ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
СІЛЬСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені ПЕТРА ВАСИЛЕНКА

І. П. Стороженко

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина II

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник

Харків 2019

УДК 51(07), 373.167.1:51

Затверджено
Вченою радою Харківський національний технічний університет сільського господарства імені Петра Василенка
протокол № 2 від 31 жовтня 2019 р.

Р е ц е н з е н т и:
Ю. В. Аркуша, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри фізичної і біомедичної електроніки та комплексних інформаційних технологій Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

М. В. Кайдаш, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри інформаційних технологій Харківського національного університету
повітряних сил імені Івана Кожедуба

Стороженко І. П.

Вища математика. [Текст]: Навчальний посібник в 2 частинах. Частина ІІ. Математичний аналіз / І. П. Стороженко. – Харків., 2019. – 156 с. Іл. 15.

Навчальний посібник підготовлено згідно з програмою дисципліни «вища математика» для здобувачів вищої освіти, що здобувають освіту у вищих навчальних закладах ІІІ – ІV рівня акредитації за спеціальностями «Економіка», «Публічне управління та адміністрування», «Туризм», «Зелений та екотуризм» «Менеджмент», «Облік і оподаткування», «Фінанси, банківська справа та страхування». Кожний розділ посібника містить виклад теоретичного матеріалу з математичного аналізу (диференційне та інтегральне числення, диференціальні рівняння, ряди), в якому дано необхідну кількість означень, формул і рекомендацій. По всім основним розділам представлені приклади розв'язування задач з поясненнями, дано перелік задач для самостійного розв'язання з відповідями.

Посібник призначено для організації аудиторної і самостійної роботи.

УДК 51 (07)

Зміст

Передмова

Ця книга є другою частиною навчального посібника «вища математика», написаного мною на основі багаторічного досвіду викладання дисципліни «вища математика» в різних університетах для студентів, які вивчаються за спеціальностями, де математика не є профільною дисципліною.

Математичному аналізу присвячено багато літератури, існує прекрасно написані підручники і задачники. Разом з тим відчувається недолік в посібнику, який допомагав б студентам, не тільки виробити навички у вирішенні простих завдань по кожному з розділів, а й дало можливість побачити принципи, що об'єднують їх. Я прагнув викласти матеріал по можливості повно, точно, доступно та в стислій формі, маючи на меті не просто повідомити ті чи інші відомості з математичного аналізу, а викликати у читача інтерес до математики і філософії, розширити їх кругозір і сприяти прищеплювання математичної культури.

Навчальний посібник відповідає всім необхідним вимогам, що пред'являються до сучасного навчального математичного видання та може бути використано в університетах, коледжах і школах для організації самостійної та аудиторної роботи.

Книга складається з чотирьох розділів аналізу – диференціальне числення, інтегральне числення, диференціальні рівняння і ряди. У кожному з розділів матеріал поступово ускладняється і базується на попередніх означеннях і висновках. Тому для непідготовленого читача доцільно прочитати послідовно всі підрозділи.

Досвід показав, що для багатьох здобувачів вищої освіти значні труднощі представляє розв’язок задач. У книзі приділено увагу розв’язуванню типових задач. Але перш ніж приступити до вирішення завдань, доцільно спочатку вивчити теоретичний матеріал, домогтися певної ясності в розумінні відповідних понять і теорем.

ЗМІСТОВНИЙ МОДУЛЬ ІІІ. МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Математику умовно можна розділити на елементарну і сучасну («вищу»). Ісаком Ньютоном і Готфрідом Лейбніцем був створений апарат диференціального й інтегрального числення, який становить основу математичного аналізу і навіть основу всього сучасного природознавства, і представляється найбільшою подією в історії науки.

Математичний аналіз – це сукупність розділів математики, заснованих на понятті нескінченно малої величини і включає в себе теорію функцій, теорії границь і рядів, диференціальне та інтегральне числення, диференціальні рівняння і диференціальну геометрію. Дисципліна веде свій відлік з XVII століття, коли була сформульовано поняття «нескінченно малої величини». В англомовній традиції класичному математичному аналізу відповідає курс під назвою «Обчислення» («Calculus»).

Поняття «нескінченно малої» обговорювалося ще в античні часи у зв'язку з концепцією неподільних атомів, але в класичну математику не ввійшло. Знову воно відродилося з появою в XVI столітті «методу неподільних» – розбиття досліджуваної фігури на нескінченно малі перетину.

У XVII столітті відбулася алгебратізація обчислення нескінченно малих. Вони стали визначатися як числові величини, які менше всякої кінцевої (додатної) величини і все ж не рівні нулю. Мистецтво аналізу полягало в складанні співвідношення, яке містить нескінченно малі (диференціали), а потім – в його інтегруванні. Математики старої школи піддали концепцію нескінченно малих різкій критиці. Мішель Ролль писав, що нове числення є «набір геніальних помилок»; Вольтер отруйно зазначив, що це обчислення є мистецтвом обчислювати і точно вимірювати речі, існування яких не може бути доведено. Гюйгенс зізнавався, що не розуміє сенсу диференціалів вищих порядків.

Спори в Паризькій Академії наук з питань обґрунтування аналізу отримали настільки скандальний характер, що Академія одного разу взагалі заборонила своїм членам висловлюватися на цю тему.

Склалася парадоксальна ситуація, коли строгість і плодючість в математиці заважали один одному. Незважаючи на використання незаконних дій з погано визначеними поняттями, число помилок було дивно малим – виручала інтуїція. І все ж все XVIII століття математичний аналіз бурхливо розвивався, не маючи по суті ніякого обґрунтування. Ефективність його була разюча і говорила сама за себе, але зміст диференціала оставався неясним. Особливо часто плутали нескінченно малий приріст функції і його лінійну частину.

Протягом всього XVIII століття робилися грандіозні зусилля для виправлення становища, причому в них брали участь кращі математики століття, проте переконливо побудувати фундамент аналізу вдалося тільки Коші на початку XIX століття. Він строго визначив базові поняття – границю, збіжність, безперервність, диференціал та інше, після чого актуальні нескінченно малі зникли з науки. Деякі тонкощі, що залишилися, роз'яснив пізніше Вейерштрасс. В даний час термін «нескінченно мала» математики в переважній більшості випадків відносять не до чисел, а до функцій або послідовностей.

Як іронію долі можна розглядати появу в середині XX століття нестандартного аналізу, який довів, що первісна точка зору – актуальні нескінченно малі – також несуперечлива і могла б бути покладена в основу аналізу. З появою нестандартного аналізу стало ясно, чому математики XVIII століття, виконуючи незаконні з точки зору класичної теорії дії, проте, отримували вірні результати.

Таким чином, розвиток математичного аналізу показує нам, що значна частина історії розвитку природознавства являє собою літопис безперервного проходження людства до узагальнення понять, які дозволили б представити дійсний світ в математичних термінах. Щоб проілюструвати математично закони реального світу необхідно створювати математичні моделі. Моделі можуть бути різними, однак жодна модель не може повністю відображати всі сторони реального світу.

Інша сторона у вивченні всесвіту – це перехід від конкретних образів (п'ять яблук, або п'ять якихось предметів) до абстрактних понять (до поняття «п'ять»). Поняття числа, безумовно, є абстрактним. Перехід на більш високий рівень абстрактності відбувається, коли безліч чисел замінюється змінною, а конкретні арифметичні дії над числами – функцією. Саме в математичному аналізі здійснюється цей новий перехід.

Термін «математичний аналіз» в класичному розумінні використовується тільки для позначення навчальної дисципліни. Самі математики все це називають просто аналізом, навіть не згадуючи приставки «математичний». Мабуть, вважають, що без математики взагалі нічого аналізувати не можна.

Взагалі кажучи, сам аналіз як наука був досить корисною наукою аж до кінця XIX століття. Потім з'явилася загальна топологія, яка перевела половину математики на нові рейки і відправила стару половину матеріалу на звалище.

Тому, наприклад, взяття інтегралів стало потрібно лише в прикладних задачах. У XX столітті з'явилися комп'ютери, завдяки чому конкретні обчислювальні задачі та інші розрахунки бухгалтерії стали обчислюватися не руками, а численними способами, тобто з використанням обчислювальної математики. Таким чином, нинішні професійні математики-дослідники займаються взагалі-то іншими речами, а «прикладники» використовують комп'ютери. Виникає природне запитання, навіщо потрібен сучасній людині математичний аналіз або як його неформально називають «матан». Математичний аналіз сам по собі вже давно не актуальний з наукової точки зору, але викладається він повсюдно, бо він є основою майже всіх «речей» сучасної науки. Не знаючи аналізу, займатися топологією, атомною фізикою, математичним моделюванням і багато іншим – справа марна. У кожній зі спеціальності від теоретичної фізики до журналістики можна знайти безліч аргументів як на користь вивчення математичного аналізу, так і ні. Математичний аналіз нітрохи не складніше інших наук, які викладаються в навчальних закладах. За ступенем потрібності або непотрібності в майбутньому житті він також мало відрізняється від інших дисциплін. Ця властивість випливає з того, що якщо «викинути» з дисципліни все початкові «причини», то весь математичний аналіз не більше ніж список формальних правил перетворення одних «буквочок» в інші. Що сумніваються можуть подумати, з чого б це раптом комп'ютер навчився розв'язувати рівняння нічого не розуміючи в їх суті. А це означає одну із властивостей математичного аналізу – нульову інформацію перетворень. Перетворення математичного аналізу не приносять нової інформації про об'єкт. Математичний аналіз дозволяє лише поглянути на об'єкт під таким кутом, щоб та інформація, яка вже міститься в об'єкті, стала доступною нашій такій недосконалій свідомості.

Тема 1. Диференціальне числення

1.1. Число

Математика працює з одним з найважливішим абстрактним поняттям сучасного світу – числом. Виникнувши ще в первісному суспільстві з потреб рахунку, поняття числа з розвитком наукової думки значно поширилось. Не дивлячись на те, що сучасна людина розуміє, що таке число, але спроби дати йому означення викликає труднощі. Воно як би вислизає від укладення в словесну форму. З давніх-давен люди з трепетом ставилися до цього філософського поняття. У піфагорійської школі крім кількісної міри числа вивчалася і його якісна характеристика. Однозначною заслугою піфагорійців було висунення думки про кількісні закономірності розвитку світу, що сприяло розвитку математичних, фізичних, астрономічних і географічних знань. Роздуми піфагорійців про якість чисел привело також до розвитку філософії. В основі речей лежить число, вчив Піфагор, пізнати Всесвіт – значить пізнати числа, що керують їм. Вивчаючи числа, піфагорійці розробили числові відносини, і знайшли їх у всіх областях людської діяльності. Числа і пропорції вивчалися з тим, щоб пізнати й описати душу людини, а пізнавши, управляти процесом переселення душі. Ці дослідження тривають і в сьогоденні у рамках метафізичних поглядів. Як приклад можна привести праці Велимира Хлєбнікова. Він займався розробкою математичних законів, за допомогою яких можна обчислити майбутнє: «Весь час працюю над числами і долями народів, як залежними змінними чисел» (з листа Матюшину, 1911). Створюючи свою систему обчислень на основі таблиць Піфагора, він зумів передбачити події 1915 і 1917 років. Число – це та сила, яка здатна змусити «війни стримати свій гнів», ця сила, здатна управляти роком. У Хлєбнікова доля сильніше божественної волі. Хлєбніков бачить в числі ключ до розгадки таємниць всесвіту «Якщо Бог наділив кожну крихту творіння смислом, то його можна осягнути за допомогою обчислень». Навіть від'ємні числа містять в собі велику таємницю. Якщо число – це кількісна міра, то яка кількісна міра у від'ємного числа? Стародавній Єгипет, Вавилон і Давня Греція не використовували від'ємних чисел, а якщо виходили від'ємні коріння рівнянь, то вони відкидалися як неможливі. Виняток становив Діофант, який в III столітті вже знав правило знаків і вмів множити від'ємні числа. Однак він розглядав їх лише як проміжний етап, корисний для встановлення остаточного, додатного результату. Вперше від'ємні числа були частково узаконені в Китаї, а потім (приблизно з VII століття) і в Індії, де трактувалися як борги (недостача), або, як у Діофанта, визнавалися як тимчасові значення. Множення і ділення для від’ємних чисел тоді ще не були визначені. Корисність і законність від’ємних чисел затверджувалися поступово. Індійський математик Брахмагупта (VII століття) вже розглядав їх нарівні з додатними. В Європі визнання наступило на тисячу років пізніше, та й то довгий час від’ємні числа називали «помилковими», «уявними» або «абсурдними». Перший опис їх в європейській літературі з'явився в «Книзі абака» Леонарда Пізанського (1202 рік), який трактував від’ємні числа як борг. Бомбеллі і Жирар в своїх працях вважали від’ємні числа цілком можливими і корисними, зокрема, для позначення чого-небудь. Навіть в XVII столітті Паскаль вважав, що, так як ніщо не може бути менше, ніж ніщо. Віддзеркалення тих часів є та обставина, що в сучасній арифметиці операція віднімання і знак від’ємних чисел позначаються одним і тим же символом (мінус), хоча алгебраїчно це абсолютно різні поняття. У XVII столітті, з появою аналітичної геометрії, від’ємні числа одержали наочне геометричне уявлення на числової осі. З цього моменту настає їх повна рівноправність. Проте, теорія від’ємних чисел довго перебувала в стадії становлення. Жваво обговорювалася, наприклад, дивна пропорція $1 : (-1) = (-1) : 1$ – в ній перший член зліва більше другого, а праворуч – навпаки, і виходить, що більше дорівнює меншому («парадокс Арно»). Незрозуміло було також, який сенс має множення від’ємних чисел, і чому множення від’ємних – додатне; на цю тему проходили запеклі дискусії. Гаус в 1831 році вважав за потрібне пояснювати, що від’ємні числа принципово мають ті ж права, що і додатні, а то, що вони застосовні не до всіх речей, нічого не означає, тому що дроби теж застосовні не до всіх речей (наприклад, неприйнятні за рахунку людей). Повна і цілком сувора теорія від’ємних чисел була створена тільки в XIX столітті (Вільям Гамільтон і Герман Грассман).

Таким чином, число – це абстрактне поняття, яке використовується для вивчення і опису світобудови. Нашим завданням буде ознайомитися з усталеними в науковому світі правилами поводження з числами. І перше важливий крок у вирішенні цього завдання засвоїти, що таке функція.

1.2. Функціональна залежність

Чисел існує велика кількість. Описувати всі правила для кожного числа недоцільно. Тому, для зручності замість одного числа розглядають групу або множену чисел. Таку множину прийнято позначати літерою, наприклад X або Y.

Об'єктами математичного аналізу є послідовності, функції і ряди. Зупинимо увагу спершу на функціях

Функція f(x) – однозначне відображення (закон, правило) кожного елемента x з групи чисел X в один єдиний елемент y з групи Y.

Якщо кожному значенню однієї змінної x, взятому з області його можливих значень по деякому закону, ставиться у відповідність одне єдине певне значення іншої змінної y, то y називається залежною змінною чи функцією від незалежної змінної x.

Значення функції – число y_0, яке ставиться у відповідність аргументу $x = x_0$ за правилом $y = f(x)$

Сукупність всіх значень аргументу x, для яких функція визначена, називається *областю визначення* цієї функції і позначається $D[y]$. Сукупність усіх значень, прийнятих змінної y, називається *областю значень* функції $y = f(x)$ і позначається $E[y]$.

Функція $y = f(x)$ називається *парною*, якщо $f(-x) = f(x)$.

Функція $y = f(x)$ називається *непарною*, якщо $f(-x) = -f(x)$.

Парні функції симетричні щодо осі ординат ($0y$), а непарні щодо початку координат.

Якщо $y = f(x)$, то $x = \varphi(y)$ – теж функція, яку називають *оборотною*.

