УДК 539.3

М.С. Синєкоп, д-р техн. наук, проф.
Л.О. Пархоменко, асист.

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ТИПУ ГРАНИЧНИХ УМОВ НА ВЛАСНІ ФОРМИ КОЛИВАНЬ ЦИЛІНДРА

Розглянуто задачу теорії пружності про розрахунок власних коливань пружного циліндра скінченної довжини із кульовою порожниною за різними граничними умовами. Її розв'язання здійснюється сумісним застосуванням методу R-функцій і варіаційного, що дозволяє звести вихідну задачу до задачі на власні значення.

Рассматривается задача теории упругости о расчете собственных колебаний упругого цилиндра конечной длины с шаровой полостью при различных граничных условиях. Ее решение осуществляется совместным использованием метода R-функций и вариационного, что позволяет свести исходную задачу к задаче на собственные значения.

The elasticity theory problem of the calculation of free vibration for an elastic cylinder of finite length with spherical hole under different boundary conditions is considered. Combined using R-function method and variational method for solving problem is proposed, at that the original problem is reduced to the eigenvalue problem.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Циліндр скінченної довжини широко використовується в машинобудуванні, а також часто зустрічається в конструкціях двигунів та енергетичному устаткуванні. Збільшення навантаження на такі деталі зумовлює необхідність дослідження їх власних коливань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задача про розрахунок коливань циліндра класичної форми розглянута в [1]. Відхилення геометрії циліндра від класичної потребує використання наближених методів, зокрема – методу скінченних елементів [2].

Мета та завдання статті. У цій роботі пропонується наближений метод розрахунку усталених коливань циліндра скінченної довжини із кульовою порожниною за різними граничними умовами шляхом сумісного використання методу R-функцій і варіаційного.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай Ω – круговий циліндр з межею $\partial\Omega$ радіуса R і висоти h із кульовою порожниною радіуса R_0, що розглядається в циліндричній системі координат Orz (вісь Oz спрямована вздовж осі обертання). Досліджується випадок відсутності масових і поверхневих сил. Рух пружного тіла визначається векторним рівнянням [3]

$$(\lambda + 2\mu)\,\mathrm{grad\,div}\,U - \mu\,\mathrm{rot\,rot}\,U = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \tag{1}$$

де $U(t,r,z)$ – вектор зміщень; λ, μ – сталі Ламе; ρ – густина матеріалу.

Припускаємо періодичність коливальних процесів у часі та вважаємо, що

$$U(t,r,z) = e^{-i\gamma t} \cdot u(r,z); \quad u(r,z) = \begin{pmatrix} u_r(r,z) \\ u_z(r,z) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де γ – кругова частота процесу.

Позначимо через β відношення швидкості розповсюдження поперечних хвиль c_2 до швидкості розповсюдження повздовжніх хвиль c_1 в нескінченному пружному середовищі, тобто $\beta = c_2 / c_1$, при цьому $c_1^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$; $c_2^2 = \mu/\rho$. Ураховуючи співвідношення (2), рівняння (1) в безрозмірних величинах набуває вигляду

$$1/\beta^2\,\mathrm{grad\,div}\,u - \mathrm{rot\,rot}\,u = -\gamma^2 u\,. \tag{3}$$

Розглянемо два випадки.

1. На межі тіла $\partial\Omega$ із зовнішньою нормаллю ν задані нульові нормальне σ_ν та дотичне τ_ν напруження:

$$\sigma_\nu = 0;\ \tau_\nu = 0,\ (r,z) \in \partial\Omega\,. \tag{4}$$

2. Нехай $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$, де $\partial\Omega_1$ – торці циліндра, що є закріпленими, а на ділянці $\partial\Omega_2$ задані нульові нормальне σ_ν та дотичне τ_ν напруження:

$$u = 0,\ (r,z) \in \partial\Omega_1;$$

$$\sigma_\nu = 0;\ \tau_\nu = 0,\ (r,z) \in \partial\Omega_2\,. \tag{5}$$

Рівняння (3) можна переписати в операторному вигляді, як

$$Au = ku\,, \tag{6}$$

де

$$k = \gamma^2;\ Au = -\left(1/\beta^2\,\mathrm{grad\,div}\,u - \mathrm{rot\,rot}\,u\right). \tag{7}$$

Таким чином, дослідження коливань тіла, що розглядається, зводиться до задачі на власні значення (6) за умов (4) або (5).

