

## ІМПУЛЬСНЕ НАВАНТАЖЕННЯ БАЛКИ, ЩО ПІДКРІПЛЕНА ОДНОБІЧНОЮ ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ

Ольшанський В.П., Бурлака В.П., Сліпченко М.В.

Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра  
Василенка

Розглянуто динамічне деформування силовим імпульсом балки, яка лежить в прольоті на одnobічній пружній основі, що не чинить опору відриву від неї балки при її вільному русі після розвантаження. Внаслідок одnobічного підкріплення балки основою, що не сприймає деформацій розтягу, механічна система має несиметричну характеристику пружності відносно положення рівноваги. Тому максимальні прогини балки в напрямі дії поперечного імпульсу можуть бути менші, ніж такі переміщення в протилежному напрямі, коли балка розвантажена. Це стосується і згинальних моментів та напружень. Виведено умови, за яких має місце вказана нерівність. Вони пов'язані з пружними і масовими характеристиками коливальної системи та тривалістю у часі прямокутного силового імпульсу. Висота імпульсу, тобто величина прикладеного тиску, не входить у ці умови, що є наслідком кусково-лінійної характеристики пружної системи. Ця особливість динаміки балки описана для двох варіантів граничних умов, а саме при шарнірному обпиранні та при жорсткому затисненні її кінців. Рух балки поділено на два етапи. На першому з них балка контактує з основою типу Вінклера, що сприймає стискання, а на другому етапі такий контакт відсутній і розвантажена балка здійснює вільне колювання. На кожному із вказаних етапів побудовано аналітичні розв'язки диференціальних рівнянь руху балки, а потім проведено їх припасовування. Це стало можливим завдяки вибору спеціального розподілу динамічного навантаження по довжині балки, коли форма зігнутої ним вісі така як і форма вільних колювань балки на першій частоті. Виведено компактні формули для розрахунку амплітудних прогинів балки в обидва боки від положення рівноваги в стані спокою. Наведено приклади розрахунків, де показано, що динамічний ефект несиметрії пружної характеристики проявляється більш виразно при шарнірному обпиранні країв балки, ніж при жорсткому їх затисненні.

**Ключові слова:** балка, одnobічна пружна опора, прямокутний імпульс, несиметрична пружна характеристика.

**Вступ.** Балки є широко розповсюдженими елементами конструкцій. Вони використовуються у багатьох галузях. Балки з одnobічною опорою, зокрема, застосовуються в трубопроводах. При дії імпульсу після розвантаження вони можуть відриватись від опори, що потребує розрахунків динаміки таких балок.

**Аналіз літературних даних та постановка проблеми.** Дослідженню динаміки елементів конструкції при дії імпульсних і ударних навантажень присвячено багато публікацій, із яких виділимо монографічні видання [1-4]. Саме короточасні інтенсивні навантаження можуть спричинити руйнування деформованих ними тіл, або призвести до втрати ними працездатності як елементів технічних систем. Тому не послабляє потік публікацій з цієї тематики, що відображено в [5-7]. Стосовно колювань балок на пружній основі, то їх теж розглядали багато дослідників, використовуючи різні моделі основи [8, 9]. Але значно менше робіт присвячено динамічним розрахункам одnobічнопідкріплених балок, які в ході руху можуть вільно відриватись від основи, що спостерігається на практиці. Тому, на відміну від відомих публікацій, тут

розглянемо динаміку балки, з однобічною в'яззю у вигляді пружної основи, при дії імпульсного силового навантаження.

Метою статті є дослідження особливостей імпульсного деформування підкріпленої балки, як системи з несиметричною характеристикою пружності.

Такі особливості руху систем з одним ступенем вільності розглядали в [10, 11], де йшлося про динамічний ефект несиметрії силової характеристики та умови його виникнення.

Тут ставиться завдання підтвердити можливість цього ефекту і в континуальній одновимірній системі.

1. Імпульсне деформування балки з шарнірно обіпертими кінцями. Використаємо розрахункову схему, подану на рис. 1.

