміки шаруватих конструкцій [10–13]. Прогрес у цій області, з одного боку, був викликаний необхідністю розв'язання нових прикладних задач, а з іншого – став можливий завдяки істотному розвитку обчислювальної техніки.

**Мета статті.** Метою статті є розробка аналітико-чисельного підходу до розрахунку шаруватих ортотропних пластин при імпульсному навантаженні. Підхід базується на гіпотезах узагальненої теорії пластин [8; 14], в основі якої лежить метод степеневих рядів. Узагальнена теорія належить до класу дискретно-структурних і дозволяє регулювати точність описання НДС.

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Шарувата пластина складається з  $I$  шарів постійної товщини, виготовлених з однорідного ортотропного матеріалу. Кути армування в  $i$ -му шарі позначимо  $\theta_i$ , а товщину  $i$ -го шару –  $h_i$ . Припускається, що контакт між шарами виключає їхнє розшарування і взаємне проковзування. Пластина віднесена до прямокутної декартової системи координат  $Ox_1x_2x_3$  (рис. 1).

До зовнішньої поверхні першого шару прикладена зовнішня сила  $\bar{q} = \bar{q}(x_1, x_2, t)$ . Домовимося позначати проекцію вектора зовнішнього навантаження на координатну вісь  $x_\alpha$  –  $q_\alpha$ .

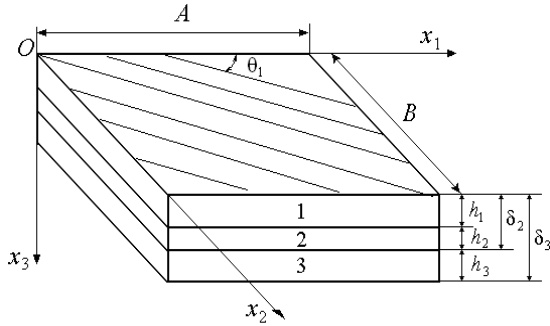


Рис. 1. Багатошаровий композит

Поведінка шаруватої пластини описується рівняннями узагальненої теорії багатошарових пластин [8], що дозволяє обирати необхідну точність описання НДС залежно від умов розв'язуваної задачі. Переміщення точки  $i$ -го шару описуються такими кінематичними залежностями [8; 14]:

$$u_{\alpha}^i(x_1, x_2, x_3, t) = u_{\alpha} + \sum_{k=1}^{K_{\alpha}} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\alpha k}^i \right], \quad (1)$$

де  $h_j^k = (h_j)^k$ ,  $\delta_i = \sum_{j=1}^i h_j$ ,  $\delta_{i-1} \leq x_3 \leq \delta_i$ ,  $i = \overline{1, I}$ ;

$u_{\alpha}^i$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ ) – переміщення точки  $i$ -го шару в напрямі координатної осі  $Ox_{\alpha}$ ;  $K_{\alpha}$  – максимальні степені поперечної координати для площинних ( $\alpha = 1, 2$ ) і поперечних ( $\alpha = 3$ ) переміщень;  $u_{\alpha}$ ,  $u_{\alpha k}^i$  – коефіцієнти розвинень, які є функціями аргументів  $x_1, x_2, t$ ;  $t$  – час;  $\delta_{\alpha\beta}$  – символ Кронекера.

Параметри  $K_1$  і  $K_2$  обираються однаковими і такими, що дорівнюють  $K$ . Надалі узагальнена теорія позначається за кількістю утримуваних членів у степеневих рядах (1) для площинних і поперечних переміщень – теорія  $\{K, K_3\}$ .

Деформації в кожному шарі пластини припускаються малими й описуються лінійними співвідношеннями:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{2} \left( u_{\alpha,\beta}^i + u_{\beta,\alpha}^i \right), \quad \alpha = \overline{1, 3}, \quad \beta = \overline{1, 3}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{\alpha\beta}^i$  – тензор деформацій точки  $i$ -го шару.

Тут і надалі нижні індекси, які розташовані після коми, означають диференціювання за відповідними координатами.

