

С.С. АВОТІН

***ТЕХНІЧНА  
МЕХАНІКА***

**Харків – 2020**

**Міністерство освіти і науки України**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ АГРАРНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ім. В.В. Докучаєва**

---

Затверджено вченою радою  
факультету лісового господарства  
ХНАУ ім. В.В. Докучаєва  
(протокол № 5 від 29.12.2020 р.)

# **ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА**

**МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ**  
**для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**  
**зі спеціальності 205 «лісове господарство»**

Харків – 2020

Укладач: канд. фіз.-мат. наук С.С. Авогін

Рецензенти:

канд. фіз.-мат. наук, доцент Д.І. Масленніков (ХНУ ім. В.В. Докучаєва)

канд. фіз.-мат. наук, доцент Н.Л. Дьяконенко (НТУ «ХП»)

## Зміст

Вступ	3
Програма навчальної дисципліни	4
1. Основні поняття та аксіоми статички	6
2. Система збіжних сил	12
3. Момент сили відносно точки і осі	15
4. Пара сил	18
5. Просторова система сил	21
6. Балкові системи	25
7. Центр тяжіння	28
8. Геометричні характеристики плоских перерізів	31
9. Основні характеристики конструктивних елементів	36
10. Деформування розтягом і стиском	43
11. Напружений стан	48
12. Деформування зсувом	57
13. Деформування крученням	59
14. Деформування згином	63
Розрахунково-практичні роботи	68
Рекомендована література	76

## Вступ

Технічна механіка в системі фахової підготовки інженерів напряму підготовки 205 «Лісове господарство» відповідно до діючої програми курсу технічної механіки відіграє важливу роль під час вивчення циклу професійно спрямованих дисциплін. Курс «Технічної механіки», на вивчення якого відводиться 120 годин, складається із трьох розділів «Теоретична механіка», «Опір матеріалів», «Деталі машин і механізмів».

Курс «Технічної механіки» знайомить майбутніх фахівців з: методами перетворення одних систем сил і пар сил в еквівалентні даним, та умовами і положеннями рівноваги довільних просторових (плоских) систем сил і пар сил; основними законами деформації твердого тіла та методами розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. Вивчення «Технічної механіки» базується на знаннях, що отримані здобувачами під час вивчення курсів «Фізика», «Вища математика», «Нарисна геометрія та креслення».

Технічна механіка – це частина механіки, в якій вивчається:

- 1) механічний рух матеріальних тіл (матеріальних точок, абсолютно твердих тіл) – «Теоретична механіка»;
- 2) розрахунок на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів і споруд – «Опір матеріалів»;

3) теоретичні основи розрахунку та конструювання деталей і вузлів машин – «Деталі машин». В основі технічної механіки лежить класична механіка. Теоретична механіка вивчає найбільш загальні закони руху, спокою та взаємодії тіл. До основних понять теоретичної механіки належать:

- 1) матеріальна точка – геометрична точка, яка має певну масу;
- 2) система матеріальних точок – сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких взаємопов'язані між собою;
- 3) абсолютно тверде тіло – тіло, що складається з системи матеріальних точок, які неперервно заповнюють певну частину простору так, що відстань між будь-якими двома його точками залишається незмінною;
- 4) суцільне середовище – система матеріальних точок, що неперервно заповнюють частину простору, під час руху яких відстані між ними змінюються.

Ці поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з різним ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

У результаті вивчення навчальної дисципліни здобувач повинен:

**знати:**

- основні поняття технічної механіки, аксіоми статички, теореми статички, умови рівноваги площинної та просторової систем сил,
- закони динаміки; умови тертя ковзання та кочення; способи задавання руху матеріальної точки або фізичного тіла та системи тіл, закони руху матеріальної точки, фізичного тіла і формули для визначення характеристик руху;
- умови міцності та жорсткості при простих видах навантаження, поняття про геометричні характеристики плоских перерізів, теорії міцності, стійкість стиснутих стержнів;
- загальні поняття про будову і складові машин та механізмів, будову і призначення передач руху.

**уміти:**

- проводити розрахунки сил реакцій в'язей, визначати геометричні характеристики плоских перерізів,
- визначати характеристики руху матеріальної точки і фізичного тіла;
- проводити перевірочні розрахунки при простих видах навантаження деталей і конструкцій, та розрахунок максимального навантаження готових виробів і конструкцій;
- вибирати передачі руху для різних механізмів чи машин; визначати передаточні відношення передач руху.

## **Програма навчальної дисципліни**

### **Модуль 1. Теоретичні основи розрахунків для забезпечення функціональної здатності елементів технічних об'єктів (основи теоретичної механіки)**

#### **Тема 1. Статика твердого тіла**

1. Основні поняття на означення статички. Аксіоми статички. В'язі та їх реакції.
2. Система збіжних сил. Зведення до рівнодійної та рівновага системи збіжних сил.

3. Момент сили відносно точки і відносно осі. Теореми Варіньйона про момент рівнодійної системи збіжних сил.
4. Паралельні сили и пара сил. Система пар. Умова рівноваги плоскої системи пар.
5. Система сил, довільно розташованих в одній площині. Зведення плоскої системи сил до даного центра. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
6. Система сил, довільно розташованих у просторі. Зведення просторової системи сил до заданого центра. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
7. Геометричні характеристики плоских перерізів. Статичні моменти, моменти інерції.

## ***Тема 2. Загальні положення про розрахунки на міцність та жорсткість (основи опору матеріалів)***

1. Конструктивні елементи технічних об'єктів: стержень, брус, оболонка, масив. Зовнішні сили та їхня класифікація. Внутрішні зусилля та метод їх визначення (метод перерізів). Види простих деформацій.
2. Поняття про напруження. Пружні деформації та їх зв'язок з напруженнями. Закон Гука, коефіцієнт Пуассона. Загальні принципи розрахунків на міцність.
3. Експериментальні випробування конструкційних матеріалів статичним навантаженням на розтяг, на стиск. Механічні характеристики деяких конструкційних матеріалів. Допустимі напруження в розрахунках на міцність.
4. Побудова епюр внутрішніх зусиль. Загальні зауваження до побудови епюр. Епюри поздовжніх зусиль у стрижнях. Епюри поперечних зусиль і згинальних моментів.
5. Центральний розтяг (стиск) прямого стержня. Умови міцності. Розтяг під дією власної ваги.
6. Деформації зсуву і кручення стержнів. Напруження і деформації при зсуві. Умова міцності напруження кручення у поперечних перерізах круглого стержня. Умова міцності при крученні.
7. Плоский поперечний згин балок. Нормальні напруження при згині. Умова міцності. Дотичні напруження при згині. Формула Журавського. Лінійні та кутові зміщення при згині.
8. Стійкість стиснутих стержнів. Задача Ейлера. Критичні напруження. Розрахунок на стійкість стиснутих стержнів.

## **Модуль 2. Конструкції та розрахунки елементів загального призначення в технічних об'єктах (основи теорії механізмів і машин)**

### ***Тема 3. Деталі механізмів і машин***

1. Загальні означення, структура і класифікація механізмів. Кінематичні пари і ланцюги. Сили, що діють на ланки механізму, їх класифікація. Тертя в механізмах. Коефіцієнт корисної дії механізму.

2. Конструкційні матеріали та їхні механічні характеристики. Точність виготовлення деталей машин. Поняття про допуски та якості.
3. З'єднання деталей. Різьбові з'єднання. Допустимі напруження та запаси міцності при розрахунках різьбових з'єднань. Шпонкові з'єднання. Шліцові з'єднання, штифтові з'єднання. Профільні з'єднання. Заклепочні з'єднання. Зварні з'єднання. Паяні і клейові з'єднання.
4. Механічні передачі. Призначення, класифікація та кінематичні схеми механічних передач. Розрахунок кінематичних і силових параметрів передач. Фрикційні передачі. Пасові передачі. Варіатори.
5. зубчасті передачі. Застосування зубчастих передач та їхня класифікація. Циліндричні зубчасті передачі. Конічні зубчасті передачі. Планетарні зубчасті передачі. Хвильові зубчасті передачі. Черв'ячні передачі.
6. Осі та вали. Опори валів та осей. Підшипники ковзання, підшипники кочення.

#### **Тема 4. Елементи механічних приводів машин**

1. Загальна характеристика приводів машин. Двигуни у приводах машин. Визначення потужності та типу двигуна.
2. Муфти приводів, загальні відомості та класифікація.
3. Редуктори і мотор-редуктори у приводах машин.
4. Роботи і маніпулятори. Структура і кінематика механізмів маніпуляторів.

### **1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКсіОМИ**

#### **1.1. Сила, система сил**

**Сила** – міра взаємодії матеріальних тіл, у результаті якої тіла, що взаємодіють, надають одне одному прискорення або деформуються. Сила характеризується: **1) напрямом; 2) числовим значенням** (модулем); **3) точкою прикладання** – матеріальною частиною тіла, на яку діє сила.

**Лінія дії сили** – пряма, вздовж якої направлена сила. Силу можна задати через її проєкції на осі прямокутної системи координат. Пряма, за якою направлений вектор сили, називається лінією однієї сили.

Сили поділяють на **зовнішні та внутрішні**. Зовнішні сили поділяють на **активні**, які викликають переміщення тіла, і **реактивні (реакції в'язей)**.

**За характером дії** на тіло зовнішні сили поділяють на **статичні і динамічні**. **Статичними** називають сили, при яких прискореннями тіла чи його частин можна знехтувати. **Динамічними** називають сили, при яких виникають значні прискорення тіла чи його частин і пов'язані з ними сили інерції.

**За способом прикладання** зовнішні сили поділяють на поверхневі і об'ємні.

**Система сил**  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  – сукупність сил, прикладених до тіла.

**Система сил**, лінії дії яких лежать в одній площині, називається **плоскою**.

**Система сил**, лінії дії яких лежать у різних площинах, називається **довільно розміщеною**, або **просторовою**.

**Система сил**, лінії дії яких перетинаються в одній точці, називається **збіжною**.

**Еквівалентними** називають такі дві системи сил, які, діючи окремо на вільне тверде тіло, однаково змінюють його кінематичні характеристики (швидкість, напрямок руху і т. ін.).  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_m)$ . Якщо система сил еквівалентна одній силі  $\vec{R}$ , тобто  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}$ , останню називають **рівнодією цієї системи сил**. Не всяка система сил має рівнодіяну.

**Система сил**, яка прикладається до тіла, але не змінює його стану  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$  називається зрівноваженою.

## 1.2. Аксиоми статyki та їх наслідки

**Аксиома I:** дві сили, прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно врівноважуються тоді і лише тоді, коли вони рівні за величиною і діють уздовж однієї прямої у протилежних напрямках.

**Аксиома II:** прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил не порушує стану рівноваги. Наслідок – точку прикладання сили можна переносити вздовж лінії її дії в яку завгодно точку тіла без порушення його рівноваги.

**Аксиома III** (про паралелограм сил): **рівнодія двох сил**, що прикладені під деяким кутом, визначається діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах, які зображають дані сили (рис. 1.1).

Модуль рівнодіяної визначається за теоремою косинусів:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos(\pi - \alpha)} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha},$$

оскільки  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$  (рис. 1.2).

Синуси кутів між рівнодіючою і складовими силами можна знайти за теоремою синусів:

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin(\pi - \alpha)}; \quad \frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

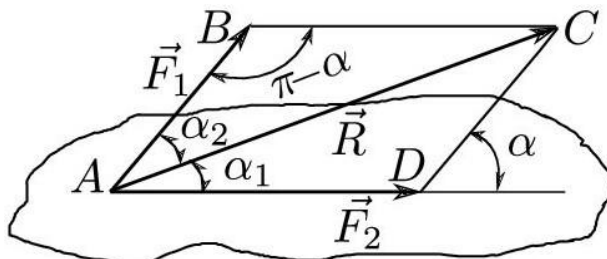


Рис. 1.1



З аксіоми паралелограма сил випливає правило **векторного додавання сил**, прикладених в одній точці твердого тіла (рис. 1.2). Для цього достатньо побудувати **силовий багатокутник**, приєднуючи послідовно до першої сили  $\vec{F}_1$  вектор, геометрично рівний вектору другої сили  $\vec{F}_2$  і т. д. (рис. 1.3).

Вектор, проведений з точки прикладання першої сили в останню вершину побудованого багатокутника, є рівнодійною  $R$ , рівною  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ .

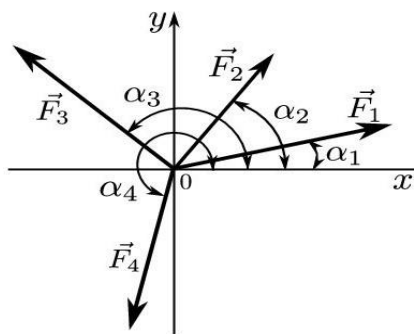


Рис. 1.2

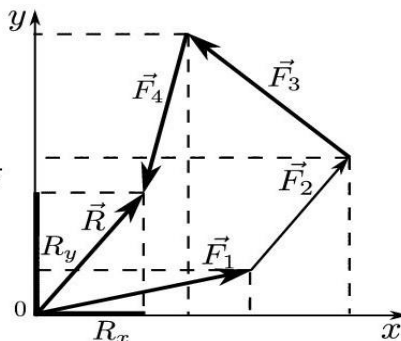


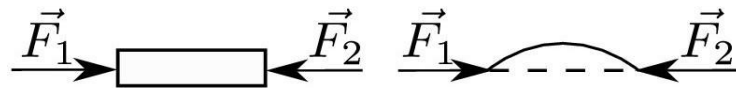
Рис. 1.3

Якщо остання вершина багатокутника сил збігається з першою, то багатокутник називається замкнутим. У цьому випадку рівнодійна дорівнює нулю:  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = 0$  а система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  є **зрівноваженою**.

Замкнутість силового багатокутника виражає умову рівноваги сил, прикладених в одній точці твердого тіла, в графічній формі. Правило паралелепіпеда сил: *рівнодійна просторово системи трьох сил, які збігаються в одній точці, прикладена в тій самій точці і за модулем та напрямом дорівнює діагоналі паралелепіпеда, ребра якого відповідно паралельні заданим силам та рівні їм:*  $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ .

**Аксіома IV** (про дію і протидію): *сили, з якими два тіла взаємодіють між собою, завжди рівні за величиною і протилежні за напрямом  $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ . Дія і протидія прикладені до різних тіл, тому ці сили не утворюють систему взаємно зрівноважених сил.*

**Аксіома V** (принцип отвердіння): *Рівновага тіла, яке знаходиться в рівновазі, не порушиться, коли, не змінюючи форми, розмірів, положення в просторі, воно перетвориться в абсолютно тверде тіло. З принципу отвердіння випливає, що умови рівноваги, які є необхідними і достатніми для абсолютно твердого тіла, є необхідними, але недостатніми для відповідного тіла, що деформується. Наприклад, твердий брусок знаходиться в рівновазі під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж осі бруска одна до одної або одна від одної, в той час як нитка, що відповідає цьому бруску, знаходиться в рівновазі тільки під дією двох сил, рівних за модулем і направлених уздовж нитки одна від одної. Зрозуміло, що під дією сил, напрямлених одна до одної, нитка зімнеться.*



Принцип отвердіння дозволяє перенести результати, викладені в статичі абсолютно твердого тіла, не тільки на дослідження рівноваги тіл, що деформуються (опір матеріалів), та цілих інженерних споруд (механіка будівництва), а й на рівновагу рідини (гідростатика).

### 1.3. Теорема про три непаралельні сили

Якщо під дією трьох сил тіло перебуває в рівновазі і лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині і їх лінії дії перетинаються в одній точці.

Нехай задане тіло перебуває у рівновазі під дією трьох сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$ ,  $\vec{F}_3$ , прикладених у точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 1.4), причому лінії дії сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  перетинаються в точці  $O$ . Згідно з наслідком аксіоми II сили  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  можна перенести в точку  $O$  (рис. 1.5), а за аксіомою III їх можна замінити однією рівнодійною силою  $\vec{R}$  (рис. 1.6).

Таким чином, ця система сил приведена до двох сил  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$ . За умовами теореми тіло перебуває у рівновазі, отже, згідно з аксіомою I, сили  $\vec{R}$  і  $\vec{F}_3$  мають бути рівні за модулем, протилежно направленіми і діяти вздовж однієї прямої.

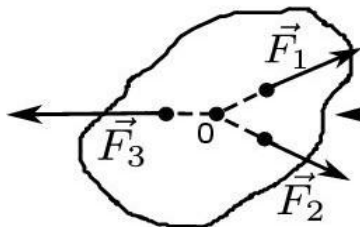


Рис. 1.4

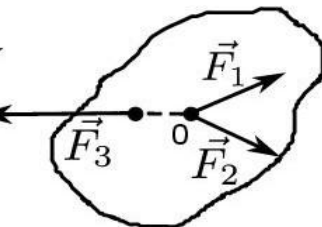


Рис. 1.5

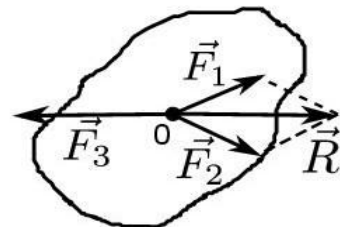


Рис. 1.6

Це означає, що лінія дії сили  $\vec{F}_3$  повинна проходити через точку  $O$ . Ця теорема дозволяє знаходити напрям невідомої сили, якщо відомі напрями двох інших сил, під дією яких тіло перебуває в рівновазі. Наприклад, нехай балка  $AD$  вагою  $\vec{P}$  (рис. 1.7) закріплена на нерухомому циліндричному шарнірі  $A$  та спирається в точці  $B$  на нерухому опору. Реакція  $\vec{N}$  нерухомої опори направлена перпендикулярно до балки  $AD$ .

Оскільки три сили  $\vec{P}$ ,  $\vec{N}$  і реакція шарніра  $\vec{R}_A$  взаємно врівноважуються, то лінії дії цих сил повинні перетинатись в одній точці, тому лінія

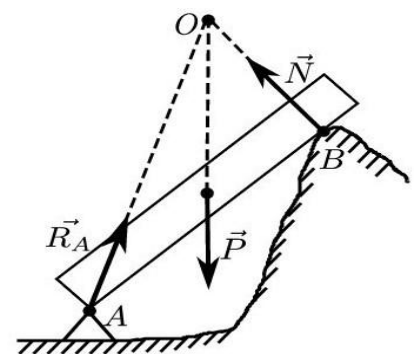


Рис. 1.7

дії реакції  $\vec{R}_A$  шарніра  $A$  проходить через точку перетину  $O$  ліній дії сил  $\vec{P}$  і  $\vec{N}$ . Це означає, що реакція  $\vec{R}_A$  направлена по прямій  $OA$ , що з'єднує точку  $O$  з нерухомою точкою  $A$  (з нерухомим шарніром, що розглядається як точка).

Заміну однієї сили системою сил, яка створює на тіло ту ж дію, називають розкладанням сил. У разі розкладання цієї сили на дві збіжні складові сили, прикладені у тій самій точці, необхідно знайти таку систему двох збіжних сил, для якої ця сила є рівнодієюю.

### Контрольні запитання

1. Що таке сила? Чим характеризується сила?
2. Що називають системою сил?
3. Чим відрізняється плоска система сил від просторової?
4. Яка система сил називається збіжною?
5. Які системи сил називаються еквівалентними?
6. Яка сила називається рівнодієюю цієї системи сил?
7. Що таке абсолютно тверде тіло?
8. Яку систему сил називають зрівноваженою?
9. Сформулюйте принцип прикладання і відкидання взаємно зрівноважених сил.
10. За якою формулою визначають модуль рівнодієюю?
11. Як визначають рівнодіюю двох сил, напрямлених уздовж однієї прямої але в протилежні боки?
12. Як визначають геометричну різницю двох векторів?
13. Що таке силовий багатокутник?
14. Що виражає замкнутість силового багатокутника?
15. У чому полягає правило паралелепіпеда сил?
16. Сформулюйте закон рівності дії і протидії.
17. Сформулюйте теорему про три непаралельні сили.

### 1.4. В'язі та напрям їх реакцій

Статика розглядає переважно невідільні тіла, тобто тіла, які певним чином закріплені. Будь-яка в'язь обмежує одне або декілька переміщень однієї або групи точок тіла, що розглядається.

*Реакція в'язі завжди направлена в сторону, протилежну неможливому руху.* Таким чином, якщо відомо, переміщення яких точок тіла обмежені і в якому напрямку, то відомі і точки прикладання та напрями реактивних сил. Розглянемо, як направлені реакції деяких основних видів в'язей.

**1. Вільне обпирання тіла об гладку опорну поверхню.** Реакція  $\vec{R}$  або  $\vec{N}$  такої в'язі направлена вздовж нормалі до опорної поверхні в цій точці.

**2. Опора на гладке ребро тіла або тіло.** Тіло опирається на гладку поверхню, коли одна з поверхонь, що дотикаються, є точкою – реакція в'язі завжди напра-

влена по нормалі до дотичної опорної поверхні в точці стикання з певним тілом.

**3. Нерухоми́й плоский циліндричний шарнір** (шарнірно-нерухома опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра, але не здійснює лінійні переміщення. Реакцію в'язі  $\vec{R}_A$  замінюють двома невідомими взаємно перпендикулярними складовими реакцій  $\vec{R}_{Ax}$  і  $\vec{R}_{Ay}$  (рис. 2.8).

**4. Рухомий плоский циліндричний шарнір** (каткова опора) дозволяє поворот навколо осі шарніра та лінійне переміщення на незначну відстань уздовж опорної поверхні. Реакція в'язі  $\vec{R}_A$  проходить через центр шарніра перпендикулярно до опорної поверхні (рис. 2.9).

**5. Защемлення (жорстке закладання)** – це спосіб закріплення балок у стінах будинків (рис. 2.10). Під час розв'язання задач таку в'язь замінюють двома невідомими складовими реакцій  $\vec{R}_{Ax}$ ,  $\vec{R}_{Ay}$  та реактивною парою сил з моментом  $\vec{M}_p$ .

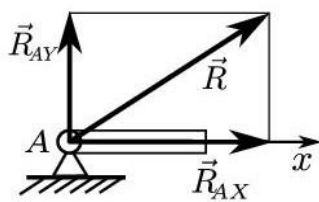


Рис. 2.8

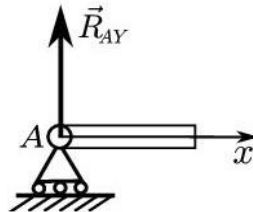


Рис. 2.9

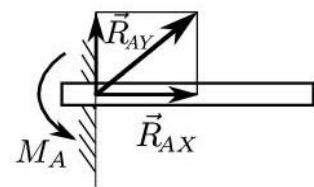


Рис. 2.10

**6. Гнучка в'язь** (нитка, мотузка, дріт, шнур, трос, ланцюг, канат). Реакція цієї в'язі прикладена в точці кріплення і направлена вздовж в'язі до точки підвішування (рис. 2.11).

**7. Жорсткий стрижень** (стрижнева опора), вагою якого нехтують, а кінці кріпляться з обох боків шарнірно (ідеальний стрижень). Якщо на стрижень не діє ніяка сила, крім в'язей в шарнірах, то реакція в'язі направлена вздовж прямої, яка проходить через центри шарнірів (рис. 2.12).

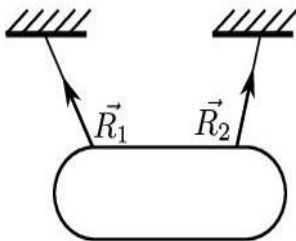


Рис. 2.11

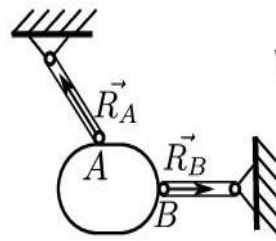


Рис. 2.12

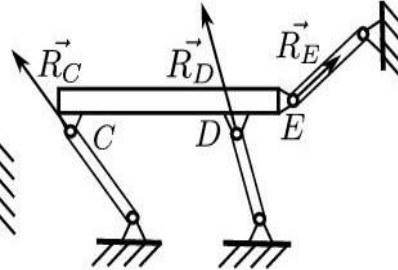


Рис. 2.13

Якщо стрижень розтягнений, то його реакція напрямлена в бік від тіла до стрижня:  $\vec{R}_A$ ,  $\vec{R}_B$ ,  $\vec{R}_E$  (рис. 2.12). Якщо стрижень стиснений, то його реакція напрямлена в бік від стрижня до тіла:  $\vec{R}_C$ ,  $\vec{R}_D$  (рис. 2.13). У разі спроби переміщення тіла по шорсткій поверхні виникає в'язь з невідомим напрямом, тому її

розкладають на дві складові: нормальну  $\vec{N}$  і дотичну  $\vec{R}_{тер}$  (сила тертя), тобто  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{R}_{тер}$ . Модулі  $\vec{N}$  і  $\vec{R}_{тер}$  визначають із відповідних умов рівноваги тіла. В'язі без тертя називають *ідеальними*, а з тертям – *реальними*.

Слід зауважити, що ідеально гладких поверхонь не існує – це абстракція, яка використовується в тих випадках, коли силами можна нехтувати.

**8. Сферичний шарнір, упорний підшипник, підп'ятник.** Напрями реакцій таких в'язей проходять через центр в'язі. Так, для сферичного шарніра (або підп'ятника) лінія дії реакції повинна проходити через центр сфери, напрям може бути довільним. Розглядаючи рівновагу тіла, реакцію замінюють трьома невідомими складовими  $\vec{R}_{Ax}$ ,  $\vec{R}_{Ay}$  і  $\vec{R}_{Az}$  за напрямом трьох взаємно перпендикулярних осей. Модулі та їх напрями визначають з умов рівноваги відповідних систем сил. Так, у разі циліндричного шарніра (підшипника) реакція його розміщена в площині, перпендикулярній до його осі  $Oz$ . Невідомий вектор реакції в'язі в площині визначається двома складовими  $\vec{R}_x$  і  $\vec{R}_y$  по осях  $Ox$  і  $Oy$ , величини яких знаходять з умов рівноваги. В окремому випадку, коли можна знехтувати розмірами шарнірів і силами тертя, що виникають у них, шарніри називають ідеально точковими.