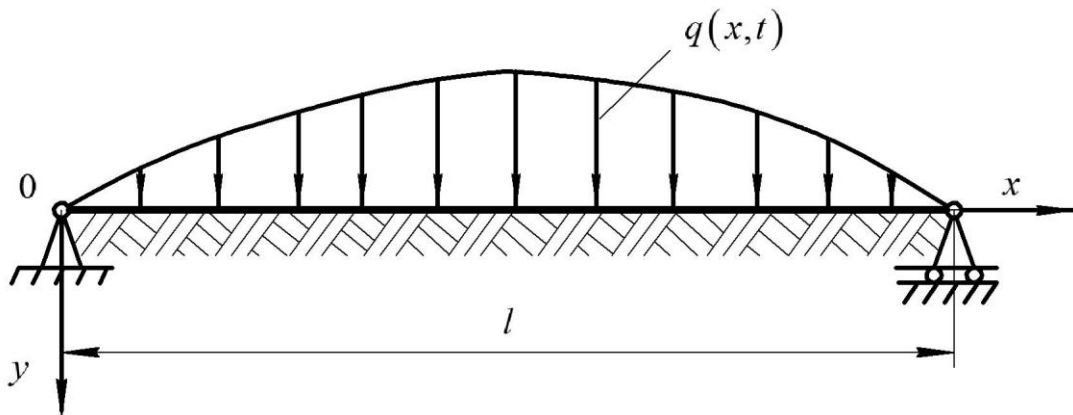


Рис.1. Балка на пружній основі

Вертикальні переміщення балки (прогини)  $y(x, t)$  додатні вниз, від'ємні вгору, описуємо диференціальним рівнянням^

$$EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{bc}{2} [1 + \text{sign}(y)] y + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = bq \sin \frac{\pi x}{l} [H(t) - H(t - t_1)], \quad (1)$$

у якому  $J = bh^3 / 12$ ;  $F = bh$ ;  $b, h$  – ширина і висота прямокутного поперечного перерізу балки;  $l$  – її довжина;  $c$  – коефіцієнт постелі балки;  $E, \rho$  – модуль пружності та питома маса матеріалу балки;  $q$  – максимальне значення тиску на балку;  $H(t), H(t - t_1)$  – одиничні функції Хевісайда;  $t_1$  – тривалість прямокутного імпульсу в часі  $t$ .

Розв'язок рівняння (1) подаємо добутком:

$$y(x, t) = A(t) \frac{\pi x}{l}, \quad (2)$$

що задовольняє умовам вільного обпирання кінців балки  $x = 0$  і  $x = l$ .

Підстановкою (2) в (1) отримуємо звичайне диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + [K_1^2 + K_2^2 \text{sign}(A)] A = \frac{bq}{\rho F} [H(t) - H(t - t_1)], \quad (3)$$

в якому:

$$K_1^2 = \frac{1}{\rho F} \left( EJ \frac{\pi^4}{l^4} + \frac{bc}{2} \right); \quad K_2^2 = \frac{bc}{2\rho F}.$$

Зв'язок рівняння (3) будемо при нульових початкових умовах:

$$A(0) = 0; \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

припускаючи, що в момент прикладення імпульсу балка знаходилась в стані спокою.

1.1. Розглянемо спочатку дію імпульсу, тривалість якого обмежена нерівністю  $t_1 \leq \pi / \omega$ , де  $\omega = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}$  – частота вільних коливань балки при двобічній в'язі з основою.

На проміжку часу  $t \in (0, \pi / \omega)$ , де  $A > 0$ , рівняння (3) має розв'язок:

$$A(t) = \begin{cases} y_c (1 - \cos \omega t) & t < t_1 \\ 2y_c \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin \omega \left( t - \frac{t_1}{2} \right) & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (5)$$

що задовольняє умовам (4).

Тут  $y_c = \frac{bq}{EJ\pi^4 / l^4 + bc}$  – додатній статичний прогин середини балки вниз, спричинений тиском  $q(x) = q \sin \frac{\pi x}{l}$ .

Згідно з (2), (5) максимальний динамічний прогин балки в напрямі дії імпульсу:

$a_0(t_1) = \max y \left( \frac{l}{2}, t \right)$  становить:

$$a_0(t_1) = 2y_c \sin \frac{\omega t_1}{2} \quad (6)$$

і досягається він при  $t = t_e = \frac{\pi}{2\omega} + \frac{t_1}{2}$ .