З урахуванням прийнятих гіпотез (1) компоненти тензора деформацій (2) приймають вигляд:

$$\varepsilon_{\nu\nu}^i = u_{\nu,\nu}^i + \sum_{k=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\nu k, \nu}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^k u_{\nu k, \nu}^i \right],$$

$$\varepsilon_{33}^i = u_{33}^i + 2(x_3 - \delta_{i-1}) u_{32}^i,$$

$$\varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2} \left( u_{1,2} + u_{2,1} + \sum_{k=1}^3 \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k (u_{1k,2}^j + u_{2k,1}^j) + (x_3 - \delta_{i-1})^k (u_{1k,2}^i + u_{2k,1}^i) \right] \right),$$

$$\varepsilon_{\nu 3}^i = \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^3 k (x_3 - \delta_{i-1})^{k-1} u_{\nu k}^i + u_{3,\nu}^i + \sum_{\ell=1}^2 \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^\ell u_{3\ell, \nu}^j + (x_3 - \delta_{i-1})^\ell u_{3\ell, \nu}^i \right] \right);$$

$$\nu = 1, 2, \quad i = \overline{1, I}.$$

Зв'язок між компонентами тензорів деформацій і напружень для випадку, коли головні напрями армування в кожному шарі співпадають із напрямками осей координат, має вигляд [3]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}^i \\ \varepsilon_{22}^i \\ \varepsilon_{33}^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1^i} & -\frac{\nu_{21}^i}{E_2^i} & -\frac{\nu_{31}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{12}^i}{E_1^i} & \frac{1}{E_2^i} & -\frac{\nu_{32}^i}{E_3^i} \\ -\frac{\nu_{13}^i}{E_1^i} & -\frac{\nu_{23}^i}{E_2^i} & \frac{1}{E_3^i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11}^i \\ p_{22}^i \\ p_{33}^i \end{pmatrix},$$

$$\varepsilon_{12}^i = \frac{1}{2G_{12}^i}, \quad \varepsilon_{13}^i = \frac{1}{2G_{13}^i} p_{13}^i, \quad \varepsilon_{23}^i = \frac{1}{2G_{23}^i} p_{23}^i,$$

де  $E_\alpha^i, \nu_{\alpha\beta}^i$  – модулі Юнга та коефіцієнти Пуассона для  $i$ -го шару;

$G_{12}^i, G_{13}^i, G_{23}^i$  – модулі зсуву для  $i$ -го шару;  $p_{\alpha\beta}^i$  – тензор напружень.

Зусилля і моменти  $i$ -го шару визначаються за формулами [8]:

$$N_{\alpha\beta}^{ik} = N_{\beta\alpha}^{ik} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left( \varepsilon_3 - \delta_{i-1} \right) p_{\alpha\beta}^i dx_3, \quad \alpha, \beta = \overline{1,3}, k = \overline{1,3}, i = \overline{1, I}.$$

Слід зазначити, що застосування гіпотез (1) приводить до неперервного по товщині пакета поля переміщень і забезпечує неперервність деформацій  $\varepsilon_{11}^i, \varepsilon_{22}^i$  і кускову неперервність поперечних деформацій по товщині пакета. Тому в рамках запропонованої теорії існує принципова можливість точно виконати умови контакту між шарами.

Рівняння руху і граничні умови отримані за допомогою варіаційного принципу Остроградського – Гамільтона аналогічно тому, як це було зроблено для ізотропних багат шарових пластин [8; 14]. Рівняння руху в зусиллях і моментах мають вигляд:

$$\sum_{i=1}^I \left[ \alpha - I_{\alpha 1}^i + q_\alpha \right] = 0,$$

$$N_{1\alpha,1}^{ik_\alpha} + N_{\alpha 2,2}^{ik_\alpha} - k_\alpha N_{\alpha 3}^{ik_\alpha-1} + h_i^{k_\alpha} \sum_{j=i}^{I-1} \left[ j+1 - I_{\alpha 1}^{j+1} - I_{\alpha k_\alpha+1}^j \right] = 0, \quad (3)$$