Функцію можна задати аналітично, графічно, словесно або за допомогою таблиці. В сучасному природознавстві найчастіше використовують аналітичний спосіб завдання функції.

Елементарні функції

1. *Степенева функція y = x^a*

Узагальнене поняття для декількох функцій.

$a = 0$, $y = 1 - const$. Постійна лінійна функція, графік – пряма лінія, паралельна осі абсцис і проходить через $y = 1$, визначена для всіх $x \in R$ (раціональних чисел, тобто які можуть бути представлені у вигляді відношення чисел).

$a = 1$, $y = x$. Лінійна функція, графік – пряма лінія, що проходить через початок координат, визначена для всіх $x \in R$.

$a = n > 0$ ($n \in N$), $y = x^n$. Графік функції – парабола. Якщо $n = 2$, то графіком є квадратична парабола, якщо $n = 3$, то – кубічна. Функція визначена для всіх $x \in R$.

$a = 1/n > 0$ ($n \in N$), $y = \sqrt[n]{x}$ – корінь (радикал) n-ї степені від x. Функція, є оборотною від $y = x^n$. Тобто, якщо $y = x^n$, то $x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}$. Функція визначена для всіх $x \in R$, якщо n непарне і для всіх $x \geq 0$, якщо n парне. Такі функції відносяться до ірраціональних.

$a < 0$. У разі якщо показник степені від'ємний, то $x^{-n} = 1/x^n$. Функція визначена для $x \neq 0$, так як арифметичного правила поділу на нуль немає.

2. *Показникова функція y = a^x^, a > 0*

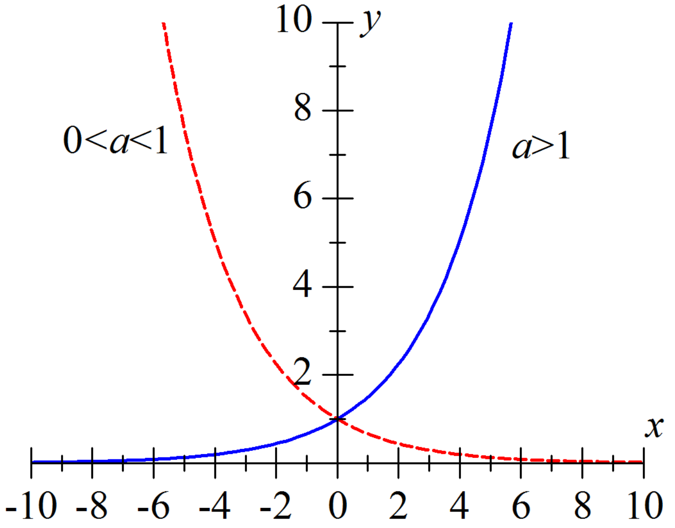


Рис. 1.1. Графіки показникових функцій

- Область визначення $D[y]: x \in R$.
- Область значень $E[y]$: $y \in (0, +\infty)$.

При $a > 1$ функція монотонно зростає, при $0 < a < 1$ – спадає.

З усіх показникових функцій особливо виділяють експоненціальну функцію: $y = e^x = \exp\{x\}$, де $e = 2{,}7182818284590\ldots$ – експонента

3. *Логарифмічна функція* $y = \log_a(x)$, $a > 0$.

Логарифмічна функція являється оборотною функцією від показникової. Тобто, якщо $y = a^x$, то $x = \log_a(y)$.

Особливо виділяють два логарифма. Натуральний $\ln(x)$ – основа логарифма $a = e$ і десятинний $\lg(x)$ – основа логарифма $a = 10$.

- Область визначення $D[y]$: $x \in (0, +\infty)$.
- Область значень $E[y]$: $y \in R$.
- Нулі функції: $x = 1$

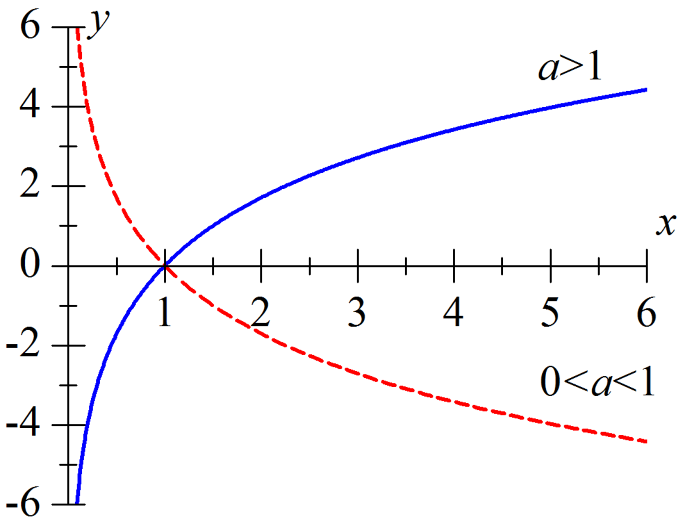


Рис. 1.2. Графіки логарифмічних функцій

4. ***Тригонометричні функції***

4.1. Синус $y = \sin(x)$.

- Область визначення $D[y]: x \in R$.
- Область значень $E[y]$: $y \in [-1;1]$.
- Функція непарна: $\sin(-x) = -\sin(x)$.
- Функція періодична: $T = 2\pi$.
- Нулі функції: $x = 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

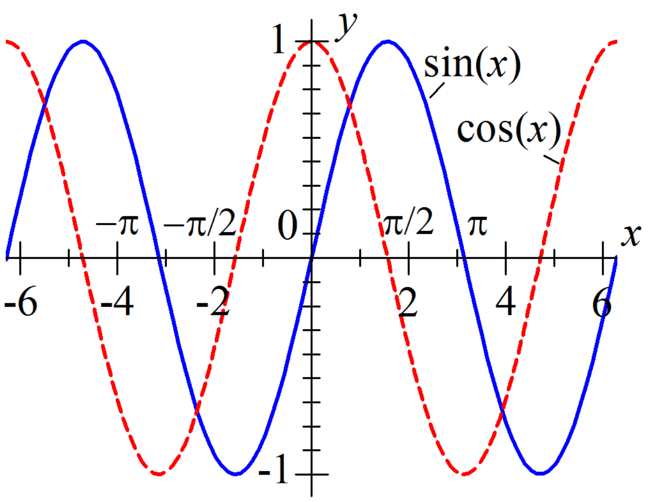


Рис. 1.3. Графіки функцій синус і косинус

4.2. Косинус $y = \cos(x)$.

- Область визначення $D[y]: x \in R$.
- Область значень $E[y]$: $y \in [-1;1]$.
- Функція парна: $\cos(-x) = \cos(x)$.
- Функція періодична: $T = 2\pi$

- Нулі функції: $x = \pi\left(n + \dfrac{1}{2}\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

4.3. Тангенс $y = \mathrm{tg}(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ або $y = \tan(x)$

- Область визначення $D[y]: x \in \left(\pi\left(n - \dfrac{1}{2}\right); \pi\left(n + \dfrac{1}{2}\right)\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
- Область значень $E[y]$: $y \in R$.
- Функція парна $\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}(x)$.
- Функція періодична $T = 2\pi$
- Нулі функції $x = 2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

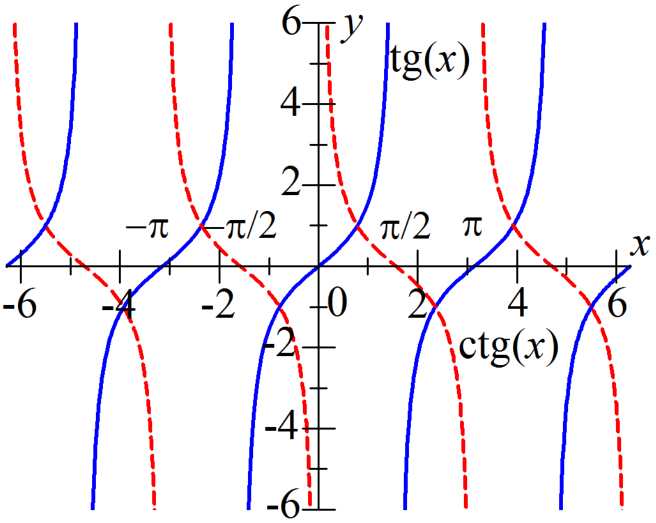


Рис. 1.4. Графіки функції тангенс і котангенс

4.4. Котангенс $y = \mathrm{ctg}(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ або $y = \cot(x)$.

- Область визначення $D[y]: x \in (-\pi n; \pi n),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.
- Область значень $E[y]$: $y \in R$.
- Функція парна $\cot(-x) = -\cot(x)$.
- Функція періодична $T = 2\pi$
- Нулі функції $x = \pi\left(\dfrac{1}{2} + n\right),\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4.5. Косеканс $y = \mathrm{cosec}(x) = 1/\sin(x)$ або $y = \csc(x)$.

4.6. Секанс $y = \sec(x) = 1/\cos(x)$.

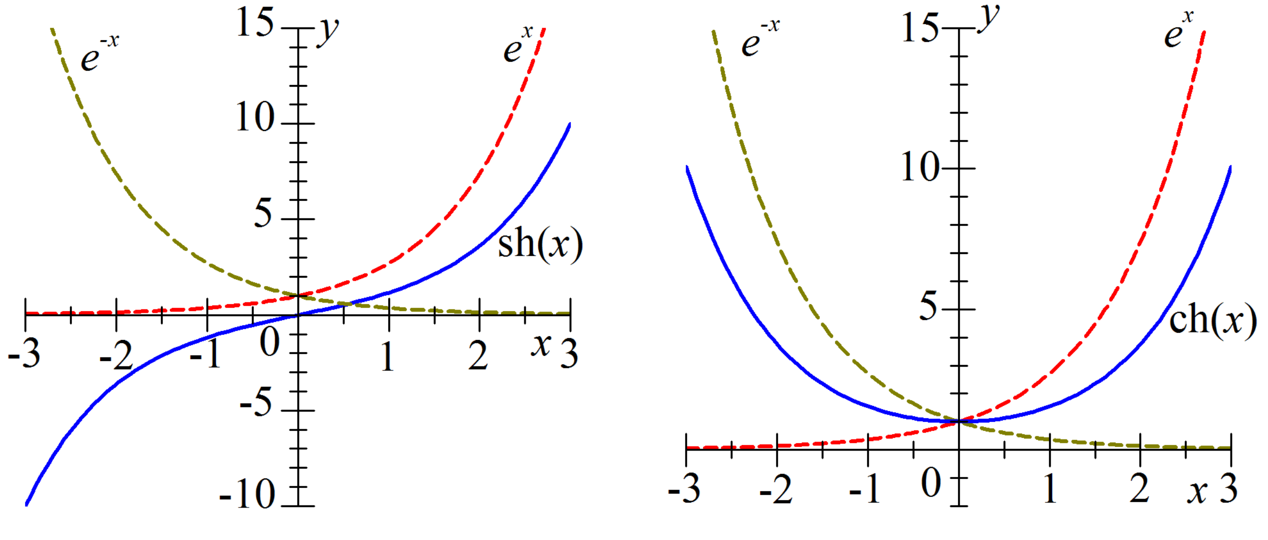
5. *Гіперболічні функції*

5.1. Синус гіперболічний $y = \mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$

5.2. Косинус гіперболічний $y=\mathrm{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

5.3. Тангенс гіперболічний $y=\mathrm{th}(x)=\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

5.4. Котангенс гіперболічний $y=\mathrm{cth}(x)=\dfrac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}(x)}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$



а) *б)*

Рис. 1.5. Графіки функцій синус гіперболічний і косинус гіперболічний

6. *Оборотні тригонометричні функції*

6.1. Арксинус $y=\arcsin(x)$.

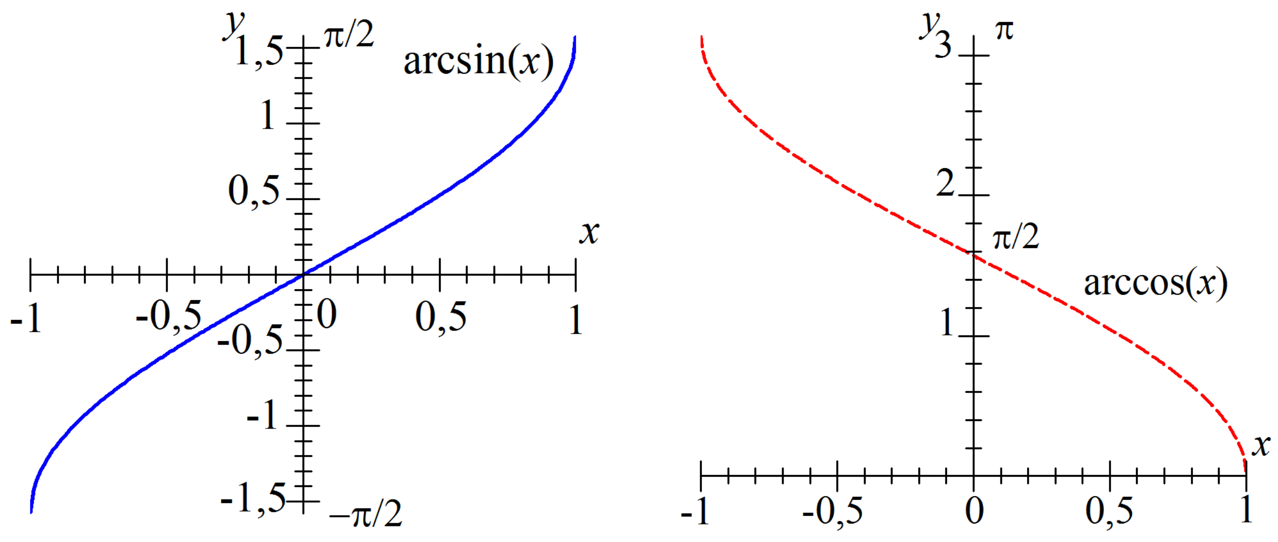


Рис. 1.6. Графіки функцій арксинус і арккосинус

- Область визначення $D[y]$: $x\in[-1;1]$.

- Область значень $E[y]$: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
- Функція парна $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$.
- Нулі функції $x = 0$

6.2. Арккосинус $y = \arccos(x)$.

- Область визначення $D[y]$: $x \in [-1;1]$.
- Область значень $E[y]$: $y \in [0;\pi]$.
- Нулі функції $x = 1$

6.3. Арктангенс $y = \mathrm{arctg}(x)$.

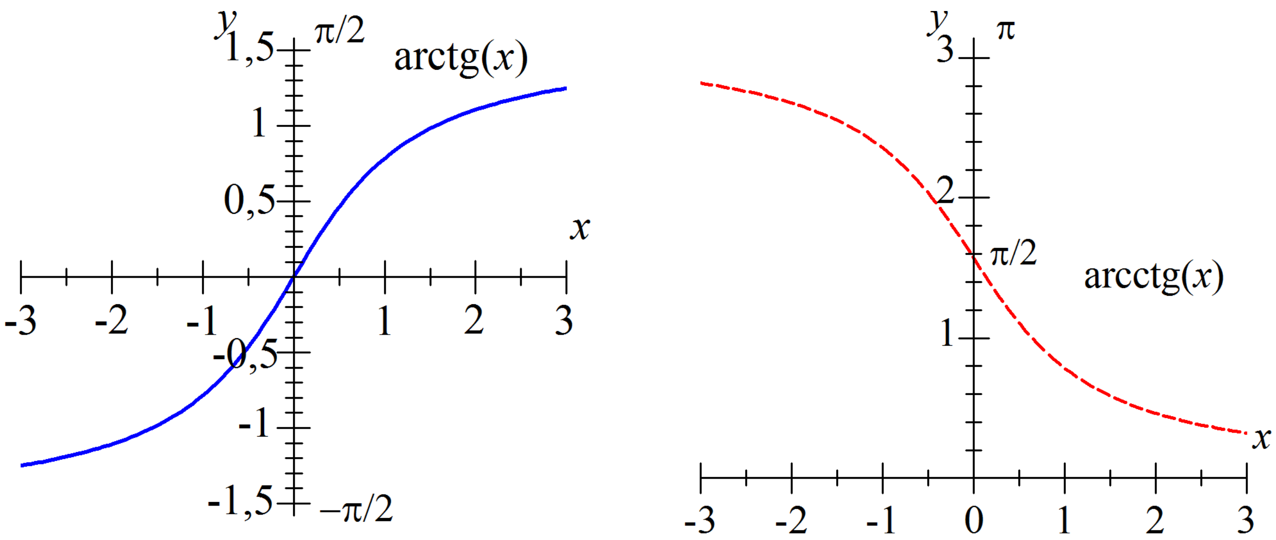


Рис. 1.7. Графіки функцій арктангенс і арккотангенс

- Область визначення $D[y]$: $x \in (-\infty;\infty)$.
- Область значень $E[y]$: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Функція парна $\mathrm{arctg}(-x) = -\mathrm{arctg}(x)$.
- Нулі функції $x = 0$

6.4. Арккотангенс $y = \mathrm{arcctg}(x)$.