Розв'язок (5) втрачає чинність, коли  $A(t) < 0$  або:

$$t > t_* = \frac{\pi}{\omega} + \frac{t_1}{2}.$$

В момент часу  $t = t_*$  маємо:

$$A(t_*) = 0; \left. \frac{dA}{dt} \right|_{t=t_*} = -v_0 = -2y_c \omega \sin \frac{\omega t_1}{2}, \quad (7)$$

тобто балка повертається в вихідне положення  $y = 0$  зі швидкістю  $v_0$ .

При  $t > t_* \geq t_1$  починається рух розвантаженої балки вгору з від'ємними прогинами. Він описується однорідним рівнянням:

$$\frac{d^2 A}{dt^2} + \omega_*^2 A = 0, \quad (8)$$

у якому  $\omega_* = \sqrt{K_1^2 - K_2^2}$  – частота вільних коливань невідкріпленої балки.

Розв'язок рівняння (8) при початкових умовах (7) виражається добутком:

$$A(t) = -2y_c \frac{\omega}{\omega_*} \sin \frac{\omega t_1}{2} \sin(\omega_*(t - t_*)).$$

В момент часу:

$$t = t_m = \frac{\pi}{2\omega_*} + t_*$$

досягається максимальне відхилення балки вгору з амплітудою:

$$a_1(t_1) = \max \left| y \left( \frac{l}{2}, t \right) \right| = 2y_c \frac{\omega}{\omega_*} \sin \frac{\omega t_1}{2}. \quad (9)$$

Враховуючи (6) і (9), отримуємо відношення:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\omega}{\omega_*} > 1,$$

оскільки  $\omega_* < \omega$ . Відношення амплітуд не залежить від  $t_1$ .

Отже на вибраному інтервалі дії імпульсу амплітуда від'ємних прогинів балки більша ніж амплітуда додатних прогинів, тобто має місце динамічний ефект несиметрії пружної характеристики системи [10, 11].

1.2. Розглянемо далі дію імпульсу більшої тривалості у часі, коли  $t_1 \in (\pi/\omega; 2\pi/\omega)$ . При такому навантаженні максимальний додатний прогин досягається при  $t = t_e = \pi/\omega \leq t_1$  і дорівнює  $a_0(t_1) = 2y_c$ , незалежно від  $t_1$ . Для обчислення амплітуди від'ємного прогину зберігає чинність формула (9). Тому із рівняння:  $a_1(t_1) = a_0(t_1) = 2y_c$  або

$$\frac{\omega}{\omega_*} \sin \frac{\omega t_1}{2} = 1, \quad (10)$$

легко знайти граничну тривалість імпульсу  $t_1 = t_r$ , коли перестає проявлятися динамічний ефект несиметрії пружної характеристики.

Рівняння (10) має корінь:

$$t_1 = t_r = \frac{2}{\omega} \left( \pi - \arcsin \frac{\omega_*}{\omega} \right).$$

Таким чином, якщо тривалість дії імпульсу знаходиться в проміжку  $t \in (0; t_r)$ , то  $a_1(t_1) > a_0(t_1)$ , бо:

$$\frac{a_1(t_1)}{a_0(t_1)} = \frac{\omega}{\omega_*} \sin \frac{\omega t_1}{2},$$

а при  $t \in (t_r; 2\pi/\omega)$  навпаки  $a_1(t_1) < a_0(t_1)$ . У випадку  $t_1 = 2\pi/\omega$   $a_1(t_1) = 0$  і балка не має від'ємних прогинів. Найбільше відношення  $a_1(t_1)/a_0(t_1) = \omega/\omega_*$  досягається при  $t_1 = \pi/\omega$ .

Зазначимо, що при розглянутому розподілі тиску згинальний момент в балці  $M(x, t)$  і максимальне згинальне напруження  $\sigma(x, t)$  пов'язані з прогином балки залежностями:

$$M(x,t) = \frac{\pi^2 EJ}{l^2} y(x,t); \max \sigma(x,t) = \frac{6}{bh^2} M(x,t).$$

Тому зроблені вище висновки для прогину стосуються і згинального моменту та згинальних напружень, які можуть бути більшими при від'ємних прогинах, ніж при додатних.