де  $L_1^i = N_{11,1}^{i0} + N_{12,2}^{i0}$ ,  $L_2^i = N_{22,2}^{i0} + N_{12,1}^{i0}$ ,  $L_3^i = N_{13,1}^{i0} + N_{23,2}^{i0}$ ,

$$I_{\alpha r}^i = \frac{\rho_i h_i^r}{r} \left( u_{\alpha 0,tt} + \sum_{k=1}^{K_\alpha} \left[ \sum_{j=1}^{i-1} h_j^k u_{\alpha k,tt}^j + \frac{r h_i^k}{k+r} u_{\alpha k,tt}^i \right] \right),$$

$$\alpha = \overline{1,3}, k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}, i = \overline{1, I}.$$

Рівняння руху (3) можуть бути подані у матричному вигляді:

$$\Omega \cdot \bar{U}_{,tt} - \Lambda \cdot \bar{U} = \bar{Q}, \quad (4)$$

де  $\bar{U}$  – вектор, компонентами якого є шукані функції:

$$\bar{U}^T = \langle u_{\alpha}, u_{\alpha k_{\alpha}}^i, \alpha = \overline{1, 3}, i = \overline{1, I}, k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}} \rangle,$$

$\Lambda, \Omega$  – квадратні симетричні матриці порядку  $(2K + K_3)I + 3$ ;  $\bar{Q}$  – вектор, компоненти якого залежать від зовнішньої сили, прикладеної до зовнішньої поверхні багатoshарової пластини:

$$\bar{Q}^T = \langle q_1, q_2, q_3, 0, \dots, 0 \rangle.$$

Граничні умови для прямокутної шарнірно опертої пластини мають вигляд:

$$\text{при } x_1 = 0, x_1 = A - \sum_{i=1}^I N_{11}^{i0} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

$$N_{11}^{i k_1} + h_i^{k_1} \sum_{j=i}^{I-1} N_{11}^{j+1 0} = 0, \quad u_{2k_2}^i = 0, \quad u_{3k_3}^i = 0,$$

$$\text{при } x_2 = 0, x_2 = B - u_1 = 0, \quad \sum_{i=1}^I N_{22}^{i0} = 0, \quad u_3 = 0, \quad u_{1k_1}^i = 0,$$

$$N_{22}^{i k_2} + h_i^{k_2} \sum_{j=i}^{I-1} N_{22}^{j+1 0} = 0, \quad u_{3k_3}^i = 0, \quad (5)$$

$$k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}, \quad i = \overline{1, I}.$$

Рівняння руху (4) і граничні умови (5) доповнюються початковими умовами, які приймаються нульовими:

$$u_{\alpha} = u_{\alpha k_{\alpha}}^i = 0, \quad u_{\alpha, t} = u_{\alpha k_{\alpha}, t}^i = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Таким чином, динаміка багатoshарової шарнірно опертої пластини описується системою рівнянь руху (4), граничними (5) і початковими (6) умовами

*Метод розв'язання.* Шукані функції  $u_{\alpha}, u_{\alpha k_{\alpha}}^i$  ( $\alpha = \overline{1, 3}, k_{\alpha} = \overline{1, K_{\alpha}}, i = \overline{1, I}$ ) і зовнішнє навантаження  $q_{\alpha}$  ( $\alpha = \overline{1, 3}$ )



розкладаються в тригонометричні ряди по функціях  $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$ , що задовольняють умовам на контурі опирання:

$$\left\{ \alpha, u_{\alpha k_\alpha}^i, q_\alpha \right\} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left\{ \Phi_{\alpha mn}, \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i, q_{\alpha mn} \right\} B_{\alpha mn}(x_1, x_2),$$

де  $M, N$  – кількість утримуваних членів у рядах.