- Область визначення $D[y]$: $x \in (-\infty;\infty)$.
- Область значень $E[y]$: $y \in (0;\pi)$.

7. *Спеціальні функції*

Сигнум $y = \mathrm{sgn}(x)$ (від латинського *signum* – знак) – кусково-стала функція. Визначається наступним чином.

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

Функція Хевисайда $\theta(x)$ – кусково-стала функція, що дорівнює нулю для від'ємних значень аргументу і одиниці – для додатних. В нулі ця функція, взагалі кажучи, не визначена, однак її зазвичай додатково визначають в цій точці деяким числом, щоб область визначення функції містила всі точки дійсної осі. Найчастіше неважливо, яке значення функція приймає в нулі, тому можуть використовуватися різні означення функції Хевісайда, зручні з тих чи інших міркувань: $\theta(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

Дельта-функція $\delta(x)$ (δ-функція Дірака) – узагальнена функція, яка дозволяє записати точковий вплив, а також просторову щільність фізичних величин (маса, заряд, інтенсивність джерела тепла, сила і точці п.), зосередженої або прикладеної в одній точці:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0, & x\ne 0\end{cases}$$

1.3. Границя функції

Означення Коші

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околу точки x_0 за винятком може бути самою точки x_0. Функція $f(x)$ має в точки x_0 границю, що дорівнює A, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $0 < | f(x) - A | < \varepsilon$

Означення Гейне

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околу точки x_0 за винятком може бути самою точки x_0. Якщо для будь-якої послідовності x, яка збігається до x_0 існує послідовність значень функції, що збігається до числа A, то число A називається *границею функції* $f(x)$ в точці x_0

Спосіб позначання: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Одностороння границя – це границя функції в деякій точці, коли змінна прямує до точці зі сторони більших або менших значень.

- Щоб показати, що послідовність x прямує до x_0 з боку менших значень x записують $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ – *лівобічна границя.*

- Щоб показати, що послідовність x прямує до x_0 з боку більших значень x записують – $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$ – *правобічна границя.*
- Якщо –0 або +0 не вказується, то послідовність x прямує до x_0 за абсолютним значенням $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ – *двобічна границя*
- Якщо при послідовності x, що прямує до x_0 існує послідовність значень функції, що необмежено збільшується за абсолютним значенням, то границя функції *прямує до нескінченності* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$

Неперервність функції

Функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли *вона*:

- Визначена в точці x_0, тобто існує значення функції $f(x_0)$;
- Існують кінцеві однобічні границі $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$;
- Границі співпадають зі значенням функції $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0)$.

Іншими словами, функція $f(x)$ неперервна в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу в цій точці відповідає нескінченно малий приріст функції. Якщо одне з перерахованих вимог не виконано, то функція має розрив в точці x_0.

Розрізняють 3 типів розривів функції

Типи розривів

- Усувний розрив («виколота точка») $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) \neq f(x_0)$;
- Кінцевий розрив (I роду): $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$;
- Нескінченний розрив (II роду): $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \infty$ або $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \infty$.

Рис. 1.8. Приклади типів розривів функцій

Теореми для неперервних функцій

1. Всяка елементарна функція неперервна в кожній внутрішній точці її області визначення.

Для неперервної функції має місце важливе положення:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow f \lim_{x \to x_0} (x) = f(x_0)$$

Неперервні функції є підмножиною функцій, що мають границю, тому на них поширюються всі теореми про границі (підрозділ 2.4)

2. Про безперервність складної функції. Якщо функція $f(x)$ неперервна на множині X, а функція $x = g(t)$, що має множину значень співпадаючу з множиною X, неперервна на множині T, то складна функція $f(g(t))$ неперервна на множині T.

3. Якщо $y = f(x)$ визначена, неперервна і строго монотонна на множині X, а Y – множина її значень, то на множині Y існує оборотна функція строго монотонна і неперервна $x = \varphi(y)$

Властивості неперервних на відрізку функцій

Функція неперервна в інтервалі [a, b], якщо вона неперервна в кожній точці цього інтервалу.

Наведемо без доведення ряд теорем, що відносяться до функцій, неперервних на відрізку. Кожна з цих теорем має важливе самостійне значення в математичному аналізі. Незважаючи на уявну простоту і очевидність сенсу даних теорем, довести їх виявилося справою нелегкою. Це вдалося здійснити порівняно недавно в XIX столітті видатним математикам Вейерштрасу, Больцано і Коші.

1. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на ньому свого найбільшого і найменшого значень. Наприклад, найбільше значення функції на рисунку 6.9 досягається відразу в двох точках області визначення: на кінці відрізка в точці a і в його внутрішній точці c, яка є її максимумом. Найменше значення досягається не в точці мінімуму, а на кінці b цього відрізка. Цей приклад показує, що мінімум і максимум функції не завжди є її найменшим і найбільшим значеннями.

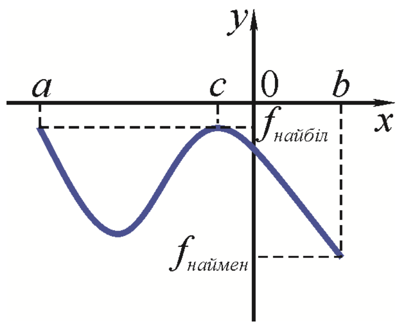


Рис. 1.9. Ілюстрація досягнення неперервною функцією своїх найбільшого і найменшого значень.

2. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і приймає на його кінцях значення різних знаків, то в інтервалі (a, b) знайдеться хоча б одна точка c, в якій функція звернеться в нуль: $f(c) = 0$ (рисунок 6.10). В даний час математика багата найрізноманітнішими методами наближеного рішення рівняння $f(x) = 0$. Всі вони ґрунтуються на цієї теоремі .

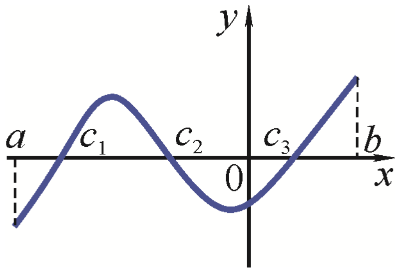


Рис. 1.10. Ілюстрація досягнення нуля функції

3. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і m – її найменше значення, а M – найбільше, то для будь-якого числа μ що лежить між m і M, знайдеться таке значення аргументу $a \leq c \leq b$, що $f(c) = \mu$

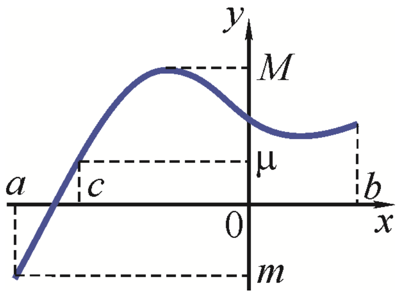


Рис. 1.11. Ілюстрація функції, що задовольняє теоремі 3

Сенс даної теореми полягає в тому, що неперервна на відрізку функція приймає всі значення, укладені між її найменшим і найбільшим значеннями.

Нескінченно велика і нескінченно мала величина

Величина $\alpha(x)$ – ***нескінченно мала*** в околі x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Наприклад, $\sin(x)$ – нескінченно мала при $x \to \pi$, так як $\lim\limits_{x \to \pi} \sin(x) = 0$.

Величина $A(x)$ – ***нескінченно велика*** в околі x_0, якщо $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = \infty$ (необмежено збільшується). Наприклад, функція $\dfrac{1}{(x-3)^2}$ – нескінченно велика при $x \to 3$: $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^2} = \infty$

Слід звернути увагу, що з означення нескінченно великої величини випливає, що знак $A(x)$ ролі не відіграє, а необхідно лише, щоб абсолютна величина послідовності A необмежено зростала.

Якщо послідовність $A(x_i)$ починаючи з деякого номера i буде додатною, то $A(x)$ – додатна нескінченно велика величина і позначається символом $+\infty$: $\lim\limits_{x \to x_0} A(x) = +\infty$.

Якщо послідовність $A(x_i)$ починаючи з деякого номера i буде від'ємною , то $A(x)$ – від'ємна нескінченно велика величина і позначається символом $-\infty$: $\lim\limits_{x\to x_0} A(x) = -\infty$.

Треба пам'ятати, що символи ∞, $+\infty$, $-\infty$ не є числами, а вводяться тільки для спрощення запису того факту, що $A(x)$ необмежено зростає. Ніяких арифметичних дій над цими символами робити не можна.

Властивості нескінченно малих

1. Сума кінцевого числа нескінченно малих – нескінченно мала.
2. Добуток нескінченно малих – нескінченно мала.
3. Добуток нескінченно малої послідовності на обмежену величину або на константу – нескінченно мала.
4. Якщо α – нескінченно мала, зберігає знак, то $A = 1/\alpha$ – нескінченно велика. Вірно і зворотне, якщо A – нескінченно велика, то $\alpha = 1/A$ – нескінченно мала.

Еквівалентні величини

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)} = 1$, то α_1 и α_2 є еквівалентними величинами ($\alpha_1 \sim \alpha_2$)

Якщо при $x \to x_0$ $\alpha(x) \to 0$, то справедливі наступні співвідношення еквівалентності (наслідки з так званих чудових границь):

1) $\sin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

2) $tg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

3) $\arcsin(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

4) $arctg(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$

5) $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$

6) $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\ln a$

7) $\log_a(1+\alpha(x)) \sim \alpha(x)\dfrac{1}{\ln a}$

8) $1 - \cos(\alpha(x)) \sim \dfrac{\alpha^2(x)}{2}$

9) $(1+\alpha(x))^m - 1 \sim m\alpha(x), m \in R$

Теорема: Границя відносини двох нескінченно малих величин не зміниться, якщо одну з них (або обидві) замінити еквівалентною величиною

Поведінка деяких функцій

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ 0, & a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = \begin{cases} +\infty, & a > 1 \\ -\infty, & a < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ +\infty, & a < 1 \end{cases}$$

$\lim_{x\to 0} a^x = 1$

$\lim_{x\to\pm\infty} \sin(x)$ – не існує

$\lim_{x\to\pm\infty} \cos(x)$ – не існує

$\lim_{x\to\pm\infty} \tan(x)$ – не існує

$\lim_{x\to\pm\infty} \cot(x)$ – не існує

$\lim_{x\to 1} \log_a x = 0$, $\lim_{x\to 0} \log_2 x = -\infty$

$\lim_{x\to\pi/2\pm 0} \tan(x) = \mp\infty$

$\lim_{x\to\pm 0} \cot(x) = \pm\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x) = \mp\pi/2$

$\lim_{x\to\pm\infty} \text{arccot}(x) = 0$

Теореми про границі функції

Нехай $\lim_{x\to x_0} u(x) = A$ і $\lim_{x\to x_0} v(x) = B$ тоді справедливі наступні теореми.

1. $\lim_{x\to x_0} C = C, C - const$

2. $\lim_{x\to x_0} (u(x) + v(x)) = A + B$

3. $\lim_{x\to x_0} (u(x)\cdot v(x)) = A\cdot B$

4. $\lim_{x\to x_0} Cu(x) = CA,\ C - const$

5. $\lim_{x\to x_0} u(x)^{\alpha} = \left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right)^{\alpha}$, $\lim_{x\to x_0} \alpha^{u(x)} = \alpha^A$, $\alpha - const$

6. $\lim_{x\to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{A}{B},\ B \neq 0$

7. $\lim_{x\to x_0} u(v(x)) = u\left(\lim_{x\to x_0} v(x)\right)$. $\lim_{x\to x_0} \log_a u(x) = \log_a\left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right) = \log_a(A)$

8. Якщо $u(x) < v(x)$, то $\lim_{x\to x_0} u(x) \le \lim_{x\to x_0} v(x)$

9. $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$, $\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a} = 1$, $a - const$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ – **перша видатна границя**

11. $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ – **друга видатна границя**

Зауваження: вирази виду 0/0, ∞/∞, 0 × ∞, ∞ – ∞ є невизначеностями, знаходження границь такого виду носить назву "розкриття невизначеностей"

Приклади розв'язання задач на границі функції

1. $\lim\limits_{x\to 3} 4x^2 = 4\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 4\cdot 3^2 = 36$

2. $\lim\limits_{x\to e}\left(\ln(x)+\sqrt{x}\right) = \ln e + \sqrt{e} = 1+\sqrt{e}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(2^x\cdot(x-1)\right) = 2^0(0-1) = -1$

4. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{2^x}{\cos(x)} = \dfrac{2^\pi}{\cos(\pi)} = -(2^\pi)$

5. $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)^x = (2+3)^2 = 5^2 = 25$, $\lim\limits_{x\to 0}(x+3)^x = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+3)^x = +\infty$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} 2^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} 2^x = 0$

7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_2 x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\log_2 x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_2 x = -\infty$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\log_{0.2} x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1}\log_{0.2} x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0}\log_{0.2} x = +\infty$

9. $\lim\limits_{x\to \pi/2}\tan(x) = \lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = \infty$

10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x}$

В цієї задачі при підстановці значення змінної $x = 2$ в функцію існує невизначеність – нескінченно мала поділити на нескінченно малу. Для того щоб зняти цю невизначеність запишемо чисельник і знаменник в іншій формі. По перше, знайдемо всі корені чисельника і знаменника:

$$x^2-5x+6=0;$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm 1}{2};\ x=2;\ x=3;\ x^2-5x+6=(x-2)(x-3);$$

$$x^3-3x^2+2x = x\left(x^3-3x+2\right)=0;$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}; x=0; x=1;\ x=2$$

$$x^2-5x+6 = x(x-1)(x-2).$$

Таким чином,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+2}{x^3-3x^2+2x} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-3)}{x(x-1)(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{x(x-1)} = \frac{2-3}{2(2-1)} = -0{,}5$$

11. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\cos(2x)}{\sin(x)}$.

В цієї задачі при підстановці значення змінної $x = \pi$ в функцію теж існує невизначеність – нескінченно мала поділити на нескінченно малу. Але на відміну від попередньої задачі будемо використовувати тригонометричні перетворення:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2};$$

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos(2x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2(x)}{\sin(x)} = 2\lim_{x\to\pi}\sin(x) = 2\sin(\pi) = 0.$$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{x}$.

Ця задача на першу чудову границю. Щоб послідовно знайти відповідь будемо використовувати такий широко застосований метод як заміна змінної:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{x} = \begin{Bmatrix} t = 9x; \\ x \to 0;\ t \to 0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0}\frac{9\sin(t)}{t} = 9\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t} = 9\cdot 1 = 9.$$

13. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)}$.

Для розв'язання цієї задачі можна скористатися еквівалентними величинами: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{9x}{3x} = 3$.

14. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{3/x}$.

Ця задача на другу чудову границю:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{3/x} = \left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right)^3 = e^3.$$

15. $\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{1/x}$.