### *Контрольні запитання*

1. Яке тіло називається вільним, невільним? Які переміщення має можливість здійснювати вільне тіло в просторі?
2. Що називають в'яззю? Що називається реакцією в'язі?
3. Чим внутрішні сили відрізняються від зовнішніх?
4. Сформулюйте принцип звільнення твердих тіл від в'язей.
5. Куди направлена реакція такої в'язі, як гладка опорна поверхня? 6. Куди направлена реакція опори на гладке ребро тіла?
7. Як направлені реакції нерухомого і рухомого плоского циліндричного шарніра?
8. Куди направлена реакція гнучкої в'язі?
9. Куди направлена реакція такої в'язі, як жорстке закладання?
10. Чому зовнішні сили не врівноважуються реакціями в'язей?
11. Сформулюйте принцип накладання нових в'язей.

## **2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ**

### **2.1. Проекція сили на вісь і площину**

Аналітичний метод розв'язання задач статки побудований на понятті про проекцію сили на вісь.

**Проекція сили на вісь** – алгебраїчна величина, що дорівнює добутку модуля сили на косинус кута між напрямом сили і додатним напрямом осі. Якщо кут гострий – проекція додатна, якщо тупий – від’ємна:  $F_x = F \cos \alpha$  (рис. 2.1).

**Проекцією сили  $\vec{F}$  на площину  $Oxy$**  називається вектор  $\vec{F}_{xy}$ , що знаходиться між проекціями початку і кінця сили  $\vec{F}$  на цю площину (рис. 2.1). За модулем  $F_{xy} = F \cos \theta$ , де  $\theta$  – кут між напрямом сили  $\vec{F}$  і її проекції  $F_{xy}$ . Для знаходження проекції сили на вісь, зручніше спочатку знайти її проекцію на площину, в якій ця вісь лежить, а потім знайдену проекцію на площину спроектувати на дану вісь. Наприклад, у випадку, показаному на рис. 2.2, отримаємо:  $F_x = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi$ ,  $F_y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi$ .

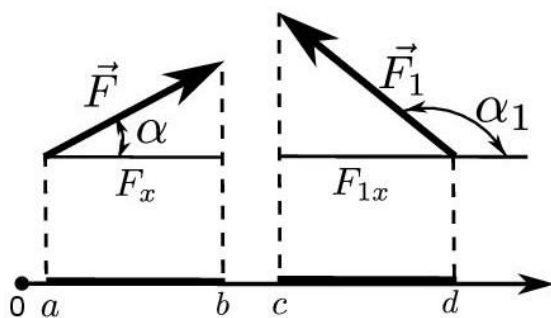


Рис. 2.1

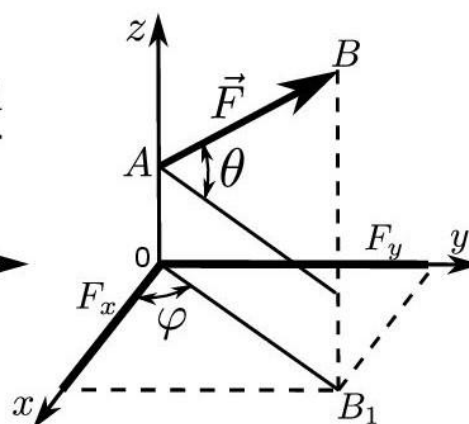


Рис. 2.2

## 2.2. Аналітичний спосіб задавання сили

Для аналітичного задавання сили необхідно вибрати систему координатних осей  $Oxyz$ . Вектор, який зображає силу  $\vec{F}$ , можна побудувати, якщо відомі модуль  $F$  цієї сили і кути  $\alpha, \beta, \gamma$ , які сила складає з координатними осями. Точка  $A$  прикладення сили повинна бути задана окремо її координатами  $(x, y, z)$ . Для розв’язування задач зручніше задавати силу її проекціями  $F_x, F_y, F_z$  на координатні осі. Знаючи ці проекції, можна визначити модуль сили і косинуси кутів, які вона становить з координатними осями, за формулами:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}; \quad \cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \quad \cos \beta = \frac{F_y}{F}; \quad \cos \gamma = \frac{F_z}{F}.$$

Якщо сила розміщена в одній площині, то її можна задати проекціями на дві осі.

## 2.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної

Система прикладених до абсолютно твердого тіла сил називається **збіжною**, якщо лінії дії усіх сил перетинаються в одній точці. Точка перетину сил

називається **центром сил**. За аксіомою паралелограма сил рівнодійна  $\vec{R}$  системи збіжних сил дорівнює векторній сумі цих сил:  $\vec{R} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + \dots + \vec{R}_n = \sum_1^n \vec{F}_i$ .

Графічно рівнодійна сила  $\vec{R}$  визначається як сторона, що замикає силовий багатокутник (рис. 2.3). Для аналітичного визначення рівнодійної  $\vec{R}$  вводять прямокутну систему координат  $Oxuz$  з початком в точці  $O$  перетину ліній дії заданих сил ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ). **Користуючись теоремою, згідно з якою проекція векторної суми на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на ту ж саму вісь складових векторів**, одержимо вирази для проекцій  $F_x, F_y, F_z$  рівнодійної  $\vec{R}$  у вигляді:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz}.$$

Модуль рівнодійної  $R = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n F_{iz}\right)^2}$ ,

а напрям рівнодійної – такими **напрямними косинусами**:

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

Таким чином, **система збіжних сил може бути замінена рівнодійною силою, яка прикладена в точці перетину сил і дорівнює геометричній сумі сил, що діють на тіло.**

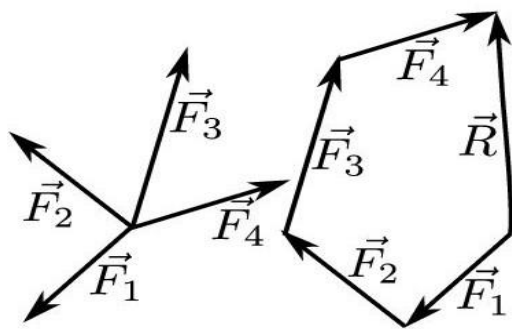


Рис. 2.3

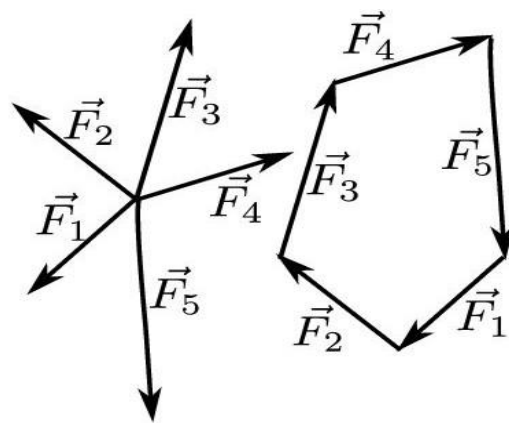


Рис. 2.4

## 2.4. Умови рівноваги системи збіжних сил

**Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна сила дорівнювала нулеві, тобто:**

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0. \quad (2.1)$$

Необхідність умови (3.1) випливає з того, що система збіжних сил, прикладених до твердого тіла, еквівалентна одній силі – рівнодійній  $\vec{R}$ . Ураховуючи

умову  $\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ , що **багатокутник сил**  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  є **замкнутим** (рис. 2.4), остання виражає умову рівноваги системи збіжних сил у графічній формі. Умови рівноваги системи збіжних сил в проекціях на координатні осі:

$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad R_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0.$$

Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил формулюють таким чином: **для рівноваги просторової збіжної системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проекцій сил на три взаємно перпендикулярні осі дорівнювали нулю**. Одержані вирази дають змогу відповісти на питання, чи буде тіло знаходитись в рівновазі під дією даної системи збіжних сил.

#### Контрольні запитання

1. Що називається проекцією сили на площину?
2. За яких умов проекція сили на вісь є додатна, від'ємна або дорівнює нулю?
3. Запишіть формулу для визначення модуля сили  $\vec{F}$  за її проекціями на координатні осі.
4. Запишіть формули для визначення напрямних косинусів кутів, які сила  $\vec{F}$  складає з координатними осями.
5. Що називається центром системи збіжних сил?
6. Чому дорівнює проекція векторної суми на вісь?
7. Запишіть вирази для модуля рівнодійної  $R$  системи збіжних сил.
8. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил. 10.  
Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил.
9. Які задачі називаються статично визначеними?
10. У чому полягає графічний метод розв'язування статично визначених задач?

### 3. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ОСІ

#### 3.1. Момент сили відносно точки

**Моментом сили**  $\vec{F}$  відносно точки  $O$  називається вектор, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора  $\vec{r}$ , проведеного з центра  $O$  в точку  $A$  прикладення сили  $\vec{F}$  (рис. 3.1):

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (3.1)$$

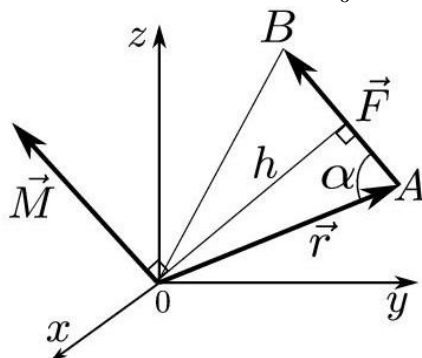


Рис. 3.1

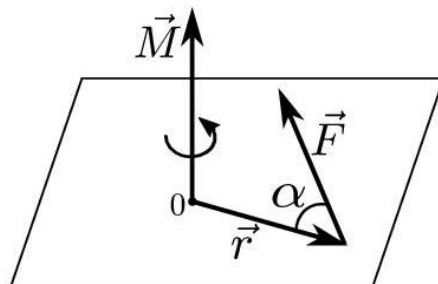


Рис. 3.2



Модуль моменту сили:

$$M = r \cdot F \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}) = rF \sin \alpha; \quad [M] = [r] \cdot [F] = 1\text{м} \cdot 1\text{Н} = 1\text{Нм}. \quad (3.2)$$

Довжина перпендикуляра  $h$ , опущеного з точки  $O$  на лінію дії сили  $\vec{F}$ , називається **плечем сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$** . Тоді модуль моменту сили (3.2) записується у вигляді:

$$|\vec{M}(\vec{F})| = F \cdot h = 2S_{\Delta OAB}, \quad (3.3)$$

де  $h = r \sin(180 - \alpha) = r \sin \alpha$ .

Модуль моменту сили відносно центра  $O$  **дорівнює добутку сили на плече та направлений перпендикулярно площині, що проходить через точку  $O$  і лінію дії сили, в той бік, звідки „обертання” тіла під дією сили відносно точки  $O$  було б видно проти руху стрілки годинника** (рис. 3.2). З рівнянь (3.1, 3.2) можна знайти проекції вектора  $\vec{M}_0(\vec{F})$  на осі. Векторний добуток  $\vec{r} \times \vec{F}$  дорівнює:

$$\vec{M}(\vec{F}) = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k},$$

де **моменти сили відносно координатних осей** на осі координат:

$$M_x = yF_z - zF_y; \quad M_y = zF_x - xF_z; \quad M_z = xF_y - yF_x. \quad (3.4)$$

Модуль і напрям (напрямні косинуси) моменту сили відносно центра визначають таким чином:

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}; \quad (3.5)$$

$$\cos \angle(\vec{M}_0, \vec{i}) = \frac{M_{0x}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{j}) = \frac{M_{0y}}{M_0}; \quad \cos \angle(\vec{M}_0, \vec{k}) = \frac{M_{0z}}{M_0}. \quad (3.6)$$

З визначення моменту сили відносно точки випливає:

- 1) **якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили**, то момент сили відносно точки не зміниться;
- 2) **момент сили відносно точки дорівнює нулю**, якщо лінія дії сили проходить через цю точку, оскільки плече сили дорівнює нулю ( $h = 0$ );
- 3) **момент сили відносно точки** чисельно дорівнює подвійній площі трикутника  $OAB$  (рис. 3.1), тобто  $M_0(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$ ;
- 4) **момент сили відносно точки є зв'язаним вектором**, оскільки момент сили відносно точки  $O$   $\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$  не дорівнює моменту сили відносно точки  $O_1$   $\vec{M}_{01}(\vec{F}) = \vec{r}_1 \times \vec{F}$  (площа трикутника  $OAB$  не дорівнює площі трикутника  $O_1AB$ ) (рис. 3.3);
- 5) **теорема Варіньона** (про момент рівнодійної системи збіжних сил): момент рівнодійної збіжної системи сил відносно довільного центра дорівнює векторній сумі моментів складових сил відносно того ж самого центра:

$$\vec{M}(\vec{R}) = \vec{M}(\vec{F}_1) + \vec{M}(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{M}(\vec{F}_i). \quad (3.7)$$

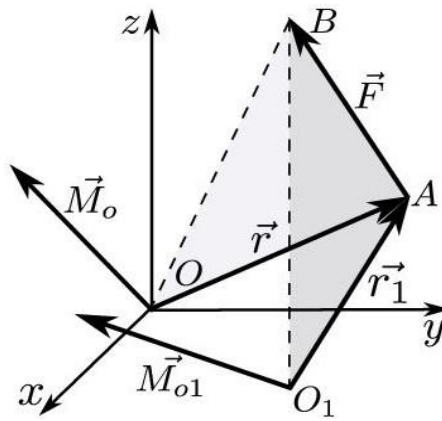


Рис. 3.3

Теорема узагальнюється на випадок будь-якої системи, що зводиться до рівнодійної. Якщо сили і точка  $O$  розміщені в одній площині, то їх моменти перпендикулярні до цієї площини і лежать на одній прямій.

### 3.2. Момент сили відносно осі

**Моментом сили відносно осі** називається проекція на цю вісь моменту сили відносно будь-якої точки  $M_{0z}(\vec{F})$ , яка знаходиться на осі (рис. 3.4):

$$M_{0z}(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cos \gamma. \quad (3.8)$$

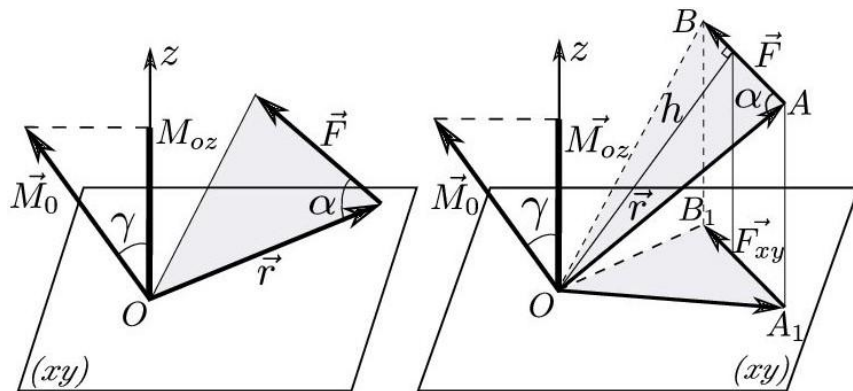


Рис. 3.4

Рис. 3.5

**Момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі. Він вважається додатним, якщо при погляді з додатного кінця осі сила намагається обернути тіло відносно осі проти руху стрілки годинника, в іншому випадку момент вважається від'ємним.** Якщо момент додатний, то він зображається відрізком, направленим вгору по осі  $z$  від точки  $O$ , а якщо він від'ємний – то вниз. **Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:**

- 1) **лінія дії сили паралельна осі або збігається з нею**, тобто проекція сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ( $\vec{F}_{xy} = 0$ );
- 2) **лінія дії сили перетинає вісь**, тобто плече проекції сили на площину, яка перпендикулярна осі, дорівнює нулю ( $h = 0$ ). Отже, **момент сили відносно осі дорівнює нулю, якщо сила і вісь лежать в одній площині.**

**Момент сили відносно осі дорівнює проекції на цю вісь векторного моменту сили відносно будь-якої точки на цій осі.** Момент сили відносно осі є скалярною величиною, як і будь-яка проекція вектора на вісь.

#### *Контрольні запитання*

1. Що називається моментом сили  $\vec{F}$  відносно точки центра?
2. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили відносно точки та поясніть його розмірність.
3. Що називається плечем сили відносно центра?
4. Чому дорівнює момент сили відносно точки?
7. Запишіть аналітичні вирази проекцій на координатні осі моменту сили  $\vec{F}$  відносно центра  $O$ .
8. Запишіть формулу для визначення модуля моменту сили  $\vec{F}$  через значення його проекцій на координатні осі.
9. Запишіть формули для знаходження напрямних косинусів моменту сили  $\vec{F}$  через значення його проекцій на координатні осі.
10. Чому момент сили відносно центра не зміниться, якщо переміщувати точку прикладання сили вздовж лінії дії сили?
11. За яких умов момент сили відносно точки дорівнює нулю?
12. Чому момент сили відносно точки дорівнює подвійній площі трикутника, який утворює вектор сили та її радіус-вектор?
13. Поясніть, чому момент сили відносно точки є зв'язаним вектором.
14. Сформулюйте та доведіть теорему Варіньона.
15. За яких умов момент рівнодійної системи сил дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно центра?
16. Що називається моментом сили відносно осі?
17. Поясніть, чому момент сили відносно даної осі не зміниться при переміщенні точки прикладання даної сили вздовж лінії її дії.
19. За яким правилом визначається знак (додатний або від'ємний) моменту сили відносно осі?
20. В яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю (сила не може обертати тіло навколо осі)?
21. Чому момент сили відносно точки є сумою моментів цієї сили відносно трьох взаємно перпендикулярних осей, проведених через цю точку?
22. Яка залежність існує між моментами сили відносно точки та відносно осі, що проходить через цю точку?

## **4. ПАРА СИЛ**

### **4.1. Пара сил. Момент пари сил**

Дві паралельні сили, рівні за модулем, але протилежно направлені являють собою неврівноважену систему, яка не може бути замінена однією силою. **Парою сил, прикладеною до твердого тіла, називається система двох рівних**

за величиною паралельних між собою сил ( $\vec{F}; \vec{F}'$ ), які направлені в протилежні боки уздовж незбіжних ліній дії (рис. 4.1, 4.2). Плечем пари називається найкоротша відстань  $a$  між лініями дії сил пари. Площина ( $N$ ), в якій розміщені сили пари, називається площиною дії пари або площиною пари. Пара сил не має рівнодійної, оскільки лінії дії цих сил не проходять через одну точку. З аксіоми 1 випливає, що система сил пари не знаходиться в рівновазі. Установлено, що пара сил, які діють на тверде тіло, намагається надати йому обертання. Дійсно, **момент пари дорівнює сумі моментів двох сил:**

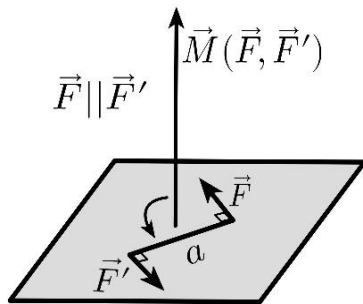
$$\vec{M}_0(\vec{F}; \vec{F}') = \vec{M}_0(\vec{F}) + \vec{M}_0(\vec{F}').$$


Рис. 4.1

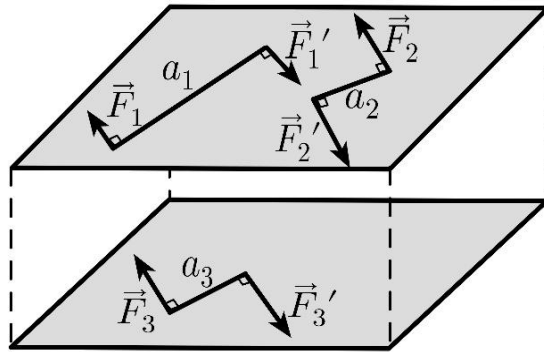


Рис. 4.2

**Модуль моменту пари сил дорівнює добутку сили на відстань між лініями дії сил:**  $M_0(\vec{F}; \vec{F}') = F \cdot a$ . Момент пари направлений перпендикулярно до площини пари. Момент вважають позитивним, якщо він розвертає тіло за стрілкою годинника. За одиницю виміру модуля моменту пари сил, як і моменту сили відносно центра, прийнятий ньютон на метр ( $Нм$ ).

#### 4.2. Властивості пар сил

1. Не змінюючи дії пари на абсолютно тверде тіло, її можна переносити і довільно повертати в площині дії, змінюючи величину сили, яка входить в цю пару і довжину плеча так, щоб момент пари залишався незмінним.
2. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну площині дії цієї пари.
3. Довільно розміщену в просторі систему пар сил можна замінити однією рівнодіючою парою, момент якої дорівнює векторній сумі моментів складових пар:

$$\vec{M}(\vec{R}, \vec{R}') = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n'). \quad (4.1)$$

4. Для рівноваги пар необхідно і достатньо, щоб векторна сума моментів пар системи дорівнювала нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{m}_i = \vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_1') + \vec{M}(\vec{F}_2, \vec{F}_2') + \dots + \vec{M}(\vec{F}_n, \vec{F}_n') = 0. \quad (4.2)$$

У проєкціях на три взаємно перпендикулярні осі:

$$\sum_{i=1}^n m_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_{iz} = 0. \quad (4.3)$$

Якщо система пар сил розміщена в одній площині, то модуль результуючої пари буде дорівнювати алгебраїчній сумі модулів моментів пар сил, що утворюють цю систему:

$$M(\vec{R}, \vec{R}') = M(\vec{F}_1, \vec{F}'_1) + M(\vec{F}_2, \vec{F}'_2) + \dots + M(\vec{F}_n, \vec{F}'_n). \quad (4.4)$$

Таким чином, для *рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині (або в паралельних площинах), необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проєкцій моментів цих пар сил на вісь, яка перпендикулярна цій площині (площинам), дорівнювали нулю.*

Зауважимо, що механічна дія (вплив) у статиці абсолютно твердого тіла характеризується трьома типами векторів:

- 1) силою – ковзним вектором;
- 2) моментом сили відносно точки – прикладеним, або зв'язаним вектором;
- 3) моментом пари сил – вільним вектором.

***Момент пари є повною характеристикою механічної дії пари сил на абсолютно тверде тіло, а дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами.*** При цьому, оскільки обертальна дія пари сил залежить тільки від її моменту, то для задання пари іноді достатньо вказувати лише числове значення її моменту.

#### Контрольні запитання

1. Що називається парою сил, прикладеною до твердого тіла?
2. Що називається площиною дії пари сил, плечем пари сил?
3. Поясніть, чому система сил пари не знаходиться в рівновазі?
4. Що намагається зробити з тілом прикладена до нього пара сил?
5. Що називається моментом пари сил  $M_0(\vec{F}; \vec{F}')$ ?
6. Запишіть формулу вектора моменту пари сил.
7. Запишіть формулу для визначення модуля моменту пари сил.
8. В яких одиницях вимірюється модуль моменту пари сил?
9. Чому момент пари сил є вільним вектором?
10. Чому момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари на тверде тіло?
11. Чому дії над парами сил можна замінити еквівалентними операціями над їх моментами?
12. Сформулюйте правило складання пар сил.
13. Як визначається модуль результуючої пари системи пар сил, що розміщені в одній площині або в паралельних площинах?
14. Запишіть рівняннями рівноваги системи пар сил.
15. Сформулюйте основні властивості пар сил.
16. Сформулюйте лему про паралельне перенесення сили.
17. Що називається приєднаною парою сил?

## 5. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

### 5.1. Паралельне перенесення сил

**Лема:** не змінюючи статичного стану твердого тіла, прикладену до цього тіла силу можна перенести у будь-яку його точку, паралельно самій собі, прикладаючи при цьому пару, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно нової точки прикладення.

Нехай в точці А прикладена сила  $\vec{F}$  (рис. 5.1). Прикладемо тепер у точці В тіла систему двох сил  $\vec{F}'$  і  $\vec{F}''$ , еквівалентну нулю, причому  $|\vec{F}'| = |\vec{F}''| = |\vec{F}|$  (рис. 5.2). Виникає система, яка складається з сили  $\vec{F}'$  і пари сил ( $F, \vec{F}''$ ) з моментом  $m$ . Одержану таким чином пару сил (рис. 5.3) називають приєднаною парою сил.

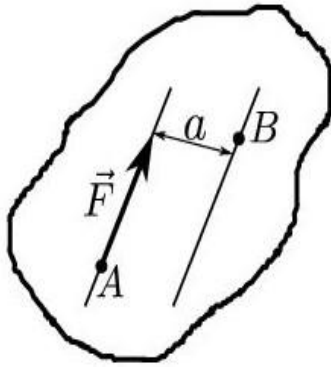


Рис. 5.1

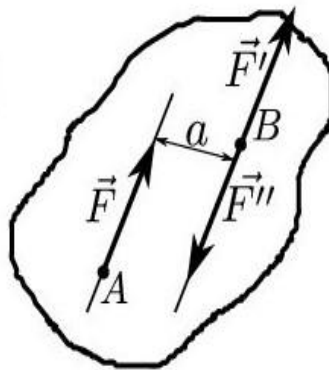


Рис. 6. 2

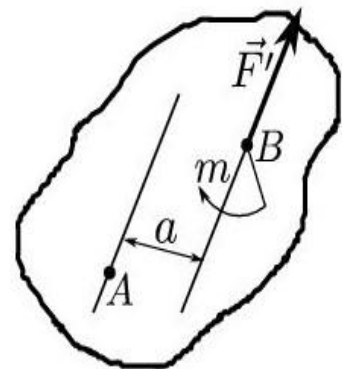


Рис. 6.3

**Теорема Пуансо:** довільну систему сил, що діють на тверде тіло, можна замінити еквівалентною системою, що складається з однієї сили, прикладеної в довільно вибраній точці тіла (центрі зведення) і рівної головному вектору цієї системи сил, та однієї пари сил, момент якої дорівнює головному моменту всіх сил відносно вибраного центра зведення.

Якщо лінії дії довільної системи сил не пересікаються в одній точці, то усі сили системи можна перенести в одну довільно вибрану точку – точку зведення. При переносі сили в точку, що не лежить на лінії її дії, за теоремою Пуансо додають приєднану пару сил  $m$  (рис. 5.3), а пучок сил у точці зведення замінюють головним вектором системи. Пари сил, що з'явилися, замінюють головним моментом системи.