Незважаючи на те, що виведені вище формули стосуються лише імпульсу малої тривалості, їх можна використовувати для розрахунку динаміки балки і при дії прямокутного імпульсу довільної тривалості, коли  $t_1 \in \left( \frac{2\pi n}{\omega}; \frac{2\pi(n+1)}{\omega} \right)$ ,

$n = 0, 1, 2, \dots$ . Для цього в формулах слід замінити  $t_1$  на  $t_1 - \frac{2\pi n}{\omega}$ , а  $t$  на  $t - \frac{2\pi n}{\omega}$ ,

тобто змістити відлік часу на  $2\pi n / \omega$ . Отже динамічний ефект несиметрії характеристики пружності може проявлятися і при великих тривалостях прямокутного імпульсу, в залежності від часу миттєвого розвантаження балки.

Розглянемо приклад. Розрахунки проведемо для сталевій балки-полоси з параметрами:  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>;  $b = 0,3$  м;  $h = 0,025$  м;  $l = 3$  м. Основою служить полімерний матеріал, у якого  $E_0 = 10^6$  Па;  $\nu_0 = 0,4$ . Максимальний тиск  $q = 10^4$  Па. Тривалість імпульсу  $t_1 = 0,03185$  с.

Коефіцієнт постелі обчислюємо за формулою [12]:

$$c = E_0 / \left[ 0,8(1 - \nu_0^2) \sqrt{bl} \right].$$

Для прийнятих розрахункових даних:  $c = 1,5686 \cdot 10^4$  Па/м;  $bc = 4,7058 \cdot 10^5$  Па;  $EJ\pi^4 / l^4 = 98649,253$  Па;  $\rho F = 58,5$  кг/м;  $K_1^2 = 5708,3633$  с<sup>-2</sup>;  $K_2^2 = 4022,0513$  с<sup>-2</sup>;  $\omega = 98,6429$  с<sup>-1</sup>;  $\omega_* = 41,0647$  с<sup>-1</sup>;  $y_c = 5,2703 \cdot 10^{-3}$  м;  $a_1 / a_0 = 2,4021$ . Амплітудні переміщення становлять:  $a_0 = 2y_c = 1,0541 \cdot 10^{-2}$  м;  $a_1 = 2,5320$  м. Перша досягається при  $t_e = 0,03185$  с, а друга – при  $t_m = 0,08602$  с. Амплітуда від'ємного переміщення центру балки вгору значно більша ніж амплітуда переміщення його вниз, куди діяв імпульс. Для заданих параметрів:  $t_r = 0,05499$  с. Отже нерівність  $a_1 > a_0$  буде виконуватись при  $t_1 \in (0; 0,05499)$  с. Якщо  $t_1 \in (0,05499; 0,063696)$  с, то  $a_0 > a_1$ , тобто динамічний ефект несиметрії пружної характеристики не проявляється. У випадку  $t_1 = 0,063696$  с амплітуда  $a_1 = 0$  і балка не має від'ємних прогинів. Графіки зміни прогинів середини балки у часі  $y(l/2; t)$  для трьох значень тривалості імпульсу  $t_1$  нанесено на рис. 2. Вони одержані числовим інтегруванням (3) на комп'ютері.