Ця задача на другу чудову границю. Щоб знайти відповідь використовуємо метод заміни змінної:

$$\lim_{x\to 0}(1-3x)^{1/x} = \begin{Bmatrix} t = -3x;\ x = -t/3 \\ x \to 0; t \to -3\cdot 0 = 0 \end{Bmatrix} = \lim_{t\to 0}(1+t)^{-3/t} = \left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right)^{-3} = e^{-3}.$$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x}$.

Ця задача на другу чудову границю. Використовуємо властивості логарифму:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+3x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}\right) = \begin{Bmatrix} t = 3x;\ x = t/3 \\ x \to 0; t \to 3\cdot 0 = 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \ln\left(\lim_{t\to 0}(1+t)^{3/t}\right) = \ln\left(\left[\lim_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]^3\right) = \ln\left(e^3\right) = 3\ln(e) = 3.$$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.

Ця задача на другу чудову границю.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-x}=\left\{\begin{matrix}t=1/x;\ x=1/t\\ x\to-\infty;\ t\to-0\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to-0}(1+t)^{-1/t}=\left(\lim_{t\to0}(1+t)^{1/t}\right)^{-1}=e^{-1}.$$

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{x+3}$.

Ця задача на другу чудову границю.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x+3}=\left\{\begin{matrix}t=x/4;x=t/4\\ x\to\infty;t\to\infty\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3+t/4}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3}\cdot\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{1/4}=1^{3}\cdot e^{1/4}=\sqrt[4]{e}.$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x^{3}}-x}{x^{3/2}+x-1}$.

В цієї задачі виникає невизначеність відношення нескінченно великих величин. В цьому випадку можна перейти від нескінченно великих до нескінченно малих:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x^{3}}-x}{x^{3/2}+x-1}=\left\{\begin{matrix}t=1/x;\ x=1/t\\ x\to\infty;\ t\to0\end{matrix}\right\}=\lim_{t\to0}\frac{2\sqrt{(1/t)^{3}}-1/t}{(1/t)^{3/2}+1/t-1}=$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\dfrac{2-t}{t^{3/2}}}{\dfrac{1+t^{1/2}-t^{3/2}}{t^{3/2}}}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{2-t}{1+t^{1/2}-t^{3/2}}\right)=2.$$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{2}+2}-\sqrt{x^{2}-2}\right)$.

В цієї задачі виникає невизначеність різниці нескінченно великих величин. В цьому випадку можна перейти до невизначеності відношення нескінченно великих величин шляхом множення і ділення виразу на спряжений вираз, а потім перейти до нескінченно малих:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{2}+2}-\sqrt{x^{2}-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^{2}+2}+\sqrt{x^{2}-2}}{\sqrt{x^{2}+2}+\sqrt{x^{2}-2}}\left(\sqrt{x^{2}+2}-\sqrt{x^{2}-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{2}+2-x^{2}+2}{\sqrt{x^{2}+2}+\sqrt{x^{2}-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^{2}+2}+\sqrt{x^{2}-2}}=0.$$

Задачі на границі функції

В задачах 1.1 – 1.58 обчислити границі функцій

1.1. $\lim\limits_{x\to 0,13} 108$

1.2. $\lim\limits_{x\to \pi} x\cos(x)$

1.3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(2x+3)\cdot(4x-3)}{5-x}$

1.4. $\lim\limits_{x\to 3} (x+4)\cdot(2x-7)$

1.5. $\lim\limits_{x\to 11} \left(\frac{1}{11}x^2+x+3\right)$

1.6. $\lim\limits_{x\to -1} (2x-1)\cdot(x+2)$

1.7. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-3)}{(x+2)^2}$

1.8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+9)}{(x^2-2x+1)}$

1.9. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{(x-3)}{(x+2)^2}$

1.10. $\lim\limits_{x\to -2} 3^x$

1.11. $\lim\limits_{x\to 3} 2^{-x}$

1.12. $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{3}^x$

1.13. $\lim\limits_{x\to -2} \sin^x\left(\frac{\pi}{6}\right)$

1.14. $\lim\limits_{x\to 1} 2^{-x}$

1.15. $\lim\limits_{x\to 1} e^{x^2-1}$

1.16. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{x^2-1}$

1.17. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x}$

1.18. $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt[x]{2}$

1.19. $\lim\limits_{x\to -0} \sqrt[x]{2}$

1.20. $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt[x]{0,16}$

1.21. $\lim\limits_{x\to -0} \sqrt[x]{0,04}$

1.22. $\lim\limits_{x\to 1+0} \sqrt[x-1]{x}$

1.23. $\lim\limits_{x\to +0} \sqrt[x-1]{x}$

1.24. $\lim\limits_{x\to \pi/3} 0,25^{\cos(x)}$

1.25. $\lim\limits_{x\to \pi/4} 9^{\tan(x)}$

1.26. $\lim\limits_{x\to \pi/2+0} 5^{\tan(x)}$

1.27. $\lim\limits_{x\to \pi/2-0} 3^{\tan(x)}$

1.28. $\lim\limits_{x\to -3} (x^2+1)^{3+x}$

1.29. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt[x]{x^{-2}+3}$

1.30. $\lim\limits_{x\to 3+0} (x^2-9)^{-x}$

1.31. $\lim\limits_{x\to -1} \cos^x\left(\frac{\pi}{3}\right)$

1.32. $\lim\limits_{x\to -2} \cos^x\left(\frac{\pi}{4}\right)$

1.33. $\lim\limits_{x\to -1} \ln(x+2)$

1.34. $\lim\limits_{x\to -1} \lg(x^2+9)$

1.35. $\lim\limits_{x\to -1} \log_3\left(x^2+8\right)$

1.36. $\lim\limits_{x\to -\infty} \ln\left(x^2-9\right)$

1.37. $\lim\limits_{x\to 3} \ln\left(x^2-9\right)$

1.38. $\lim\limits_{x\to 1} \lg\left(x^2+2x-3\right)$

1.39. $\lim\limits_{x\to 3} \log_{0,2}\left(x^2-2x-3\right)$

1.40. $\lim\limits_{x\to \pi-0} \lg(\sin(x))$

1.41. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \ln(\sin(x))$

1.42. $\lim\limits_{x\to \pi/4} \log_3(\tan(x))$

1.43. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x^2-x^4-3x}{4x^4+3x-2}$

1.44. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3-3x^2+x}}{x^2-2}$

1.45. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-x+4}{2x^3-4x^2+3}$

1.46. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^{3/2}-x^2\right)$

1.47. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2-4x+2}{x^2-5x+4}$

1.48. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$

1.49. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x^2-4x-16}{x^2-5x+4}$

1.50. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1.51. $\lim\limits_{x\to 0} (1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$

1.52. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$

1.53. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^{x-4}$

1.54. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2}$

1.55. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin(9x)}$

1.56. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\arctan(x^2-1)}{x-1}$

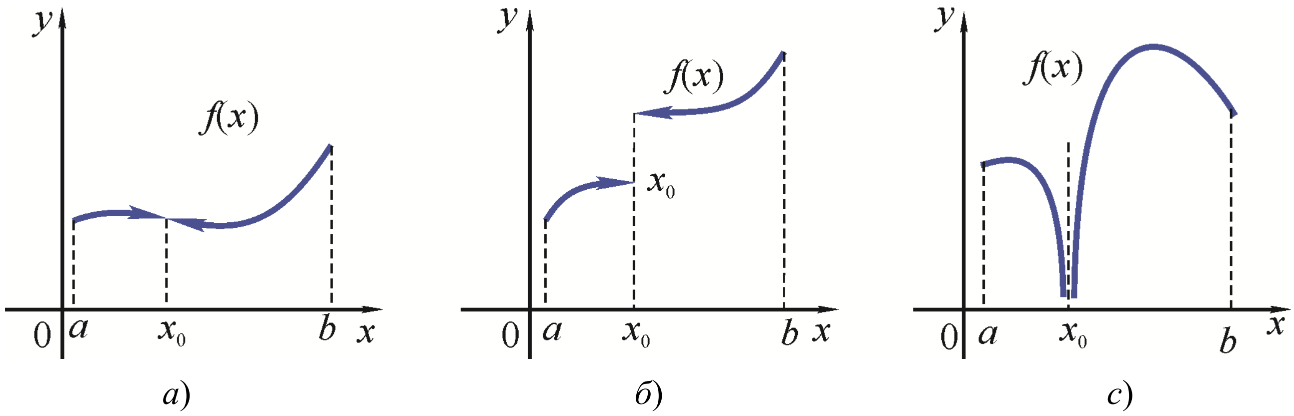
1.57. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \left(\dfrac{\sin(x)}{\cos^2(x)}-\tan^2(x)\right)$

1.58. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-1}{x}$.

Контрольні питання

1. Що таке границя функції?
2. Що таке однобічна границя функції?
3. Як позначається границя функції?
4. Чи завжди можна обчислити границю функції?
5. Чи існує границя функції $y=\dfrac{1}{(x-a)^2}$ при $x\to a$. Якщо так, то чому вона дорівнює? Чи існує значення цієї функції $x=a$

6. Поясніть фізичний зміст неперервності функції $F(m_1)$ і $F(r)$, де F – сила взаємодії двох мас m_1 і m_2, r – відстань між ними: $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ при деяких допустимих фіксованих значеннях інших параметрів.
7. Які процеси в біології і фармації можна вважати неперервними, а які розривними?
8. Чи може обмежена функція мати розрив II роду?
9. На рис. наведені графіки функцій, що мають розриви. Класифікуйте ці розриви? Які фізичні або хімічні процеси могли б їм відповідати?



Різні розриви функції

10. Виділити проміжок, на якому рівняння $x^3+3x-7 = 0$ має дійсний корінь.
11. Чи можуть всі значення неперервної функції бути раціональними?
12. Яка функція називається нескінченно великою?
13. Яка функція називається нескінченно великою?
14. Вкажіть властивості нескінченно малої величини.
15. Порівняння нескінченно малих.
16. Які величини називаються еквівалентними нескінченно малими (великими)
17. Наведіть приклади еквівалентних нескінченно малих величин.
18. Чи зміниться границя відносини двох нескінченно малих, якщо одну (або обидві) замінити на їх еквівалентні величини?
19. Як можна перейти від нескінченно великий до нескінченно малої і навпаки.

1.4. Диференціювання

Розглядаючи нескінченно малі функції, ми порівнювали їх між собою шляхом знаходження границь їх відношення. Однак необхідність такої процедури виникає навіть тоді, коли вивчаються властивості однієї заданої функції $y = f(x)$. При вивченні миттєвої швидкості (кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції) ми зіткнемося з розглядом відносини збільшення функції до приросту аргументу, який прямує до нуля. Таких задач існує безліч. Неочевидність їх рішення пов'язана з принциповою трудністю: навіть для неперервних функцій виникає необхідність розкриття невизначеності 0/0. Розкрити цю невизначеність часом буває дуже непросто. Можливо, геніальність Ньютона, який дав поняття миттєвої швидкості, полягала саме в тому, що від умоглядного сприйняття переміщення за нескінченно малий проміжок часу йому вдалося перейти до границі відношення збільшення шляху до приросту часу, яке породило цю зміну шляху. Ця ж ідея стала основною у визначені кутового коефіцієнта дотичної до кривої і була реалізована Лейбніцем. Саме поняття границя відношення збільшення функції до приросту аргументу, коли останнє прямує до нуля, введене цими вченими в кінці XVII століття у зв'язку з розглядом зазначених задач придбало стрімке продовження. Відшукання цієї границі, яку назвали похідною, дозволило вивчити найважливіші властивості функціональних залежностей, створити теорію диференціальних рівнянь, що описує найрізноманітніші процеси реального світу, розвинути нові математичні ідеї.

Означення похідної функції

Похідна функції $f(x)$ *у точці* x_0 це границя відношення приросту функції $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ до приросту змінної $\Delta x = x - x_0$ при прямуванні x до x_0:

$$f'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Похідна функції $f(x)$, це границя відношення приросту функції $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x)$ до приросту змінної Δx при прямуванні приросту змінної Δx до нуля (Δx може приймати як додатні, так і від’ємні значення):

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Загально прийняті позначення похідної функції такі:

$f'(x)$ – форма Лагранжа;

$\frac{df}{dx}$ – форма Лейбніца;

$Df(x)$ – форма Ейлера;

$\dot{f}(x_0)$ – форма Ньютона.

Функція називається *диференційованою* в точці, якщо вона має в цій точці кінцеву похідну. Похідна функції в точці x_0 може не існувати або існувати і бути обмеженою або нескінченістю. *Функція є диференційованою в точці тоді і тільки тоді, коли її похідна в цій точці існує і кінцева*.

Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона в цій точці неперервна. Неперервність функції є необхідною, але не достатньою вимогою її диференційованості.

Зміст похідної

Зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 стає зрозумілим через кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до кривої в цій точці (рис. 1.9):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta \beta \to \varphi} \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi .$$

Якщо же крива графіку функції, що визначає залежність шляху матеріальної точки S від часу t, то величина $S'(t_0)$ – миттєва швидкість руху в момент часу t_0. Тобто зміст похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 – швидкість зміни функції y точці x_0

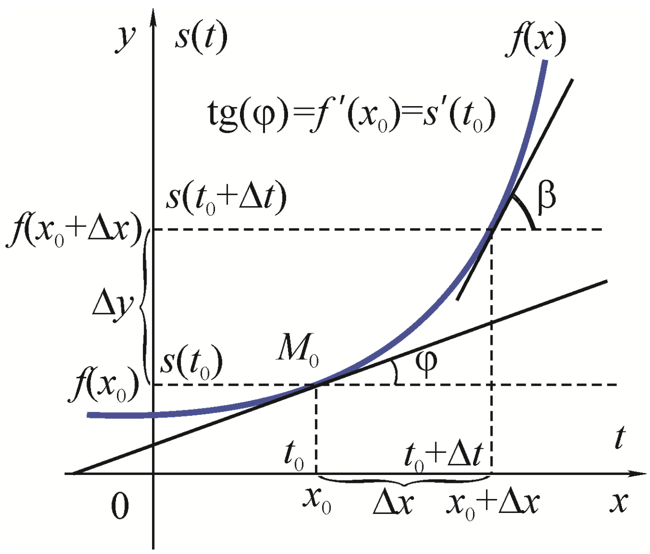


Рис. 1.9. Ілюстрація геометричного і механічного змісту похідної в точці

Диференціал функції

Нехай задана функція $y = f(x)$. Відомо, що її приріст в деякій точці x_0, викликаний збільшенням аргументу на Δx, може бути обчислено за формулою $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Чи завжди зручно користуватися нею? Чи можна приріст функції перетворити так, щоб виділити складові, які більшою чи меншою мірою відображали б його структуру? Попередні міркування дозволяють дати таку оцінку. Із означення похідної маємо:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Якщо деяка функція має кінцеву границю, то по необхідній і достатній умові існування границі вона може бути представлена у вигляді:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x_0, \Delta x),$$

де $\alpha(x_0, \Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(x_0, \Delta x) = 0.$

Отже, $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x_0, \Delta x)\Delta x.$ Приріст функції складається з двох доданків. Перший з них – $f'(x)$ можна знайти, обчисливши $f'(x_0)$ і Δx. Другий – $\alpha(x_0, \Delta x)$ знайти важче, так як згадана вище теорема зовсім не вказує спосіб відшукання нескінченно малою функції $\alpha(x_0, \Delta x)$. У разі потреби її можна знайти як різницю між приростом цієї функції і першим доданком $f'(x_0)\,\Delta x$.

Означення диференціала функції

Диференціалом функції $f(x)$ називається лінійна частина приросту функції, щодо збільшення змінної, при прямування останньої до нуля: $\Delta f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f'(x)\Delta x$

Використовувані символи границі функції тут прийнято записувати в іншій формі. Замість $\Delta x \to 0$ використовують символ dx, що позначає приріст змінної, що прямує до нуля. Замість Δf (приріст функції), щоб підкреслити, що береться тільки його лінійна відносно dx частина використовують символ df – символ диференціала.