### 5.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

**Теорема.** Для того, щоб довільна просторова система сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  перебувала у рівновазі, необхідно і достатньо, щоб головний вектор  $\vec{F}_0$  і голов-

ний момент  $\vec{M}_0$  системи відносно довільного центра зведення дорівнювали нулю. Умови рівноваги:

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0; \quad (5.1)$$

$$\vec{M}_0 = M_0(\vec{F}_1) + M_0(\vec{F}_2) + \dots + M_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n M_0(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.2)$$

Умови рівноваги довільної просторової системи сил у проєкціях на координатні осі:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad M_{0x} = \sum_{i=1}^n M_{ix}(\vec{F}_i) = 0; \quad (5.3)$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad M_{0y} = \sum_{i=1}^n M_{iy}(\vec{F}_i) = 0; \quad (5.4)$$

$$F_{0z} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.5)$$

### 5.3. Умови рівноваги довільної системи сил на площині

**5.3.1.** Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми проєкції всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил, дорівнювали нулю та алгебраїчна сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювала нулю:

$$F_{0x} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad M_{0z} = \sum_{i=1}^n M_{iz}(\vec{F}_i) = 0. \quad (5.6)$$

$$F_{0y} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad (5.7)$$

**5.3.2.** Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (5.8)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^n M_C(\vec{F}_i) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) + \dots + M_C(\vec{F}_n) = 0. \quad (5.10)$$

**5.3.3.** Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил щоб дорівнювали нулю алгебраїчні суми моментів всіх сил відносно двох будь-яких точок, що лежать в цій площині, а також алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісь  $U$ , що не перпендикулярна до прямої, яка проходить через ці дві вибрані точки:

$$\sum_{i=1}^n M_A(\vec{F}_i) = M_A(\vec{F}_1) + M_A(\vec{F}_2) + \dots + M_A(\vec{F}_n) = 0. \quad (5.11)$$

$$\sum_{i=1}^n M_B(\vec{F}_i) = M_B(\vec{F}_1) + M_B(\vec{F}_2) + \dots + M_B(\vec{F}_n) = 0; \quad (5.12)$$

$$\sum_{i=1}^n F_{iU} = F_{1U} + F_{2U} + \dots + F_{nU} = \sum_{i=1}^n F_{iU} = 0. \quad (5.13)$$

### *Контрольні запитання*

1. Запишіть умови рівноваги довільної просторової системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  у векторній формі.
2. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи сил в аналітичній формі.
3. Запишіть рівняння рівноваги просторової системи паралельних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ .
4. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  через суми проєкцій всіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил.
5. Запишіть рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил через суми моментів всіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій.
6. Запишіть рівняння рівноваги плоскої системи паралельних сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$  через суму проєкцій всіх сил на вісь, що лежить в площині дії цих сил і паралельна їм, та суму моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини.
7. Сформулюйте умови рівноваги довільної просторової системи пар сил  $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1), (\vec{F}_2, \vec{F}'_2), \dots, (\vec{F}_n, \vec{F}'_n)$  у векторній формі.
8. Сформулюйте умову та запишіть рівняння рівноваги системи пар сил, які лежать в одній площині, в паралельних площинах.

## 6. БАЛКОВІ СИСТЕМИ

### *6.1. Балкові системи та їх види*

**Балкою** називається деталь, яка зроблена з прямого бруса з опорами у двох (чи більше) точках і несе прямоосьове навантаження. Балкові системи застосовують у машинах і спорудах.

**Види кріплень балок та напрями реакцій в'язей:**

- 1) балка має дві опори – шарнірно-нерухому і шарнірно-рухому або має три не-паралельні шарнірно прикріплені стрижні (рис. 6.1);
- 2) балка спирається на три гладенькі поверхні, одна з яких має упор (рис. 6.2);
- 3) балка жорстко закріплюється в стіні або затискується спеціальним пристроєм (рис. 6.3).



## 6.2. Види навантажень балкових систем

**Навантаженнями** називають зовнішні сили, які діють на елементи конструкцій чи деталі машин і споруд під час їх експлуатації.

**За часом дії навантаження бувають:**

- 1) **постійні**, які діють завжди;
- 2) **тимчасові**, що діють протягом обмеженого періоду часу.

**Змінне навантаження** – навантаження, яке змінюється з часом.

**Залежно від характеру прикладання сил у часі розрізняють:**

1) **статичні навантаження**, які відносно повільно й плавно зростають від нуля до свого граничного значення, а далі залишаються незначно змінними. Прискорення елементів конструкції і сили інерції відсутні або настільки малі, що ними можна знехтувати;

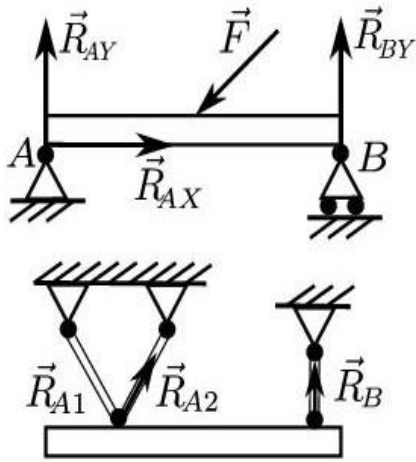


Рис. 6.1

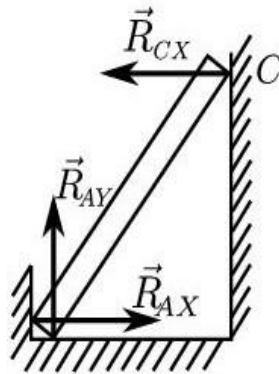


Рис. 6.2

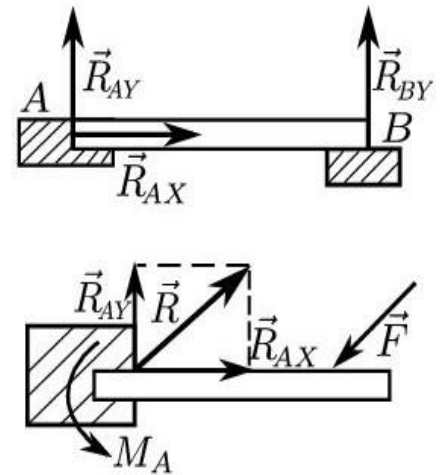


Рис. 6.3

2) **динамічні навантаження** – навантаження, яке змінює свою величину за малий час. При цьому виникають сили інерції та значні прискорення, якими не можна нехтувати. Динамічні навантаження поділяють на:

а) **миттєво прикладені**, які зростають від нуля до свого граничного значення за дуже малий проміжок часу (частки секунди);

б) **ударні навантаження**, для яких характерне те, що в мить їх прикладання тіло, яке спричинює навантаження, має певну кінетичну енергію;

в) **повторно-змінні навантаження**, які безперервно й періодично змінюються в часі. Вони, як правило, пов'язані з рухами деталей, що циклічно змінюються.

**За характером прикладання навантаження поділяють на:**

1) **зосереджені** (рис. 6.4) – такі зовнішні сили, що передаються на елемент конструкції через нескінченно малі площадки (прикладені до тіла в певній точці);

2) **розподілені** (рис. 6.5 – 6.6) – такі зовнішні сили, що діють на одиницю об'єму, площі або довжини конструкції. Навантаження можуть бути: рівномірно розподіленими за довжиною, площею або об'ємом.

Навантаження характеризуються *інтенсивністю* – силою, що припадає на одиницю об'єму ( $\vec{\gamma}$ ), площі поверхні ( $\vec{p}$ ) чи довжини лінії ( $\vec{q}$ ) відповідно. Будь-яке реальне навантаження прикладене до певної ділянки тіла. В основному трапляються *паралельні і збіжні розподілені навантаження*.

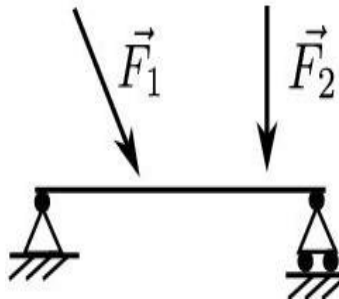


Рис. 6.4

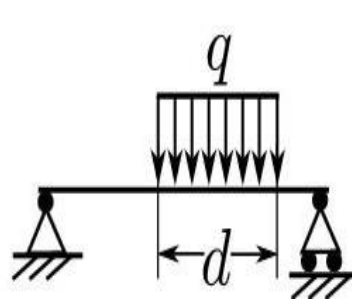


Рис. 6.5

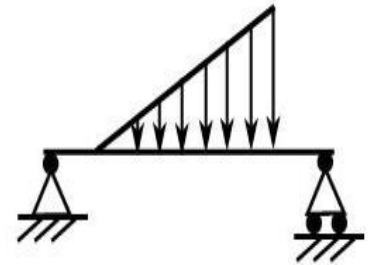


Рис. 6.6

Паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом до елемента споруди або деталі машини, може бути перетворене на зосереджене:

а) за довжиною  $Q = q \cdot \ell$ ,  $[q] = H/m$ ; (6.1)

б) за площею  $P = pS$ ,  $[p] = H/m^2$ ; (6.2)

в) за об'ємом  $G = \gamma V$ ,  $[\gamma] = H/m^3$ . (6.3)

Поверхневі сили можуть бути неперервно розподілені по всій поверхні тіла або її частині. Навантаження, що припадає на одиницю площі  $p = P/S$  називається інтенсивністю поверхневого навантаження (6.2). Її виражають у паскалях (Па) або кратних одиницях (кПа, МПа, ГПа).

**Розподілене по поверхні навантаження** зводять до головної площини (рис. 7.8), унаслідок чого створюється **навантаження, розподілене по лінії**. Інтенсивністю такого навантаження  $q = pb$  називають навантаження, що припадає на одиницю довжини лінії ( $Q = ql = pbl$ ). Характер зміни лінійно розподіленого навантаження зображують у **виді епюри (графіка)** залежності  $q$  від  $\ell$ . У разі рівномірно розподіленого навантаження по довжині (рис. 6.5) епюра  $q$  прямокутна.

**Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі його епюри і прикладена в центрі її тяжіння.** Перетворення **нерівномірно розподіленого навантаження** на зосереджене має більш складний алгоритм.

### Жорстке защемлення балки

Якщо опора не допускає переміщень і поворотів то защемлення замінюють складовими сили  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  і парою  $M_R$ . Для визначення цих невідомих використовують рівняння:

$$\sum_0^n F_{ix} = 0; \quad \sum_0^n F_{iy} = 0; \quad \sum_0^n m_{iA} = 0.$$

Для контролю правильного розв'язання використовують додаткове рівняння моментів відносно будь-якої точки на балці:  $\sum_0^n m_{iB} = 0$ .

### **Шарнірно-рухома опора**

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і переміщення вздовж опорної поверхні. Реакція направлена перпендикулярно опорній поверхні.

### **Шарнірно-нерухома опора**

Опора дозволяє поворот навколо шарніра і може бути замінена двома складовими сили вздовж осей координат.

### **Балка на двох шарнірних опорах**

1. Невідомі три сили (реакції), тому зручно використати рівняння у другій формі:  $\sum_0^n m_{iA} = 0$ ;  $\sum_0^n m_{iB} = 0$ ;  $\sum_0^n F_{ix} = 0$ . Для контролю правильного розв'язання

використовують додаткове рівняння:  $\sum_0^n F_{iy} = 0$ .

2. Якщо три сили не лежать на одній прямій, то зручно використовувати систему рівнянь у третій формі:

$$\sum_{i=1}^n m_A(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_B(\vec{F}_i) = 0; \quad \sum_{i=1}^n m_C(\vec{F}_i) = 0.$$

### **Запитання для самоконтролю**

1. Що називається балкою? Які види кріплень балок вам відомі?
2. Які сили називають навантаженнями?
3. На які види поділяють навантаження за характером дії?
4. Чим розподілені навантаження відрізняються від зосереджених?
5. На які види поділяють розподілені навантаження?
6. На які види поділяють навантаження за часом дії?
7. Як рівномірно розподілене паралельне навантаження, що прикладене під прямим кутом, може бути перетворене на зосереджене за довжиною?
8. Чи може рівномірно розподілене паралельне навантаження, прикладене під прямим кутом, бути перетворене на зосереджене за площею та об'ємом?
9. Чому дорівнює і де прикладена рівнодійна паралельних сил, розподілених по відрізку прямої з інтенсивністю, що змінюється за лінійним законом?

### **6.3. Приклади розв'язання задач**

**Задача 1** (жорстке защемлення). Плоска одноопорна (защемлена) балка навантажена зосередженими силами ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ) і парою сил  $m$ . Визначити величини реакцій защемлення (Рис. 7.10).

Дані:  $F_1 = 20\text{кН}$ ;  $F_2 = 8\text{кН}$ ;  $m = 12\text{кНм}$ ;  $a = 0,3\text{м}$ .

### Розв'язання

Защемлення (в'язь) замінюємо складовими силами  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  і моментом пари  $M_A$ . Для визначення цих невідомих запишемо рівняння рівноваги:

$$\sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^\circ - R_{Ax} = 0; \quad \sum_0^n F_{iy} = F_2 - F_1 \sin 60^\circ + R_{Ay} = 0;$$

$$F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a + m - F_2 \cdot 5a - M_A = 0.$$

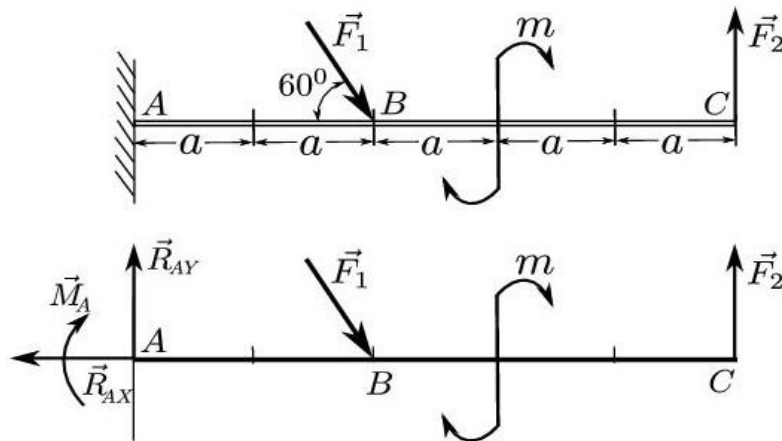


Рис. 6.7

Знайдемо невідомі величини:

$$R_{Ax} = F_1 \cos 60^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ кН}.$$

$$R_{Ay} = F_1 \sin 60^\circ - F_2 = 20 \cdot 0,866 - 8 = 9,32 \text{ кН}.$$

$$M_A = F_1 \sin 60^\circ \cdot 2a + m - F_2 \cdot 5a = 20 \cdot 0,866 \cdot 0,6 + 12 - 8 \cdot 1,5 = 10,392 \text{ кНм}.$$

Перевірка:  $\sum_0^n m_{iB} = R_{Ay} \cdot 2a + m - F_2 \cdot 3a - M_A = 9,32 \cdot 0,6 + 12 - 8 \cdot 0,9 - 10,392 = 0.$

**Задача 2.** Двохопорна балка із шарнірними опорами  $A$  і  $B$  навантажена зосередженою силою  $\vec{F}$ , розподіленим навантаженням і парою сил (рис. 7.11). Визначити величини реакцій в шарнірних опорах балки.  
Дані:  $F = 100 \text{ кН}$ ;  $q = 4 \text{ кН / м}$ ;  $m = 25 \text{ кНм}$ ;  $a = 0,6 \text{ м}$ .

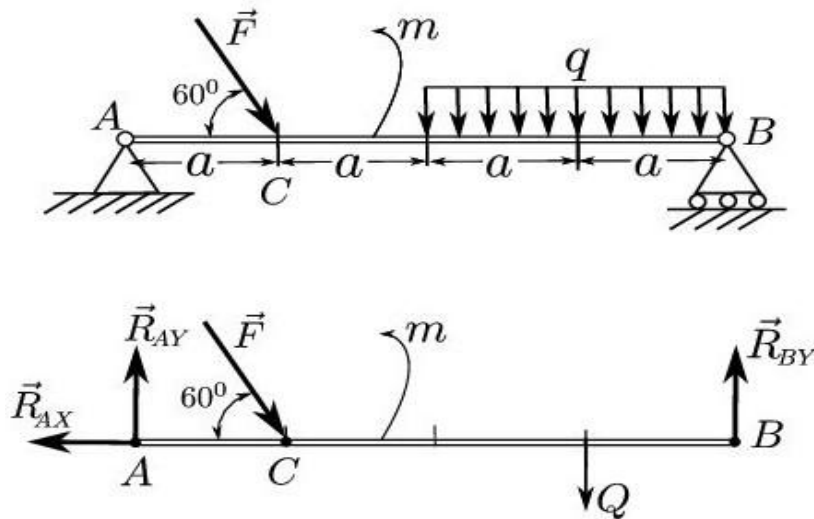


Рис. 6.8

### Розв'язання

В'язі заміняємо складовими сили  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  і  $R_{By}$ . Для визначення цих реакцій запишемо рівняння рівноваги у другій формі:

$$M_i: \sum_0^n m_{iA} = F \sin 60^\circ \cdot a - m + Q \cdot 3a - R_{By} \cdot 4a = 0;$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot a - m + Q \cdot 2a - R_{By} \cdot 3a = 0; \quad \sum_0^n F_{ix} = F_1 \cos 60^\circ - R_{Ax} = 0.$$

Знайдемо невідомі величини:

$$\sum_0^n m_{iA} = 100 \cdot 0,866 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 3 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 4 \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{By} = \frac{86,6 \cdot 0,6 - 25 + 4,8 \cdot 1,8}{4 \cdot 0,6} = 14,833 \text{ кН};$$

$$\sum_0^n m_{iC} = R_{Ay} \cdot 0,6 - 25 + 4 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 0,6 - R_{By} \cdot 0,6 = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{m - Q \cdot 2a + R_{By} \cdot 3a}{a} = \frac{25 - 4,8 \cdot 1,2 + 14,833 \cdot 1,8}{0,6} = 76,566 \text{ кН}.$$

Перевірка:

$$\sum_0^n F_{iy} = R_{Ay} - F \sin 60^\circ - Q + R_{By} = 76,566 - 86,6 - 4,8 + 14,833 = 0.$$

## 7. ЦЕНТР ТЯЖІННЯ

### 7.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла

Сили тяжіння, що прикладені до частинок тіла, утворюють систему сил, лінії дії яких сходяться у центрі Землі. Якщо розмірами тіла можна знехтувати

порівняно з розмірами Землі, то з великим ступенем точності можна вважати, що сили тяжіння, які діють на окремі частини тіла, утворюють систему паралельних сил.

Рівнодіюча  $\vec{G}$  цієї системи паралельних сил тяжіння окремих частин  $(\vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n)$  дорівнює їх сумі  $\vec{G} = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \dots + \vec{q}_n$  і є силою тяжіння, що діє на все абсолютно тверде тіло. Центр цієї системи паралельних сил, в якому прикладена сила  $\vec{G}$ , називається **центром тяжіння тіла**  $C$  з координатами  $(x_C, y_C, z_C)$ . У твердому тілі центр тяжіння займає певне положення, що не залежить від розміщення тіла в просторі.

Для визначення точки прикладання сили тяжіння (рівнодійної паралельних сил) використовуємо теорему Варіньона про момент рівнодіючої.

Координати центра тяжіння однорідного тіла об'ємом  $V$  і масою  $m$ :

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i x_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i y_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n V_i z_i}{V}, \quad (7.1)$$

де  $V_i$  – об'єм  $i$ -ого елемента тіла;  $V$  – об'єм всього тіла,  $x_i, y_i, z_i$  – координати частин тіла.

**Координати центра тяжіння однорідної плоскої фігури знаходять за формулами:**

$$x_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{A}; \quad y_C = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2}, \quad (7.2)$$

де  $A_i$  – площа частини перерізу;  $x_i, y_i, z_i$  – координати ЦТ частин перерізу;

$$\sum_0^n A_i x_i - \text{статичний момент площини } S_y;$$

$$\sum_0^n A_i y_i - \text{статичний момент площини } S_x.$$

Координати центра тяжіння плоскої фігури:

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}; \quad z_C = \frac{h}{2}. \quad (7.3)$$

Осі, що проходять крізь центр тяжіння, називаються центральними.

Статичний момент відносно центральної осі дорівнює нулю.

Розташування центра тяжіння простих геометричних фігур можна розрахувати за відомими формулами (рис. 8.2). Для розв'язання задач використовують такі методи:

1) **симетрії**: центр тяжіння симетричних фігур знаходиться на осі симетрії;

- 2) **розділення**: складні перерізи поділяють на декілька простих частин, положення ЦТ яких легко визначити;
- 3) **від'ємних площин**: полості (отвори) розглядають як перерізи з від'ємною площиною.

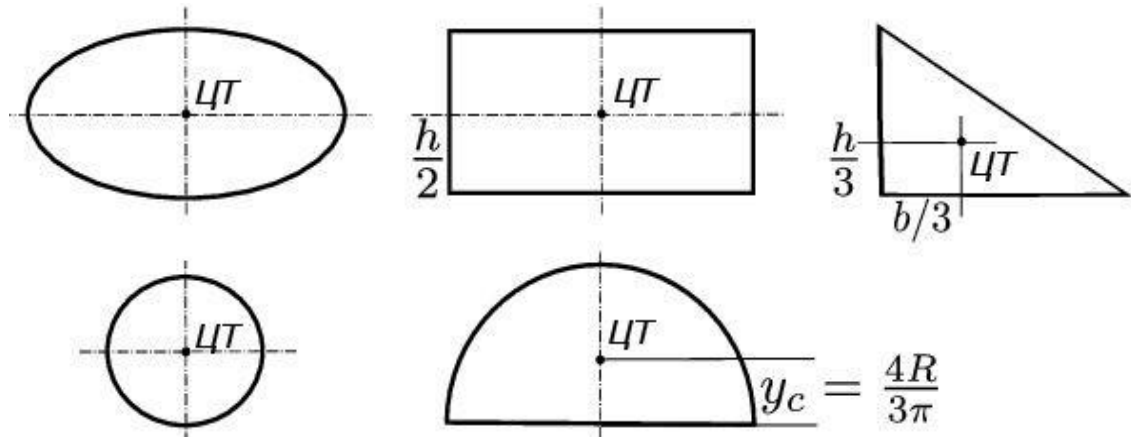


Рис. 7.2

### 7.2. Приклад розв'язання задачі

**Задача 1.** Визначити положення центра тяжіння плоскої фігури зображеної на рис. 8.3:

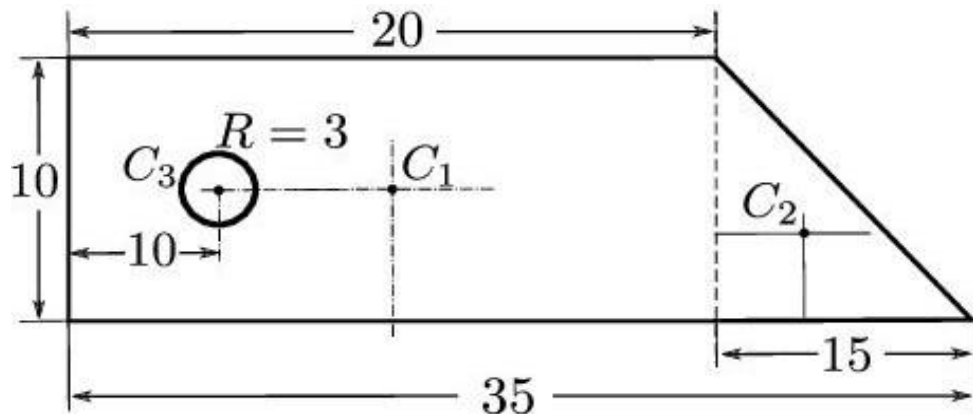


Рис. 7.3

#### Розв'язання

Розіб'ємо фігуру на три частини: прямокутник, трикутник, круг. Знайдемо площі цих фігур:

1 – **прямокутник**,  $A_1 = 10 \cdot 20 = 200 \text{ см}^2$ ;

2 – **трикутник**,  $A_2 = 0,5 \cdot 10 \cdot 15 = 75 \text{ см}^2$ ;

3 – **круг**,  $A_3 = \pi R^2 = 3,14 \cdot 3^2 = 28,3 \text{ см}^2$ ;

Знайдемо координати центрів тяжіння фігур:

ЦТ фігури 1:  $x_1 = 10 \text{ см}$ ;  $y_1 = 5 \text{ см}$ .

ЦТ фігури 2:  $x_2 = 20 + 1/3 \cdot 15 = 25 \text{ см}$ ;  $y_2 = 1/3 \cdot 10 = 3,3 \text{ см}$ ;

ЦТ фігури 3:  $x_3 = 10 \text{ см}$ ;  $y_3 = 5 \text{ см}$ .

Знайдемо координати центра тяжіння фігури:

$$x_c = \frac{200 \cdot 10 + 75 \cdot 25 - 28,3 \cdot 10}{200 + 75 - 28,3} = 14,5 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{200 \cdot 5 + 75 \cdot 3,3 - 28,3 \cdot 5}{200 + 75 - 28,3} = 4,48 \text{ см}.$$

### *Контрольні запитання*

1. Запишіть формули для координат центра паралельних сил.
2. Що називається центром тяжіння твердого тіла?
3. Запишіть формули для координат центра тяжіння твердого тіла.
4. Запишіть формули для координат центра тяжіння тіла, що складається зі скінченного числа окремих однорідних частин, які мають різні питомі густини.
5. Запишіть формули для координат центра тяжіння неоднорідного абсолютно твердого тіла.
6. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі одно-рідної пластини, яка розбита на скінченне число окремих фігур.
7. Запишіть формули для координат центра тяжіння площі неоднорідної пластини.
8. У чому полягає спосіб від'ємних площ при визначенні координат центра тяжіння плоскої фігури?
9. У чому полягає такий спосіб від'ємних об'ємів?
10. Запишіть та поясніть формули для координат центра тяжіння куска однорідного тонкого дроту постійного перерізу.
11. Поясніть, у чому полягає метод симетрії при визначенні координат центра тяжіння однорідного абсолютно твердого тіла.

## **8. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ**

Під час розтягнення, стиску, зсуву деталь чинить опір деформації всім перерізом однаково. Геометричною характеристикою перерізу є площа. Під час кручення, згину переріз чинить опір деформації всім перерізом неоднаково, тому при розрахунках напруги з'являються інші геометричні характеристики, які впливають на опір перерізу деформування.

