6. Florentina Dan A. (2014), Research regarding the production and the improvement of quality and nutritional value of almond milk as a possible substitute for cow's milk. Sibiu: Lucia Blaga University of Sibiu.

Савчук Юрій Юрійович, аспірант, кафедра експертизи харчових продуктів, Національний університет харчових технологій. Адреса: просп. Науки 26, м. Київ, Україна, 03028. E-mail: yura_savchuk_@ukr.net.

Савчук Юрий Юрьевич, аспирант, кафедра экспертизы пищевых продуктов, Национальный университет пищевых технологий. Адрес: просп. Науки 26, г. Киев, Украина, 03028. E-mail: yura_savchuk_@ukr.net.

Savchuk Yurii Yuriiovych, graduate student, Department of Food Examination, National University of Food Technologies. Address: av. Nauky 26, Kyiv, Ukraine, 03028. E-mail: yura_savchuk_@ukr.net.

Усатюк Світлана Іванівна, канд. техн. наук, доц., кафедра експертизи харчових продуктів, Національний університет харчових технологій. Адреса: вул. Володимирська 68, м. Київ, Україна, 01033.

Усатюк Светлана Ивановна, канд. техн. наук, доц., кафедра экспертизы пищевых продуктов, Национальный университет пищевых технологий. Адрес: ул. Владимирская 68, г. Киев, Украина, 01033.

Usatiuk Svitlana, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Food Examination, National University of Food Technologies. Address: Volodymyrska str., 68, Kyiv, Ukraine, 01033.

Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. А.А. Дубиніною.
Отримано 15.05.2017. ХДУХТ, Харків.

УДК 519.85

ОДИН ІЗ ПІДХОДІВ ДО РІШЕННЯ КЛАСУ ЗАДАЧ ПРИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Є.Ю. Стоян, Є.М. Якушенко

Розглянуто окремий клас дискретних задач геометричного проектування. Наводиться формальна постановка задачі призначення геометричних об'єктів у вигляді задачі оптимізації на евклідових комбінаторних множинах. Пропонується один із підходів вирішення цього класу задач на основі занурення комбінаторних множин у арифметичний евклідів простір.

Ключові слова: *дискретні задачі, оптимізація, комбінаторні множини, евклідів простір.*

ОДИН ИЗ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ КЛАССА ЗАДАЧ НАЗНАЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Е.Ю. Стоян, Е.Н. Якушенко

Рассмотрен отдельный класс дискретных задач геометрического проектирования. Приводится формальная постановка задачи назначения геометрических объектов в виде задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных множествах. Предлагается один из подходов решения этого класса задач на основе погружения комбинаторных множеств в арифметическое евклидово пространство.

Ключевые слова: *дискретные задачи, оптимизация, комбинаторные множества, евклидово пространство.*

ONE OF THE APPROACHES TO THE SOLUTION TO THE CLASS OF PROBLEMS FOR THE GEOMETRIC OBJECTS PURPOSE

E. Stoyan, E. Yakushenko

Nowadays it is necessary to create new models and methods of discrete optimization, efficient methods for solving optimization problems which arise during solving theoretical and applied problems in the economic, industrial, technological processes of various industries. Many geometric design combinatorial problems associate with the optimization of wide class of functions on combinatorial sets of complex structure. The basic idea of combinatorial methods is in transition from full exhaustion to abbreviate finite set of solutions. Impossibility of exact solution of combinatorial optimization problems which have large dimension and specific constraints leads to the development of approximate methods, but these methods have significant disadvantages such as obtained local extremum may not coincide with the global extremum, it is impossible to estimate the difference between obtained local and global extremum priori. All above-stated allows coming to the conclusion that the development of new approaches and methods for combinatorial optimization is topical problem. Separate class of geometric design discrete tasks is considered in the research. Formal statement of the problem of geometric objects purpose as optimization problem in Euclidean combinatorial sets is presented. One of approaches for solving of this class of problems on the base of immersion of combinatorial sets in arithmetic Euclidean space is proposed. The results have practical importance for solving a wide range of geometric design problems (placement, packaging, covering).

Keywords: *discrete tasks, optimization, combinatorial sets, Euclidean space.*

Постановка проблеми у загальному вигляді. У заданій області необхідно розмістити n геометричних об'єктів із заданими формами і метричними характеристиками таким чином, щоб сумарна площа попарних перетинів об'єктів була мінімальною.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Розвиток математичного програмування, застосування його в різних галузях людської діяльності, які пов'язані з вибором одного з можливих варіантів дії, сприяло появі великої кількості праць, присвячених задачам оптимізації на комбінаторних множинах [1–4].