Для прямокутної багатощарової пластини, шарнірно опертої по краях, функції  $B_{\alpha mn}(x_1, x_2)$  мають вигляд:

$$B_{1mn} = \cos \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n \pi x_2}{B}, \quad B_{2mn} = \sin \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \cos \frac{n \pi x_2}{B},$$

$$B_{3mn} = \sin \frac{m \pi x_1}{A} \cdot \sin \frac{n \pi x_2}{B}.$$

У результаті розкладання переміщень і зовнішніх навантажень у ряди задача про нестационарні коливання багатощарової пластини для кожної пари значень  $m$  і  $n$  зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами і нульовими початковими умовами:

$$\Omega^{mn} \cdot \overline{\Phi}_{,tt}^{mn} + \Lambda^{mn} \cdot \overline{\Phi}^{mn} = \overline{Q}^{mn},$$

де  $\overline{\Phi}^{mn}$  та  $\overline{Q}^{mn}$  – вектори, компонентами яких є

$$(\overline{\Phi}^{mn})^T = \left( \Phi_{\alpha mn}, \Phi_{\alpha k_\alpha mn}^i \right), \quad (\overline{Q}^{mn})^T = \left( Q_{\alpha mn}, 0, \dots, 0 \right),$$

$$i = \overline{1, I}, \quad k_\alpha = \overline{1, K_\alpha}.$$

Початкові умови (6) приймають вигляд:

$$\overline{\Phi}^{mn} \Big|_{t=0} = 0, \quad \overline{\Phi}_{,t}^{mn} \Big|_{t=0} = 0.$$

Таким чином, задача про нестационарні коливання багатощарової пластини зводиться до інтегрування системи звичайних диференціальних рівнянь із постійними коефіцієнтами. Інтегрування отриманої системи проводиться чисельно за допомогою однокрокового методу [14], в основі якого лежить розв'язку в ряд Тейлора.

*Числові результати.* Для перевірки ефективності запропонованого підходу було проведено тестовий розрахунок НДС квадратної двохшарової пластини при імпульсному навантаженні:

$$q_3 = q_0 \sin(\pi x/A) \sin(\pi x/B), \quad q_0 = 0,1 \text{ МПа.}$$

Геометричні параметри пластини –  $A = B = 25 \text{ см}$ ,  $h_1 = h_2 = 2,5 \text{ см}$ . Механічні та фізичні параметри:  $E_1 = 525 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = E_3 = 21 \text{ ГПа}$ ,  $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 10,5 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 0,25$ ,  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ . Кути армування  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = 90^\circ$ .

У табл.1 наведено результати розрахунку максимальних значень прогинів та напружень за запропонованою теорією із різною кількістю членів у степеневих рядах, а також дані розрахунку на основі уточненої теорії із застосуванням методу скінченних елементів [12].

Таблиця 1  
**Максимальні значення прогинів та напружень у композиті**

Прогин та напруження	Узагальнена теорія				Уточнена теорія [12]
	{1, 0}	{3, 2}	{5, 4}	{7, 6}	
$w \times 10^3, \text{ см}$	0,4570	0,4808	0,4800	0,4800	0,4685
$p_{11}, \text{ МПа}$	3,2958	3,7065	3,7091	3,7092	3,5526
$p_{12}, \text{ МПа}$	0,2843	0,3025	0,3055	0,3055	0,2928
$p_{13}, \text{ МПа}$	0,2308	0,3139	0,3108	0,3072	0,2172

Зміну напружень у часі наведено в табл. 2. Результати розрахунку за узагальненою теорією порівнюються із даними розрахунку за уточненою теорією [12].

З табл. 1–2 видно, що результати, отримані за запропонованою та уточненою теоріями, добре узгоджуються між собою як за максимальними значеннями прогинів та напружень  $p_{11}$  та  $p_{12}$ , так і за характером їх зміни у часі. Проте спостерігається деяка відмінність у результатах для напружень  $p_{13}$ , що пояснюється більш точним описанням умов контакту між шарами та характеру розподілу напружень за товщиною в рамках узагальненої теорії.