### **8.1. Статичний момент плоскої фігури (перерізу)**

Розглянемо переріз довільної форми площею  $A$ . Виділимо в ньому елементарну площину  $dA$  і задамо систему координат (рис. 8.1).

**Статичні моменти елементарної площини  $dA$ :**

відносно осі  $x$ :  $dS_x = ydA$ ; відносно осі  $y$ :  $dS_y = xdA$ .

**Статичні моменти елементарної площини  $dA$ :**



відносно осі  $x$ :  $dS_x = ydA$ ; відносно осі  $y$ :  $dS_y = xdA$ .

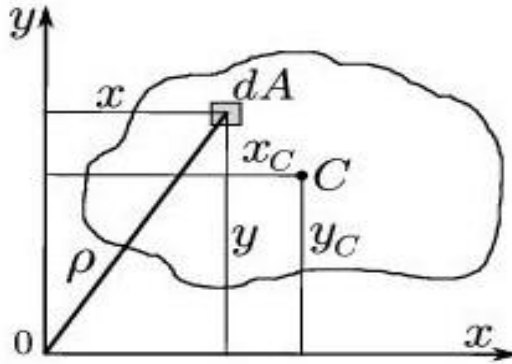


Рис. 8.1

Підсумування за площею дасть статичні моменти площини  $A$ :

$$S_x = \int_A ydA; \quad S_y = \int_A xdA.$$

Статичні моменти кожної половини площини рівні і мають різний знак, тому для симетричного перерізу статичний момент відносно осі симетрії дорівнює нулю. Одиниця вимірювання статичного моменту –  $[м^3]$ . Якщо

$x_c$ ,  $y_c$  – координати центра тяжіння  $C$  фігури, то статичні моменти:

$$S_x = \int_A y_c dA = A \cdot y_c. \quad S_y = \int_A x_c dA = A \cdot x_c. \quad (8.1)$$

Координати центра тяжіння  $C$  плоского перерізу:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (8.2)$$

## 8.2. Осьові і полярні моменти інерції плоскої фігури

Осьовим моментом інерції перерізу відносно осі, що лежить в цій площині, називається сума добутоків елементарних площин на квадрат їх відстаней до цієї осі.

Для будь-якого перерізу площею  $A$  з елементарною площиною  $dA$  осьові моменти інерції відносно осей  $x$  і  $y$  (рис. 8.1):

$$J_x = \int_A y^2 dA; \quad J_y = \int_A x^2 dA. \quad (8.3)$$

Полярний момент інерції відносно точки  $O$ :

$$J_\rho = \int_A \rho^2 dA, \quad \text{де } \rho^2 = x^2 + y^2. \quad (8.4)$$

Полярний момент інерції дорівнює сумі:

$$J_\rho = \int_A (y^2 + x^2) dA = J_x + J_y. \quad (8.5)$$

Розмірність моменту інерції  $[J_x] = м^4$ .

### 8.3. Моменти інерції прямокутного і колового перерізів

**Осьові моменти інерції прямокутного перерізу** (рис. 8.2):

$$J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad J_y = \frac{b^3h}{12}, \quad (8.6)$$

де  $b$  – ширина перерізу;  $h$  – висота перерізу, для квадрата  $b = h$ .

**Осьові і полярні моменти інерції колового перерізу** (рис. 8.3):

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{4}; \quad J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi R^4}{2}. \quad (8.7)$$

**Осьові і полярні моменти інерції кільцевого перерізу** (рис. 8.4):

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1-c^4); \quad J_\rho = \frac{\pi D^4}{32}(1-c^4), \quad (8.8)$$

де  $D, d$  – діаметри перерізів;  $c = d/D$ .

**Осьові і полярні моменти інерції трубного перерізу** (рис. 8.5):

$$J_x = J_y = \pi R_0^3 \cdot t; \quad I_\rho = 2\pi R_0^3 \cdot t. \quad (8.9)$$

де  $R_0$  – середній радіус;  $t$  – товщина стінки;  $R_0 \gg t$ .

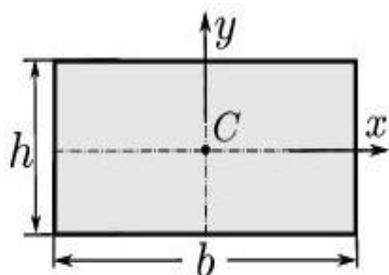


Рис. 8.2

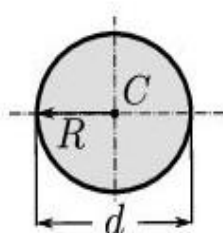


Рис. 8.3

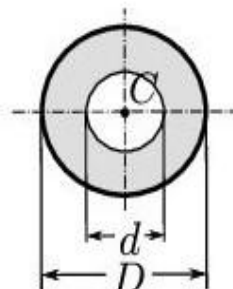


Рис. 8.4

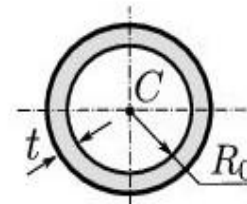


Рис. 8.5

### 8.4. Моменти інерції плоских перерізів відносно зміщених осей

Виділимо в плоскому перерізі довільної форми  $A$  площадку  $dA$  з координатами  $x$  і  $y$  відносно системи з центром  $O$  (рис. 8.6). Система  $y_1O_1x_1$  зміщена на  $a$  і  $b$ . Нове положення елементарної площини після зміщення осей:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \quad (8.10)$$

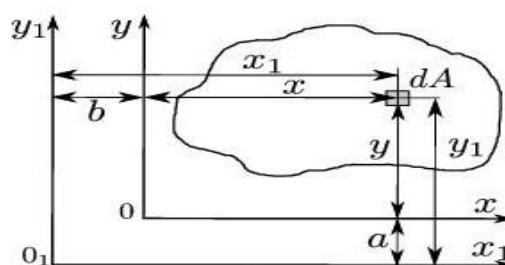


Рис. 8.6

Осьові моменти інерції відносно зміщених осей  $x_1$  і  $y_1$ :

$$J_{x_1} = J_x + a^2 A; \quad J_{y_1} = J_y + b^2 a. \quad (8.11)$$

### 8.5. Радіус та еліпс інерції плоских перерізів

Для того, щоб мати уявлення про жорсткість поперечного перерізу при вивченні його геометричних властивостей, будують еліпс інерції. Для його побудови необхідно вміти визначати **радіус інерції**. Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають радіусом інерції:

$$J_z = \int_F y^2 \cdot dA = A \cdot i_z^2, \quad (8.12)$$

де  $i_z$  – **радіус інерції** площі поперечного перерізу відносно осі  $z$ ;  $A$  – площа поперечного перерізу.

**Радіус інерції** – відстань від відповідної осі до точки, концентрація всієї площі в якій дасть такий же момент інерції, як і для всієї фігури.

**Радіус інерції  $i_z$  площі поперечного перерізу відносно осі  $z$**  – це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осьового моменту інерції перерізу  $J_z$  відносно осі  $z$ , поділеному на площу поперечного перерізу:

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{A}}. \quad (8.13)$$

Радіус інерції  $i_y$  площі поперечного перерізу відносно осі  $y$  – це геометрична характеристика перерізу, що дорівнює квадратному кореню від осьового моменту інерції перерізу  $J_y$  відносно осі  $y$ , поділеному на площу поперечного перерізу:

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}; \quad (8.14)$$

Радіуси інерції площі поперечного перерізу стрижня (плоскої фігури) **виражаються в одиницях довжини в першому ступені (м, см, мм)**. Вони застосовуються в розрахунках на стійкість та на позацентровий розтяг-стиск.

Головні центральні радіуси інерції площі поперечного перерізу  $i_u$  та  $i_v$  відповідають головним центральним осям інерції поперечного перерізу  $u$  та  $v$ :

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}}. \quad (8.15)$$

Радіус інерції **завжди більше** відповідної координати центра ваги  $i_z > y_C$ . Для стандартних прокатних профілів значення радіусів інерції вказані в сортаменті.

### Приклад розрахунку еліпса інерції прямокутного перерізу

Для прямокутника шириною  $b$  та висотою  $h$ , зображеного на рис. 8.2, визначити головні радіуси інерції площі поперечного перерізу.

**Розв'язання.** Головні осьові моменти інерції дорівнюють:

$$J_u = \frac{bh^3}{12}; \quad J_v = \frac{b^3h}{12}, \quad (8.16)$$

тому головні радіуси інерції площі поперечного суцільного прямокутного перерізу визначають за формулами:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/12}{bh}} = \frac{h}{2\sqrt{3}}; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{A}} = \sqrt{\frac{b^3h/12}{bh}} = \frac{b}{2\sqrt{3}}. \quad (8.17)$$

**Еліпсом інерції** називається еліпс (рис. 8.7), який побудовано на головних

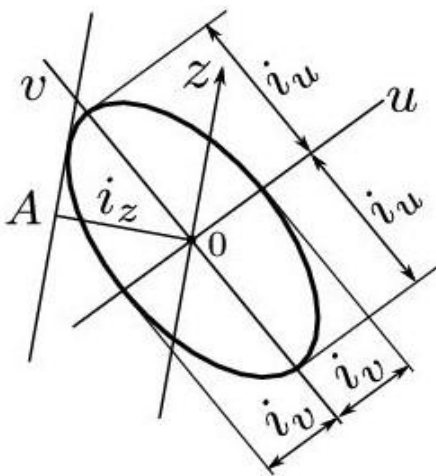


Рис. 8.7

центральных осей інерції перерізу, з напівосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому

вздовж осі  $u$  відкладаємо відрізки  $i_v$ , а вздовж осі  $v$  – відрізки  $i_u$ . Він описується рівнянням:

$$\frac{u^2}{i_v^2} + \frac{v^2}{i_u^2} = 1. \quad (8.18)$$

Для еліпса інерції характерна така властивість: радіус інерції відносно осі  $z$  визначається перпендикуляром  $OA$ , поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі. Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі  $z$  будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з

прямою, що сполучає центр  $O$  із серединою хорди і є точкою дотику. Вимірявши потім відрізок  $OA = i_z$ , знаходимо момент інерції  $J_z = A \cdot i_z^2$ .

### Контрольні запитання

1. Що називається статичним моментом площі перерізу відносно осі  $z$  або  $u$ , та в яких одиницях він вимірюється?
2. Чому дорівнюють статичні моменти площі поперечного перерізу стрижня відносно центральных осей перерізу?
3. Що називається осьовим і відцентровим моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня?
4. Що називається полярним моментом інерції площі поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?
5. Як співвідносяться між собою полярний та осьові моменти інерції?
6. Що таке головний центральний момент інерції перерізу?
7. Що називається осьовим і полярним моментом опору поперечного перерізу стрижня, та в яких одиницях він вимірюється?

8. Поясніть, чому дорівнює момент інерції площі складного поперечного перерізу, якщо відомі моменти інерції його складових частин?
9. Як визначається момент інерції площі поперечного перерізу відносно довільної осі, якщо відомі момент інерції відносно центральної осі, паралельної даній, та відстань між цими осями?
10. Запишіть формули для визначення напрямів (положення) головних центральних осей інерції перерізу.
11. Запишіть формули для визначення головних центральних моментів інерції площі перерізу через відомі центральні моменти інерції.
12. Що таке радіус інерції площі поперечного перерізу відносно осі, та в яких одиницях він виражається?
13. Що таке еліпс інерції та яка властивість для нього характерна?

## 9. ОСНОВНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

**Міцність** – здатність елементів конструкцій здійснювати опір дії зовнішніх навантажень без руйнування.

**Жорсткість** – здатність елементів конструкцій під дією зовнішніх навантажень отримувати деформації, які лежать у межах допустимої стійкості.

**Стійкість** – здатність елементів конструкцій приймати початкову форму стійкої рівноваги після зняття зовнішніх навантажень.

**В'язкість** – властивість сприймати ударні навантаження.

**Витривалість** – властивість довгий час витримувати змінні навантаження.

**Опір втомі матеріалу** – здатність елементів конструкцій чинити опір руйнуванню при дії циклічних навантажень.

### 9.1. Припущення про загальні властивості матеріалів

1. Матеріал тіла являє собою однорідне ізотропне суцільне середовище.
  2. До певної границі навантаження матеріал має ідеальну пружність.
  3. Переміщення точок елементів при деформації дуже малі у порівнянні з розмірами елемента (принцип початкових розмірів).
  4. Переміщення точок елементів у пружній стадії роботи матеріалу пропорційні силам, що викликають переміщення.
  5. До прикладання навантажень у тілі немає початкових навантажень.
  6. Деформації тіла малі. Їх вплив на взаємний розподіл навантажень можна не враховувати.
  7. Поперечні перерізи бруса плоскі до навантаження й лишаються плоскими після навантаження (гіпотеза плоских перерізів).
  8. У віддалених від місця докладання навантажень точках тіла внутрішні сили мало залежать від засобу докладання навантажень (принцип Сен-Венана).
- Ці поняття є ідеальними моделями матеріальних тіл з різним ступенем абстракції реальних фізичних властивостей.

Усі види елементів споруд і машин зводять до чотирьох форм: стрижня (*а, б*), пластини (*в*), оболонці (*г*) і масиву (*д*) (рис. 9.1). Об'єктом дослідження в опорі матеріалів є стрижень.

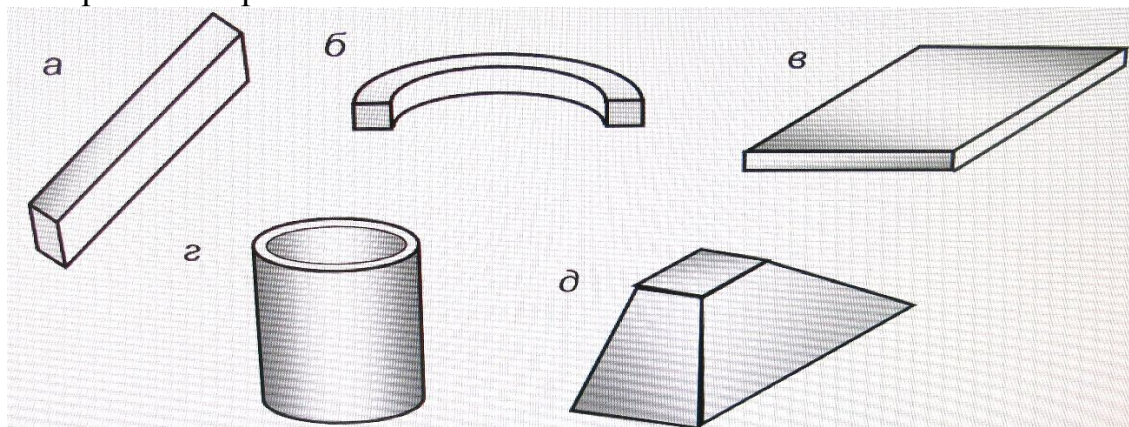


Рис. 9.1

## 9.2. Дослідження механічних характеристик матеріалів

Під час проектування й розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів механізмів, машин та будівельних споруд треба знати механічні характеристики конструкційних матеріалів. Тому матеріали випробовують на **розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання і твердість**. Механічні характеристики більшості матеріалів визначені експериментально і зведені в таблиці в довідниках, але часто виникає потреба в експериментальному вимірюванні характеристик різних матеріалів. Основним експериментом для знаходження характеристик матеріалів є іспит на розтягнення. Зразки стандартних розмірів закріплюють у дослідних машинах і розтягують до руйнування. На рис. 9.2 показана машина для проведення випробувань на розтягнення, стиск, втому, статичних випробувань при високій температурі. Повний контроль над системою забезпечує ПК.



Рис. 9.2

Прилад записує залежність абсолютного видовження матеріалу від прикладеної сили (діаграму розтягнення). На рис. 9.3 показана діаграма для малоуглецевої сталі в координатах  $F - \Delta\ell$ . Діаграма розтягнення сталюго зразка має чотири характерні ділянки: *I* – ділянка пропорційності; *II* – ділянка плинності; *III* – ділянка самозміцнення; *IV* – ділянка руйнування.

За діаграмою можна визначити величину пружних і остаточних деформацій у будь-який момент випробувань. У точці *A* діаграма різко змінює напрямок – у металі відбуваються незворотні зміни – змінюється внутрішня структура і спостерігається самозміцнення.

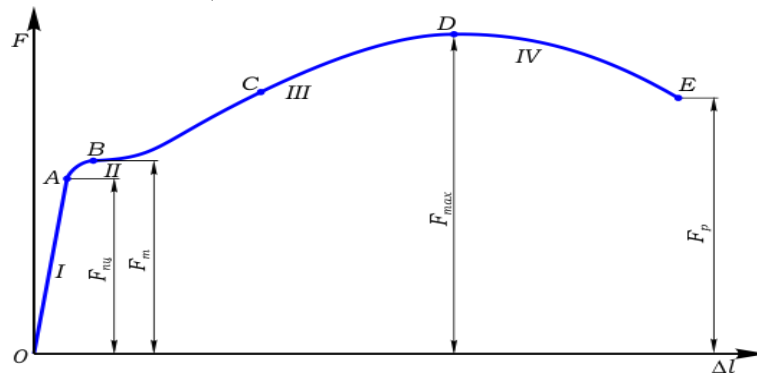


Рис. 9.3

У точці *D* розтягуючі зусилля досягають максимуму. У робочій частині з'являється «шийка» (рис.9.4).



Рис. 9.4

У разі зменшення поперечного перерізу зразка при розтягуванні зусилля зменшується і крива діаграми іде вниз. У точці *E* в області шийки зразок розривається. Робота, що витрачена на розрив, приблизно дорівнює площі діаграми:

$$W = 0,8F_{max} \cdot \Delta\ell_{max}.$$

Для отримання істинних механічних характеристик зразка діаграму розтягнення перетворюють у діаграму напруженості (рис. 12.3). На отриманій діаграмі  $F - \Delta\ell$  відмічають декілька характерних точок, в яких визначаються розтягуючі сили  $F$  і абсолютні деформації  $\Delta\ell$ . Для цих точок знаходять нормальні напруги за формулою:  $\sigma_i = F_i / A_0$ , де  $A_0$  – площа поперечного перерізу робочою частиною зразка; відносні деформації:  $\varepsilon_i = \Delta\ell / \ell_0$ . За отриманими даними будується умовна та істинна діаграма напруги-деформації (рис. 12.3). На діаграмі показані характерні точки.

Границя пропорційності  $\sigma_{nc} = F_{nc} / A_0$  визначається як крайня верхня точка прямолінійної ділянки діаграми.

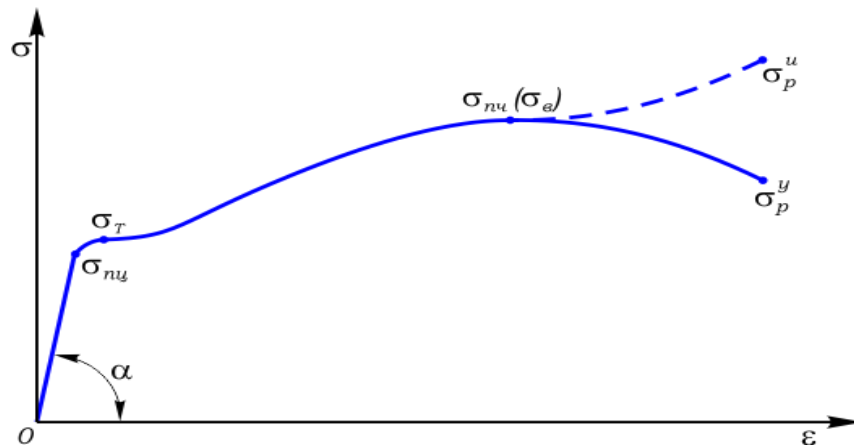


Рис. 9.5

**Границя пружності**  $\sigma_{0,05} = F_{0,05} / A_0$  – максимальне значення напруги, при якій в елементах конструкції не виникає остаточних деформацій. На практиці за нього приймають напруги, при яких остаточні деформації не перевищують 0,05% ( $\sigma_{0,05}$ ). Вона визначається при точних вимірюваннях.

**Границя текучості**  $\sigma_T = F_T / A_0$ . За границею плинності – **майданчик текучості**. Деформація зростає без збільшення напруження. **Пластична** – частина деформації, що не зникає після зняття напруження.

**Умовну границю текучості**  $\sigma_{0,2} = F_{0,2} / A_0$  визначають відкладаючи вздовж осі  $\epsilon$  значення 0,2%, і проводять промінь паралельно початковій ділянці діаграми напружень. Точка перетинання проме із лінією діаграми і є умовною границею текучості матеріалу.

**Границя міцності**  $\sigma_m = F_{max} / A_0$  – максимальна напруга під час випробувань. Вища точка умовної діаграми.

**Напруга в момент руйнування зразка:**

– умовна напруга руйнування  $\sigma_p^y = F_p / A_0$ ;

– істинна напруга при  $\sigma_p^i = F_p / A_{ш}$ , де  $A_{ш}$  – площа поперечного перерізу шийки.

### Основні види навантажень і деформацій

У разі найпростіших випадків навантаження бруса в його поперечних перерізах виникає один внутрішній силовий фактор.

**Розтягнення** – у поперечному перерізі бруса виникає тільки внутрішня подовжня сила  $N$ .

**Кручення** – деформація, при якій виникає тільки внутрішній обертальний момент  $T$ .

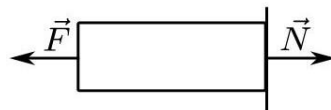


Рис. 9.4

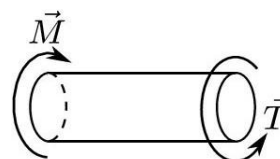


Рис. 9.5



**Згин** – вид навантаження, при якому у поперечному перерізі бруса діє згинаючий момент  $M$ .

**Зсув (зріз)** – у поперечному перерізі бруса діє тільки внутрішня поперечна сила  $Q$ . При зрізі зсовуються суміжні перерізи. Знак внутрішніх сил приймається згідно з правилами.

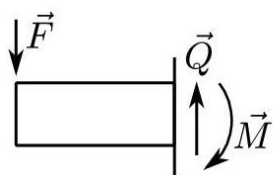


Рис. 9.6

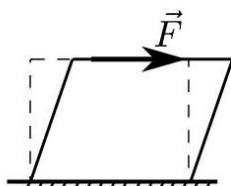
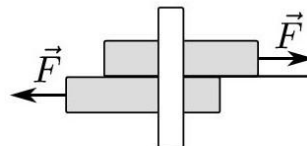


Рис. 9.7



### Внутрішні сили фактори. Метод перерізів

Під дією зовнішніх сил стрижень деформується й у поперечному перерізі бруса виникають додаткові сили взаємодії між частинками тіла і обертальні моменти (внутрішні сили фактори) (рис. 9.8).

Внутрішні сили фактори:

$N_z = N$  – поздовжня розтягуюча (стискаюча) сила;

$M_z = T$  – обертальний момент;

$Q_x (Q_y) = Q$  – поперечні сили;

$M_x (M_y) = M$  – згинаючі моменти.

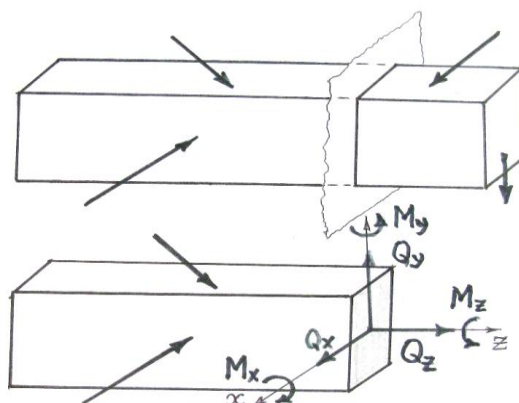


Рис. 9.8

Якщо стрижень подумки розсікти площиною, перпендикулярної до поздовжньої осі  $z$ , то по всій площі поперечного перерізу від однієї частини стержня на другу будуть передаватися внутрішні сили. Відкинемо праву частину стрижня. Внутрішні сили, що передаються від неї на ліву частину (рис.) стають зовнішніми силами і можуть бути представлені **головним вектором**  $\vec{R}$  і **головним моментом**  $\vec{M}$ . За центр приведення приймають центр тяжіння поперечного перерізу стрижня, через який проводять координатні осі  $x, y$ , що лежать в площині перетину, і вісь  $z$ , перпендикулярну площині поперечного перерізу.

Головний вектор розкладають на поздовжню розтягуючу (стискаючу)

силу  $N_z = N$  та  $Q_x (Q_y)$  – поперечні сили (рис. 9.8).

Головний момент розкладають на обертальний момент  $M_z = T$  та  $M_x (M_y)$  – згинаючі моменти.

**Для визначення внутрішніх зусиль використовують метод перерізів.**

Він полягає у виконанні таких дій:

- 1) розрізати стрижень площиною поперечного перерізу на дві частини;
- 2) відкинути одну з частин стержня;
- 3) замінити дію відкинутої частини стержня на решту внутрішніми зусиллями;
- 4) врівноважити решту стрижня

У загальному випадку внутрішні сили орієнтовані під кутами до перерізу, тому для спрощення розрахунків їх проєктують на координатні осі. Кожний з внутрішніх силових факторів визначають з рівнянь рівноваги частини, що залишилася після розтинання бруса. (рівняння статки):

$$\begin{aligned} \sum F_x = Q_x + \sum_{\text{осм}} F_{ix} = 0; & \Rightarrow Q_x = \sum_{\text{осм}} F_{ix}; & \sum m_x = M_x + \sum_{\text{осм}} m_x(F_i) = 0; \\ \sum F_y = Q_y + \sum_{\text{осм}} F_{iy} = 0; & \Rightarrow Q_y = \sum_{\text{осм}} F_{iy}; & \sum m_y = M_y + \sum_{\text{осм}} m_y(F_i) = 0; \\ \sum F_z = Q_z + \sum_{\text{осм}} F_{iz} = 0; & \Rightarrow Q_z = \sum_{\text{осм}} F_{iz}; & \sum m_z = M_z + \sum_{\text{осм}} m_z(F_i) = 0. \end{aligned}$$

### Правила знаків для видів деформації

**Внутрішня поздовжня сила  $N$**  приймається **позитивною**, якщо хоче розтягнути відсічену частину бруса.

**Внутрішній скручувальний момент  $T$**  приймається **позитивним**, якщо хоче повернути переріз проти годинникової стрілки при розгляданні з боку відкинутої частини бруса.