Метою статті є викладення одного з підходів розв'язання класу задач призначення геометричних об'єктів на основі занурення комбінаторних множин у арифметичний евклідів простір.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай існує область розміщення S_0 і n геометричних об'єктів, $i=\overline{1,n}$, із заданими формами і метричними характеристиками. Кожному об'єкту відповідає внутрішня точка, яку назвемо полюсом об'єкта. Області розміщення належать n точок p_j. Потрібно таким чином розмістити об'єкти S_i $i=\overline{1,n}$, в області S_0, поєднуючи їх полюси з точками p_j, $j=\overline{1,n}$, щоб сумарна площа попарних перетинів об'єктів і площа тієї частини об'єктів, які не належать S_0, була мінімальною. Надалі об'єкт S_i, встановлений на місце p_j, позначимо через s_{ij}.

Розглянемо математичну постановку описаної задачі. Введемо булеві змінні:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо об'єкт } s_i \text{ міститься в точці } p_j\\ 0, & \text{в протилежному випадку.}\end{cases}$$

Для кожного об'єкта S_i і кожного місця p_j визначимо міру (площу) частини об'єкта s_{ij}, що не належить області S_0:

$$\omega_{ij}^{0}=\mu(s_{ij}\setminus s_0).$$

Крім того, для об'єкта S_i, призначеного на місце p_j, і об'єкта s_k, призначеного на місце p_l, визначимо міру їх перетину:

$$\omega_{ijkl} = \mu(s_{ij} \cap s_{kl}).$$

Об’єкти на місця будемо призначати таким чином, щоб мінімізувати таку функцію:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\omega_{ijkl} x_{ij} x_{kl} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}^{0} x_{ij} \qquad (1)$$

при таких обмеженнях на змінні:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ j = \overline{1,n};\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ i = \overline{1,n};\ x_{ij} \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Сенс цих обмежень полягає в тому, що на кожне місце призначається тільки один об’єкт, і кожен об’єкт може бути встановлений тільки на одне місце.

Для простоти подальшого викладення методу розв’язання задачі (1) – (2) здійснимо наступні перетворення. Замість змінних $x_{ij},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,n}$, будемо розглядати вектор $y = (y_1,...,y_q) \in R^q,\ q = n^2,\ y_k = x_{[k/n]+1,k-[k/n]-1}$, $[t]$ – ціла частина числа t. Безліч всіх таких векторів позначимо B_q^2. Очевидно, що всі точки множини B_q^2 і тільки вони задовольняють системі

$$\begin{cases} 0 \le g_i \le 1, \quad i = \overline{1,q}, & (3) \\ \sum_{i=1}^{q}(y_i - \frac{1}{2})^2 = \frac{q}{4} & (4) \end{cases}$$

У результаті проведених перетворень можна сформулювати таку задачу:

$$\varphi(y) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{n}\tilde{\omega}_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{q}\tilde{\omega}_i^0 y_i \to \min; \qquad (5)$$

$$\sum_{i=nm+1}^{n(m+1)} y_i = 1,\ m = 0,1,\ldots,n-1; \tag{6}$$

$$\sum_{i-1}^{n} y_{ni+y} = 1,\ j = 0,1,\ldots,n-1; \text{J} \tag{7}$$

$$0 \le y_i \le 1,\ i = \overline{1,q};\ \sum_{i=1}^{q}\left(y_i - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{q}{4}, \tag{8}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_{ij} &= \omega_{[1/n]+1,\, i-[i/n]-1,\, [j/n]+1,\, j-[j/n]-1}; \\ \tilde{\omega}_i^0 &= \omega^0_{[i/n]+1,\, i-[i/n]-1.} \end{aligned} \tag{9}$$

Цікавим є перетворення цільової функції $\varphi(y)$ до опуклого вигляду, тобто побудова такої опуклої функції $\Phi(y)$, яка в точках множини B_q^2 співпадає з $\varphi(y)$. Таке перетворення для квадратичної функції може бути проведено на основі таких справедливих для точок і множини співвідношень:

$$y_i \cdot y_j = \frac{1}{2}((y_i + y_j)^2 - y_i - y_j), \tag{10}$$

$$-y_i \cdot y_j = \frac{1}{2}((y_i - y_j)^2 - y_i - y_j). \tag{11}$$

Очевидно, що в правих частинах наведених співвідношень – опуклі функції. Тоді цільова функція виду (5) при заміні (10) – (11) після перетворень також опукла. Зауважимо, що у функції виду (5) коефіцієнти $\tilde{\omega}_{ij} \ge 0$, в зв'язку, з чим при перетворенні до опуклого вигляду використовується лише співвідношення (10). Проте для перетворення до опуклого вигляду квадратичної функції загального вигляду необхідні обидва співвідношення (10) і (11).