## Зміна напружень у часі

$t$ , мкс	Узагальнена теорія				Уточнена теорія [12]
	{1, 0}	{3, 2}	{5, 4}	{7, 6}	
20	0,3498	0,3991	0,3429	0,3914	0,3003
40	1,1563	1,3620	1,2655	1,2747	1,1168
60	2,2000	2,4737	2,5092	2,4843	2,2441
80	3,0331	3,3077	3,2995	3,3439	3,1678
100	3,2777	3,7050	3,7081	3,7090	3,5526
120	2,9083	3,3327	3,3303	3,3522	3,2687
140	1,9697	2,4034	2,4015	2,4404	2,3708
160	0,9667	1,3140	1,3960	1,3937	1,3017
180	0,2120	0,5150	0,4570	0,4570	0,3539
200	0,0242	0,0711	0,0193	0,0559	0,0394

На рис. 2 наведено результати розрахунку за узагальненою теорією розподілу напружень  $p_{13}$  за товщиною композиту через 100 мкс після початку деформування. Суцільна лінія відповідає теорії {7, 6}, пунктир – теорії {3, 2}, штрихпунктир – теорії {1, 0}.

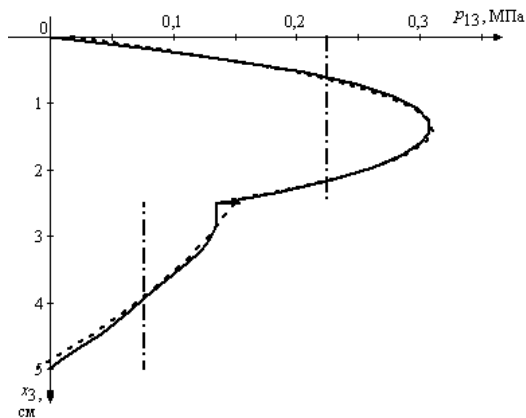


Рис. 2. Розподіл напружень  $p_{13}$  за товщиною  $x_3$

**Висновки.** Розроблена уточнена теорія еластодинаміки ортотропних шаруватих пластин, яка базується на методі степеневих рядів. Теорія належить до класу дискретно-структурних і дозволяє отримувати високоточні апроксимації переміщень і всіх компонент напружень (у тому числі поперечних) для кожного шару, а також з достатньою точністю виконати умови контакту шарів. При цьому чисельна реалізація задачі про дослідження НДС багат шарової пластини на основі запропонованої теорії вимагає значно менше ресурсів, ніж при використанні рівнянь тривимірної теорії пружності.

### Список джерел інформації / References

1. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / С. А. Амбарцумян. – М. : Наука, 1974. – 448 с.  
Ambarcumjan, S.A. (1974), *The general theory of anisotropic shells [Obshhaja teorija anizotropnyh obolochek]*, Nauka, Moscow, 448 p.
2. Григолюк Э. И. Статика упругих слоистых оболочек / Э. И. Григолюк, П. П. Чулков. – М. : НИИ Механики МГУ, 1999. – 215 с.  
Grigoljuk, Je.I., Chulkov, P.P. (1999), *Static elastic laminated shells [Statika uprugih sloistykh obolochek]*, НИ Механики МГУ, Moscow, 215 p.
3. Рассказов А. О. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек / А. О. Рассказов, И. И. Соколовская, Н. А. Шульга. – К. : Вища школа, 1986. – 191 с.  
Rasskazov, A.O., Sokolovskaja, I.I., Shul'ga, N.A. (1986), *Theory and calculation of laminated orthotropic plates and shells [Teorija i raschet sloistykh ortotropnyh plastin i obolochek]*, Vishha shkola, Kiev, 191 p.
4. Chen, W., Wu, Z. (2008), “A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories”, *Recent patents on mechanical engineering*, Vol. 1, pp. 29–44.
5. Lo, K.H., Cristensen, R.M., Wu, E.M. (1977), “A high-order theory of plate deformation. Part 2. Laminated plates”, *Transaction of ASME. Journal of applied mechanics*, Vol. 99, pp. 669–676.
6. Reddy, J.N. (1989), “On the generalization of displacement based laminate theories”, *Applied mechanics rev.*, Vol. 42, No. 11, pp. 213–222.
7. Matsunaga, H. (2002), “Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates”, *Journal of composite materials*, Vol. 56, pp. 279–291.
8. Ugrimov, S.V. (2002), “Generalized theory of multilayer plates”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 39, No. 4, pp. 819–839.
9. Pagano, N.J. (1970), “Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates”, *Journal of composite materials*, Vol. 4, pp. 20–34.
10. Reddy, J.N. (2014), *Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis*, CRC Press, New York, 832 p.
11. Raju, D., Kumar, S. (2011), “Transient analysis of composite laminated plates using higher-order shear deformation theory with zig-zag function”, *International journal of applied engineering research*, Vol. 2, No. 2, pp. 562–569.
12. Kant, T., Varaiya, J.H., Arora, C.P. (1990), “Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on refined theory and implicit time integration schemes”, *Computers & Structures*, Vol. 36, No. 3, pp. 401–420.