Диференціал (від лат. *differentia* – різність, відмінність)

Таким чином, **диференціал функції** $f(x)$ – це $df(x) = f'(x) \cdot dx$.

Так як диференціал функції визначається похідною функцією, то всі властивості похідних функцій (або правила диференціювання), розглянутих докладно в наступному підрозділі, поширюються і на диференціал функції. Тому, нижче наводяться тільки основні властивості диференціала без коментарів.

Властивості диференціала функції

1. $d(Cu(x)) = Cdu(x),\ C - const$
2. $d(u(x) + v(x)) = du(x) + dv(x)$
3. $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$
4. $d\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right) = \dfrac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{v^2(x)}$

Зміст диференціала функції

Розглянемо геометричний і фізичний зміст диференціала функції. Нехай $f(x)$ функція, що диференціюється.

З рис. 1.10 випливає, що диференціал означає приріст ординати дотичної до кривої $y = f(x)$ у точці x_0, викликане збільшенням аргументу на Δx $dy = f'(x_0)dx = \Delta x \operatorname{tg}\varphi$, де φ – кут, який утворює дотична до кривої $y = f(x)$ в точці x_0.

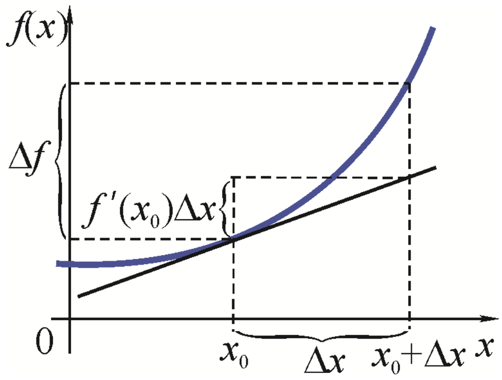


Рис. 1.10. Ілюстрація диференціала функції

Наприклад, якщо задана крива – графік функції шляху S матеріальної точки від часу t, то величина dS – приріст шляху за час Δt в припущенні, що, починаючи з моменту часу t_0, матеріальна точка рухається рівномірно зі швидкістю $v = S'(t_0)$, яку вона мала в початковий момент часу t_0: $dS = S'(t_0)\Delta t$.

Правила диференціювання

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ мають похідні. Тоді вірні наступні співвідношення.

1. $C' = 0$, де $C = const$ (похідна від сталої дорівнює нулю).
2. $(Cu)' = Cu'$ (стала виноситься за знак диференціювання).
3. $(u + v)' = u' + v'$(похідна від суми двох функцій).

4. $(uv)' = u'v + uv'$ (похідна від добутку двох функцій).

5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} (v \neq 0)$ – (похідна від відношення двох функцій).

6. $u'(v(x)) = u'(v) \cdot v'(x)$ (похідна складної функції).

7. $\left(u^{v(x)}(x)\right)' = v(x) \cdot u^{v(x)-1}(x) \cdot u'(x) + u^{v(x)}(x) \cdot \ln(u(x)) \cdot v'(x)$ (похідна степенево-показникової функції).

Похідні і диференціали вищих порядків

Операція диференціювання може бути зроблена повторно, якщо похідна функції знову є диференційована функцією. Друга похідна для функції $y = f(x)$ розглядається як похідна від її першої похідної:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} = (y')'$$

Процес диференціювання може проводитися і далі, якщо в результаті диференціювання виходять функції, що мають похідні. Таким чином, поняття похідної довільного n-го порядку задається рекурентно. Якщо функція $f(x)$ диференційована в x_0, то похідна першого порядку визначається співвідношенням $f^{(1)}(x_0) \equiv f'(x_0)$

Нехай тепер похідна n-го порядку визначена в деякого околу точки x_0 і є диференційованою. Тоді похідна n+1-го порядку визначається рекурентною формулою: $f^{(n+1)}(x_0) \equiv \left(f^{(n)}(x_0)\right)'$

Похідна n+1-го порядку визначається рекурентною формулою:

$$f^{(n+1)}(x_0) \equiv \left(f^{(n)}(x_0)\right)'$$

Способи позначання

Залежно від цілей, області застосування і використовуваного математичного апарату застосовують різні способи запису похідних. Так, похідна n-го порядку може бути записана наступними способами.

1. Спосіб Лагранжа $f^{(n)}(x)$, при цьому для малих n часто використовують штрихи і римські цифри:

$$f^{(1)}(x_0) = f'(x_0) = f^{I}(x_0);$$

$$f^{(2)}(x_0) = f''(x_0) = f^{II}(x_0);$$

$$f^{(3)}(x_0) = f'''(x_0) = f^{III}(x_0) \text{ і т.д.}$$

Такий запис зручний своєю стислістю і широко поширено, однак штрихами дозволяється позначати не вище третьої похідної.

2. Спосіб Лейбніца зручний наочним записом відносини нескінченно малих (тільки у випадку, якщо x – незалежна змінна, в іншому випадку позначення вірно лише для похідної першого порядку):

$$\frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

3. Спосіб Ньютона, який часто використовується в механіці для похідної за часом функції координати (для просторової похідної частіше використовують запис Лагранжа або Лейбниця). Порядок похідної позначається числом крапок над функцією, наприклад: $\dot{x}(t_0)$– похідна першого порядку по t при $t = t_0$, або $\ddot{x}(t_0)$– друга похідна по t в точці $t = t_0$ і т.д.

4. Спосіб Ейлера, в основу якого покладено використання диференційного оператора, зручний в питаннях, які пов'язані з функціональним аналізом $D^n f(x_0)$, або іноді $\partial^n f(x_0)$.

Диференціал вищих порядків

Диференціалом порядку n, де $n > 1$ від функції $f(x)$ в деякій точці називається диференціал в цій точці від диференціала порядку $(n - 1)$:

$$d^n f = d\left(d^{n-1} f\right) = f^{(n)} dx^n$$

Похідні елементарних функцій

1. $\left(x^a\right)' = ax^{a-1}$ (*похідна степеневих функцій*)
2. $\left(a^x\right)' = a^x \ln(a)$; $\left(e^x\right)' = e^x$ (*похідна показникових функцій*)
3. $\left(\log_a(x)\right)' = \dfrac{1}{x\ln(a)}$; $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ (*похідна логарифмічних функцій*)
4. $\sin'(x) = \cos(x)$ (*похідна синуса*)
5. $\cos'(x) = -\sin(x)$ (*похідна косинуса*)
6. $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*похідна арксинуса*)
7. $\arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (*похідна арккосинуса*)

8. $\tan'(x) = \mathrm{tg}'(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ (*похідна тангенса*)

9. $\cot'(x) = \mathrm{ctg}'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ (*похідна котангенса*)

10. $\mathrm{arctg}'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ (*похідна арктангенса*)

11. $\mathrm{arcctg}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$ (*похідна арккотангенса*)

12. $\mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x)$ (*похідна синуса гіперболічного*)

13. $\mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x)$ (*похідна косинуса гіперболічного*)

14. $\mathrm{th}'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$ (*похідна тангенса гіперболічного*)

15. $\mathrm{cth}'(x) = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2(x)}$ (*похідна котангенса гіперболічного*)

16. $\Theta'(x) = \delta(x)$ (*похідна функції Хевисайда*)

Диференціювання функцій декількох змінних

При вивченні різних явищ навколишнього світу часто доводиться стикатися з одночасним впливом більш ніж двох змінних величин. Наприклад, при вивченні процесу поширення тепла в будь-якому неоднорідному тілі потрібно досліджувати величину температури в різних точках тіла в різні моменти часу. Положення точки у тривимірному просторі в декартовій системі координат визначається трьома числами. Тому фактично в зазначеному процесі треба вивчати спільний вплив п'яти змінних величин: трьох координат точки, часу і температури.

Можна простежити аналогії між функціями однієї та декількох змінних, що дозволяє вважати функції багатьох змінних узагальненням випадку однієї змінної.

Означення *n*-мірної точки

Всяка множина Е, що складається з деяких впорядкованих систем $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ дійсних чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ називається *n*-мірною точковою множиною, а його елементи – точками цієї множини (*n*-мірними точками).

При $n = 2$, $n = 3$ отримуємо пари (x, y) і трійки чисел (x, y, z), які можна розглядати як точку координатної площині або координатного простору. Відомо, що деяку множину точок можна задати за допомогою рівнянь або нерівностей, що виконуються для координат точок цієї множини і тільки для них.

Означення функції n-змінних

Нехай задана деяка не порожня множина D точок простору R_n.

Якщо кожній точці $M(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ множини D поставлено у відповідність з якого-небудь закону деяке дійсне число u, то говорять, що на множині D задана *функція від змінних* $(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Позначають $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

Частинна похідна

Нехай задана функція $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, яка визначена в області D. Візьмемо якусь точку $A(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ цієї області та дамо змінній x_i приріст Δx_i. Залишимо значення інших аргументів незмінними, тобто перейдемо від точки $A(x_1, x_2,\ldots, x_i,\ldots, x_n)$ до точки $B(x_1, x_2,\ldots, x_i+\Delta x_i,\ldots, x_n)$. Тоді функція отримає частинний приріст $\Delta_{x_i} f = f(x_1, x_2,..., x_i + \Delta x_i,..., x_n) - f(x_1, x_2,..., x_i,..., x_n)$. Складемо відношення $\frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}$. Це відношення для даної точки можна розглядати як певну функцію аргументу Δx_i. Може статися, що ця функція має границю при $\Delta x_i \to 0$, тобто що $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}$ існує.

Означення частинної похідної

Частинною похідною функції по змінній x_i в точці A називається кінцева границя $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} f}{\Delta x_i}$.

Спосіб позначення частинної похідної: f'_{x_i} або $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

Диференціювання складних функцій

Нехай задана функція $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ n змінних, кожна із котрих в свою чергу є функцією незалежних m змінних $x_i\,(t_1, t_2,\ldots, t_m)$. Тоді функція $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ є *складною функцією n змінних з m проміжних змінними*.

Теорема. Нехай функція $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ диференційована в точці $X_0 \in G_n$, а функції $x_i\,(t_1, t_2,\ldots, t_m)$ диференційована в точці $T_0 \in D_m(f)$. Тоді складна функція

$f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ диференційована в точці $T_0 \in D_m(f)$ причому частинна похідна функції $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ по змінній t_j визначається формулою:

$$\frac{\partial f}{\partial t_j}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

Повна похідна

Нехай задана функція $u = f(t, x_1, x_2,\ldots, x_n)$, яка визначена в деякій області D і кожна із змінних в свою чергу залежить від параметра t – $x_i(t)$, $i = 1, 2,.., n$. Тоді функція $u = f(t, x_1, x_2,\ldots, x_n)$ є функцією однієї змінної t. Похідна функції декількох змінних $u = f(t, x_1, x_2,\ldots, x_n)$ по змінній t називається повною похідною і знаходиться за формулою:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}$$

Диференціювання параметричних функцій

В фізиці та хімії часто зустрічається параметричний спосіб завдання рівняння, що описує криву на площині чи в просторі. Саму ж лінію можна розглядати як геометричне місце послідовних положень рухомої точки, координати x та y якої є функціями допоміжної змінної t, v, s (часу, швидкості, відстані і т.д.). Допоміжну змінну називають *параметром*, а рівняння функції – *параметричним*.

Таким чином, якщо $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ визначені при $t \in (a, b)$ і існує оборотна функція $t = \theta(x)$ для $x = \varphi(t)$, то функція $y = \psi(\theta(x))$ задана параметрично.

Наприклад, крива на площині визначається двома рівняннями з одним параметром t $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$, в трьохвимірному просторі – трьома рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ і $z = \zeta(t)$, а поверхня трьома рівняннями і двома параметрами u і v $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$

Формулу диференціювання параметричних функцій в загальному випадку записати без роз’яснювань складно. Тому розглянемо деякі частинні, більш прості випадки.

Одномірний випадок

1. Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично на площині: $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$.

Похідна заданої функції $y = f(x)$ першого порядку знаходиться за правилом: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{dy}{dt}\cdot\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^{-1}$

2. Нехай функція $z = f(x, y)$ задана параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$.

Частинні похідні заданої функції $z = f(x, y)$ першого порядку визначаються наступним чином: $z'_x = \dfrac{z'_t}{x'_t}$; $z'_y = \dfrac{z'_t}{y'_t}$.

Тобто для функції $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ або $x_n = f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, яка задана параметрично через параметр t всі частинні похідні знаходяться за правилом: $\dfrac{\partial x_n}{\partial x_i} = \dfrac{\dfrac{\partial x_n}{\partial t}}{\dfrac{\partial x_i}{\partial t}}$, $i = 1, 2,.., n-1$.

Диференціювання неявних функцій

Нехай функція $F(x, y)$ визначена на деякій множині змінних x, y і нехай на якої-небудь множині значень x існує така функція $y = f(x)$, яка, будучи поставлена замість y в рівняння звертає його на цій множині в тотожність відносно x. Тоді кажуть, що на даній множині функція задана неявно рівнянням $F(x, y) = 0$.

Не всяке рівняння такого виду може бути неявною функцією. Виникає питання, в яких випадках такого роду вираз задає неявну функцію. Відповідь на нього дає наступна теорема.

Теорема (існування неявної функції, що диференційована). Нехай функція $F(x, y) = 0$ задовольняє таким умовам:

1) визначена і має безперервні частинні похідні F'_x, F'_y в деякому прямокутнику $x_0 - a < x < x_0 + a,\ y_0 - b < y < y_0 + b$;
2) в точці (x_0, y_0) звертається в нуль, причому частинні похідні не звертається в нуль в даній точці.

Тоді рівняння $F(x, y) = 0$ в деякому округу $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 визначає неявну функцію $y = f(x)$, таку що $y_0 = f(x_0)$. Ця функція в названому округу точки x_0 має безперервну похідну, причому

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Будемо розглядати вираз виду $F(x, y, z) = 0$. Якщо для кожної пари значень незалежних змінних з будь-якої області на площині існує тільки одне значення z, яке задовольняє вказаному рівнянню, то говорять, що таке рівняння визначає неявну функцію. *Можна сформулювати аналогічну теорему для визначення умов існування такої неявної функції, частинні похідні якої знаходяться за формулами*

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Аналогічним чином можна визначити неявні функції від більшого числа змінних.

Повний диференціал функції

Повний диференціал функції n-змінних $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ визначається наступним співвідношенням

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$$

Тобто *повний диференціал функції n-змінних* $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ є сумою всіх частинних диференціалів:

$$df = \sum_{i=1}^{n} df_i \text{, де } df_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i - \textit{частинний диференціал}$$

Частинні похідні вищих порядків

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в деякій області визначення D має частинну похідну по одній із змінних. Тоді цю похідну можна розглядати як функцію тих же змінних, визначену в області D. Може трапитися, що отримана функція має в деякій області визначення частинну похідну по тій же або по іншій змінній. Отримані таким чином частинні похідні називаються *частинними похідними другого порядку*. У загальному випадку диференціювання можна повторювати кілька разів, в результаті отримуємо *частинні похідні вищих порядків*. Частинні похідні вищих порядків, які були знайдені за різними змінними називають з*мішаними частинними похідними*.

Наприклад, функція двох змінних $f(x, y)$ має дві частинні похідні першого порядку $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$. Якщо продиференціювати кожну із отриманих похідних, то отримаємо чотири частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ або } f''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ або } f''_{yx};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \text{ або } f''_{yy}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \text{ або } f''_{xy}.$$

Причому змішані частинні похідні рівні між собою

Теорема Шварца. Якщо в деякому околі точки та в самій точці функція має похідні першого порядку і змішані частинні похідні другого порядку, які неперервні в самій точці, то змішані похідні другого в цій точці рівні між собою.

Теорему має загальний характер на випадок будь-якого числа змінних і змішаних похідних будь-якого порядку

Теорема. Змішані частинні похідні будь-якого порядку за умови їх безперервності не залежать від порядку диференціювання.