Цільова функція (5) може бути записана в такій формі:

$$\varphi(y) = (\tilde{W}y, y) + (\tilde{W}^0, y),$$

де $\widetilde{W} = // \widetilde{\omega}_{ij} //_{q \times q}$ – симетрична матриця квадратичної частини функції $\varphi(y)$; $\widetilde{W}^0 \in R^q$ – вектор лінійної частини функції $\varphi(y)$. Здійснимо перетворення $\varphi(y)$ до опуклого вигляду. Маємо

$$(\widetilde{W}y, y) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \widetilde{\omega}_{ij} y_i y_j = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \widetilde{\omega}_{ij} y_i y_j + \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \widetilde{\omega}_{ij} y_i^2 - \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{q} \widetilde{\omega}_{ij} y_i.$$

При перетині гіперплощин (6), (7) з n-сферою (9) утворюється гіперсфера розмірністю S = q-2n-1. Опишемо спосіб проведення вищезгаданої редукції розмірності задачі. По значимо

$$V^{/} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 011 & \ldots & 000 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 000 & \ldots & 0 & \ldots & 111\ldots & 1 \\ 10 & \ldots & 010 & \ldots & 0 & \ldots & 100 & \ldots & 0 \\ 01 & \ldots & 001 & \ldots & 0 & \ldots & 010 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 00 & \ldots & 100 & \ldots & 1 & \ldots & 000 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Здійснивши ортогоналізацію матриці, отримаємо матрицю V. По значимо

$$A = V^{/} \widetilde{W} V; \; B = V \widetilde{W}^0.$$

У результаті проведеного перетворення булеві вектори мають розмірність S = q-2n-1, а обмеження (6) – (7) виключаються.

Перенесемо центр сфери S у початок координат евклідового простору. Для цього проведемо заміну змінних задачі. Познаначимо $Z_i = y_i - \frac{1}{2}, \; i = \overline{1, s}$. У результаті останніх перетворень математична постановка задачі буде мати такий вигляд:

$$F(Z) = (AZ, Z) + (B, Z) \to \min; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{s} Z_i^2 = \frac{s}{4}; \tag{13}$$

$$-0{,}5 \le Z_i \le 0{,}5,\ i = \overline{1,s}, \tag{14}$$

де A – позитивно визначена симетрична матриця $\| a_{ij} \|_{s \times s}$, $B \in R^s$.

Опишемо метод вирішення задачі (12) – (14). Визначимо спочатку мінімум функції F (Z) на сфері s, що задається тепер співвідношенням (14). Складемо функцію Лагранжа завдання (12) – (13):

$$L(Z,\lambda) = (AZ,Z) + (B,Z) + \lambda(\frac{S}{4} - (Z,Z)).$$

Мінімум F(z) на сфері може бути знайдений із наступної системи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(Z,\lambda)}{\partial Z} = 2AZ + B - 2\lambda Z = 0; \\ (Z,Z) = \dfrac{s}{4}. \end{cases}$$

Із першого рівняння системи маємо

$$AZ - \lambda Z = -\frac{B}{2}.$$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_s$ – власні значення, а $l_1, l_2, ..., l_s$ – відповідні їм власні вектори. Тоді якщо λ не належить спектру матриці A, то

$$Z = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{s} \frac{b_i}{\lambda_i - \lambda} l_i \tag{15}$$

$$(Z,Z)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i-\lambda)^2}=\frac{s}{4}, \qquad (16)$$

де $b_i=(b,l_i)$.

Співвідношення (16) являє собою рівняння з одним невідомим $\lambda \in R^1$. Легко помітити, що на кожному з проміжків $(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ функція $\Psi(\lambda)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i-\lambda)^2}$ опукла. Вирішивши рівняння (16) на кожному з проміжків $(\lambda_i,\lambda_{i+1})$ одним з відомих чисельних методів, отримаємо не більше 2S коренів $\lambda^{(1)},\lambda^{2},...,\lambda^{2s}$. При цьому

$$F(Z)=(AZ,Z)+(B,Z)=(\lambda Z-B/2,Z)+(B,Z)=\lambda(Z,Z)+$$
$$+\frac{1}{2}(B,Z)=\lambda\frac{s}{4}+\frac{1}{2}(B,Z)=\lambda\frac{s}{4}-\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{s}\frac{b_i^2}{(\lambda_i-\lambda^2)}.$$