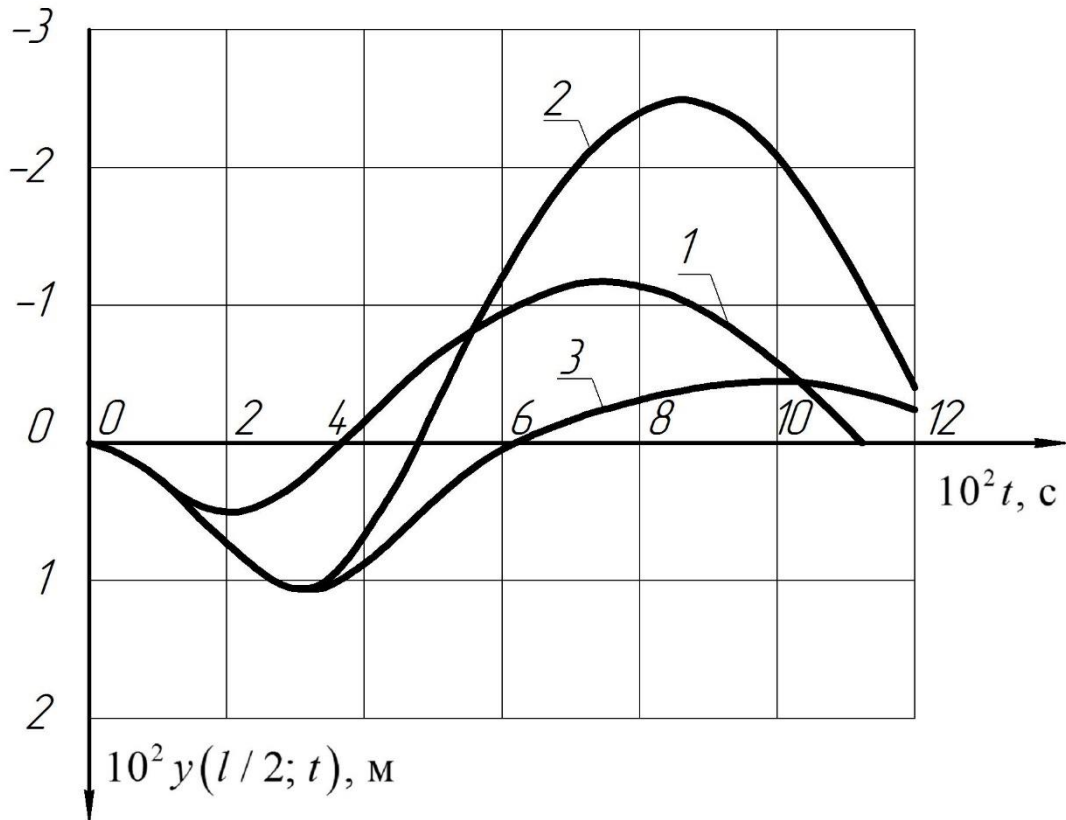


Рис.2. Графіки прогинів середини балки при різних  $t_1$ : 1 –  $t_1 = 0,01$  с; 2 –  $t_1 = 0,03185$  с; 3 –  $t_1 = 0,06$  с

На рисунку найбільші прогини балка має при  $t_1 = \frac{\pi}{\omega} = 0,03185$  с. У третьому

випадку, коли  $t_1 = 0,06$  с, динамічний ефект несиметрії пружної характеристики не проявляється. Маємо повну відповідність числових результатів, одержаних двома способами.

2. Імпульсне деформування балки з жорстко затиснутими кінцями. У цьому випадку прогини балки описуємо диференціальними рівнянням:

$$\begin{aligned}
 EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{bc}{2} [1 + \text{sign}(y)] y + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \\
 = b\gamma q X\left(\frac{\lambda x}{l}\right) [H(t) - H(t - t_1)]
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

Яке відрізняється від (1) правою частиною.

У рівнянні (11):

$$\begin{aligned}
 X\left(\frac{\lambda x}{l}\right) = \alpha \left[ \text{ch}\left(\frac{\lambda x_1}{l}\right) - \cos\left(\frac{\lambda x}{l}\right) - \beta \left( \text{sh}\left(\frac{\lambda x}{l}\right) - \sin\left(\frac{\lambda x}{l}\right) \right) \right]; \alpha \approx 0,629664928; \\
 \lambda \approx 4,730040745; \beta = \frac{\text{ch } \lambda - \cos \lambda}{\text{sh } \lambda - \sin \lambda} \approx 0,982502215.
 \end{aligned}$$

Множник  $\alpha$  вибрано з умови  $X\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1$ .

Константу  $\gamma$  беремо такою, щоб сумарна сила, прикладена до балок з різними крайовими умовами, була однаковою, тобто:

$$\int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = \gamma \int_0^l X \left( \frac{\lambda x}{l} \right) dx.$$

Це рівняння виконується, коли  $\gamma \approx 1,216863806$ .

Рівняння (11) доповнюємо крайовими умовами:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0; \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (12)$$

Прогин балки виражаємо добутком:

$$y(x, t) = B(t) \cdot X \left( \frac{\lambda x}{l} \right). \quad (13)$$

Підстановкою (13) в (11) отримуємо диференціальне рівняння:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + \left[ (s_1^2 + s_2^2) \text{sign}(B) \right] B = \frac{bq\gamma}{\rho F} [H(t) - H(t - t_1)], \quad (14)$$

у якому:

$$s_1^2 = \frac{1}{\rho F} \left[ EJ \frac{\lambda^4}{l^4} + \frac{bc}{2} \right]; \quad s_2^2 = K_2^2 = \frac{bc}{2\rho F}.$$

2.1. Припустимо, що тривалість імпульсу обмежена нерівністю  $t_1 \leq \pi / p$ , де  $p = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$  – частота вільних коливань балки при двобічній в'язі з основою.