Повний диференціали вищих порядків

Повним диференціалом другого порядку від функції $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ називається диференціал від повного диференціала $d^2u = d(du)$.

Можна показати, що для диференціала другого порядку справедлива формула:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 \text{ або } d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f .$$

Аналогічним чином визначається диференціал порядку m функції з n змінними. Символічний загальний вигляд такого диференціалу наступний:

$$d^m f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m f$$

Для складних функцій диференціали порядку вище першого не володіють незмінною формою і вирази для них більш складні, ніж отримані раніше формули.

Приклади розв'язання задач на диференціальне числення

Нехай задана функція $y = f(x)$. Знайти похідну y'?

1. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

2. $\sin'(x) = \cos(x)$

3. $y = 0.5$. $y' = (0.5)' = 0$.

4. $y = 5\sin(x)$. $y' = (5\sin(x))' = 5\sin'(x) = 5\cos(x)$. $y' = 5\cos(x)$.

5. $y=\ln(x)+\sin(x)$. $y'=(\ln(x)+\sin(x))'=\ln'(x)+\sin'(x)=\frac{1}{x}+\cos(x)$.

$$y'=\frac{1}{x}+\cos(x).$$

6. $y=\ln(x)\cdot\sin(x)$.

$$y'=(\ln(x)\cdot\sin(x))'=\ln'(x)\cdot\sin(x)+\ln(x)\cdot\sin'(x)=\frac{1}{x}\cdot\sin(x)+\ln(x)\cdot\cos(x).$$

$$y'=\frac{1}{x}\cdot\sin(x)+\ln(x)\cdot\cos(x).$$

7. $y=\frac{\ln(x)}{\sin(x)}$.

$$y'=\left(\frac{\ln(x)}{\sin(x)}\right)'=\frac{\ln'(x)\cdot\sin(x)-\ln(x)\cdot\sin'(x)}{\sin^2(x)}=\frac{\frac{1}{x}\cdot\sin(x)-\ln(x)\cdot\cos(x)}{\sin^2(x)}.$$

$$y'=\frac{\sin(x)-x\cdot\ln(x)\cdot\cos(x)}{x\sin^2(x)}.$$

8. $y=\ln(\sin(x))$.

$$y'=\ln'(\sin(x))=\frac{1}{\sin(x)}\cdot\sin'(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}=\operatorname{ctg}(x).$$

$$y'=\operatorname{ctg}(x).$$

9. $y=\sin(\ln(x))$.

$$y'=\sin'(\ln(x))=\cos(\ln(x))\cdot\ln'(x)=\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}.$$

$$y'=\frac{\cos(\ln(x))}{x}.$$

10. $y=\sin^{\ln(x)}(x)$.

$$y'=\left(\sin^{\ln(x)}(x)\right)'=\ln(x)\cdot\sin^{\ln(x)-1}(x)\cdot\sin'(x)+\sin^{\ln(x)}(x)\cdot\ln(u(x))\cdot\ln'(x)=$$

$$=\ln(x)\cdot\sin^{\ln(x)-1}(x)\cdot\cos(x)+\sin^{\ln(x)}(x)\cdot\ln(u(x))\cdot\frac{1}{x}$$

$$y'=\ln(x)\cdot\sin^{\ln(x)-1}(x)\cdot\cos(x)+\sin^{\ln(x)}(x)\cdot\ln(u(x))\cdot\frac{1}{x}$$

11. Знайти всі частинні похідні першого порядку функції $f(x,y)=3x^2-4x\sqrt{y^3}+\frac{1}{y^2}+6$.

Для зручності запишемо функцію інакше:

$$f(x,y)=3x^2-4xy^{3/2}+y^{-2}+6.$$

Частинна похідна функції по змінній x:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(3x^2-4xy^{3/2}+y^{-2}+6\right)_x'=6x-4y^{3/2}.$$

Так як усі змінні окрім x при диференціюванні розглядаються сталими величинами, то похідні від y^{-2} і 6 будуть дорівнювати нулю. В другому доданку сталий коефіцієнт $4y^{3/2}$ виноситься за знак похідної. При знаходженні частинної похідної функції по змінній y вже x стала величина. Тому до неї застосовуються усі правила диференціювання сталих:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(3x^2-4xy^{3/2}+y^{-2}+6\right)_y'=-6xy^{1/2}-2y^{-3}.$$

12. Знайти повну похідну першого порядку функції $f(x,y,t)=\frac{x}{y}e^{-t}$, якщо $x=2\sin(3t)$ і $y=\sqrt{t}$.

Повна похідна визначається формулою:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\frac{x}{y}e^{-t}\right)_t'=-\frac{x}{y}e^{-t};\ \frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{x}{y}e^{-t}\right)_x'=\frac{1}{y}e^{-t};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{x}{y}e^{-t}\right)_y'=-\frac{x}{y^2}e^{-t};\ \frac{\partial x}{\partial t}=\left(2\sin(3t)\right)'=6\cos(3t);\ \frac{\partial y}{\partial t}=\left(\sqrt{t}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

Таким чином,

$$\frac{df}{dt}=-\frac{x}{y}e^{-t}+\frac{1}{y}e^{-t}6\cos(3t)-\frac{x}{y^2}e^{-t}\frac{1}{2\sqrt{t}}=\left(\frac{6\cos(3t)}{y}-\frac{x}{y}-\frac{x}{2y^2\sqrt{t}}\right)e^{-t}.$$

13. Знайти похідну функції $y=f(x)$ – еліпсу із півосями 5 і 2, якщо вона задана параметрично: $\begin{cases}x=5\cos(t)\\ y=2\sin(t)\end{cases}$

Похідна визначається виразом $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}$.

$$\frac{dy}{dt}=\left(2\sin(t)\right)'=2\cos(t);\ \frac{dx}{dt}=\left(5\cos(t)\right)'=-5\sin(t).$$

Відповідно, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\cos(t)}{-5\sin(t)}=-\dfrac{2}{5}\text{ctg}(t)$

14. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$, якщо вона задана параметрично: $x=5\cos(t);\ y=2\sin(t);\ z=e^{-2t}$.

Похідні визначаються формулами $z'_x=\dfrac{z'_t}{x'_t};\ z'_y=\dfrac{z'_t}{y'_t}$

$$z'=\left(e^{-2t}\right)'=-2e^{-2t};\ y'=\left(2\sin(t)\right)'=2\cos(t);\ x'=\left(5\cos(t)\right)'=-5\sin(t).$$

Відповідно, $z'_x=\dfrac{2e^{-2t}}{5\sin(t)}$ і $z'_y=-\dfrac{2e^{-2t}}{5\cos(t)}$

15. Знайти похідну функції $y = f(x)$ – гіперболи, якщо вона задана неявно: $3x^2-4y^2=1$

Похідна неявної функції визначається формулою $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$, де $F(x,y)=3x^2-4y^2-1$.

Знайдемо всі частинні похідні функції $F(x, y)$:

$$F'_x(x,y)=\left(3x^2-4y^2-1\right)'_x=6x;\ \ F'_y(x,y)=\left(3x^2-4y^2-1\right)'_y=-8y.$$

Таким чином, $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}=-\dfrac{6x}{-8y}=-\dfrac{3x}{4y}$

16. Знайти частинні похідні функції $z = f(x, y)$ – еліпсоїду, якщо вона задана неявно: $3x^2+4y^2+5z^2=1$

Частинні похідні неявної функції визначаються формулою $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$ і $z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$, де $F(x,y,z)=3x^2+4y^2+5z^2-1$.

Знайдемо всі частинні похідні функції $F(x, y, z)$:

$$F'_x(x,y,z)=\left(3x^2+4y^2+5z^2-1\right)'_x=6x;$$

$$F'_y(x,y,z)=\left(3x^2+4y^2+5z^2-1\right)'_y=8y;$$

$$F'_z(x,y,z)=\left(3x^2+4y^2+5z^2-1\right)'_z=10z.$$

Таким чином, $z'_x=-\dfrac{F'_x}{F'_z}=-\dfrac{6x}{10z}=-\dfrac{3x}{5z}$ і $z'_y=-\dfrac{F'_y}{F'_z}=-\dfrac{8y}{10z}=-\dfrac{4y}{5z}$.

Задачі на диференціювання

В задачах 1.59 – 1.114 знайти диференціал функції *f*(*x*)

1.59. $3\arcsin(x)$	1.60. $2+\arccos(x)$	1.61. $x^{2/3}$
1.62. 3^x	1.63. $\ln(x)$	1.64. $5\arctan(x)$
1.65. $\sqrt{x^3}$	1.66. $3x^{-2}$	1.67. $x+e^x$
1.68. $\log_3(x)$	1.69. $\lg(x)$	1.70. $3sh(x)$
1.71. $3+ch(x)$	1.72. $\frac{1}{x}$	1.73. $\frac{1}{\sqrt{x}}$
1.74. $th(x)$	1.75. $x^2\tan(x)$	1.76. $\sin(x)+3$
1.77. $\cos(x)+x$	1.78. $x\cot(x)$	1.79. $\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$
1.80. $\arccos\left(\sqrt[3]{x}\right)$	1.81. $(x+3)^{2/3}$	1.82. $3^{\sin(x)}$
1.83. $\ln(x^2-2x+1)$	1.84. $\arctan\left(\sqrt{x}\right)$	1.85. $\sqrt{\sin^3(x)}$
1.86. $\frac{1}{\cos^2(x)}$	1.87. $\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$	1.88. e^{-x^2}
1.89. $\log_3(x+3)$	1.90. $\lg(x^2-1)$	1.91. $x^4\cdot sh(x)$
1.92. $x\cdot ch^4(x)$	1.93. $x\cdot th(x)$	1.94. $\tan\left(x^2\right)$
1.95. $\sin^2(x^3-1)$	1.96. $\sqrt{\cos(x)+x}$	1.97. $\sqrt{\cos(x)}$
1.98. $\ln(\sin(x))$	1.99. $\sin(\ln(x))$	1.100. $\arctan(e^x)$
1.101. $\arctan(\sqrt{x^3})$	1.102. $\tan(e^{-x})$	1.103. $\ln(x^3\sin(x))$
1.104. $\sin(x)\ln(\sin(x))$	1.105. 3^x+x^3+3	1.106. $3^{\sin(x)}+\sin^3(x)-1$
1.107. $\sin(x^{-2/3}+\ln(x))$	1.108. x^x	1.109. $\cos^x(x)$
1.110. $\sqrt[x]{x}$	1.111. $x^{\ln x}$	1.112. $\ln^x(x)$
1.113. $x^{\cos(x)}$	1.114. $\tan^x(x)$	

В задачах 1.115 – 1.120 знайти похідну другого порядку.

1.115. $\tan(x)$	1.116. $\ln(x)$	1.117. $\arcsin(x)$
1.118. $\arctan(x)$	1.119. xe^{-x}	1.120. $x^2\sin(x)$

В задачах 1.121 – 1.126 з точністю до однієї сотої обчислити похідну в точці x_0

1.121. $\ln(x^2+1)$, $x_0=6$	1.122. $\ln(\sin(x))$, $x_0=\pi/4$	1.123. $\arcsin(x)$, $x_0=0{,}6$
1.124. $\arctan(x)$, $x_0=2$	1.125. xe^{-x}, $x_0=1{,}5$	1.126. $x^2\sin(x)$, $x_0=\pi/6$

В задачах 1.127 – 1.144 знайти повний диференціал функції $f(x, y)$.

1.127. $x^{-y} + x^{\ln 2}$

1.128. $\arctan\left(xy^{-1}\right)$

1.129. $\sqrt[3]{\cos\left(x^2 - y^2\right)}$

1.130. $x \cdot \exp\left(-xy^2\right)$

1.131. $\dfrac{\sin(x)}{\sin(y)}$

1.132. $e^{-3x}\sin(2y)$

1.133. $x^3 + x^2 y + xy^2 + 3$

1.134. $e^{-x} \cdot ch\sqrt{y^3}$

1.135. $\sin^x(y)$

1.136. $\sqrt[y]{\arctan(x)}$

1.137. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x + y^2}}$

1.138. $\ln(\sin(x - y))$

1.139. $\arcsin\sqrt{x^2 - y^2}$

1.140. $\sqrt[y]{x^3}$

1.141. $\sin^2(x + y)$

1.142. $\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{y^2} - xy^3$

1.143. $\dfrac{xy}{x - y}$

1.144. $x \cdot \tan(y)$

В задачах 1.145 – 1.156 знайти похідні другого порядку.

1.145. $y^2 = 8x - y$

1.146. $y = x + \operatorname{arctg} y$

1.147. $y^2 = 25x - 4y$

1.148. $\arctan(y) = 4x + 5y$

1.149. $3x + \sin y = 5y$

1.150. $\tan(y) = 3x + 5y$

1.151. $\begin{cases} x = (2t + 3)\cos t \\ y = 3t^3 \end{cases}$

1.152. $\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$

1.153. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = \ln t \end{cases}$

1.154. $\begin{cases} x = e^{-2t} \\ y = e^{4t} \end{cases}$

1.155. $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = \sqrt[5]{t} \end{cases}$

1.156. $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \cos^2 t \end{cases}$

Контрольні питання

1. Що таке похідна функції?
2. У чому полягає зміст похідної функції?
3. Якими загальноприйнятими способами можна позначати похідну функції?
4. Як позначається диференціал функції?
5. За допомогою, якої формули можна знайти диференціал функції?
6. Чому дорівнює похідна від суми функцій?
7. Чому дорівнює похідна від множення двох функцій?
8. Чому дорівнює похідна від відношення двох функцій?
9. Чому дорівнює похідна складної функції?
10. Що таке похідна від функції n-го порядку?
11. Що таке диференціал функції n-го порядку?
12. Якими способами можна позначити похідну від функції n-го порядку?
13. Нехай знаходиться частинна похідна функції f по змінній x_i. Яким чином необхідно поводитися з іншими змінними?
14. Скільки частинних похідних першого порядку має функція $f(x_1, x_2, x_3)$?

15. Як можна позначати частинні похідні
16. Що таке повний диференціал функції?
17. Як позначаються частинні похідні вище першого порядку?
18. Чи збігаються змішані частинні похідні, якщо вони неперервні? В чому суть теореми Шварца?

1.5. Застосування диференціального числення

Зростання і спадання функції

Дуже важливу інформацію про поведінку функції надають проміжки зростання та спадання. Їх знаходження є частиною процесу дослідження функції та побудови графіка, які потрібні для оптимізації будь-якого процесу.

Означення 1. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* на інтервалі (a, b), якщо при зростанні аргументу x в цьому інтервалі відповідні значення функції $f(x)$ також зростають, тобто $f(x_2) > f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нестрога нерівність $f(x_2) \geq f(x_1)$, то функція $f(x)$ називається *не спадаючою* на інтервалі (a, b).

Означення 2. Функція $y = f(x)$ називається *спадаючою* в інтервалі (a, b), якщо при зростанні аргументу x на цьому інтервалі відповідні значення функції $f(x)$ також спадають, тобто $f(x_2) < f(x_1)$ при $x_2 > x_1$.

Якщо з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нестрога нерівність $f(x_2) \leq f(x_1)$, то функція $f(x)$ називається *не зростаючою* в інтервалі (a, b).

Зауваження: якщо функція визначена і неперервна на кінцях інтервалу зростання або зменшення (a, b), тобто при $x = a$ і $x = b$, то ці точки включаються в проміжок зростання або спадання. Це не суперечить означенням зростаючої та спадаючої функції на проміжку X.

Зростання і спадання функції є окремим випадком монотонності функції.

Означення 3. *Монотонна функція* – це функція, приріст якої не змінює знаку, тобто або завжди невід'ємне, або завжди недодатне. Якщо приріст не дорівнює нулю, то функція називається *строго монотонною*.