**Внутрішня поперечна сила** приймається **позитивною**, якщо вона хоче повернути частину бруса, що розглядається, за годинниковою стрілкою.

**Внутрішній згинальний  $M$**  приймається **позитивним**, якщо він хоче стиснути верхні шари бруса.

### **Епюри**

У випадках, коли внутрішні зусилля змінюють величину і знак, для наочності будують епюри.

**Епюрами називається графічне подання даних про розподіл факторів по довжині або перерізу бруса, що розглядається.**

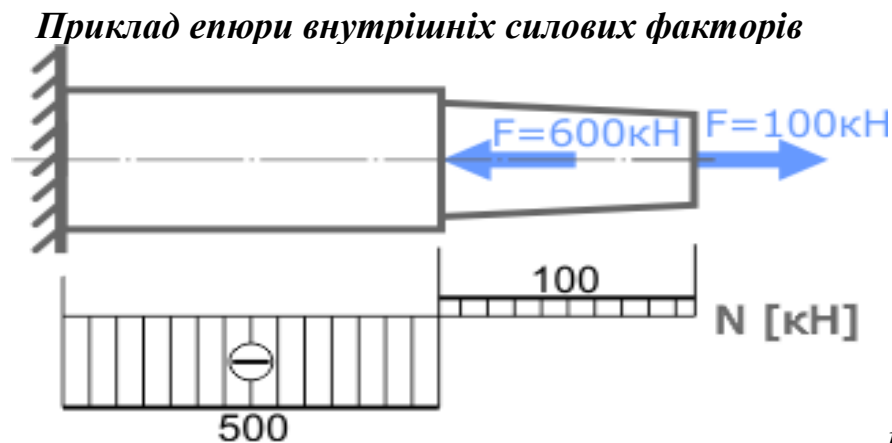
Епюри наглядно демонструють навантаження бруса, положення небезпечних точок, напрям і величину переміщень перерізів. Для їх побудови використовують метод перерізів:

1. Записують вирази для визначення внутрішніх зусиль за кожною силовою ділянкою.

2. Розраховують значення факторів на границях силових ділянок у характерних перерізах бруса або точках його поперечного перерізу. Отримані дані відкладають від базової лінії у відповідному масштабі і точки з'єднують.

### ***Правила і рекомендації при побудові епюр***

- 1) Базова (нульова) лінія епюри паралельна осі бруса. Ординати значень відкладають у масштабі з відповідним знаком;
- 2) поряд вказують позначення і розмірність;
- 3) поле епюр штрихують і вказують знак. У характерних точках вказують значення ординат,
- 4) базова лінія і лінія штриховки – тонкими лініями, а лінії меж – жирними. Поряд вказують її позначення і розмірність.



### ***Контрольні запитання***

1. Дайте визначення понять міцність, жорсткість.
2. Що називається стрижнем або брусом?
3. Назвіть основні класифікації та види стрижнів.
4. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про малість деформацій.
5. Що таке пружність? Сформулюйте та поясніть гіпотезу про ідеальну пружність матеріалу.
6. Сформулюйте та поясніть гіпотезу про лінійну залежність між деформаціями і навантаженнями.
7. Запишіть закон Гука для стрижня при деформації розтягу зсуву.
8. Сформулюйте і поясніть гіпотезу плоских перерізів.
9. Що називають деформацією твердого тіла?
10. Дайте визначення поняття «внутрішні сили».
11. На які дві складові проекції розкладають повне напруження  $p$ ?
12. Що таке пружна, пластична та абсолютна деформація?
13. У чому полягає відносна, температурна та об'ємна деформація?
14. Для чого в опорі матеріалів застосовують метод перерізів?

## 10. ДЕФОРМУВАННЯ РОЗТЯГОМ І СТИСКОМ

### 10.1. Напруження та деформації при розтяганні й стисканні

Напруженням називають міру дії внутрішніх силових факторів на одиницю площі в точці перерізу бруса, що розглядається. Розмірність – паскаль [Па], [МПа]. Внутрішні сили безперервно розподілені за перерізом. Рівнодіючу внутрішніх сил у будь-якій точці на площині  $A$  позначимо  $\Delta R$ . Відношення  $\Delta R/A = p_{cp}$  являє собою середнє напруження в будь-якій точці площини перерізу. Повне напруження в точці – частина внутрішніх зусиль, яка припадає на конкретну точку перерізу  $p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \Delta R / \Delta A$ . Повне напруження  $p$  розкладають на три складові: по нормалі до площі перерізу  $\sigma$  і двох осях у площині перерізу  $\tau$  (дотичне напруження).

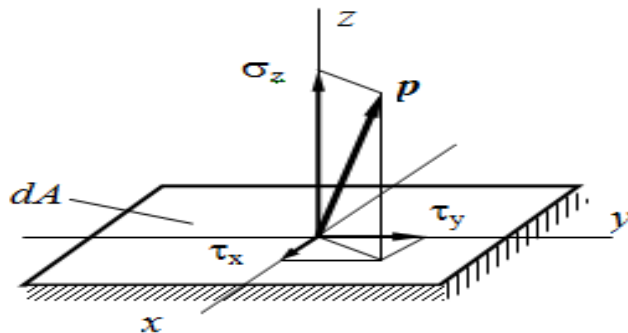


Рис. 10.1

Відокремимо на перерізі бруса нескінченно малу площину  $dA$  і прикладемо до неї елементарні сили  $\sigma dA$ ,  $\tau_x dA$ .

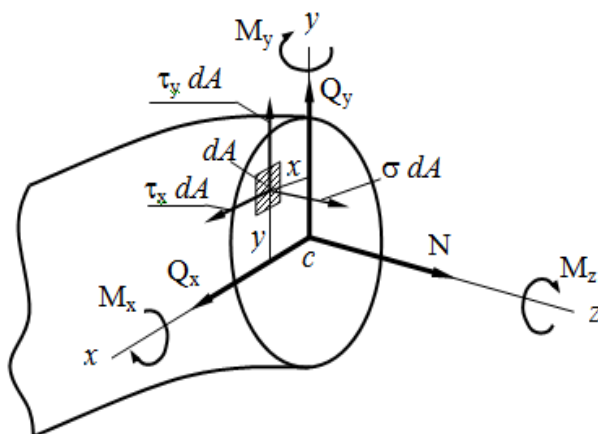


Рис. 10.2

Знайдемо проекції цих елементарних сил і їх моментів відносно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma \cdot dA; & M_x &= \int_A y \cdot \sigma dA; \\
 Q_y &= \int_A \tau_y \cdot dA; & M_y &= \int_A x \cdot \sigma dA; \\
 Q_x &= \int_A \tau_x \cdot dA; & M_z &= \int_A (\tau_y x - \tau_x y) dA.
 \end{aligned}$$

Наведені формули дозволяють знайти рівнодіючі внутрішніх сил через напругу, якщо відомий закон розподілу по перерізу. Знаходять напругу через рівнодіючі внутрішніх сил, при цьому розглядають паралельно умови рівноваги і деформації бруса.

## 10.2. Напруження в перерізах

Прикладені до тіла зовнішні навантаження приводять до виникнення в його перерізах внутрішньої сили  $\vec{R}$  і моменту  $\vec{M}$  (рис. 14.3). Під час розрахунків використовують метод перерізів.

**Метод перерізів** полягає в тому, що тіло умовно розрізають площиною на дві частини, одну з яких відкидають, а взамін неї до перерізу частини, що залишилася, прикладають внутрішні сили, які діяли до розрізання (рис. 14.4). Внутрішня сила і внутрішній момент діють на весь переріз бруса.

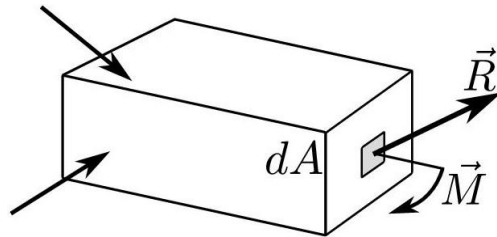


Рис. 10.3

У поперечних перерізах стрижня при розтяганні-стисканні повні напруження за модулем та напрямом дорівнюють нормальним  $\sigma$  (рис.10.4).

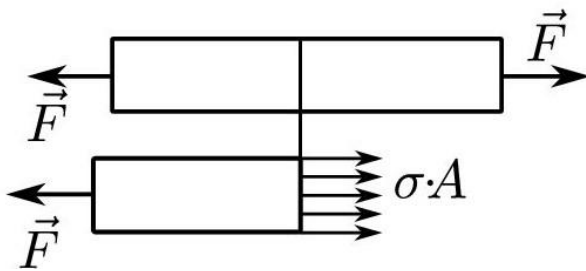


Рис. 10.4

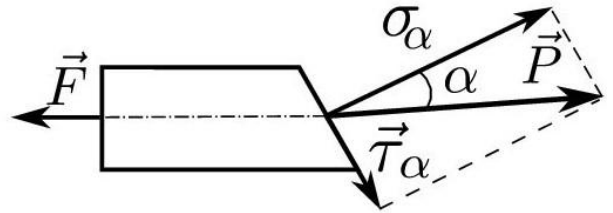


Рис. 10.5

Площа перерізу, який розташований під кутом  $\alpha$  до поперечного,  $A_\alpha = A_0 / \cos \alpha$  (рис. 10.5). Вектори повного напруження в похилому перерізі напрямлені вдовж лінії дії зовнішньої сили  $\vec{F}$ . З умови рівноваги відсіченої частини  $F = N$  маємо  $p_\alpha A_\alpha = \sigma_0 A_0$ , звідки:

$$p_\alpha = \frac{N}{A_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (10.1)$$

Проеціюючи повне напруження  $P$  на площину перерізу і нормаль до неї, отримаємо складові – дотичне  $\tau_\alpha$  і нормальне  $\sigma_\alpha$  напруження (рис. 10.5):

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (10.2)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha. \quad (10.3)$$

В окремих випадках (наприклад, при розтяганні-стискуванні та крученні) в перерізах бруса виникають тільки дотичні напруження. Якщо в перерізах бруса є тільки нормальні або дотичні напруження, то їх зрівнюють із допустимими значеннями напружень.

Якщо навантаження діють лише вздовж осі стрижня, то в поперечних перерізах стрижня із шести внутрішніх силових факторів виникає лише один – поздовжнє (осьове) зусилля  $N$ . **Осьове зусилля  $N$  у перерізі** (рис. 10.6) є рівнодієюю нормальних напружень  $\sigma = F/S$ , що виникають у кожній із точок перерізу:

$$N = \int_F dN = \int_F \sigma dA. \quad (10.4)$$

З рівняння не можна визначити нормальне напруження  $N$ , оскільки невідомий закон розподілу напружень у точках поперечного перерізу.

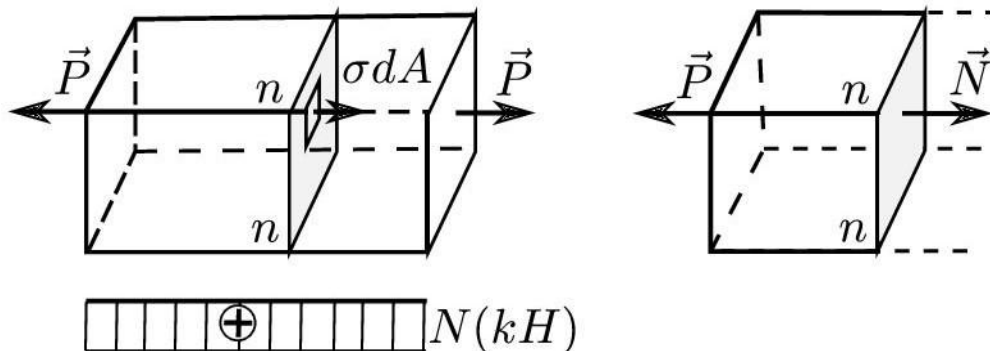


Рис. 10.6

**Гіпотеза плоских перерізів:** плоскі поперечні перерізи стрижня залишаються плоскими в процесі деформації. Всі елементи перерізу подовжуються на одну і ту саму величину, і їхні відносні подовження  $\varepsilon = \frac{(l-l_0)}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$  однакові.

### 10.3. Залежності між напруженнями і деформаціями

При пружних деформаціях (розтягуванні або стисканні) стрижнів залежність між напруженнями і відносними деформаціями (рис. 10.6) описується **законом Гука:**  $\sigma = E \cdot \varepsilon$ , де  $E$  – модуль Юнга. Для однорідного й ізотропного матеріалу маємо:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = const. \quad (10.5)$$

Підставляючи вираз (10.5) у формулу (10.4), для всієї площі  $A$  поперечного перерізу стрижня одержимо значення поздовжнього (осьового) зусилля:

$$N = \int_A \sigma dA = \varepsilon E \int_A dA = E \varepsilon A = \sigma A, \text{ звідки } \sigma = N/A. \quad (10.6)$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в перерізі, що розглядається. **У разі стискання напруження вважають від'ємними.** Формула (10.6)

справедлива для перерізів, досить віддалених від місць прикладання зосереджених навантажень.

**Принцип Сен-Венана:** якщо зони прикладення навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, то в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладення сил, напруження мало залежать від способу навантажування.

Дослідження показують, що в усіх прикладах у поперечному перерізі, віддаленому на відстань, що перевищує в 1,5 – 2 рази його поперечні розміри, напруження практично однакові. Із виразу (10.6) можна знайти відносне подовження:  $\varepsilon = \sigma/E = N/EA$ . У межах призматичної ділянки стрижня завдовжки  $\ell$ , виготовленого з однорідного матеріалу ( $E = \text{const}$ ), у перерізах якого діють однакові поздовжні зусилля  $N$ , подовження кожної одиниці довжини однакові, отже, абсолютне подовження стрижня становить:

$$\Delta\ell = \varepsilon \cdot \ell = N \cdot \ell / E \cdot A. \quad (10.7)$$

Добуток  $E \cdot A$  у знаменнику формули називається **жорсткістю** поперечного перерізу **стрижня при розтяганні та стисканні й має розмірність** сили. **Жорсткістю стрижня** називають величину  $c = \frac{E \cdot A}{\ell}$ .

Якщо на ділянці, що розглядається, поздовжня сила та поперечний переріз змінні (рис. 10.7), то для елемента нескінченно малої довжини  $dx$  на підставі формули (10.7) можна записати:

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{E \cdot A_x}. \quad (10.8)$$

Повне подовження ділянки завдовжки  $\ell$  дістанемо, підсумувавши подовження всіх нескінченно малих відрізків  $dx$ :

$$\ell = \int_0^{\ell} \frac{\sigma_x dx}{E} = \int \frac{N(x)dx}{EA_x}. \quad (10.9)$$

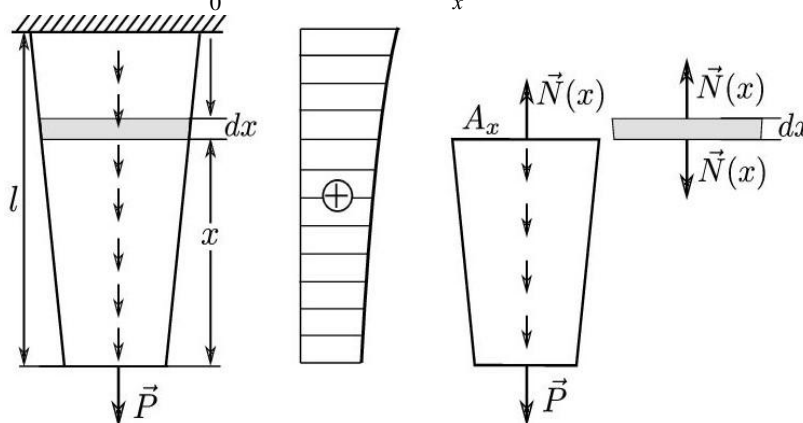


Рис. 10.7

Переміщення деякого перерізу відносно іншого дорівнює поздовжній деформації відрізка стрижня між перерізами, що розглядаються.

Збільшення довжини при деформації розтягання (стискання) супроводжується зменшенням площі перерізу (рис. 10.8). При розтяганні поперечні дефор-

мації  $\Delta d$  від'ємні, а при стисканні – додатні. Відносною поперечною деформацією називається відношення абсолютної поперечної деформації до відповідного початкового розміру  $\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$ . **Між поперечною та поздовжньою відносними деформаціями** в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення, яке характеризується коефіцієнтом Пуассона  $\mu$ :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{non}}{\varepsilon_{нов}} \right| = \frac{\Delta d}{d} : \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (10.10)$$

де  $d$  – діаметр стрижня;  $\Delta d$  – зміна діаметра стрижня.

Коефіцієнт Пуассона – безрозмірна величина. Ураховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо:

$$\varepsilon_{non} = -\mu \cdot \varepsilon_{нов} = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (10.11)$$

При стисканні напруження у формулу (10.11) слід підставляти зі знаком «мінус». Коефіцієнт Пуассона  $\mu$ , як і модуль пружності  $E$ , характеризує пружні властивості матеріалу.

Під час деформації зсуву (рис. 10.9) шари тіла зміщуються паралельно площі зсуву і закон Гука записують у вигляді:

$$\tau = G\gamma, \quad (10.12)$$

де  $\tau$  – напруга зсуву;  $\gamma \approx BB^1/AB$  – відносна деформація.

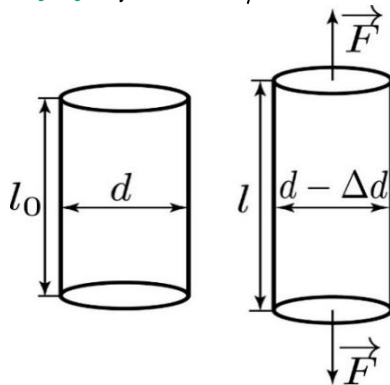


Рис. 10.8

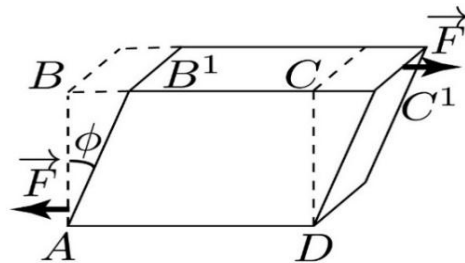


Рис. 10.9

**Модуль зсуву  $G$**  – фізичний параметр матеріалу, який характеризує жорсткість матеріалу при деформаціях зсуву. Використовується в розрахунках на зсув, зріз і кручення. Модуль зсуву визначають відношенням дотичних напружень  $\tau$  до кута зсуву:

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F/A}{BB^1/AB} = \frac{F \cdot AB}{A \cdot BB^1}, \quad (10.13)$$

де  $A$  – площа прикладання сили  $F$ ;  $BB^1$  – величина зсуву;  $AB$  – розмір елемента.



Модулі Юнга, зсуву і коефіцієнт Пуассона пов'язані між собою співвідношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (10.14)$$

Мінімальні значення коефіцієнта Пуассона у твердих матеріалів, максимальні – в еластичних. Для сталей залежно від марки значення  $\mu$  від 0,27 до 0,32.

## 11. НАПРУЖЕНИЙ СТАН

### 11.1. Напруження та деформації в точці

Інтенсивність внутрішнього зусилля в довільній точці перерізу стрижня називається напруженням. Напруження міряють в мегапаскалях ( $1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$ ) або в кілоньютонах на сантиметр квадратний  $\text{кН}/\text{см}^2$ , що зручніше в практичних розрахунках  $1 \text{ кН}/\text{см}^2 = 10 \text{ МПа}$ . Розрізняють нормальне напруження  $\sigma = dN/dA$ , перпендикулярне площі перерізу, і дотичне  $\tau_x = dQ_x/dA$ ,  $\tau_y = dQ_y/dA$ , що лежать в площині перерізу.

Напруження можна обчислити на будь-якій нескінченно малої площі  $dA$ , що проходить через точку твердого тіла. Сукупність напружень на всіх площях що проходять через точку, називають напруженим станом матеріалу в точці (рис.11.1).

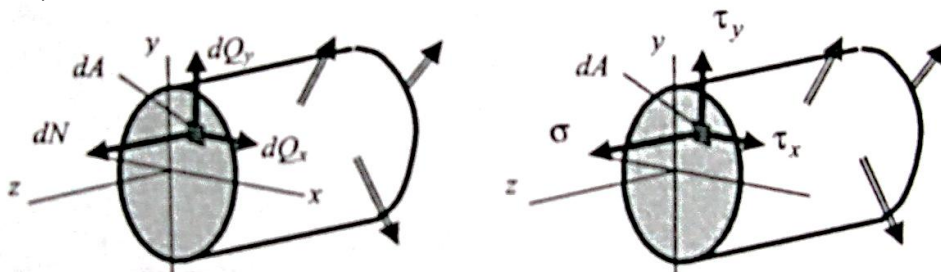


Рис. 11.1

Близько деякої точки  $P$  твердого тіла виділимо нескінченно малий елемент  $dx \times dy \times dz$  (рис. 11.2). Його деформований стан в площині  $xPy$  показано пунктирними лініями.

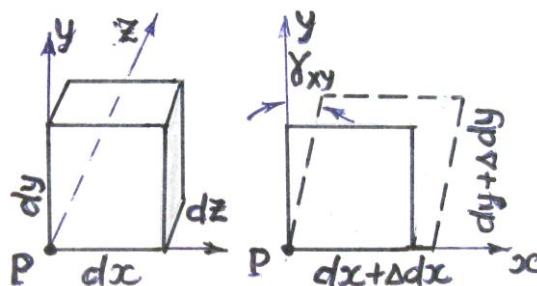


Рис. 11.2.

Відносні лінійні деформації в напрямку координатних осей  $\varepsilon_x = \Delta dx/dx$ ,  $\varepsilon_y = \Delta dy/dy$ , а також кут  $\gamma_{xy}$ . При обертанні координатних осей навколо точки  $P$  зазначені деформації будуть змінюватися.

Сукупність відносних лінійних деформацій і кутів зсуву для довільних осей, проведених через обрану точку, називають деформованим станом матеріалу в точці. У загальному випадку воно визначається 6 відносними деформаціями:  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

### 11.2. Види напруженого стану

На гранях елементарного паралелепіпеда  $dx \times dy \times dz$  (рис. 11.2) в загальному випадку можуть діяти нормальні і дотичні напруження. Сукупність напружень на всіляких площадках, що проходять через точку, називається напруженим станом матеріалу в точці. Паралелепіпед можна так розташувати в просторі, що на його гранях залишаться тільки нормальні напруження. Такі грані називаються головними площадками, а напруження на них – головними напруженнями. Найбільше головне напруження позначається  $\sigma_1$ , найменше –  $\sigma_3$ , тому  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Розрізняють три види напруженого стану: лінійне, плоске і об'ємне (рис. 11.3).

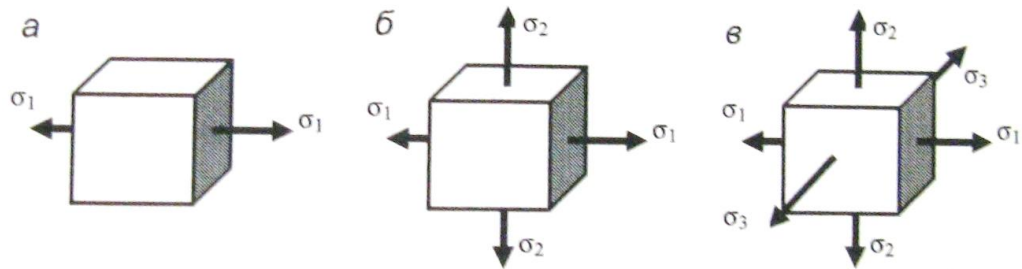


Рис. 11.3

### Плоский напружений стан

Виділимо з тонкої пластинки нескінченно малий елемент, по боковим граням якого діють нормальні і дотичні напруження (рис. 11.3, а).

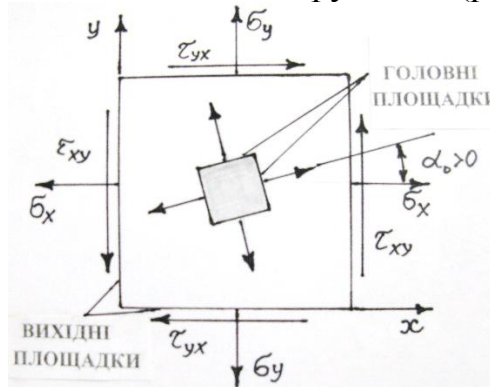


Рис. 11.4

Припустимо, що напруги по товщині пластинки розподілені рівномірно. Будемо вважати напруження на бічних гранях елемента позитивними (рис. 11.4).

Відповідно до закону парності дотичних напружень  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  на взаємно-перпендикулярних площадках дотичні напруження рівні за величиною і спрямовані так, що прагнуть обертати елемент в протилежних напрямках.

Головні площадки (рис. 11.4) складають кут  $\alpha_0$  з вихідними, величину якого визначають з виразу

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Головні напруження, що позначаються як  $\sigma_{\max}$  та  $\sigma_{\min}$ , обчислюють за формулою

$$\sigma_{\frac{\max}{\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}.$$

Екстремальні дотичні напруження на площадках, нахилених до головних майданчиків під кутом  $45^\circ$ .

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

Якщо в загальному випадку на гранях елемента діють нормальні і дотичні напруження (рис. 11.5, а), то в точці тіла виникають відносні лінійні деформації (рис. 11.5, б):

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} \quad \text{та кутова деформація } \gamma_{xy}.$$

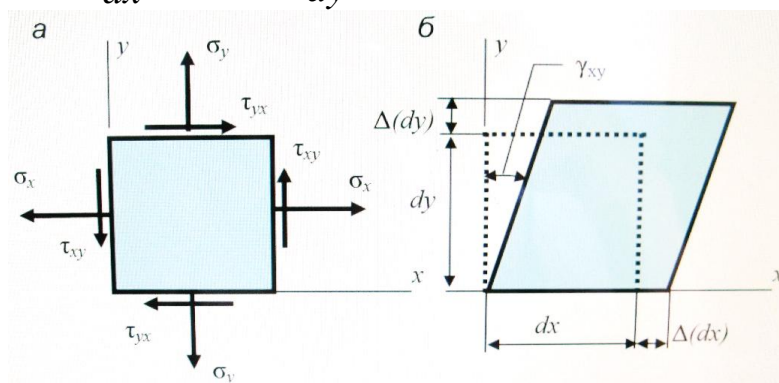


Рис. 11.5.