На проміжку  $t \in (0; \pi / p)$ , де  $B(t) > 0$ , рівняння (14) має розв'язок:

$$B(t) = \begin{cases} Y_c (1 - \cos pt) & t < t_1 \\ 2Y_c \sin \frac{pt_1}{2} \sin p \left( t - \frac{t_1}{2} \right) & \text{при} \\ & t \geq t_1, \end{cases} \quad (15)$$

Тут  $Y_c = \frac{bq\gamma}{EJ\lambda^4/l^4 + bc}$  – прогин середини балки, спричинений тиском

$$q(x) = q\gamma X \left( \frac{\lambda x}{l} \right).$$

По аналогії з (6) максимальний динамічний прогин балки  $b_0(t_1)$  в напрямі дії імпульсу становить:

$$b_0(t_1) = 2Y_c \sin \frac{pt_1}{2} \quad (16)$$

і настає він при  $t = t_e = \frac{\pi}{2p} + \frac{t_1}{2}$ .

Розв'язок (15) втрачає чинність, коли

$$t > t_* = \frac{\pi}{p} + \frac{t_1}{2},$$

бо для таких  $t$   $B(t) < 0$ .

В момент часу  $t = t_*$  балка приймає вихідне положення, у якому:

$$B(t_*) = 0; \left. \frac{dB}{dt} \right|_{t=t_*} = -v_0 = -2Y_c p \sin \frac{pt_1}{2}. \quad (17)$$

Отже, при  $t > t_* \geq t_1$  починається рух розвантаженої балки вгору. Він описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} + p_*^2 B = 0, \quad (18)$$

у якому  $p_* = \sqrt{s_1^2 - s_2^2}$  – частота вільних коливань непідкріпленої балки.

Розв'язок рівняння (18), при початкових умовах (17), має вигляд:

$$B(t) = -2Y_c \frac{p}{p_*} \sin \frac{pt_1}{2} \cdot \sin(p_*(t - t_*)).$$

Амплітудне відхилення балки вгору становить:

$$b_1(t_1) = 2Y_c \frac{p}{p_*} \sin \frac{pt_1}{2} \quad (19)$$

і досягається воно при  $t = t_m = \frac{\pi}{2p_*} + t_*$ .

Отже відношення амплітуд, згідно з (16) і (19) подається виразом:

$$\frac{b_1(t_1)}{b_0(t_1)} = \frac{p}{p_*} > 1.$$

Воно не залежить від  $t_1$  і більше одиниці, бо  $p_* < p$ . Таким чином, на розглянутому інтервалі дії імпульсу проявляється динамічний ефект несиметрії пружної характеристики системи, незалежно від  $t_1$ .

2.2. Розглянемо далі дію імпульсу більшої тривалості, коли  $t_1 \in \left( \frac{\pi}{p}; \frac{2\pi}{p} \right)$ . У

цьому випадку максимальний прогин балки вниз, незалежно від  $t_1$ , досягається при  $t = t_e = \pi / p \leq t_1$  і дорівнює  $b_0(t_1) = 2Y_c = const$ . Амплітуду прогину вгору обчислюємо за формулою (19). Тоді граничне значення дії імпульсу, коли рівні амплітуди прогинів балки вниз і вгору, визначаємо рівнянням:

$$b_1(t_1) = b_0(t_1) \text{ або } \frac{p}{p_*} \sin \frac{pt_1}{2} = 1.$$

Воно має корінь  $t_1 = t_r = \frac{2}{p} \left( \pi - \arcsin \frac{p_*}{p} \right)$ .

Отже, при  $t_1 \in (0; t_r)$  має місце нерівність  $b_1(t_1) > b_0(t_1)$ , бо:

$$\frac{b_1(t_1)}{b_0(t_1)} = \frac{p}{p_*} \sin \frac{pt_1}{2},$$



а при  $t \in (t_T; 2\pi/p)$  –  $b_0(t_1) > b_1(t_1)$ . У другому випадку динамічний ефект несиметрії відсутній. При  $t_1 = 2\pi/p$   $b_1(t_1) = 0$ , тобто балка не має від’ємних прогинів. Найбільше відношення  $b_1(t_1)/b_0(t_1) = p/p_*$ , досягається при  $t_1 = \pi/p$ .