Теорема 1. Критерій монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, в інтервалі (a, b) функція $f(x)$:

не збільшується на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли функція $f(x)$ має в усіх точках цього інтервалу додатну похідну $f'(x) \leq 0$.

Не спадає на інтервалі (a, b) тоді і тільки тоді, коли функція $f(x)$ має в усіх точках цього інтервалу від'ємну похідну $f'(x) \geq 0$.

Теорема 2. Достатня умова строгої монотонності функції

Нехай функція $f(x)$ неперервна і має похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, якщо для будь-якого x з інтервалу (a, b):

- $f'(x) > 0$, то $f(x)$ *строго зростає*.
- $f'(x) < 0$, то $f(x)$ *строго спадає.*

Опуклість і угнутість функції

Означення. Функція $y = f(x)$, що визначена і неперервна на інтервалі (a, b) називається *опуклою* в інтервалі (a, b), якщо для будь-яких двох значень аргументу x_1 і x_2 з інтервалу (a, b) і будь-якого числа $t = 0 \div 1$ виконується нерівність Йєнсена:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \text{ при } x_1 \neq x_2$$

- Якщо функція *угнута*, то знак нерівності змінюється на протилежний: $f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$.
- Якщо ці нерівності є строгими для всіх $t \in (0, 1)$, то функція називається *строго опуклою (угнутою).*

Іноді опуклу функцію називають опуклою вниз, а увігнуту – опуклою вгору.

Геометрична інтерпретація: З нерівностей, зазначених у означеннях випливає, що графік опуклою функції ніде не лежить нижче дотичній, проведеної до кривої. Відповідно для увігнутої функції графік не лежить над дотичної.

Умови опуклості і увігнутості функції. Нехай функція $f(x)$ неперервна і має другу похідну в кожній точці інтервалу (a, b). Тоді, в інтервалі (a, b) функція $f(x)$:

- *опукла* в інтервалі (a, b), тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \geq 0$;
- *угнута* в інтервалі (a, b), тоді і тільки тоді, коли $f''(x) \leq 0$

Екстремуми функції

Означення 1. *Екстремум* (лат. extremum – крайній) максимальне або мінімальне значення функції на заданій множині. Точка, в якій досягається екстремум, називається точкою екстремуму. Відповідно, якщо досягається мінімум – точка екстремуму називається точкою мінімуму, а якщо максимум – точкою максимуму. В математичному аналізі виділяють також поняття локальний екстремум (відповідно мінімум або максимум).

Означення 2. Точка x_0 називається *точкою мінімуму функції* f, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x) > f(x_0)$

Означення 3. Точка x_0 називається *точкою максимуму функції* f, якщо для всіх x з деякого околу x_0 виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$

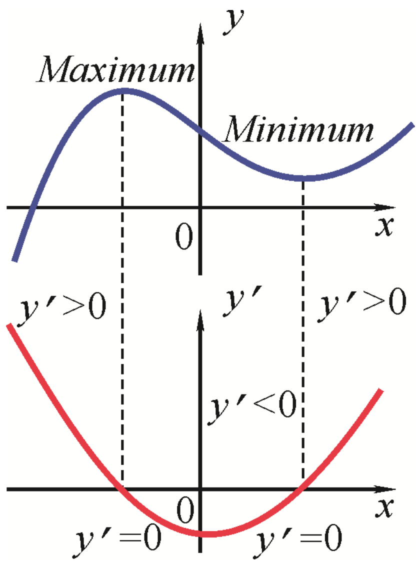


Рис. 1.11. Ілюстрація максимуму і мінімуму функції, якщо $y' = 0$

Теорема 1. Необхідна умова екстремуму

Для того щоб функція $f(x)$ мала екстремум в $x = x_0$, в якій функція визначена необхідно, щоб $f'(x_0) = 0$ (рис. 1.11) або $f'(x_0)$ не існувало (рис. 1.12).

Точки, де $f'(x_0) = 0$ або $f'(x_0)$ не існує, називаються *критичними*

Теорема 2. Достатня умова екстремуму

1. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі, що містить критичну точку x_0, і має похідні у всіх точках цього проміжку, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо при переході зліва направо через критичну точку похідна $f'(x)$ змінює знак

- з «плюса» на «мінус», то в цій точці функція має *максимум*;
- з «мінуса» на «плюс», то в цій точці функція має мінімум;
- Якщо зміни знака похідної $f'(x)$ не відбувається, то точка x_0 не є точкою екстремуму.

2. Нехай функція $f(x)$ неперервна в інтервалі, що містить критичну точку x_0, і має похідні у всіх точках цього проміжку, за винятком, можливо, самої точки x_0. Тоді, якщо

- $f''(x_0) < 0$, то в цій точці функція має *максимум*;
- $f''(x_0) > 0$, то в цій точці функція має *мінімум*.

Точки перегину кривої функції

Означення. Нехай функція $f(x)$ диференційована в деякому околу точці x_0. Функція $f(x)$ має точку перегину x_0, якщо в цій точці змінюється напрям опуклості (опуклість змінюється на увігнутість)

Геометрична інтерпретація. Якщо функція $f(x)$ має точку перегину в x_0, то графік функції $f(x)$ в цій точці «перегинається» через дотичну до нього в цій точці, тобто в деякому околу точки x_0 крива при $x < x_0$ і при $x > x_0$ лежить по різні сторони від дотичній.

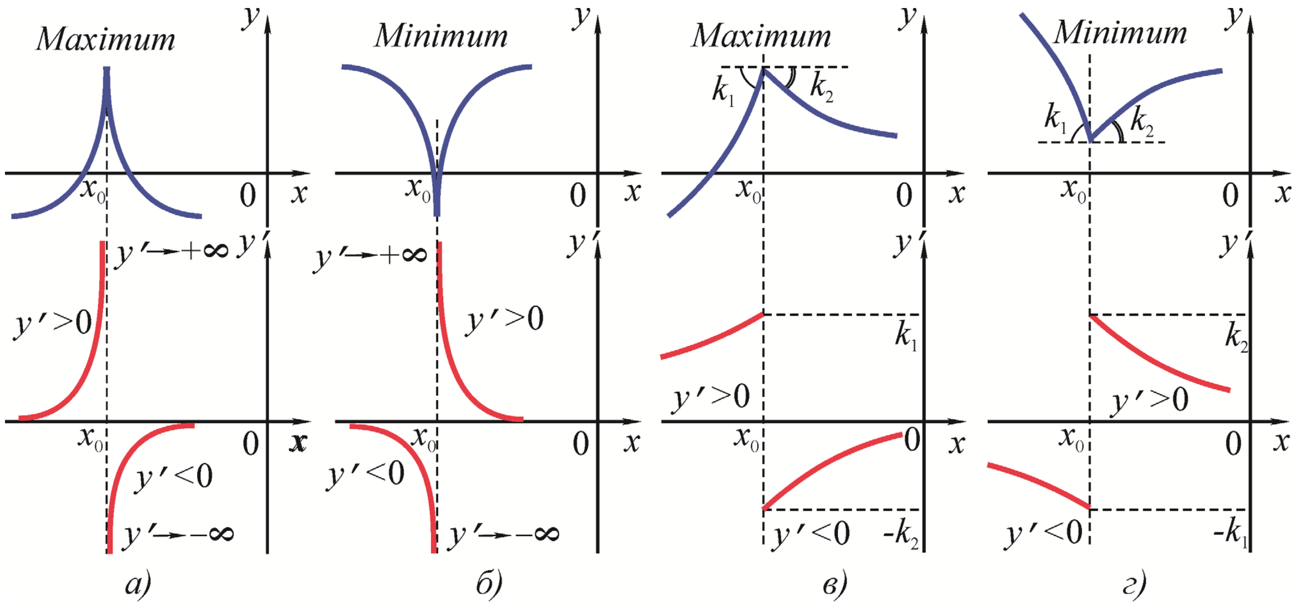


Рис. 1.12. Ілюстрація максимуму і мінімуму функції, якщо y' не існує

Загальна умова. Нехай функція $f(x)$, яка диференційована в деякому околу точці x_0. Функція $f(x)$ має в точці x_0 точку перегину тоді і тільки тоді, коли похідна функції $f'(x_0)$ має в точці x_0 локальний екстремум

Необхідна умова. Якщо функція $f(x)$, двічі диференційована в околі точці x_0 має в ній точку перегину, то $f''(x_0) = 0$ (рис. 1.13 а,б) або не існує (рис. 1.13 в).

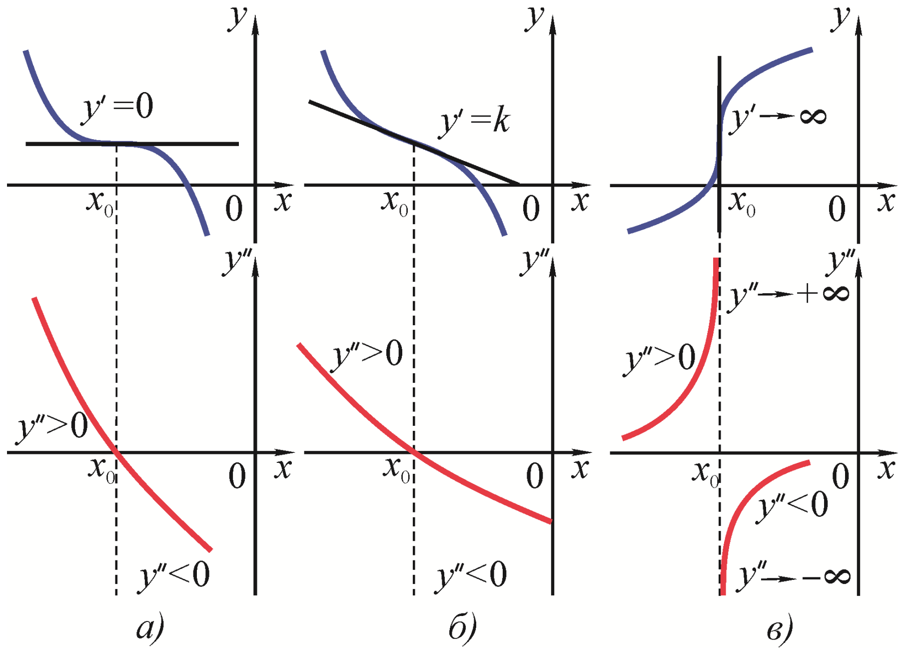


Рис. 1.13. Ілюстрація точок перегину функції

Достатні умови.

Умова 1. Якщо функція $f(x)$, двічі диференційована в околі точці x_0 і має $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує і в x_0 $f''(x)$ змінює свій знак, то x_0 – точка перегину.

Умова 2. Якщо функція $f(x)$ в околі точці x_0 $к$ разів диференційована причому κ – не парно, $\kappa \geq 3$ і $f^{(i)}(x_0) = 0$ при $i = 2, 3, \ldots, \kappa-1$, а $f^{(\kappa)}(x_0) \neq 0$, то x_0 – точка перегину.

Асимптоти функції

Означення. Асимптота (від грец. Aσΰμπτωτος – неспівпадаючий, недотична) кривої з нескінченною гілкою – пряма, що має властивість, що відстань від точки кривої до цієї прямої прямує до нуля при віддаленні точки в нескінченність.

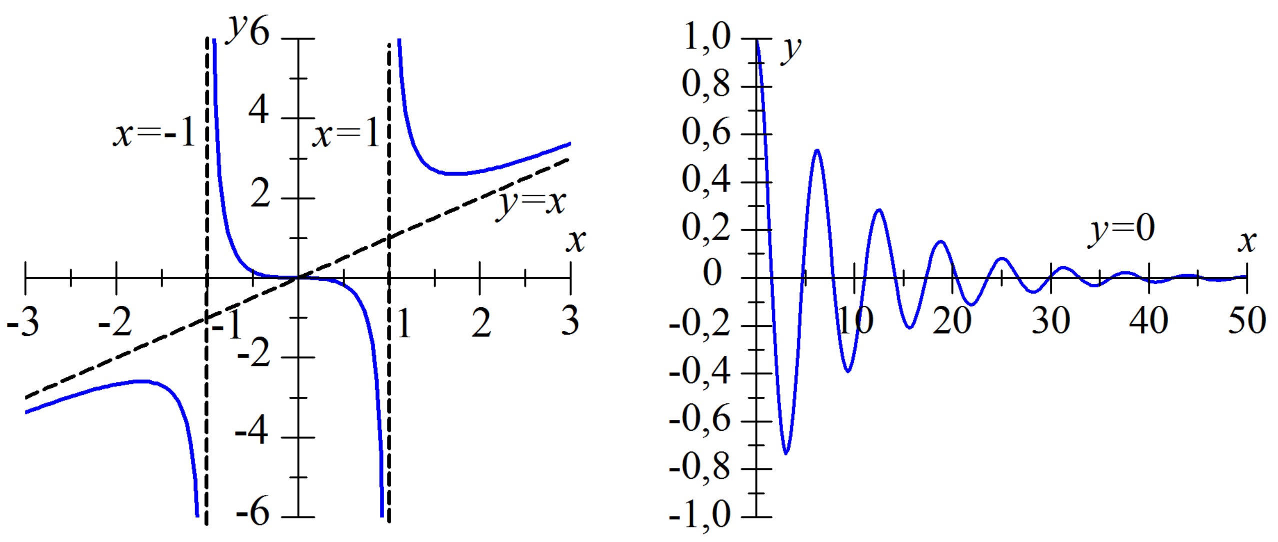
Види асимптот:

Вертикальна асимптота – пряма $x = a$ при умові існування границі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$.

При визначенні вертикальної асимптоти шукають не одну границю, а дві односторонніх (ліву і праву) $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ і $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. Це робиться з метою визначити, як функція поводиться з наближенням до вертикальної асимптоти з різних сторін. При цьому треба звертати увагу на знак нескінченності.

Горизонтальна асимптота – пряма $y = a$ при умові існування границі $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

Похила асимптота – пряма $y = kx+b$ при умові існування границь $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ і $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$



а) *б)*

Рис. 1.14. Приклади асимптот: а) дві вертикальні асимптоти $x = \pm 1$ і похила асимптота функції $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$; б) горизонтальна асимптота $y = 0$ функції $y = e^{-0,1x} \cos(x)$

Зауваження 1. Функція може мати не більше двох похилих (горизонтальних) асимптот.

Зауваження 2. Якщо хоча б одна з двох згаданих вище границь не існує (або дорівнює ∞), то похилої асимптоти не існує.

Зауваження 3. Горизонтальна асимптота є окремим випадком похилої при $k = 0$

- Функція має або тільки одну похилу асимптоту, або одну вертикальну асимптоту, або одну похилу і одну вертикальну, або дві похилих, або дві вертикальних, або ж зовсім не має асимптот.

Екстремум функцій декількох змінних

Нехай функція декількох змінних $u = f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області і $M_0(x_{01}, x_{02},\dots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області.

Означення 1. Точка $M_0(x_{01}, x_{02},\dots, x_{0n})$ називається *точкою максимуму (мінімуму) функції* $u = f(x_1, x_2,\dots, x_n)$, якщо для всіх точок M з деякого околу точки M_0 виконується нерівність $f(M) < f(M_0)$ ($f(M) > f(M_0)$).

Максимуми і мінімуми об'єднують в поняття екстремум. Для функцій декількох змінних відрізняють *локальний* і *умовний екстремуми*. Слово локальний підкреслює, що мова йде про екстремумі функції в досить малому околу розглянутої точки.

Означення 2. Нехай функція декількох змінних $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області, Точка $M_0(x_{01}, x_{02},\dots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області і має місце рівняння зв'язку – $\varphi_i(x_1, x_2,\dots, x_n) = 0$, $i = 1, 2,\dots, m$. Точка $M_0(x_{01}, x_{02},\dots, x_{0n})$ називається *точкою умовного екстремуму* функції $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$ відносно рівнянь зв'язку, якщо вона є точкою звичайного екстремуму $f(x_1, x_2,\dots, x_n)$.