На рис 11.5, а – плоский напружений стан: а – напруження; б – деформації. За законом Гука між відносними деформаціями і напруженнями в точці виконується залежності:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x).$$

За чистим зсувом ( рис. 11.4) вихідні площадки називають площадками чистого зсуву, головні площини нахилені під кутом  $45^0$  а головні напруження дорівнюють дотичним (одно з головних напружень – розтягуюче, друге – стискуюче). Максимальні і мінімальні напруження  $\sigma_{\max} = \tau = \sigma_1$ ;  $\sigma_{\min} = -\tau = \sigma_3$ .

### Об'ємний напружений стан

У загальному випадку на гранях нескінченно малого елемента можуть діють нормальні і дотичні напруження, позитивні напрямки яких показані на рис. 3.6. Нормальні напруження забезпечуються індексом, який вказує координатну вісь, уздовж якої направлено напруження.

З умови рівноваги нескінченно малого паралелепіпеда впливає закон парності дотичних напружень: дотичні напруження на взаємно-перпендикулярних площадках, спрямовані перпендикулярно перетину цих площадок і рівні за величиною (рис. ).

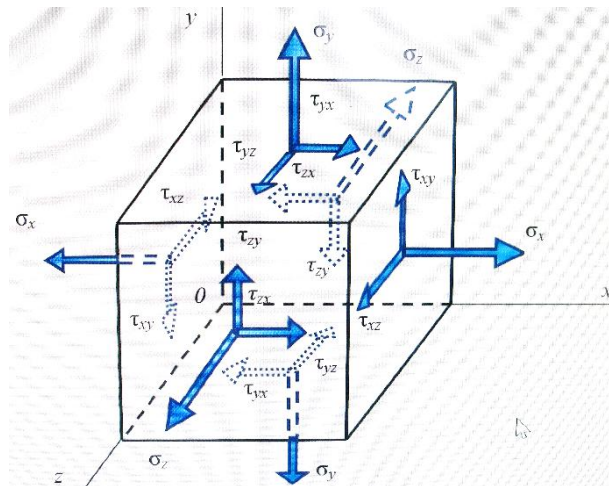


Рис. 11.6

Доведено, що навколо будь-якої точки тіла можна виділити нескінченно малий елемент, *на гранях якого відсутні дотичні напруги, і можуть діяти тільки нормальні напруження* ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ). *Грані такого елемента називаються головними площадками, а нормальні напруження на цих гранях – головними напруженнями.*

Навантаження, що діють на гранях нескінченно малого паралелепіпеду, можна записати у вигляді тензора напружень:

$$T_{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx} \\ \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy} \\ \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z \end{array} \right\}.$$

Значення головних напружень отримують з вирішення кубічного рівняння:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0.$$

Перший ( $I_1$ ), другий ( $I_2$ ) і третій ( $I_3$ ) інваріанти тензора напружень при будь-якій орієнтації в просторі граней елементарного паралелепіпеда, для даної точки значення залишаються незмінними:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const};$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{yx}^2 - \tau_{zy}^2 - \tau_{xz}^2 = \text{const};$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 + 2\tau_{yx} \tau_{zy} \tau_{xz} = \text{const}.$$

Екстремальне дотичне напруження в точці діє на площі, нахиленою під кутом  $45^\circ$  до максимального і мінімального з трьох головних напружень, і дорівнює їх напіврізниці:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Якщо на гранях нескінченно малого елемента діють нормальні і дотичні напруження, то в точці тіла виникають відносні лінійні деформації:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy}; \quad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz},$$

та кутові деформації:  $\gamma_{xy}; \gamma_{yz}; \gamma_{zx}$ .

Деформації також записують у вигляді тензора деформацій:

$$T_\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x, \frac{1}{2} \gamma_{yx}, \frac{1}{2} \gamma_{zx} \\ \frac{1}{2} \tau_{yx}, \varepsilon_y, \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx}, \frac{1}{2} \gamma_{yz}, \varepsilon_z \end{array} \right\}$$

Сукупність відносних подовжень і кутів зсуву для будь-яких напрямків, проведених через точку тіла, називають **деформованим станом в точці**.

Існують такі три ортогональних напрямки, для яких кути зсуву відсутні, а відносні подовження такі, що  $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ . Зазначені напрями називаються головними осями деформованого стану, а деформації – **головними деформаціями в точці**.

### 11.3. Розрахунки на міцність при складному напруженому стані

Для того щоб при оцінці міцності матеріалів, що знаходяться в складному напруженому стані, використовувати характеристики міцності, отримані в дослідах на розтягування і стиснення, кожному складному напруженому стану ставиться у відповідність рівнозначний йому лінійний напружений стан (рис. 3.8). Такий лінійний напружений стан називається еквівалентним.

Для переходу від головних напружень до еквівалентного напруження використовують різні теорії міцності, які передбачають ті чи інші причини настання граничного напруженого стану (критерії міцності). Відомі чотири класичні теорії-міцності.

**Перша** - теорія найбільших нормальних напружень, за якою граничний напружений стан настає, коли максимальні нормальні напруги досягають граничної величини для матеріалу. Теорія застосовується при розтягуванні крихких матеріалів.

**Друга** - теорія найбільших відносних деформацій, за якою граничний напружений стан настає, коли максимальні відносні подовження досягають граничної величини для матеріалу. Теорія застосовується при стисненні крихких матеріалів.

**Третя** - теорія найбільших дотичних напружень, згідно з якою граничний напружений стан настає, коли максимальні дотичні напруження досягають граничної величини для матеріалу. Ця теорія застосовується для пластичних матеріалів, що однаково чинять опір розтягуванню і стисненню.

**Четверта** - енергетична теорія, за якою граничний напружений стан настає, коли питома потенційна енергія деформації, витрачена на зміну форми тіла, досягає граничної величини для матеріалу. Теорія застосовується для пластичних матеріалів, які однаково чинять опір розтягуванню і стисненню.

Є ряд теорій, які не пояснюють причину руйнування, а прогнозують міцність матеріалу за результатами дослідів при простих деформаціях. Для будівельних матеріалів, більш міцних при стисненні, ніж при розтягуванні, часто застосовують теорію міцності О. Мора. Вирази еквівалентних напружень, що обчислюються за різними теоріями міцності, приведені в табл. 3.1.

Таблиця

	Теорії міцності	Еквівалентне напруження $\sigma_{екв}$
1	Перша	$\sigma_1$
2	Друга	$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$
3	Третя	$\sigma_1 - \sigma_3$
4	Четверта	$\sqrt{\frac{1}{2}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2)}$
5	О. Мора	$\sigma_1 - k\sigma_3$ , де $k = \frac{\sigma_{нч}^{розт}}{\sigma_{нч}^{стиск}}$ - відношення границь міцності матеріалу

За будь-якою теорією міцності еквівалентне напруження повинно бути більшим ніж допустиме:  $\sigma_{екв} \leq [\sigma]$ . Для випадка **плоского напруженого стану** умови міцності:

$$\sigma_{екв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad \sigma_{екв}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Ці формули використовують при розрахунках сталевих стрижнів, коли стрижень отримує деформації кручення з розтягуванням (стисненням), кручення з вигином, кручення з розтягуванням і згином.

### **Контрольні запитання**

1. Що називається напруженим станом матеріалу в точці?
2. Які бувають види напруження?
3. Які напруження називаються головними?
4. Які площадки називаються головними?
5. Що таке чистий зсув?
6. Чому рівні головні напруження при чистому зсуві і як вони спрямовані?
7. У чому полягає закон парності дотичних напружень?
8. Що таке тензор напружень?
9. Що таке тензор деформацій?
10. Запишіть формулу закону Гука при плоскому напруженому стані.
11. Яке напружений стан називається граничним?
12. Скільки ви знаєте класичних теорій міцності?
13. Яка умова пов'язує заданий складний напружений стан і еквівалентний йому лінійний напружений стан?
14. Для яких матеріалів застосовують третю і четверту теорії міцності?

### **11.4. Умови міцності і жорсткості. Допустимі напруження**

Надійні розміри і форму конструкцій і деталей визначають за **розрахунками на міцність та жорсткість**. Головним є розрахунок на міцність. Розглянемо умови міцності та жорсткості для розтягання та стискання. *Небезпека початку руйнування характеризується значеннями найбільших нормальних та дотичних напружень, а також їх комбінаціями, які діють у напруженіших точках перерізу.*

Найбільші напруження за умови надійної роботи деталі обмежуються **допустимими напруженнями**. При розтяганні та стисканні допустимі напруження позначають відповідно  $[\sigma_+]$  та  $[\sigma_-]$ , при зсуві –  $[\tau]$ . Якщо відомі допустимі напруження і є формули, що визначають напруження через зусилля і моменти в перерізі, то можна розрахувати цю деталь на міцність. У разі розтягання або стискання стрижня знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень, і для цих перерізів записують **умову міцності**:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_{max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (11.15)$$

Під час розтягання в праву частину умови підставляють допустимі напруження на розтяг  $[\sigma_+]$ , а при стисканні – допустимі напруження на стиск  $[\sigma_-]$ .

Розміри деталей потрібно добирати такими, щоб під дією прикладених навантажень вони не руйнувалися й не зазнавали деформацій, які перевищують допустимі. Залишкові деформації звичайно не допускаються. Для деталей, виготовлених з *пластичного матеріалу*, небезпечними напруженнями можна вважати *границю текучості*  $\sigma_T$ , а для деталей з *крихкого матеріалу* – *границю міцності*  $\sigma_B$ . Ці напруження слід зменшити настільки, щоб в умовах експлуатації діючі напруження завжди були меншими за границю пружності. Отже, *допустимі напруження* можна визначити за формулою:

$$[\sigma] = \sigma_n / n, \quad (11.16)$$

де  $\sigma_n$  – *небезпечне напруження* ( $\sigma_T$  або  $\sigma_B$ );  $n$  – *коефіцієнт запасу міцності*, що показує, у скільки разів допустиме напруження менше, ніж небезпечне. Вибір  $n$  залежить від стану матеріалу (крихкий або пластичний), характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне чи повторно-змінне) й деяких загальних факторів. *До таких факторів належать:*

- 1) неоднорідність матеріалу, а отже, різні його механічні властивості у малих зразках і в деталях;
- 2) неточність задання зовнішніх навантажень;
- 3) наближеність розрахункових схем та наближеність розрахункових формул. Зазначені фактори враховують коефіцієнтом запасу міцності  $n$ .

*Запас міцності* у разі статичного навантаження небезпечним напруженням є *границею міцності*  $\sigma_B$  і тоді:

$$[\sigma] = \sigma_B / n_B. \quad (11.17)$$

Запас міцності  $n_T$  для пластичних матеріалів при статичному навантаженні 2,4÷2,6; для крихких матеріалів цей показник 2,5÷3,0. (пластичні матеріали більш однорідні за своїми фізичними та механічними властивостями). *Крихкі матеріали краще чинять опір стисканню, ніж розтягання*, і для них  $[\sigma_-] > [\sigma_+]$ .

Вибір допустимих напружень дуже важливий, тому встановленням допустимих напружень для основних марок матеріалів займаються державні нормувальні установи. Вони видають відповідні норми, якими й слід керуватись.

*Умови міцності при розтяганні / стисканні:*

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma], \quad (11.18)$$

де допустиме напруження  $[\sigma] = \sigma_{max} / n$ , де  $n$  – коефіцієнт запасу міцності (за нормативними документами).



### **Умови міцності дозволяють розв'язувати три типи задач:**

1. Перевірка міцності (перевірочний розрахунок) – за відомими навантаженнями для вибраного матеріалу знаходять надійні з погляду міцності розміри поперечного перерізу стрижня.

2. Підбір перерізу (проектний розрахунок):  $A = \frac{N_{max}}{[\sigma]}$ .

3. **Визначення допустимих навантажень** за відомими розмірами деталі, матеріалом і схемою навантажування  $N_{max} \leq [\sigma]A$ .

Для забезпечення нормальної роботи розміри деталей потрібно вибирати так, щоб задовольнити **умову жорсткості**, яка при розтяганні (стисканні) має

вигляд:  $\varepsilon_{max} = \frac{N}{E \cdot A} \leq [\varepsilon]$  або  $\Delta l \leq [\Delta l]$ , де  $\Delta l$  – зміна довжини деталі;  $[\Delta l]$  – допустиме значення цієї зміни.

Розрахунок за умовою жорсткості завжди слід доповнювати розрахунком на міцність. Якщо умова жорсткості виконується, а умова міцності ні, то задачу слід розв'язувати з умови міцності.

### *Контрольні запитання*

1. Поясніть, за яких умов в поперечному перерізі стрижня діє лише осьове зусилля?
2. Сформулюйте закон Гука для деформації розтягу (стиску) стрижня.
3. Запишіть та поясніть формули для відносного та абсолютного подовження стрижня.
4. Що називають жорсткістю поперечного перерізу стрижня при розтяганні і стисканні та жорсткістю стрижня?
5. Поясніть, як пов'язані між собою абсолютна та відносна поперечна деформація стрижня? Що називається коефіцієнтом Пуассона?
6. Поясніть, яку задачу опору матеріалів можна вирішити з розрахунків на міцність та жорсткість?
7. Що називається допустимими напруженнями?
8. Сформулюйте умову міцності при розтяганні або стисканні стрижня.
9. Які типи задач можна розв'язувати з використанням умови міцності?
10. Сформулюйте умову жорсткості при розтяганні або стисканні стрижня.
11. Проаналізуйте особливості діаграми розтягання.
12. Що називається границею пропорційності, пружності, текучості, міцності?
13. Що називається умовною границею текучості, пропорційності, пружності?
14. Як визначаються допустимі напруження через небезпечне напруження та коефіцієнт запасу міцності?
15. Поясніть формули для визначення відносного й абсолютного подовження короткого стрижня однакового поперечного перерізу.

## 12. ДЕФОРМУВАННЯ ЗСУВОМ

### 12.1. Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом

Деформація зсуву відбувається тоді, коли з шести компонент головного вектора сили та головного вектора моменту внутрішніх зусиль *не дорівнюють нулю тільки поперечні зусилля*  $Q_x$  або  $Q_y$ . Прикладом такого навантаження може бути розрізання ножицями прутів і т. ін. (рис. 12.1). Деформація зсуву супроводжується іншими видами деформацій і найчастіше – згинанням.

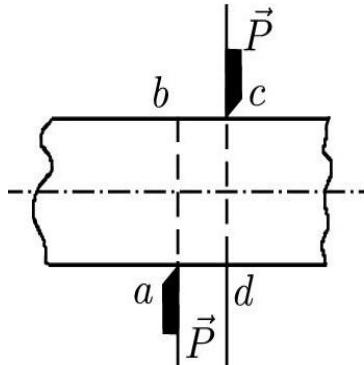


Рис. 12.1

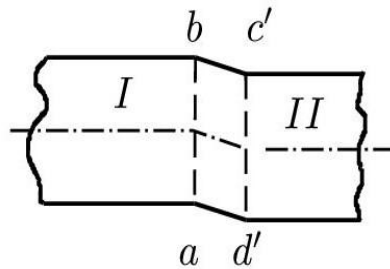


Рис. 12.2

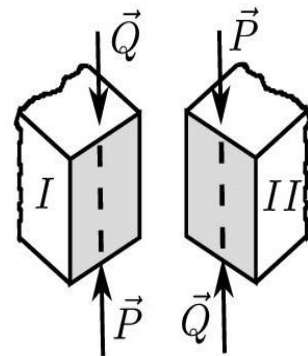


Рис. 12.3

Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку  $bc$  внутрішнє поперечне зусилля:

$$Q_y = Q = P. \quad (12.1)$$

Зв'язок між поперечним зусиллям й напруженням, яке діє в цьому перерізі:

$$\int_A \tau dA = Q. \quad (12.2)$$

Вважаючи, що дотичні напруження  $\tau$  рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу  $A$  (рис. 12.2), на підставі формул (12.1) та (12.2) маємо:

$$Q = P = \tau A \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{P}{A}. \quad (12.3)$$

Припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу умовне, але в інженерній практиці його використовують при розрахунку болтових, заклепочних та зварних з'єднань, шпонок та інших деталей.

### 12.2. Закон Гука при чистому зсуві

Для пластичних матеріалів залежність між навантаженням та деформацією при зсуві схожа на діаграму розтягання. Діаграму зсуву можна зняти при скручуванні тонкостінної труби. Уявно виділений елемент стінки труби (комірка ортогональної сітки, яку попередньо нанесено на поверхню труби) перебуває в умовах чистого зсуву. У межах пружності між відносним зсувом та дотични-

ми напруженнями, що діють по гранях елемента, існує лінійна залежність, яку можна виразити формулою закону Гука:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (12.4)$$

де  $G$  – модуль пружності при зсуві або модуль пружності другого роду і виражається в МПа (або Па).

### 12.3. Перевірка міцності при чистому зсуві

Дотичні напруження на гранях елемента при чистому зсуві

дорівнюють  $\tau$ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні –  $[\tau]$ .  
Умови міцності залежать від **вибору теорії (критерію) міцності**.

1. За II теорією міцності:  $\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}, \quad (12.5)$

де права частина формули (13.7) є допустимим напруженням при чистому зсуві.

Для металів  $\mu = 0,25 \div 0,42 \Rightarrow \tau = (0,7 - 0,8)[\sigma]. \quad (12.6)$

2. За III теорією міцності:

$$\frac{[\sigma]}{2} = [\tau], \text{ тобто } [\tau] \leq 0,5[\sigma]. \quad (12.7)$$

3. За IV теорією міцності:

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}, \text{ або } [\tau] \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]. \quad (12.8)$$

Одержані значення допустимих напружень застосовують також і при розрахунках на міцність деталей, які **зазнають деформації зрізу** (болти, заклепки, шпонки). Для пластичних матеріалів найбільше підходить формула (12.13), яка впливає з енергетичної теорії формозміни.

**Умова міцності на зсув** (зріз) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A} \leq [\tau]. \quad (12.10)$$

**Значення допустимих напружень на зріз  $[\tau]$  залежать від властивостей матеріалу, характеру навантаження і типу елементів конструкції.**

#### Контрольні запитання

1. За яких умов відбувається деформація зсуву?
2. Чим зсув відрізняється від зрізу та зминання?
3. Наведіть та поясніть формули для напружень при розрахунку на зріз стрижневих елементів конструкцій.
4. Поясніть, чому припущення про рівномірний розподіл дотичних напружень по перерізу досить умовне?

5. Що називається чистим зсувом? Наведіть закон Гука.
6. Визначте головні напруження та їхні напрями (головні площадки) при чистому зсуві.
8. Що називається кутом зсуву (відносним зсувом) та абсолютним зсувом?
10. Що називається модулем пружності при зсуві?
11. Яка існує залежність між модулем пружності  $G$  при зсуві та модулем пружності  $E$  при розтяганні?

### **13. ДЕФОРМУВАННЯ КРУЧЕННЯМ**

#### **13.1. Напруження і деформації при крученні**

Деформація кручення спричинюється парами сил, площини дії яких перпендикулярні до осі стрижня. У довільному поперечному перерізі стрижня (вала) з шести внутрішніх силових факторів під дією зовнішнього моменту  $M_k$  виникає тільки один фактор – **крутний момент**  $M_{кр}$ . Поперечні перерізи вала при крученні повертаються один відносно одного навколо осі вала, при цьому довжина стрижня не змінюється. Під дією крутного моменту  $M_k$ , прикладеного на вільному кінці, будь-який переріз на відстані  $x$  від місця закріплення повертається відносно закріпленого перерізу на певний кут  $\varphi$  (рис. 13.1).

При цьому чим більший крутний момент  $M_k$ , тим більший і кут закручування  $\varphi$ . За нормальних умов роботи вала залежність між крутним моментом і кутом закручування лінійна. При крученні  $M_{кр}$  – єдиний внутрішній силовий фактор у поперечному перерізі вала, тому діють тільки дотичні напруження.

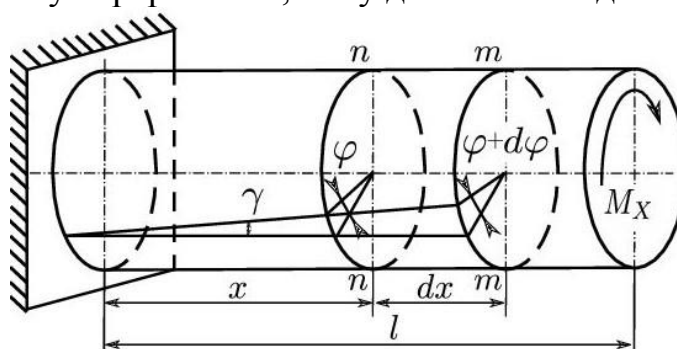


Рис. 13.1

Рівняння для крутного моменту має вигляд:

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau dA, \quad (13.1)$$

де  $\tau$  – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці  $dA$ , розміщеній на довільній відстані  $\rho$  від центра перерізу (рис. 13.1).

Після прикладання крутного моменту поздовжні прямі лінії на поверхні вала перетворюються на гвинтові, тобто лінії однаково нахилені до осі стрижня, паралельні кола не викривляються і відстань між ними практично залишається незмінною; радіуси, проведені в торцевих перерізах, залишаються прямими.

Картина, яку ми спостерігаємо на поверхні вала, зберігається і всередині: *плоскі до деформації перерізи, залишаються плоскими при крученні круглого стрижня, повертаючись один відносно одного на деякий кут закручування* (рис.13.1).

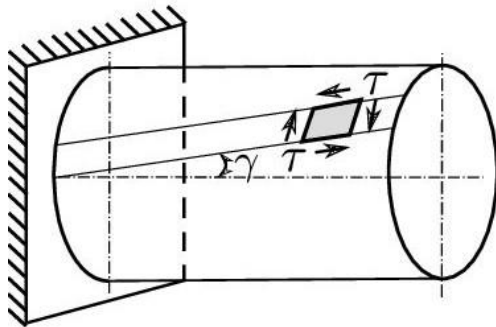


Рис. 13.2.

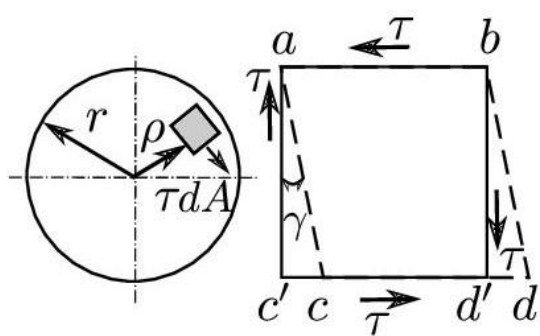


Рис. 13.3.

Нехай кут повороту поперечного перерізу  $n-n$  (рис. 13.1) відносно нерухомого місця закріплення вала буде  $\varphi$ , тоді кут повороту перерізу  $m-m$ , розміщеного на відстані  $dx$  від перерізу  $n-n$ , буде  $\varphi + d\varphi$ . Кут закручування відрізка стрижня завдовжки  $dx$  дорівнює  $d\varphi$ . Розглянемо деформацію прямокутного елемента  $abd'c'$  (рис. 13.2) нескінченно малої товщини, виділеного у поверхні вала.

Оскільки радіуси при деформації кручення залишаються прямими, то при закручуванні на кут  $d\varphi$  твірна  $ac'$  переміститься в нове положення  $ac$  (рис. 13.3), утворивши з початковим кут  $\gamma$ . Аналогічно твірна  $bd'$  перейде в положення  $bd$ . Таким чином, деформація прямокутного елемента  $abd'c'$  полягає в зміні початкових прямих кутів на кут  $\gamma$ . Розглянутий елемент перебуває в умовах чистого зсуву, і на його гранях діють дотичні напруження. Отже, кут  $\gamma$  є кутом відносного зсуву (рис. 13.2):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{cc'}{ac'} = \frac{rd\varphi}{dx} = r\theta \approx \gamma, \quad (13.2)$$

де  $d\varphi/dx = \theta$  – відносний кут закручування ( $\text{см}^{-1}$ ).

Кут зсуву всередині стрижня на довільній циліндричній поверхні радіуса  $\rho$  (рис. 13.2):

$$\gamma = \rho\theta. \quad (13.3)$$

Оскільки елемент стрижня в будь-якій точці поперечного перерізу на відстані  $\rho$  від центра перерізу зазнає чистого зсуву, то з урахуванням (15.2) та (13.3) матимемо:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\rho\theta, \quad (13.4)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

*Кути зсуву та дотичні напруження в поперечному перерізі змінюються за лінійним законом прямо пропорційно відстані  $\rho$  точок від центра перерізу*

(рис. 13.3). Максимальні дотичні напруження на поверхні стрижня при  $\rho = r$ :

$$\tau_r = \tau_{max} = G\theta r. \quad (13.5)$$

Підставляючи (13.5) в (13.1), отримуємо:

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau dF = G\theta \int_F \rho^2 dF = G\theta J_\rho. \quad (13.6)$$

Для відносного кута закручування круглого стрижня маємо:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_{кр}}{GJ_\rho}, \quad (13.7)$$

де  $GJ_\rho$  – жорсткість поперечного перерізу стрижня при крученні ( $\text{Нм}^2$ );  $J_\rho$  – полярний момент інерції круглого стрижня, який для суцільного стрижня діаметром  $d$  виражається формулою  $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32}$ ,

а для трубчастого стрижня з внутрішнім діаметром  $d_B$  і зовнішнім діаметром  $d_3$ :

$$J_\rho = \frac{\pi(d_3^4 - d_B^4)}{32} = \frac{\pi d_3^4}{32} (1 - \alpha^4), \quad (13.8)$$

де  $\alpha = d_B/d_3$ .