Для розв'язання отриманої задачі застосуємо варіаційний метод. Знаходження мінімального власного значення оператора A, визначеного рівністю (6), еквівалентно задачі про знаходження мінімуму функціонала енергії [1]

$$E(u)=\int_{\Omega}\left[\frac{1-2\beta^2}{\beta^2}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_r}{r}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2+\right.$$
$$\left.+2\left(\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{u_r}{r}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right)+\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)^2\right]d\Omega \tag{8}$$

за умови
$$\int_{\Omega}\left(u_r^{\,2}+u_z^{\,2}\right)d\Omega=1\,. \tag{9}$$

Згідно з методом R-функцій [4] наближений розв'язок задачі (8–9), що відповідає крайовим умовам (4), будемо шукати у вигляді:

$$u_r=\Phi_1-\omega D_1\Phi_1+2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}T_1\Phi_1-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\Phi_1}{r}+$$
$$+\omega\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]T_1\Phi_2\,;$$
$$u_z=\Phi_2-\omega D_1\Phi_2-2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}T_1\Phi_2-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\Phi_1}{r}+$$
$$+\omega\left[(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\right]T_1\Phi_1\,. \tag{10}$$

Наближений розв'язок задачі (8–9), що відповідає крайовим умовам (5), шукаємо у вигляді:

$$u_r=\omega_1\Phi_1-\omega D_1(\omega_1\Phi_1)+2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1(\omega_1\Phi_1)-$$
$$-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\omega_1\Phi_1}{r}+\omega\left[\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2-(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_1\Phi_2)\,;$$

$$u_z = \omega_1\Phi_2 - \omega D_1(\omega_1\Phi_2) - 2(1-\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial\omega_2}{\partial z}T_1(\omega_1\Phi_2) -$$

$$-(1-2\beta^2)\omega\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\omega_1\Phi_1}{r} + \omega\left[(1-2\beta^2)\left(\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial\omega_2}{\partial r}\right)^2\right]T_1(\omega_1\Phi_1)\,. \quad (11)$$

Тут:

1. Функції $\omega_1(r,z)$, $\omega_2(r,z)$, $\omega(r,z) \in C^1(\Omega)$, побудовані за допомогою апарату R-функцій, є лівими частинами нормалізованих до першого порядку рівнянь меж $\partial\Omega_1$, $\partial\Omega_2$ та $\partial\Omega$ відповідних областей [4] та мають такі властивості:

а) $\omega_1, \omega_2, \omega > 0$, $(r,z) \in \Omega$;

б) $\omega_1\big|_{\partial\Omega_1} = 0$, $\left.\frac{\partial\omega_1}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_1} = -1$; $\omega_2\big|_{\partial\Omega_2} = 0$, $\left.\frac{\partial\omega_2}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega_2} = -1$; $\omega\big|_{\partial\Omega} = 0$; $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = -1$.

2. Оператори D_1 і T_1 визначаються рівностями

$$D_1 g = \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}; \quad T_1 g = -\frac{\partial\omega_2}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial\omega_2}{\partial r}\frac{\partial g}{\partial z}.$$

3. Функції $\Phi_i(r,z)$ $(i=1,2)$ є довільними. При будь-якому їх виборі крайові умови (4) або (5) виконуються точно. У чисельній реалізації структур розв'язку (10) та (11) функції Φ_i подаються у вигляді розвинення за елементами деякої повної системи функцій (поліномів Чебишева, сплайнів та ін.):

$$\Phi_1(r,z) = \sum_{m=1}^{n_1} C_{1,m}\varphi_m^{(1)}(r,z)\,; \quad \Phi_2(r,z) = \sum_{m=1}^{n_2} C_{2,m}\varphi_m^{(2)}(r,z)\,. \quad (12)$$

Підставивши (12) у формули (10) або (11), надамо наближений розв'язок задачі (7–8) у вигляді:

$$u_{rn}(r,z) = \sum_{i=1}^{n} C_i\Psi_{ri}(r,z)\,; \quad u_{zn}(r,z) = \sum_{i=1}^{n} C_i\Psi_{zi}(r,z)\,, \quad (13)$$

де $n = n_1 + n_2$; $C_i = \begin{cases} C_{1,i}\,, & i \le n_1 \\ C_{2,i}\,, & n_1 < i \le n \end{cases}$; $\Psi_{ri}(r,z)$, $\Psi_{zi}(r,z)$ $(i=\overline{1,n})$ – деякі функції, що визначаються структурами (10) або (11).