Виведені вище формули зберігають чинність і при дії на балку імпульсу довільної тривалості, коли  $t_1 \in \left(\frac{2\pi n}{p}; \frac{2\pi(n+1)}{p}\right)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Але для цього в них треба замінити  $t_1$  на  $t_1 - \frac{2\pi n}{p}$ , а  $t$  на  $t - \frac{2\pi n}{p}$ , тобто змістити відлік часу на  $2\pi n$ .

Відношення амплітуд  $b_1\left(t_1 - \frac{2\pi n}{p}\right) / a_1\left(t_1 - \frac{2\pi n}{p}\right)$  буде суттєво залежати від часу миттєвого розвантаження балки  $t_1$ .

Розглянемо приклад. Зберігаємо числові дані попереднього прикладу, але внаслідок зміни умов закріплення кінців балки тепер:  $EJ\lambda^4/l^4 = 506936,822$  Па;  $s_1^2 = 12687,636$  с<sup>-2</sup>;  $p = 129,2660$  с<sup>-1</sup>;  $p_* = 93,0891$  с<sup>-1</sup>;  $Y_c = 3,7346 \cdot 10^{-3}$  м. При  $t_1 = 0,03185$  с  $b_1(t_1)/b_0(t_1) = 1,2267$ ;  $b_1(t_1) = 9,1625 \cdot 10^{-3}$  м;  $b_0(t_1) = 7,4692 \cdot 10^{-3}$  м. Ці значення амплітуд прогину балки значно менші ніж у попередньому прикладі. Максимальне відношення  $b_1(t_1)/b_0(t_1) = 1,3886$  досягається при  $t_1 = 0,02430$  с. Нагадуємо, що в попередньому прикладі максимальне відношення амплітуд прогинів дорівнює 2,4021. Отже при затиснутих кінцях балки динамічний ефект несиметрії пружної характеристики проявляється менш виразно ніж у балки з шарнірним опиранням країв.

### Висновки

Теоретичний аналіз з розрахунками показав, що при імпульсному навантаженні балки, підкріпленою однобічною пружною основою, амплітуда прогину з відривом від основи розвантаженої балки може бути більша за амплітуду прогину балки в напрямі дії імпульсу, коли основа піддана стисканню. Цей ефект стосується і згинальних моментів та згинальних напружень. Більш виразно він проявляється при шарнірному опиранні кінців балки і менш виразно при жорсткому затисненні країв.

### Список використаних джерел

1. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, Ю.С. Воробьев, Е.Г. Янютин. – К.: Наукова думка, 1978. – 183 с.
2. Старовойтов Э.И. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций / Э.И. Старовойтов, А.В. Яровая, Д.В. Леоненко. – Гомель.: Бел.ГУТ, 2003. – 367 с.
3. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай и др. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
4. Луговой П.З. Нестационарная динамика неоднородных оболочечных конструкций / П.З. Луговой, В.Ф. Мейш, Э.Ф. Штанцель. – К.: Изд. Киевский университет, 2005. – 536 с.

5. Сметанкина Н.В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н.В. Сметанкина. – Харьков: Міськдрук, 2011. – 376 с.
6. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Харьков: Міськдрук, 2012. – 320 с.
7. Воропай А.В. Интегральные уравнения Вольтерра в некорретных задачах нестационарного деформирования пластин / А.В. Воропай. – Харьков: Лидер, 2018. – 214 с.
8. Власов В.З. Балки, плиты и оболочки на упругом основании / В.З. Власов, Н.Н. Леонтьев. – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
9. Коренев Б.Г. Конструкции, лежащие на упругом основании / Б.Г. Коренев // Стойкая механика в СССР, 1917-1967 гг. – М. Стройиздат, 1967. – 239 с.
10. Ольшанський В.П. Про ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при механічному ударі / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський. // Вібрації в техніці та технологіях. – 2018. – № 2 (89). – С. 36-40.
11. Ольшанський В.П. Про динамічний ефект несиметрії силової характеристики коливальної системи при імпульсному навантаженні / В.П. Ольшанський, С.В. Ольшанський. // Вісник НТУ «ХП». Сер. Динаміка і міцність машин. – 2018. – № 33 (1309). – С. 33-36.
12. Снитко Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1980. – 431 с.