З урахуванням формули (13.7) кут взаємного закручування двох перерізів, розміщених на відстані  $\ell$ :

$$\varphi = \int_0^\ell \frac{M_{кр}}{GJ_\rho} dx. \quad (13.9)$$

Якщо крутні моменти в перерізах не змінюються:

$$\varphi = \theta \ell = \frac{M_{кр} \ell}{GJ_\rho}. \quad (13.10)$$

Зв'язок між **кутом закручування і силовим фактором**  $M_{кр}$  виражає закон Гука при крученні.

Для визначення дотичного напруження  $\tau$  у будь-якій точці перерізу валу під дією крутного моменту досить у формулу (13.4) підставити значення відносного кута закручування  $\theta$  із формули (13.7):

$$\tau_\rho = G \cdot \theta \cdot \rho = G \frac{M_{кр}}{GJ_\rho} \rho = \frac{M_{кр} \rho}{J_\rho}. \quad (13.11)$$

**Максимальне дотичне напруження**, яке діє в зовнішньому шарі матеріалу стрижня:

$$\tau_{max} = G\theta r = \frac{M_{кр} r}{J_\rho}. \quad (13.12)$$

Для *суцільного круглого перерізу* полярний момент і максимальне дотичне напруження дорівнюють:

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}. \quad (13.13)$$

Для трубчастого круглого перерізу:

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3(1-\alpha^4)}{16}; \quad \tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_{\rho}} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3(1-\alpha^4)}. \quad (13.14)$$

Максимальне дотичне напруження в круглому стрижні пропорційне крутному моменту  $M_{кр}$  та обернено пропорційне кубу зовнішнього діаметра стрижня.

Згідно з формулою (13.12), умова міцності:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр} r}{J_{\rho}} \leq [\tau], \quad (13.15)$$

де  $[\tau]$  – допустиме напруження при крученні.

Умову жорсткості визначають за формулою (13.7):

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} \leq [\theta], \quad (13.16)$$

звідки  $J_{\rho} \geq \frac{M_{кр}}{G[\theta]}$ ,

де  $[\theta]$  – допустимий відносний кут закручування.

### 13.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні

Напруження при крученні розподілені нерівномірно і залежно від радіуса змінюються за лінійним законом від нуля в центрі перерізу до максимуму на його периферії. Унаслідок закону парності дотичних напружень у поздовжніх перерізах, що проходять через вісь вала, також виникають такі самі за значенням дотичні напруження. В елементі матеріалу, уявно виділеного із зовнішніх шарів матеріалу вала перерізами, паралельними та перпендикулярними до твірної (рис. 13.1, 13.2) циліндричного вала, по гранях діятимуть тільки дотичні напруження. У перерізах, нахилених до осі, діятимуть також і нормальні напруження, як і при напруженому стані елемента в умовах чистого зсуву. Найбільші нормальні напруження діють на головних площадках, які нахилені під кутом  $45^\circ$  до осі вала.

При крученні круглих валів небезпечними можуть бути як дотичні напруження в поперечних та поздовжніх перерізах вала, так і нормальні напруження, що виникають в площадках під кутом  $45^\circ$  до перших. Тобто характер руйнування вала при крученні залежить від здатності матеріалу протидіяти дотичним нормальним напруженням. Якщо матеріал погано чинить опір дотичним напруженням (дії зсуву деревини вздовж волокон), то перші тріщини руй-

нування виникають по твірних у місцях дії максимальних дотичних напружень (рис. 13.9). Якщо матеріал погано чинить опір дії нормальних напружень (чавун), тоді тріщини руйнування при крученні пройдуть по лініях, нормальних до дії головних розтягувальних напружень, тобто по гвинтових лініях, дотичні до яких утворюють кут  $45^\circ$  з віссю вала.

#### *Контрольні запитання*

1. Поясніть, в яких випадках виникає деформація кручення.
2. Що називають валом та крученням вала?
3. Охарактеризуйте статичний аспект задачі на кручення вала.
4. Що розуміють під кутом відносного зсуву?
5. З'ясуйте різницю між кутом закручування та відносним кутом закручування.
6. Розгляньте фізичний аспект задачі на кручення вала.
7. Наведіть Закон Гука при крученні.
8. Проаналізуйте формули для визначення максимального дотичного напруження при крученні суцільного і трубчастого круглого перерізу.
9. Запишіть умови міцності та жорсткості при крученні.
10. З'ясуйте основні положення розрахунку валів на міцність.
11. Проаналізуйте особливості розрахунку валів на жорсткість.
12. Поясніть, чому виготовлення порожнистих валів є ефективним засобом зниження затрат матеріалу, а отже, і зниження ваги валів?

## **14. ДЕФОРМУВАННЯ ЗГИНОМ**

### ***14.1. Напруження при плоскому згинанні прямого стрижня***

Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в її поперечних перерізах у загальному випадку згинання, при чистому плоскому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент  $M$ . Вісь балки деформується в площині, що збігається з силовою (на рис. 14.1 – у площині креслення).

Проведемо поперечний переріз  $m-m$  на довільній відстані  $x$  від початку координат (рис. 14.1). У площині перерізу проведемо координатні осі  $x$  та  $y$ : вісь  $y$  сумістимо з силовою лінією (лінією перетину силової площини з площиною перерізу). Вісь  $z$  спрямуємо перпендикулярно до площини перерізу. Виділимо в перерізі елемент площі  $dA$ , координати якого  $x$  та  $y$ . При чистому згинанні всі зусилля та моменти ( $Q_y, Q_z, M_{кр}$ ), пов'язані з дотичними напруженнями, дорівнюють нулю. З усіх шести умов рівноваги залишаться тільки три:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA; \quad M_x = \int_A y \cdot \sigma dA; \quad M_y = \int_A x \cdot \sigma dA. \quad (14.1)$$

У перерізах балки діє тільки згинальний момент  $M_x$ , тому:

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0; \quad M_y = \int_A x \cdot \sigma dA = 0; \quad M_x = \int_A y \cdot \sigma dA = M. \quad (14.2)$$



Розглянемо картину деформацій самої балки (рис. 14.2). При чистому згинанні еластичних моделей, на поверхню яких нанесена прямокутна сітка, видно, що сітка деформується таким чином: поздовжні лінії викривлюються по дузі кола; контури поперечних перерізів залишаються плоскими (рис. 14.2).

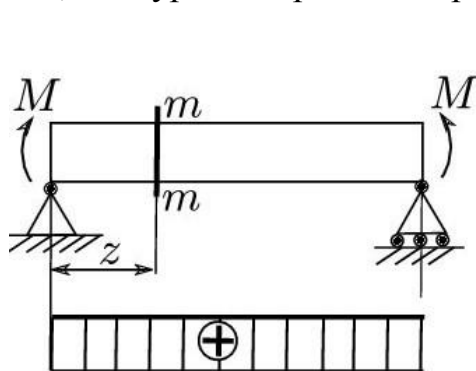


Рис. 14.1.

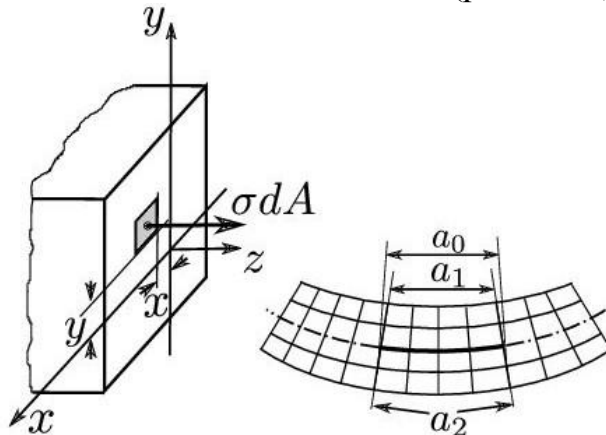


Рис. 14.2.

При чистому згинанні поперечні перерізи балки залишаються плоскими і повертаються так, що залишаються нормальними до зігнутої осі балки. Тому при чистому згинанні, як і при розтяганні (стисканні) та крученні круглих стрижнів, буде справедливою гіпотеза плоских перерізів. Відстані між аналогічними точками контуру будь-яких двох перерізів при деформуванні змінюються. Верхні поздовжні волокна балки укорочуються, а нижні – подовжуються  $a_1 < a_0 < a_2$  (рис. 14.2).

Волокна, що належать нейтральному шару, до деформації лежать в одній площині, а в деформованому стані утворюють деяку циліндричну поверхню. Їх довжина не змінюється ( $a = a_0$ ), а кожний поперечний переріз балки перетинається з нейтральним шаром по прямій, яка називається нейтральною лінією перерізу. При плоскому згинанні нейтральний шар виявляється перпендикулярним до силової площини, а отже, нейтральна лінія перпендикулярна до силової лінії в перерізі. Нехай вісь  $z$  (рис. 14.3) збігається з нейтральною лінією.

Виділимо елемент балки двома суміжними поперечними перерізами  $m-m$  та  $n-n$ , які розміщені один від одного на відстані  $dx$  (рис. 14.3), та розглянемо його деформований стан.

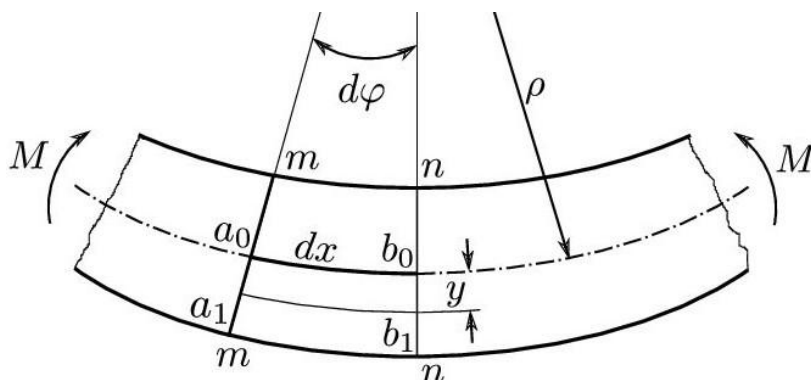


Рис. 14.3

Перерізи  $m-m$  та  $n-n$  повертаються один відносно одного на кут  $d\varphi$  і залишаються плоскими. Елемент  $a_0b_0$  нейтрального пласта перетворюється на дугу з радіусом  $\rho$ , а волокно, яке розміщено на відстані  $y$  від нейтрального шару, – на криволінійне волокно  $a_1b_1$  з радіусом кривини  $\rho + y$ . Відносне подовження цього волокна:

$$\varepsilon = \frac{a_1b_1 - a_0b_0}{a_0b_0} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx}, \quad (14.3)$$

де  $a_0b_0 = dx = \rho d\varphi$ .

Підставивши  $dx = \rho d\varphi$  у формулу (14.3) і скоротивши на  $d\varphi$ , матимемо:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}. \quad (14.4)$$

Отже відносна подовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної осі. Для того щоб записати закон Гука, треба з'ясувати, в якому напруженому стані перебуває волокно  $a_0b_0$ . На елементарній площадці  $dA$  зрізу (рис. 14.1) дотичних напружень немає. Якщо припустити, що волокна матеріалу, розміщені вздовж балки, не тиснуть одне на одне, то напруження між ними дорівнюють нулю. Волокно  $a_0b_0$  перебуває в лінійному напруженому стані – зазнає простого розтягання або стискання.

Тому для нього закон Гука записується так:

$$\sigma = \varepsilon E = E \frac{y}{\rho}. \quad (14.5)$$

Згинальний момент:

$$M = M_x = \int_A y \cdot \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA. \quad (14.6)$$

Оскільки  $\int_A y^2 dA = J_x$  – момент інерції перерізу відносно осі  $x$ , остання формула приймає вигляд:

$$1/\rho = M/EJ_x. \quad (14.7)$$

Формула (14.7) фактично є законом Гука при згинанні, оскільки вона пов'язує деформацію (кривину нейтрального шару  $1/\rho$  із силовим фактором – згинальним моментом, що діє в перерізі).

Підставивши  $1/\rho$  з формули (14.7) у (14.5), отримаємо так звану формулу К. Нав'є:

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} = \frac{EMy}{EJ_x} = \frac{My}{J_x}. \quad (14.8)$$

**Формула Нав'є дає змогу визначати нормальні напруження при чистому згинанні балки в будь-якій точці її перерізу.**

Нейтральна лінія перерізу, вісь  $z$  – проходить через центр тяжіння (ц.т.) поперечного перерізу, силова площина – через вісь балки, силова лінія (вісь  $y$ ) – через центр тяжіння перерізу. Осі  $x$  та  $y$  – головні центральні осі перерізу. Цим визначається положення нейтральної лінії перерізу. Якщо силова лінія збігається з однією із головних центральних осей перерізу, то згинання буде плоским, і нейтральна лінія перерізу буде збігатися з іншою головною центральною віссю.

Величина  $EJ_x$  називається жорсткістю перерізу при згинанні,  $HM^2$ .

З формули (14.8) випливає, що коли балка виготовлена з однорідного матеріалу ( $E = const$ ) і має постійний переріз ( $J_x = const$ ), то при чистому згинанні ( $M = const$ ) її вісь викривляється по дузі кола ( $\rho = const$ ). Формула (14.8) показує, що незалежно від форми та розмірів перерізу балки напруження в точках нейтральної лінії завжди дорівнюють нулю. Величина  $\sigma$  лінійно зростає в міру віддалення від нейтральної лінії. При цьому напруження виявляються однаковими по ширині перерізу (уздовж лінії  $y = const$ ).

Усі волокна, розміщені вище за нейтральну лінію, виявляються стиснутими, а нижче за неї – розтягнутими. Максимальні напруження ( $\sigma_{max}$ ) мають місце в найбільш віддалених від нейтральної лінії волокнах. У випадку симетричного перерізу відносно горизонтальної осі  $z$ :

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot 0,5h}{J_x}. \quad (14.9)$$

Позначивши  $W = J_x / 0,5h$  як осьовий момент опору,  $m^3$ , одержимо:

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W}. \quad (14.10)$$

Якщо переріз балки не має горизонтальної осі симетрії, то нейтральна лінія зміщена відносно середини висоти перерізу і напруження у крайніх верхніх та у крайніх нижніх волокнах не будуть однаковими. На відміну від простого розтягання чи стискання під час згинання, як і при крученні, напруження в перерізі розподіляються нерівномірно.

## 14.2. Умови міцності при згинанні

У зоні нейтрального пласта матеріал навантажений мало. Тому з метою економії матеріалу та зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, вибирають такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії. Найближчий до ідеального профілю є двотавровий переріз.

**Згинальний момент, який переріз може витримати безпечно, залежить від моменту опору  $W$ .** Згідно з формулою (14.10), допустимий згинальний момент:

$$[M] = \sigma_{max} W = [\sigma] W. \quad (14.11)$$

Затрата матеріалу пропорційна площі перерізу  $A$ . Отже, чим більше добуток  $FW$ , тим більший згинальний момент витримує переріз із заданою площею і тим менше матеріалу піде на виготовлення стрижня, що витримує заданий згинальний момент. Тому добуток  $FW$  є критерієм, що оцінює якість профілю. Для загального випадку згинання дія поперечних сил призводить до того, що гіпотеза плоских перерізів, на якій ґрунтується виведення формули Нав'є для обчислення нормальних напружень, порушується, оскільки поперечні перерізи викривляються; поздовжні волокна взаємодіють між собою, тиснуть одне на одне і, отже, перебувають не в лінійному, а в плоскому напруженому стані. При поперечному згинанні балок, коли в перерізі, крім  $M$ , діють  $N$  та  $Q$ , можна використовувати формули, виведені для чистого згинання.

При поперечному згинанні, коли в поперечних перерізах бруса діють  $Q$  та  $M$ , виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , а й дотичні  $\tau$ .

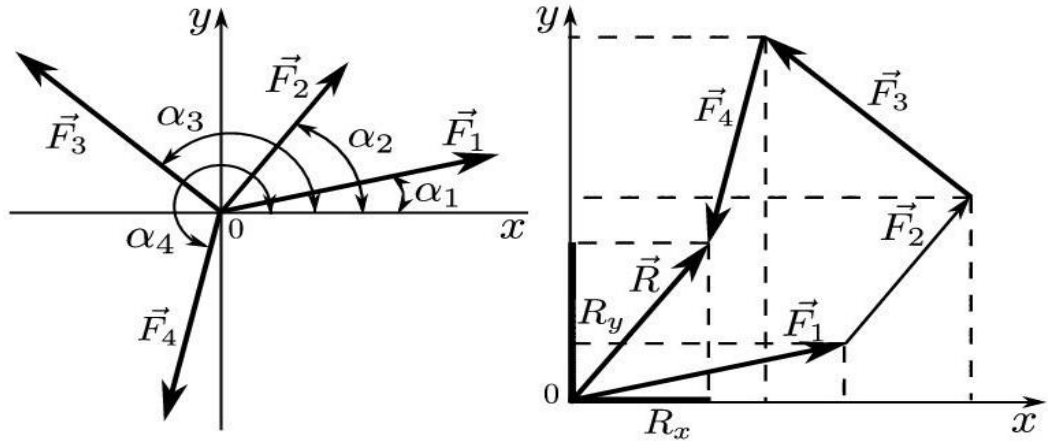
#### *Контрольні запитання*

1. Укажіть умови, за яких виникає чисте плоске згинання балки.
2. Проаналізуйте задачу на чисте плоске згинання балки.
3. Запишіть формулу К. Нав'є.
4. Що розуміють під нейтральною лінією перерізу?
5. Визначте закон Гука при згинанні.
6. Що називається жорсткістю перерізу при згинанні?
7. Що називається осьовим моментом опору при згинанні?
8. Проаналізуйте особливості розподілу величини нормальних напружень при чистому плоскому згинанні балки.
9. Поясніть, чому з метою зниження ваги конструкції, яка працює на згинання, слід вибирати такі форми перерізу, щоб більша частина матеріалу була віддалена від нейтральної лінії.
10. Запишіть та проаналізуйте формулу для допустимого згинального моменту.
11. Наведіть та проаналізуйте припущення про характер розподілу дотичних напружень у балках прямокутного перерізу.
12. Наведіть формули для визначення дотичного напруження при поперечному згинанні балок прямокутного та круглого перерізів.
13. Укажіть загальні висновки щодо розподілу дотичних напружень у перерізах при поперечному згинанні балок.
14. Проаналізуйте умови міцності для небезпечних точок при згинанні.
15. Поясніть, чому для балки, яка працює на згин, найбільш раціональним є двотавровий переріз.
16. Укажіть особливості вибору раціональної форми перерізу балки з крихкого матеріалу.

## РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ РОБОТИ

### Розрахунково-графічна робота № 1

*Визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил аналітичним і геометричним засобами*



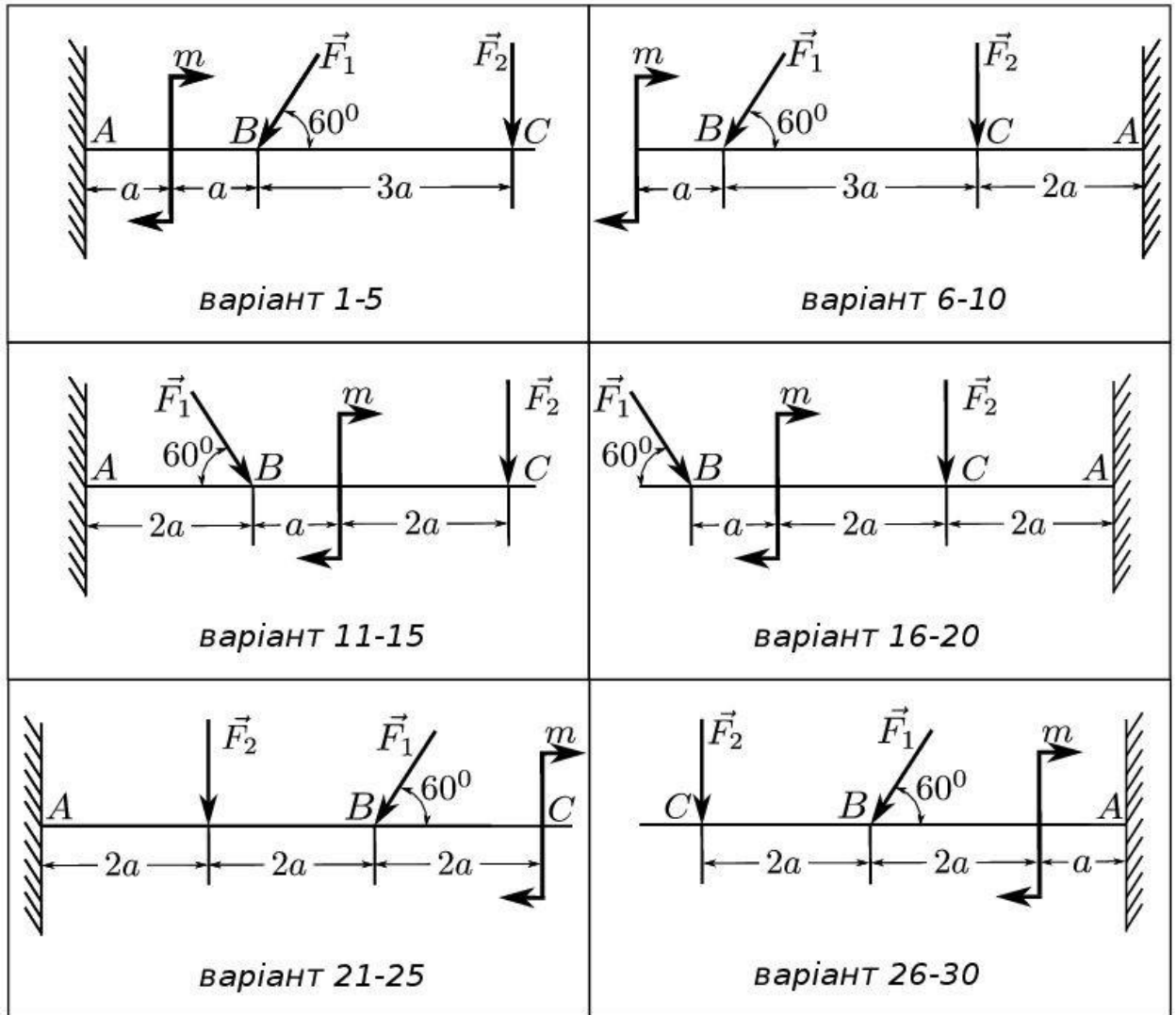
**Завдання.** За схемою рисунків знайти рівнодійну систему збіжних сил. Варіанти завдань наведені в таблиці.