Мінімізуючи функціонал (8) на множині функцій (13), отримуємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left[a_{ij} - k \cdot b_{ij}\right] = 0 \quad (j = \overline{1,n}), \tag{14}$$

де

$$a_{ij} = \iint_D \left[\frac{1-2\beta^2}{\beta^2} \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{rj}}{r} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. +2\left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial r} \cdot \frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial r} + \frac{\Psi_{ri}\Psi_{rj}}{r^2} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial z}\frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \Psi_{ri}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zi}}{\partial r} \right)\left(\frac{\partial \Psi_{rj}}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_{zj}}{\partial r} \right) \right] r dr dz;$$

$$b_{ij} = \iint_D (\Psi_{ri}\Psi_{rj} + \Psi_{zi}\Psi_{zj}) r dr dz \ ; \ i, j = \overline{1,n} \, . \tag{15}$$

Тут D – проекція області Ω на площину Orz .

Перші n власних значень $k_1 < k_2 < \ldots < k_n$ задачі (6) визначаються рівнянням, що випливає із системи (14):

$$\det(A - kB) = 0 \, ,$$

де $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$, $B = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$.

Коефіцієнти C_i апроксимуючих розвинень (13) визначаються для кожного власного значення $k = k_i$ ($i = \overline{1,n}$) як розв'язки системи лінійних рівнянь (14) за умови (9). Вони визначають власні форми задачі (8–9).

Чисельні результати. Отримаємо наближені розв'язки задачі про власні коливання пружного кругового циліндра із кульовою порожниною за граничних умов (4) та (5). Для побудови структур (10) і (11) наближених розв'язків введемо функції

$$\omega_1(r, z) = \frac{1}{h}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - z^2 \right); \quad \omega_2(r, z) = \frac{1}{2R}(R^2 - r^2) \, ;$$

$$\omega_3(r, z) = \frac{1}{2R_0}(r^2 + z^2 - R_0^{\,2}) \, ; \ \omega(r,z) = \left(\omega_1 \wedge_0 \omega_2\right) \wedge_0 \omega_3 \, ,$$

де функція $\omega(r,z)$ визначає рівняння межі циліндра $\omega(r,z)=0$, $(r,z)\in\partial\Omega$. Тут символом « $\wedge_0$ » позначено операцію R_0-кон'юнкції [4]:

$$x\wedge_0 y = x+y-\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

Зауважимо, що при побудові наближеного розв'язку задачі за умови (5) вектор зміщень повинен задовольняти умовам

$$\int\limits_{\Omega} u\ d\Omega = 0\ ;\ \int\limits_{\Omega} r\times u\ d\Omega = 0\,, \tag{16}$$

де r – радіус-вектор довільної точки.

У розвиненнях (12) покладаємо

$$\{\varphi_m^{(1)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{r^{2k+1}z^{2(m-k-1)}, k=\overline{0,\, m-1)}\}_{m=1}^{\infty}\,,$$

$$\{\varphi_m^{(2)}(r,z)\}_{m=1}^{\infty} = \{z^{2k+1}r^{2(m-k-1)}, k=\overline{0,\, m-1)}\}_{m=1}^{\infty}\,.$$

Обрані таким чином системи функцій за рахунок симетрії забезпечують виконання умов (16).

Інтеграли (15) обчислювались наближено за допомогою квадратурних формул Гаусса. Ураховуючи симетрію, обчислення виконувались за 1/4 частиною меридіанного перетину циліндра. З метою оцінки точності результатів розрахунки проводились із різним числом координатних функцій.

У таблиці наведено перші чотири власних значення, що знайдені для циліндра із вільними і закріпленими торцями. У наведених результатах степінь апроксимуючого полінома $n=8$. Для обчислень покладено $R=2$, $h=4$, $R_0=1$, $\beta^2=1/4$.

Таблиця – **Розв'язок задачі на власні значення для кругового циліндра із кульовою порожниною**

Власне значення	k_1	k_2	k_3	k_4
Торці вільні	0,76554	2,13672	3,23125	5,52944
Торці закріплені	2,71836	5,08690	8,37666	10,87972