#### **Аннотация**

### **ИМПУЛЬСНОЕ НАГРУЖЕНИЕ БАЛКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ ОДНОСТОРОННИМ УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ**

**Ольшанский В. П., Бурлака В. В., Слипченко М. В.**

*Рассмотрено динамическое деформирование силовым импульсом балки, которая лежит в пролете на одностороннем упругом основании, что не оказывает сопротивления отрыву от нее балки при ее свободном движении после разгрузки. Вследствие одностороннего подкрепления балки основанием, которое не воспринимает деформаций растяжения, механическая система имеет несимметричную характеристику упругости относительно положения равновесия. Поэтому максимальные прогибы балки в направлении действия поперечного импульса могут быть меньше, чем такие перемещения в противоположном направлении, когда балка разгружена. Это касается и изгибающих моментов и напряжений. Выведены условия, при которых имеет место указанное неравенство. Они связаны с упругими и массовыми характеристиками колебательной системы и продолжительностью во времени прямоугольного силового импульса. Высота импульса, то есть величина приложенного давления, не входит в эти условия, что является следствием кусочно-линейной характеристики упругой системы. Эта особенность динамики балки описана для двух вариантов граничных условий, а именно при шарнирном опирании и при жёсткой заделке ее концов. Движение балки разделено на два этапа. На первом из них балка контактирует с основанием типа Винклера, которое воспринимает сжатие, а на втором этапе такой контакт отсутствует и разгруженная балка осуществляет свободное колебание. На каждом из указанных этапов построены аналитические решения дифференциальных уравнений движения балки, а затем проведено их припасовывание. Это стало возможным благодаря выбору специального*

распределения динамической нагрузки по длине балки, когда форма изогнутой им оси такая же, как и форма свободных колебаний балки на первой частоте. Выведены компактные формулы для расчета амплитудных прогибов балки в обе стороны от положения равновесия в состоянии покоя. Приведены примеры расчетов, где показано, что динамический эффект несимметрии упругой характеристики проявляется более отчетливо при шарнирном опирании краёв балки, чем при жесткой их заделке.

**Ключевые слова:** балка, одностороннее упругое основание, прямоугольный импульс, несимметричная упругая характеристика.

## Abstract

### IMPULSE LOADING OF A BEAM CONSOLIDATED BY A UNILATERAL ELASTIC BASE

V. Olshanskiy, V. Burlaka, M. Slipchenko

*The dynamic deformation by a power impulse of a beam, which lies in the span on a unilateral elastic foundation, was considered, which does not resist detachment of the beam from it during its free movement after unloading. Due to the unilateral reinforcement of the beam with a foundation that does not perceive tensile deformations, the mechanical system has an asymmetrical characteristic of elasticity relative to the equilibrium position. Therefore, the maximum deflections of the beam in the direction of action of the transverse pulse can be less than such movements in the opposite direction when the beam is unloaded. This also applies to bending moments and stresses. The conditions under which this inequality holds were derived. They are associated with the elastic and mass characteristics of the oscillatory system and the duration in time of a rectangular power pulse. The height of the pulse, that is, the magnitude of the applied pressure, is not included in these conditions, which is a consequence of the piecewise linear characteristic of the elastic system. This feature of the beam dynamics is described for two variants of the boundary conditions, namely, with articulated support and with rigid sealing of its ends. Beam movement is divided into two stages. In the first of these, the beam is in contact with a Winkler-type foundation, which perceives compression, and at the second stage such contact is absent and the unloaded beam performs a free oscillation. At each of the indicated stages, analytical solutions of the differential equations of beam motion were constructed, and then they were fitted. This was made possible by choosing a special dynamic load distribution along the length of the beam, when the shape of the axis bent by it is the same as the shape of the free oscillation of the beam at the first frequency. Compact formulas for calculating the amplitude deflection of a beam in both directions from the equilibrium position at rest are derived. Examples of calculations are given, where it is shown that the dynamic effect of the asymmetry of the elastic characteristic is more pronounced with the hinged support of the beam than with its rigid termination.*

**Keywords:** beam, unilateral elastic foundation, rectangular impulse, asymmetric elastic characteristic.