Обчисливши функцію F(Z) при кожному $\lambda^{(1)},\lambda^{2},...,\lambda^{2s}$, визначимо мінімальне значення функції і корінь λ^*, за якого воно досягається. Підставивши λ^* у (13), визначимо $Z^*=\arg\min_{Z\in s}F(Z)$. Таким чином, F(Z) досягає мінімуму на сфері S у точці $Z^*=(Z_1^*,...,Z_s^*)$. Розглянемо компоненти вектора Z^*. Серед них виберемо ті Z_i^*, для яких не виконуються обмеження – нерівності задачі (12). (Зауважимо, що якщо все задовольняє обмеженням – нерівностям завдання (12), то Z^* – її рішення). Зафіксувавши змінні, ми тим самим знизимо розмірність завдання на число зафіксованих компонент. Після перетворення функції цілі і обмежень відповідно до проведеного зниження розмірності задачі ми отримуємо задачу, аналогічну (12), в просторі меншої розмірності. Знижуючи таким чином на кожному кроці розмірність завдання, ми не більше ніж за s кроків отримаємо вектор $\bar{Z} = (\bar{Z}_1, ..., \bar{Z}_s)$, що дає наближене рішення задачі (12). Здійснивши зворотне перетворення, знайдемо $y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_s^*)$, де $y_i^* = \bar{Z}_i + \frac{1}{2}, i = \overline{1, s}$. Таким чином, y^* – наближений розв'язок задачі про призначення зазначених об'єктів на зафіксовані місця.

Висновки. Було проведено обчислювальний експеримент, у ході якого під час вирішення різних завдань описаним методом у більшості випадків було отримано оптимальне рішення.

Список джерел інформації / References

1. Сергиенко И. В. Задачи дискретной оптимизации: проблемы, методы решения, исследования / И. В. Сергиенко, В. П. Шило. – К. : Наук. Думка. 2003. – 264 с.

Sergienko, I.V., Shilo, V.P. (2003), *Problems of discrete optimization: problems, methods of solution, research [Zadachi diskretnoi optimizacii: problemi, metodi resheniya, issledovaniya]* Nauk. Dumka, Kyiv, 264 p.

2. Семенова Н. В. Подход к решению векторных задач дискретной оптимизации на комбинаторном множестве перестановок / Н. В. Семенова, Л. Н. Колечкина, А. Н. Нагорная // Кибернетика и системный анализ. – 2008. – № 3. – С. 158–172.

Semeonova, N.V., Kolechkina, L.N., Nagornaya, A.N. (2008), "The approach to the solution of vector problems of discrete optimization on the combinatorial set of permutations" ["Podhod k resheniu vektornsh zadach diskretnoi optimizacii na kombinatornom mnogestve perestanovok"], *Cybernetics and Systems Analysis*, №3, pp. 158-172.

3. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. – К. : Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.

Stoyan, U.G., Emec', O.O. *(1993), Theory and methods of Euclidean combinatorial optimization [Teoriya i metodi evklidovoi kombinatornoi optimizacii] Institute for System Studies*, К., 188 p.

4. Ємець О. О., Задачі оптимізації на комбінаторних множинах: властивості та розв'язання / О. О. Ємець, О. В. Роскладка. – Полтава : РВЦ ПУСКУ, 2006. – 130 с.

Emec', O.O., Roskladka, O.V. (2006), *Optimization problems on combinatorial sets, properties and solution [Zadachi optimizacii na kombinayornih mnoginah: vlastivosti ta rozv'yazannya]*, RVC PUSKU, Poltava, 130 p.

Стоян Євген Юрійович, канд. техн. наук, доц., кафедра економіки та управління, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Стоян Евгений Юрьевич, канд. техн. наук, доц., кафедра экономики и управления, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Stoyan Evgen, Candidate of Scienses (comparable to the academic degree of Doctor of Philosophy, PhD) Associate Professor, Department economics and Management, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: stoyaneugen@ukr.net.

Якушенко Євген Миколайович, канд. техн. наук, доц., кафедра холодильної та торговельної техніки і прикладної механіки, Харківський державний університет харчування та торгівлі. Адреса: вул. Клочківська, 333, м. Харків, Україна, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

Якушенко Евгений Николаевич, канд. техн. наук, доц., кафедра холодильной и торговой техники и прикладной механики, Харьковский государственный университет питания и торговли. Адрес: ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

Yakushenko Evgen, Candidate of Scienses (comparable to the academic degree of Doctor of Philosophy, PhD) Associate Professor, Department of Refrigeration. Trade Equipment and Applied Mechanics, Kharkiv State University of Food Technology and Trade. Address: Klochkivska str., 333, Kharkiv, Ukraine, 61051. E-mail: papelats@ukr.net.

Рекомендовано до публікації д-ром техн. наук, проф. Ю.М. Тормосовим.
Отримано 15.05.2017. ХДУХТ, Харків.