Пара-метр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	10	12	8	16	4	6	14	18	10	8
$F_2, \text{кН}$	6	8	10	12	6	14	8	10	6	12
$F_3, \text{кН}$	8	4	12	14	10	15	10	8	12	10
$F_4, \text{кН}$	6	10	14	15	9	8	16	12	8	14
$\alpha_1, \text{град}$	30	0	60	120	45	75	30	60	0	45
$\alpha_2, \text{град}$	45	60	30	30	75	0	60	45	30	60
$\alpha_3, \text{град}$	0	300	270	150	300	270	210	150	120	150
$\alpha_4, \text{град}$	150	120	210	60	120	150	120	210	60	75

## Розрахунково-графічна робота № 2

**Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил**

**Завдання.** Визначити величини реакцій у опорі защемленої балки. Провести перевірку розв'язання.

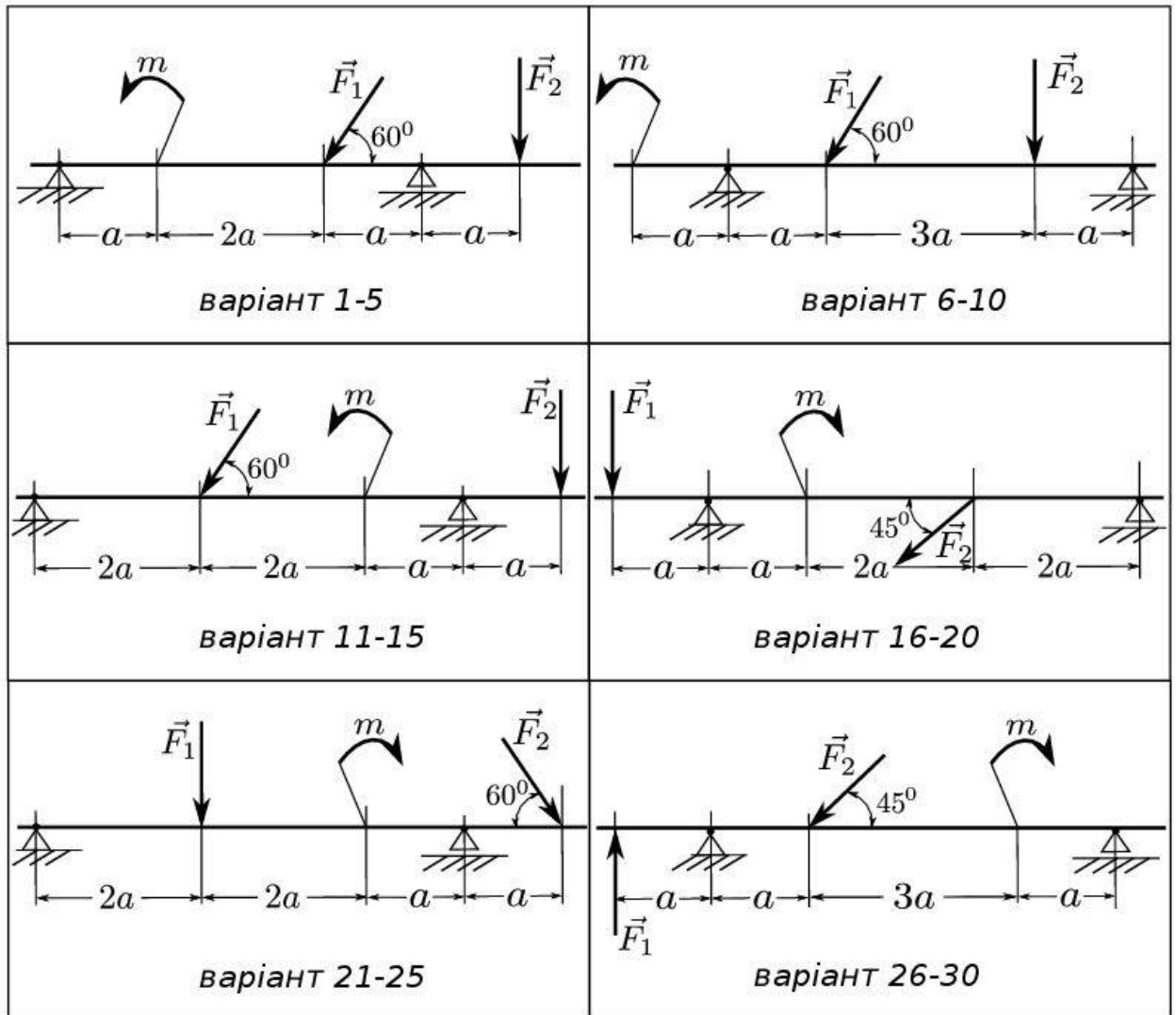


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, \text{кН}$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, \text{кНм}$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, \text{м}$	0,5	0,5	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

### Розрахунково-графічна робота № 3

**Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених сил і пар сил**

**Завдання.** Визначити величини реакцій для балки у шарнірних опорах балки. Перевірити розв'язання.

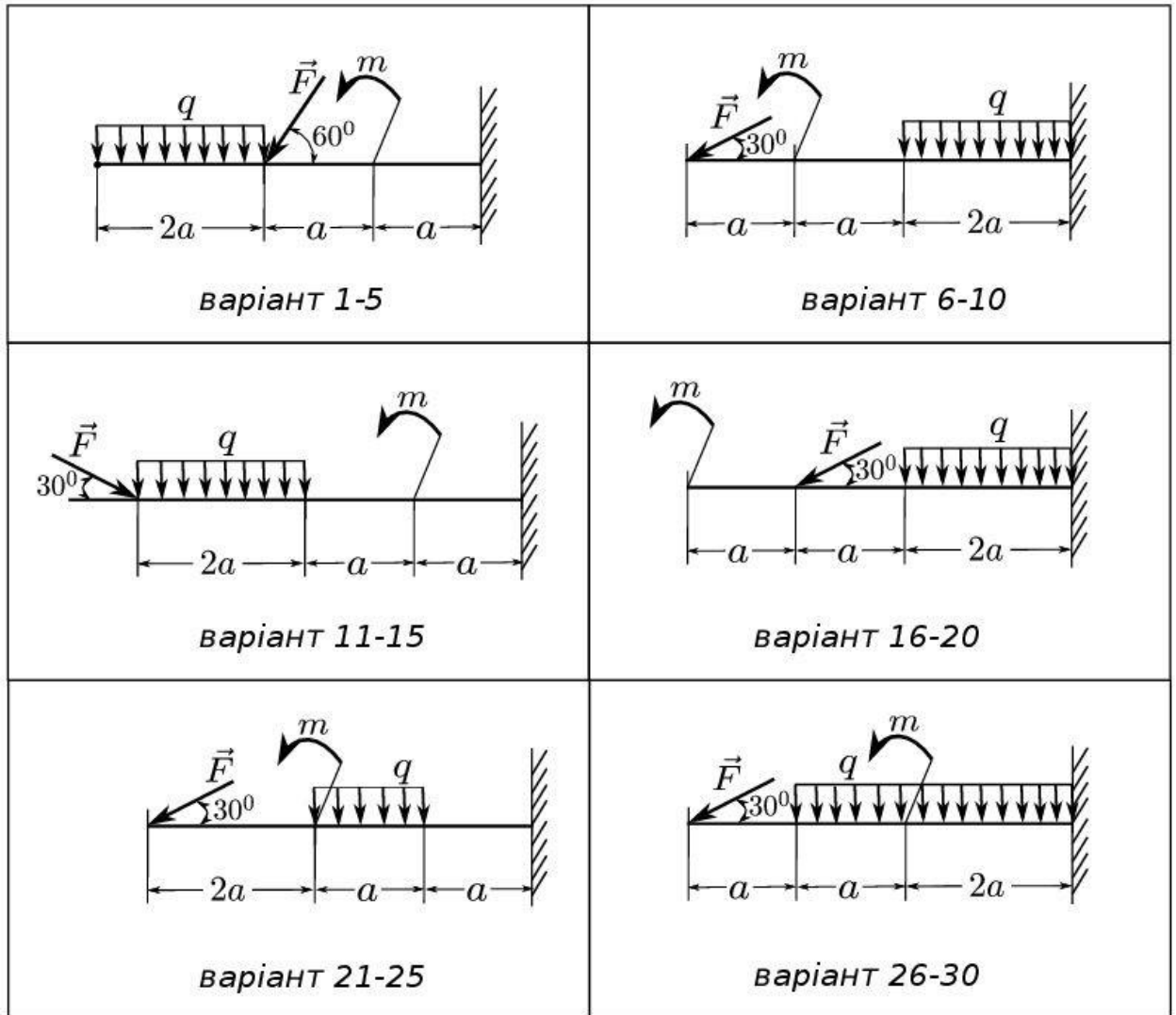


Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	12	14	16	18	20	22	10	24	26	28
$F_2, \text{кН}$	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	5
$m, \text{кНм}$	14	13	12	11	10	9	8	7	12	14
$a, \text{м}$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2

## Розрахунково-графічна робота № 4

**Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень**

**Завдання.** Визначити величини реакцій у опорі защемленої балки. Перевірити розв'язання.



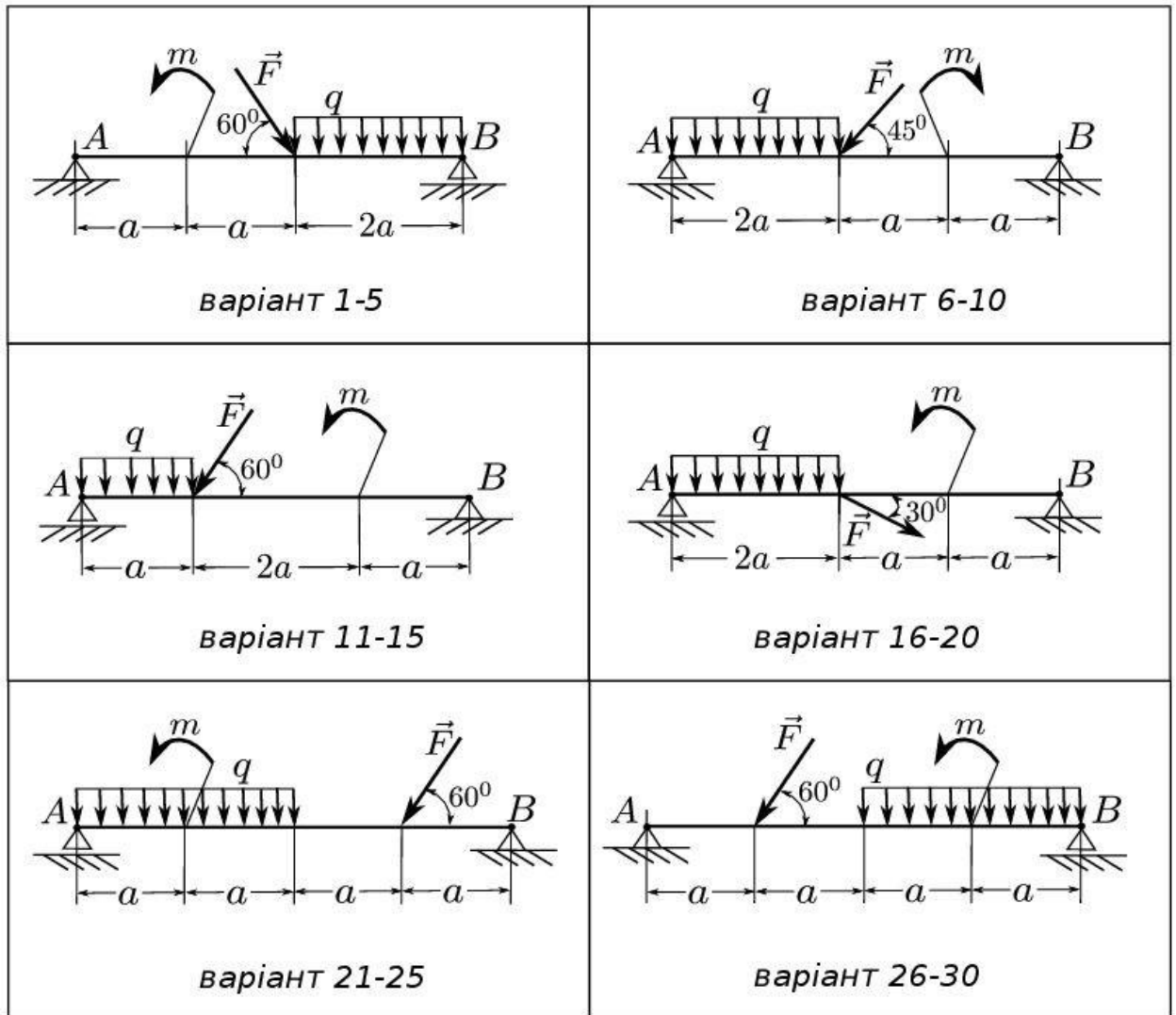
Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	6	8	10	12	14	22	20	18	16	4
$q, \text{кН/м}$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, \text{кНм}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, \text{м}$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,2	0,2	0,2



## Розрахунково-графічна робота № 5

**Визначення величин реакцій в опорах балочних систем під дією зосереджених і розподілених навантажень**

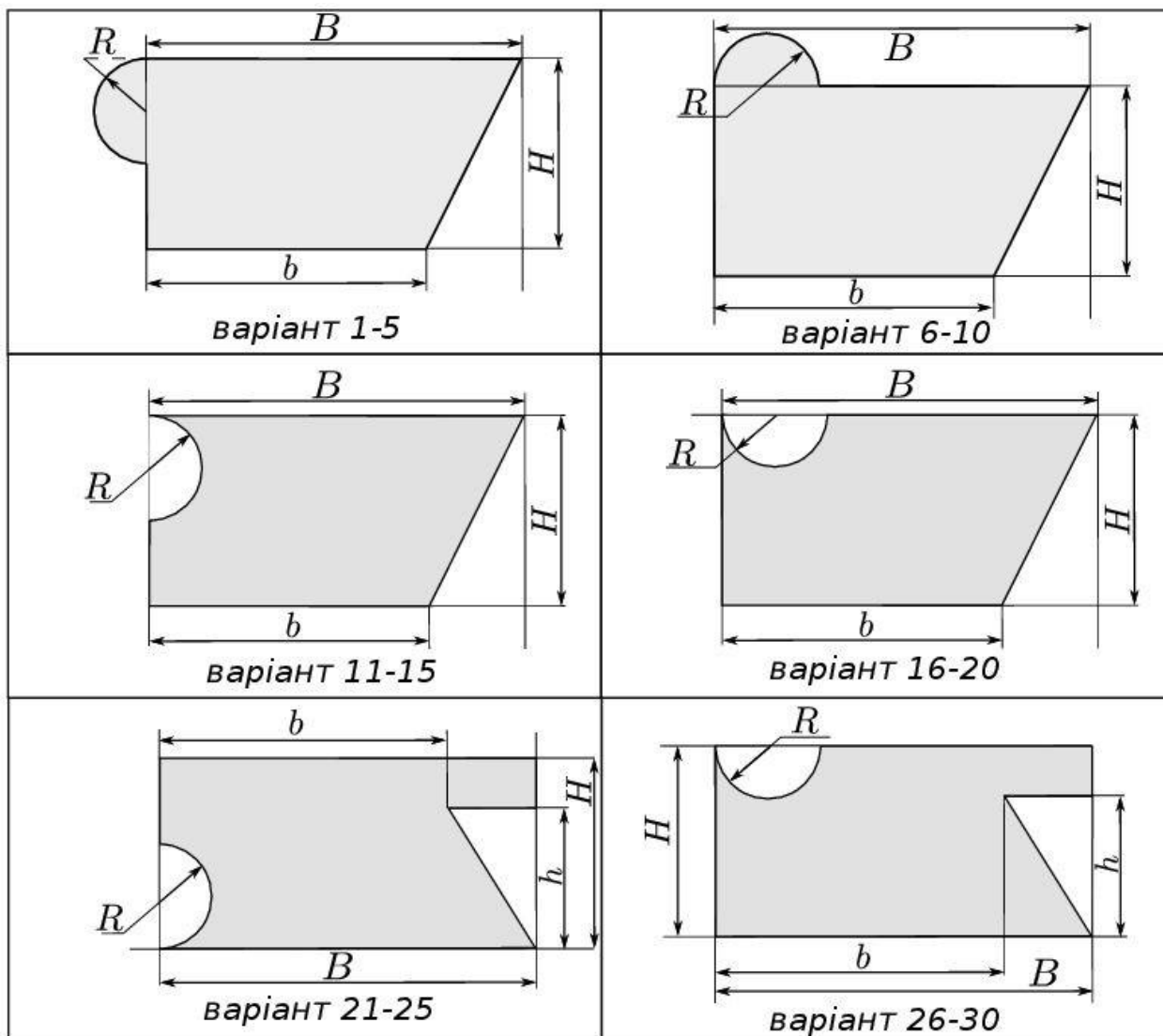
**Завдання.** Визначити величини реакцій у шарнірних опорах балки. Перевірити розв'язання.



Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$F_1, \text{кН}$	20	25	30	35	40	45	50	60	70	80
$q, \text{кНм}$	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4
$m, \text{кНм}$	10	15	20	25	30	35	40	45	50	20
$a, \text{м}$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4

**Розрахунково-графічна робота № 6**

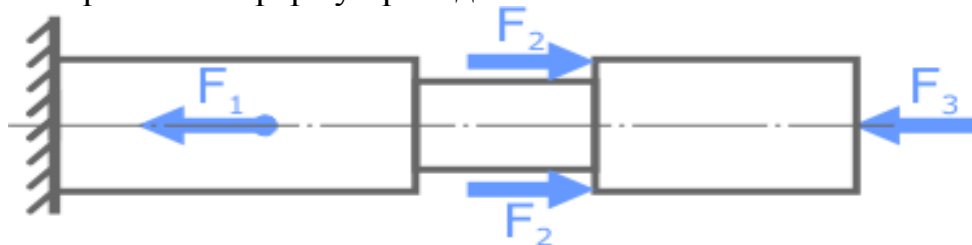
**Завдання. Визначити координати центра тяжіння заданого перерізу.**



Параметр	Варіант									
	1; 11; 21	2; 12; 22	3; 13; 23	4; 14; 24	5; 15; 25	6; 16; 26	7; 17; 27	8; 18; 28	9; 19; 29	10; 20; 30
$B, мм$	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$b, мм$	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160
$H, мм$	90	100	120	130	140	150	160	170	180	190
$h, мм$	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
$R, мм$	26	26	30	30	30	40	40	50	50	50

## Розрахунково-графічна робота № 7

**Завдання.** Для прямого ступінчатого стрижня навантаженого системою поздовжніх сил (див. рис.) визначити величину та напрямок опорної реакції в защемленні  $N$ , розрахувати нормальні напруження  $\sigma$  і побудувати епюру нормальних напружень у довільному масштабі (див. зразок). Значення сил і площ поперечного перерізу приведено в табл. 1.



Таблиця 1

Пара-метр	Варіант											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$F_1, \text{кН}$	25	20	30	40	35	60	50	40	80	70	30	50
$F_2, \text{кН}$	50	40	45	60	50	30	20	40	45	30	40	40
$F_3, \text{кН}$	30	30	50	35	40	40	60	70	30	40	80	30
$A_1, \text{см}^2$	5	6	8	4	6	5	4	5	4	6	5	4
$A_2, \text{см}^2$	2	4	3	3	2	3	2	3	2	3	2	3
$A_3, \text{см}^2$	5	6	8	4	6	5	4	5	4	6	5	4

### Зразок виконання розрахунково-графічної роботи № 7

**Завдання.** Ступінчастий брус навантажений вздовж осі двома силами. Брус затисненого з лівого боку. Побудувати епюри поздовжніх сил і нормальних напружень (рис.).

Рекомендації до розв'язання:

1. Визначаємо ділянки навантаження, їх 2 (рис.).
2. Визначаємо поздовжню силу в перерізах 1 і 2.
3. Розраховуємо величини внутрішніх зусиль  $N$  та будуємо епюру у довільному масштабі.
4. Розраховуємо величини нормальних напружень та будуємо епюру у довільному масштабі.

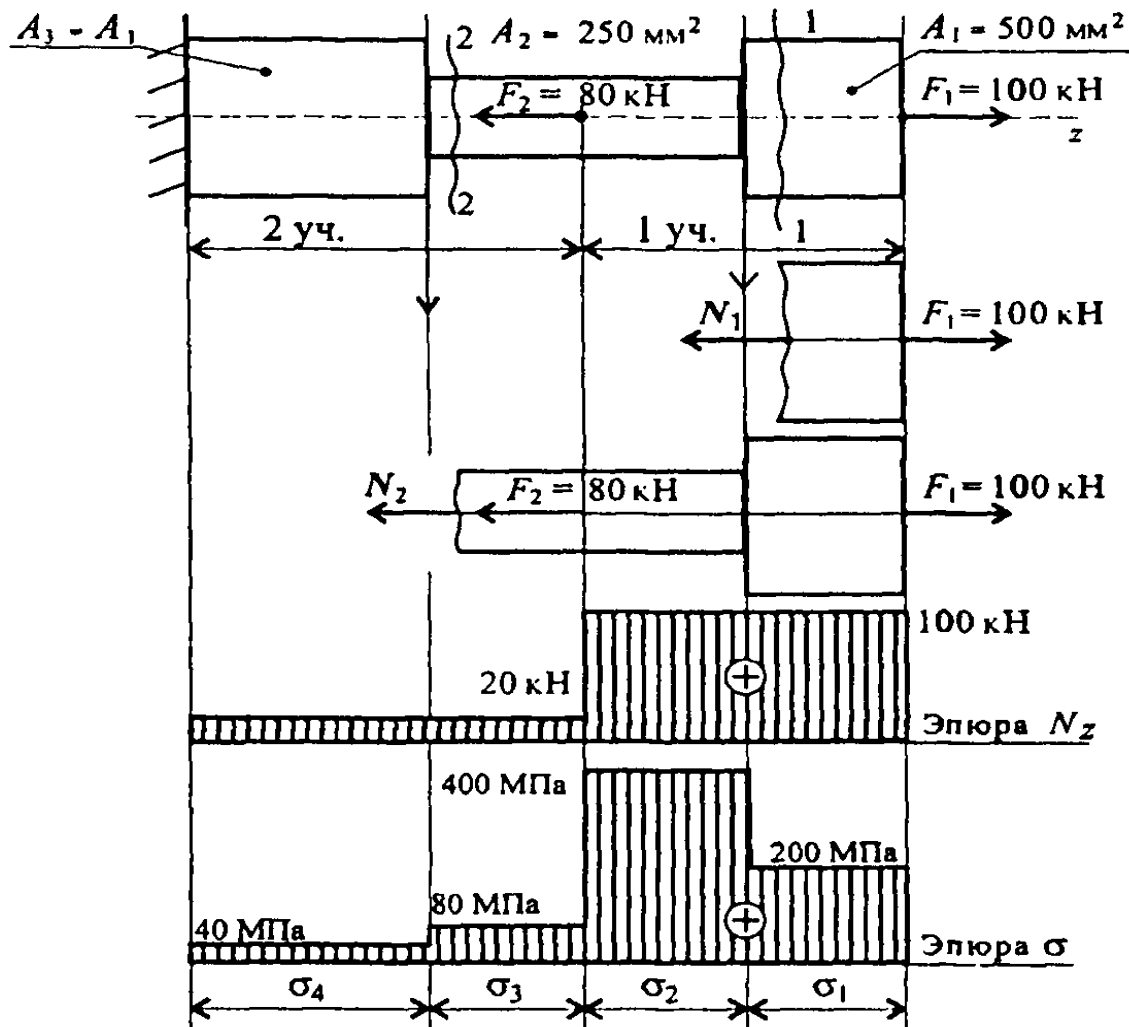


Рис.

1. Визначаємо повздовжні сили (величину і напрямок опорної реакції):

$$\text{Переріз 1: } -N_1 + F_1 = 0; \quad N_1 = F_1 = 100 \text{ кН.}$$

$$\text{Переріз 2: } -80 - N_2 + 100 = 0; \quad N_2 = 100 - 80 = 20 \text{ кН.}$$

В перерізах повздовжні сили позитивні.

2. Визначаємо нормальні напруження  $\sigma = N_z / A$ .

Зіставляючи ділянки навантаження з межами зміни площі, бачимо, що утворюється 4 ділянки напружень. Нормальні напруги в перетинах по ділянках:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{100 \cdot 10^3}{500} = 200 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}; \quad \sigma_2 = \frac{N_1}{A_2} = \frac{100 \cdot 10^3}{250} = 400 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{20 \cdot 10^3}{250} = 80 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2}; \quad \sigma_4 = \frac{N_2}{A_3} = \frac{20 \cdot 10^3}{500} = 40 \frac{\text{Н}}{\text{мм}^2};$$

Відкладаючи значення навантажень  $N_z$  або напруг  $\sigma$  вгору від осі, тому що значення їх позитивні (розтягнення). Масштаб епюр поздовжньої сили і нормальних напружень вибирається окремо в залежності від порядку цифр і наявного місця на аркуші.

## Рекомендована література

### Базова

1. Авотін С.С. Технічна механіка / С.С. Авотін, М.Я. Рохманов. – Харків: ХНАУ, 2018. – 99 с.
2. Булгаков В.М. Теоретична механіка / Булгаков В.М., Яременко В.В., Черниш О.М., Березовий М.Г. – Київ. «Центр учбової літератури», 2017. – 640 с.
3. Кравченко І.Є., Черниш О.М., Булгаков В.М., Калетнік Г.М. Технічна механіка. Підручник для ВНЗ. – Київ, Хай-Тек Прес, 2011. – 340 с.
4. Олофинская В.П. Техническая механика / В.П. Олофинская. – Москва: Форум, 2007. – 347 с.
5. Рохманов М.Я. Фізика / М.Я. Рохманов, С.С. Авотін. – Харків: ХНАУ, 2020. – 288с.
6. Технічна механіка / І.Я. Бялер, В.Н. Левінсон, В.Ю. Саліон, В.А. Михайловський. – Київ: Вища шк., 1971. – 379 с.
7. Ткачук А.Т. Технічна механіка / А.Е. Ткачук. – Кіровоград: Авангард, 2015. – 260 с.
8. Федуліна А.І. Теоретична механіка / А.І. Федуліна. – Київ: Вища шк., 2005. – 319 с.
9. Черниш О.М. Теоретична механіка / Черниш О.М., Яременко В.В., Березовий М.Г. – Київ. «Центр учбової літератури», 2018. – 760 с.
10. Эрдеди А.А. Техническая механика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А.А. Эрдеди, Ю.А. Медведев, Н.А. Эрдеди. – Москва: Высш. школа, 1991. – 303 с.

### Допоміжна

1. Авотін С.С. Теоретична механіка / С.С. Авотін, М.Я. Рохманов. – Харків: ХНАУ, 2020. – 78. с.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – Москва: Наука, 1967. – 168 с.

Крім вище зазначених можуть бути використані періодичні видання (фахові та науково-популярні), а також інформаційні ресурси мережі INTERNET, та фахова і науково-популярна література, яка не вказана у представленому переліку, проте містить питання даного курсу.

### *Технічні засоби навчання:*

1. Наглядні матеріали
2. Механічні передачі;
3. Стандартні прокатні профілі;
4. Редуктори;
5. З'єднання;

# НЕ РАСПЕЧАТИВАТЬ!

## З м і с т

Вступ

Програма навчальної дисципліни

1. Основні поняття та аксіоми статички
  - 1.1. Сила, система сил
  - 1.2. Аксіоми статички та їх наслідки
  - 1.3. Теорема про три непаралельні сили
  - 1.4. В'язі та напрям їх реакції
2. Система збіжних сил
  - 2.1. Проекція сили на вісь і площину
  - 2.2. Аналітичний спосіб задавання сили
  - 2.3. Зведення системи збіжних сил до рівнодійної
  - 2.4. Умови рівноваги системи збіжних сил
3. Момент сили відносно точки і осі
  - 3.1. Момент сили відносно точки
  - 3.2. Момент сили відносно осі
4. Пара сил
  - 4.1. Пара сил. Момент пари сил
  - 4.2. Властивості пар сил
5. Просторова система сил
  - 5.1. Паралельне перенесення сил
  - 5.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил
  - 5.3. Умови рівноваги довільної системи сил на площині
6. Балкові системи
  - 6.1. Балкові системи та їх види
  - 6.2. Види навантажень балкових систем
  - 6.3. Приклади розв'язання задач
7. Центр тяжіння
  - 7.1. Центр тяжіння абсолютно твердого тіла
  - 7.2. Приклад розв'язання задачі
8. Геометричні характеристики плоских перерізів
  - 8.1. Статичний момент плоскої фігури (перерізу)
  - 8.2. Осьові і полярні моменти інерції плоскої фігури
  - 8.3. Моменти інерції прямокутного і колового перерізів
  - 8.4. Моменти інерції плоских перерізів відносно зміщених осей
  - 8.5. Радіус та еліпс інерції плоских перерізів

- 9. Основні характеристики конструктивних елементів
  - 9.1. Припущення про загальні властивості матеріалів
  - 9.2. Дослідження механічних характеристик матеріалів
- 10. Деформування розтягом і стиском
  - 10.1. Напруження та деформації при розтяганні й стисканні
  - 10.2 Напруження в перерізах
  - 10.3. Залежності між напруженнями і деформаціями
- 11. Напружений стан
  - 11.1. Напруження та деформації в точці
  - 11.2. Види напруженого стану
  - 11.3. Розрахунки на міцність при складному напруженні
  - 11.4. Умови міцності і жорсткості. Допустимі напруження
- 12. Деформування зсувом
  - 12.1 Розрахунок на зріз при деформуванні зсувом
  - 12.2. Закон Гука при чистому зсуві
  - 12.3. Перевірка міцності при чистому зсуві
- 13. Деформування крученням
  - 13.1. Напруження і деформації при крученні
  - 13.2. Аналіз напруженого стану і руйнування при крученні
- 14. Деформування згином
  - 14. 1. Напруження при плоскому згинанні прямого стрижня
  - 14.2. Умови міцності при згинанні
    - Розрахунково-графічні роботи
    - Список рекомендованої літератури