13. Tiberkak, R., Bachene, M., Rechak, S., Necib, B. (2008), "Damage prediction in composite plates subjected to low velocity impact", *Composite structures*, Vol. 83, pp. 73–82.

14. Нестационарные колебания многослойных пластин и оболочек / А. Н. Шупиков, Я. П. Бузько, Н. В. Сметанкина, С. В. Угримов. – Харьков : ХНЭУ, 2004. – 252 с.

Shupikov, A.N., Buz'ko, Ja.P., Smetankina, N.V., Ugrimov, S.V. (2004), *Nonstationary vibrations of laminated plates and shells* [*Nestacionarnye kolebanija mnogoslojnyh plastin i obolochek*], HNJeU, Kharkiv, 252 p.

**Угримов Сергій Вікторович**, канд. техн. наук, доц., факультет обладнання та технічного сервісу, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (050)1399197; e-mail: [viktseru@mail.ru](mailto:viktseru@mail.ru).

**Угримов Сергей Викторович**, канд. техн. наук, доц., факультет оборудования и технического сервиса, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (050)1399197; e-mail: [viktseru@mail.ru](mailto:viktseru@mail.ru).

**Ugrimov Sergey**, PhD. Sc. Associate Professor, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivs'ka str, 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (050)1399197; e-mail: [viktseru@mail.ru](mailto:viktseru@mail.ru).

**Куценко Віктор Анатолійович**, канд. техн. наук, доц., факультет обладнання та технічного сервісу, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (098)3064977; e-mail: [vakutsenko@mail.ru](mailto:vakutsenko@mail.ru).

**Куценко Виктор Анатольевич**, канд. техн. наук, доц., факультет оборудования и технического сервиса, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (098)3064977; e-mail: [vakutsenko@mail.ru](mailto:vakutsenko@mail.ru).

**Kutsenko Viktor**, PhD. Sc. Associate Professor, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivs'ka str, 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (098)3064977; e-mail: [vakutsenko@mail.ru](mailto:vakutsenko@mail.ru).

**Лебединец Ігор Володимирович**, канд. техн. наук, доц., факультет обладнання та технічного сервісу, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. Тел.: (066)8225265; e-mail: [igor-lebedinec@mail.ru](mailto:igor-lebedinec@mail.ru).

**Лебединец Игорь Владимирович**, доц., факультет оборудования и технического сервиса, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. Тел.: (066)8225265; e-mail: [igor-lebedinec@mail.ru](mailto:igor-lebedinec@mail.ru).

**Lebedinec Igor**, PhD. Sc. Associate Professor, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivs'ka str, 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. Tel.: (066)8225265; e-mail: [igor-lebedinec@mail.ru](mailto:igor-lebedinec@mail.ru).

*Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук В.О. Потаповим, канд. техн. наук С.Ю. Саєнком, канд. техн. наук В.В. Дубом.  
Отримано 1.08.2014. ХДУХТ, Харків.*