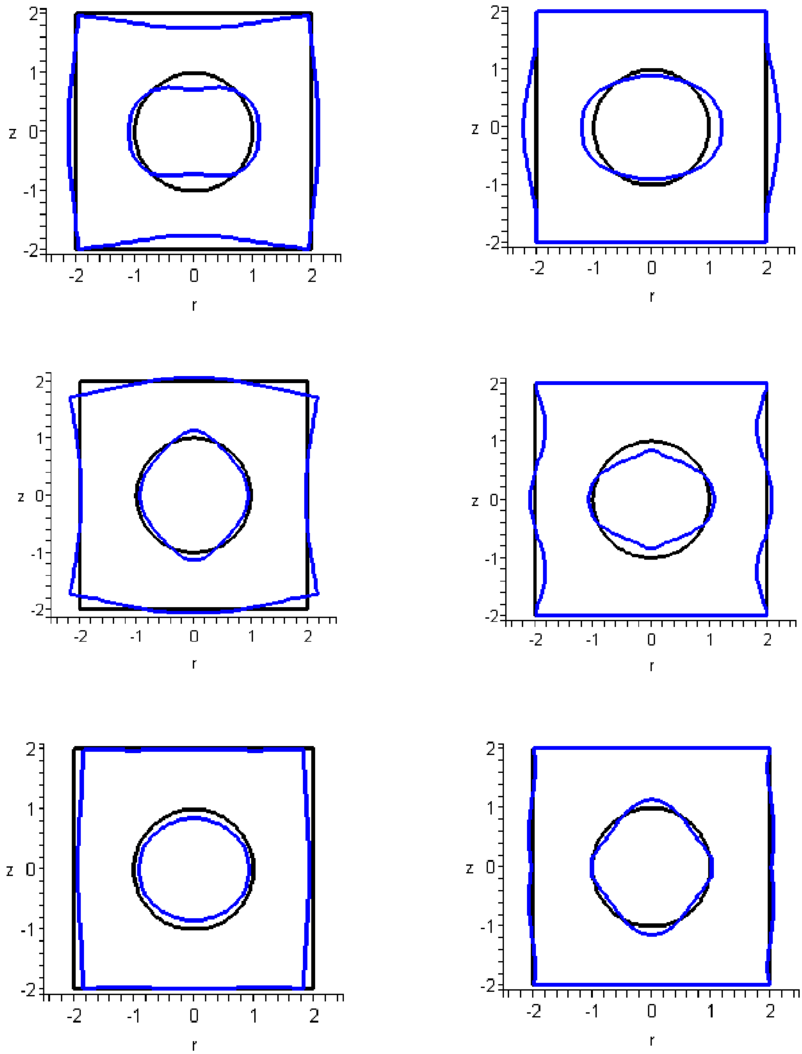
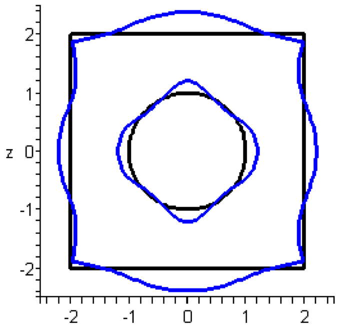


Рисунок – Власні форми коливання прямого кругового циліндра із кульовою порожниною з вільними та закріпленими торцями



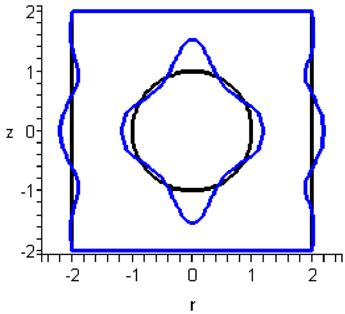


Рисунок – Власні форми коливання прямого кругового циліндра із кульовою порожниною з вільними та закріпленими торцями (закінчення)

На рисунку показано власні форми, що відповідають першим чотирьом власним значенням, що отримані для циліндра з вільними та закріпленими торцями.

Висновки. Розроблено алгоритм для розрахунку власних коливань циліндра із кульовою порожниною за різними типами нульових граничних умов. Одержано власні значення та власні форми коливань для циліндрів із вільними від навантажень та закріпленими торцями. показано, що за наявності закріплених торців перше власне значення перевищує відповідне власне значення для циліндра із вільними торцями більше ніж в три рази.

Список літератури

1. Гринченко, В. Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах [Текст] / В. Т. Гринченко, В. В. Мелешко.– К. : Наук. думка, 1981.– 284 с.

2. Михлин, С. Г. Численная реализация вариационных методов [Текст] / С. Г. Михлин.– М. : Наука, 1970.– 512 с.

3. Чирков, А. Ю. Применение смешанных вариационных формулировок МКЭ к решению задач о собственных колебаниях упругих тел [Текст] / А. Ю. Чирков // Проблемы прочности. – 2008. – № 2. – С. 121–140.

4. Рвачев, В. Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности [Текст] / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекоп.– К. : Наук. думка, 1990. – 216 с.

Отримано 30.09.2009. ХДУХТ, Харків.