Необхідна умова екстремуму функції декількох змінних

Якщо функція задана і диференційована в області D та має екстремум в якій-небудь її точці $M_0(x_{01}, x_{02},\dots, x_{0n})$, то всі частинні похідні першого порядку даної функції в цій точці (якщо вони існують) дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, n \Leftrightarrow df(M_0) = 0$$

Наслідок. Необхідну умову екстремуму можна сформулювати в наступному вигляді: якщо в деякій точці функція має екстремум, то повний диференціал цієї функції, обчислений у зазначеній точці, дорівнює нулю.

Зауваження. Функція може мати екстремум і в тих точках, в яких принаймні одна з частинних похідних не існує.

Означення 3. Точка $M_0(x_{01}, x_{02},\ldots, x_{0n})$, в якій всі частинні похідні дорівнюють нулю, називається *стаціонарною точкою.*

Приклад 1. Функція $z = xy$ (гіперболічний параболоїд) має стаціонарну точку $M_0(0, 0, 0)$: $\frac{\partial z}{\partial x} = y = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = x = 0$.

Однак екстремуму в цій точці немає, оскільки в довільному околі точки M_0 функція $z = xy$ приймає як додатні, так і від'ємні значення, і значить, значення функції у цій точці не є ні найбільшим, ні найменшим значенням у жодному околі точки.

Геометричний зміст екстремуму функції двох змінних.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці M_0 і має в цій точці екстремум, то дотична площина до поверхні

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

в стаціонарній точці набирає такого вигляду: $z = z_0$. Це означає, що дотична площина паралельна площині хОу незалежних змінних x і y

Якщо M_0 є точка екстремуму, то дотична площина у деякому околі точки дотику не перетинає поверхню, а лежить над нею (у випадку максимуму), або під нею (у випадку мінімуму). Якщо ж стаціонарна точка M_0 не є точкою екстремуму, то дотична площина в околі точки дотику може перетинати поверхню.

Означення 4. Стаціонарні точки і точки, в яких функція недиференційовна називаються *критичними точками*

Зауваження. Достатня умова екстремуму функції застосовує термін визначник матриці Гессе та квадратична форма. Матриця, її визначник та квадратична форма детально розглядаються в алгебрі. Цей розділ математики нами не розглядається. Тому достатню умову екстремуму функцій буде дано в спрощеному вигляді.

Достатні умови існування екстремуму функції декількох змінних

Нехай функція $u = f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ визначена, неперервна має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в околі стаціонарної точки $M_0(x_{01}, x_{02},\ldots, x_{0n})$. Тоді, якщо квадратична форма

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=j-1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j$$

тобто другий диференціал функції f в точці M_0 являється:

- Додатною визначеною квадратичною формою, тобто більше 0 при будь яких значеннях змінних, то точка M_0 є точкою *строгого мінімуму*;
- Від'ємною визначеною квадратичною формою, тобто менше 0 при будь яких значеннях змінних, то точка M_0 є точкою *строгого максимуму*;
- Невизначеною квадратичною формою, то в точці M_0 *немає екстремуму*.

Для функції двох змінних цей критерій приймає наступний вигляд.

Достатня умова екстремуму функції двох змінних $z = f(x, y)$:

Нехай функція $z = f(x,y)$ визначена, неперервна і має неперервні частинні похідні до другого порядку включно в околі стаціонарної точки $M_0(x_0, y_0)$. Тоді, якщо:

- $$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = f''_{x^2}(M_0) f''_{y^2}(M_0) - \left(f''_{xy}(M_0)\right)^2 > 0 \text{ і } \quad \frac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} > 0,$$

  то точка M_0 є точкою *строгого мінімуму*
- $\Delta > 0$ і $\dfrac{\partial f^2(M_0)}{\partial x^2} < 0$, то точка M_0 є точкою *строгого максимуму*
- $\Delta < 0$, то точка M_0 *не являється екстремумом*.
- $\Delta = 0$, то питання про екстремум є невизначеним, треба проводити додаткові дослідження знаку $d^2 f(M_0)$.

Умовний екстремум функції декількох змінних відносно рівняння зв'язку

Нехай функція декількох змінних $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ визначена в деякій замкнутій області, точка $M_0(x_{01}, x_{02},\ldots, x_{0n})$ деяка внутрішня точка цієї області і має місце рівняння зв'язку – $\varphi_i(x_1, x_2,\ldots, x_n) = 0$, $i = 1, 2,\ldots, m$.

Принцип множників Лагранжа. Для знаходження локального екстремуму шукають локальний екстремум *функції Лагранжа*:

$$L(x_1, x_2,\ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2,\ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2,\ldots, x_n)$$

Умовний екстремум співпадає з локальним екстремумом функції Лагранжа.

Похибки непрямих вимірювань

У науковій літературі існує декілька близьких за значенням термінів – точність, похибка, помилка. У сучасній літературі використовують більше термін помилка (в англомовній літературі – *error*). Питанню точності або помилок приділяється дуже велика увага. Тут розглянуто лише невелика грань загальної проблеми. У більшості експериментів використовують непрямі вимірювання. Величину f (відгук), що досліджують, обчислюють за результатами прямих вимірювань інших фізичних величин (факторів), наприклад, x_1, x_2,…, x_n, з якими вона пов'язана заздалегідь встановленим функціональним математичним співвідношенням. Помилки прямих вимірювань Δx_i – вважаються відомими.

Існують чотири джерела помилок результату:

- Помилки математичної моделі, які пов'язані з її невідповідністю до реальності, так як абсолютна істина недосяжна. Якщо математична модель обрана недостатньо ретельно, то, які б методи ми не застосовували для розрахунку, всі результати будуть недостатньо надійними, а в деяких випадках і зовсім неправильними.
- Помилки вихідних даних, прийнятих для розрахунку. Це невиправна помилка, але цю помилку можливо і необхідно оцінити для вибору алгоритму розрахунку і точності обчислень. Як відомо, помилки експерименту умовно ділять на систематичні, випадкові і грубі, а ідентифікація таких помилок можлива при статистичному аналізу результатів експерименту.
- Помилки методу засновані на дискретному характері будь-якого чисельного алгоритму. Це значить, що замість точного розв'язку вихідної задачі метод знаходить рішення іншої задачі, близького в якомусь сенсі до шуканого. Помилки методу – основна характеристика будь-якого чисельного алгоритму. Помилка методу повинна бути в 2-5 разів менше похибки, яку неможна усунути.
- Помилка округлення пов'язана з використанням чисел з кінцевою точністю подання.

У всіх випадках математична точність розв'язання повинна бути в 2-4 рази вищою, ніж очікувана фізична точність моделі. Більш висока математична точність, як і нижча, будуть неадекватні даної моделі.

Означення.

Точність – ступінь наближення істинного значення параметра до його номінального значення.

Помилка – невідповідність між об'єктом, прийнятим за еталон, і об'єктом, що досліджується.

Похибка – оцінка відхилення виміряного (обчислюваного) значення параметра від її істинного значення. Похибка є характеристикою точності.

Виділяють *абсолютну і відносну похибку*.

Абсолютною похибкою наближеного значення x називається модуль різниці між числом x і його точним значенням a: $\Delta_0 = |x - a|$

Якщо число a невідоме, то абсолютну похибку обчислити не можна. В цьому випадку використовується ***гранична абсолютна похибка*** – таке додатне число Δ, що $x - \Delta \le a \le x + \Delta$. Останню нерівність записують так $a = x \pm \Delta$.

Відносною похибкою δ_0 наближеного значення x називається відношення абсолютної похибки Δ_0 цього значення до модуля точного значення a: $\delta_0 = \dfrac{\Delta_0}{|a|}$

Якщо точне значення, a невідоме, то використовують ***граничну відносну похибку*** – таке додатне число δ, що $\delta_0 \le \delta$.

Для обчислення відносних похибок часто використовуються наближені формули $\delta \approx \dfrac{\Delta}{|x|}$.

Непрямі вимірювання

Нехай функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ декількох змінних визначена в деякій замкнутій області і A внутрішня точка цієї області. Похибки прямих вимірювань кожної координати Δx_i цієї точки вважаються відомими.

Тоді, *гранична абсолютна похибка обчислюється* за формулою:

$$\Delta f(A) = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \right| \Delta x_i .$$

Використовуючи цю формулу можна отримати загальну формулу для *граничної відносної похибки*:

$$\delta(A) = \frac{\Delta f(A)}{f(A)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(A) \right| \Delta x_i}{f(A)} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln(f)}{\partial x_i}(A) \right| \Delta x .$$

Формула Тейлора

При розв’язуванні багатьох практичних і теоретичних задач використовують заміну або апроксимацію однієї функції іншою функцією, яка є близькою в певному розумінні до функції.

Апроксимація (лат. *approximare – наближати*) – наближене вираження одних математичних об'єктів іншими, простішими.

В цьому підрозділі розглядається апроксимація неперервних функцій степеневими многочленами. Слід зауважити, що існує багато інших методів апроксимації та інтерполяції функції, які буде розглянуто пізніше.

Диференціювання дозволяє наближено обчислювати значення функцій за допомогою полінома степеневих функцій, так звані формула Тейлора і частинний її випадок формула Маклорена. Формула Тейлора названа на честь англійського математика Брука Тейлора, хоча вона була відома задовго до публікацій Тейлора – його використовували ще в XVII столітті Грегорі, а також Ньютон.

Формула Тейлора використовується при доказі великого числа теорем в диференціальному обчисленні і показує поведінку функції в околі деякої точки.

Формула Тейлора функції однієї змінної

Нехай функція $f(x)$ диференційована $n+1$ раз в $(x_0 - R, x_0 + R)$ $(R > 0)$. Тоді для всіх $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$ має місце формула Тейлора:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + r_n(x),$$

де $r_n(x)$ – залишковий член та $i!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots i$ – факторіал.

Залишковий член визначає точність формули і записується різними способами. Можна запропонувати:

Форму Лагранжа $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x - \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ 0 < \theta < 1;$

Форму Коші $r_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(x - \theta(x - x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x - x_0)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$

Чим ближче x знаходиться до x_0 тим точніше виходить результат обчислення значення функції

В окремому випадку, коли $x_0 = 0$ отримуємо формулу Маклорена.

Формула Маклорена

Нехай функція $f(x)$ диференційована $n+1$ раз в $(-R, R)$ $(R > 0)$. Тоді для всіх $x \in (-R, R)$ має місце формула Маклорена:

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i+r_n(x).$$

Формула Маклорена для деяких функцій

- $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$
- $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ для всіх $|x|<1$.
- $\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$
- $\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$
- $\mathrm{tg}(x)=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{15}+\ldots$ для $|x|<\frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin(x)=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!\,x^{2n+1}}{4^n n!^2(2n+1)}$ для всіх $|x|<1$.
- $\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-\arcsin(x).$
- $\mathrm{arctg}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ для всіх $|x|<1$.
- $\mathrm{ch}(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$
- $\mathrm{sh}(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$
- $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$

  $+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^3$ для всіх $|x|<1$.
- $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!\,x^n}{(1-2n)n!^2 4^n}$ для всіх $|x|<1$.
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$ для всіх $|x|<1$.

Правило Бернуллі-Лопіталя

Правило Бернуллі-Лопіталя – метод знаходження границь функцій, що розкриває невизначеності виду 0/0 і ∞/∞ складається з двох теорем:

- Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$;
- Нехай $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ тоді $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Основні оператори диференціального числення

Векторний аналіз – розділ математики, що поширює методи математичного аналізу на вектори у двох або більше вимірах.

Об'єктами векторного аналізу є векторні та скалярні поля.

Векторні поля – це відображення, яке кожній точці розглянутого простору ставить у відповідність вектор на початку в цій точці. Тобто векторне поле відображає однин векторний простір в інший або векторне поле є векторна функція на векторному просторі $\mathbf{F}(\mathbf{X})=\mathbf{F}(x_{e_1},x_{e_2},...,x_{e_3})$.

Скалярні поля – це відображення, яке кожній точці багатомірного простору ставить у відповідність деяке число (скаляр). Тобто скалярне поле відображає векторний простір у скалярний простір або поле і є скалярною функцією n-вимірного простору $u(\mathbf{X})=u(x_{e_1},x_{e_2},...,x_{e_3})$.

Найбільше застосування векторний аналіз знаходить у фізиці та інженерії. У векторному аналізі широко застосовують деякі нові величини такі як потік, циркуляція і *оператори*, зокрема оператор Гамільтона (набла), Лапласа, Д’аламбера та інші. Термін оператор зустрічається в різних розділах математики, його точне значення залежить від розділу. В даному випадку під оператором слід вважати відображення, що ставить у відповідність функції іншу функцію («оператор на просторі функцій» звучить краще, ніж «функція від функції»).

Оператор Гамільтона (оператор набла)

Векторний диференційний оператор, компоненти якого є частинними похідними по координатах називається *оператором набла* або оператором Гамільтона. Оператор набла позначається символом ∇.

Для тривимірного евклідового простору в прямокутній декартовій системі координат оператор набла визначається наступним чином:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

Градієнт скалярної функції

Градієнт – вектор, який своїм напрямком вказує напрямок найшвидшого зростання деякої величини *u*, значення якої змінюється від однієї точки простору до іншої (скалярного поля), а по величині (модулю) рівний швидкості росту цієї величини в цьому напрямку.

Наприклад, якщо взяти в якості *u* висоту поверхні землі над рівнем моря, то її градієнт в кожній точці поверхні показуватиме «напрямок самого крутого підйому», і своєю величиною характеризувати крутизну схилу.

З математичної точки зору градієнт – це похідна скалярної функції, визначеної на векторному просторі. Простір, на якому визначена функція та її градієнт, може бути як звичайним тривимірним простором, так і простором будь-який інший розмірності деякої фізичної природи або чисто абстрактним. Термін вперше з'явився в метеорології, а в математику був введений Максвеллом в 1873 р. Позначається $grad(u)$ або через оператор набла ∇u.

Градієнт функції $u(x, y, z)$ декартової системи координат є

$$\nabla u(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Дивергенція векторної функції

Дивергенція – це лінійний диференційний оператор на векторному полі, що характеризує потік даного поля через поверхню нескінченно малого околу кожної внутрішньої точки області визначення поля (оператор дивергенції, застосований до поля ***F***, позначають як $div\boldsymbol{F}$ або $(\nabla \cdot \boldsymbol{F})$:

В декартовій системі координат дивергенція векторного поля буде визначатися скалярним добутком оператора набла і вектора ***F***:

В 3-мірному просторі $\mathbf{F}\big(F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_y(x, y, z)\big)$:

$$(\nabla \cdot \mathbf{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Ротор векторної функції

Ротор, або вихор – векторний диференційний оператор над векторним полем. Позначається $rot\mathbf{F}$ або $curl\mathbf{F}$ (в англомовній літературі), або через векторний добуток оператора набла $[\nabla \times \mathbf{F}]$.

Ротор векторного поля – є вектор, проекція якого на кожний напрям ***n*** є границя відношення циркуляції векторного поля по контуру *L*, що є краєм плоскої площини ΔS, перпендикулярній цьому напряму, до величини цієї площини, коли розмір площини нескінченно малий і сама площина стягується в точку.

У тривимірній декартовій системі координат ротор обчислюється таким чином:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k} .$$

Оператор Лапласа

Оператор Лапласа – диференціальний оператор, який діє в лінійному просторі гладких функцій $u(\boldsymbol{X})$, який ставить у відповідність функцію $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

Позначається, як Δ або ∇^2, так як $\Delta = \nabla \cdot \nabla$.

Оператор Лапласа еквівалентний послідовним операціям градієнта і дивергенції: $\Delta = div\, grad$. Тобто значення оператора Лапласа в точці може бути роз'яснено як щільність джерел (стоків) потенційного векторного поля $\boldsymbol{F}$ в цій точці. В декартовій системі координат оператор Лапласа є $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

Властивості операторів диференціального числення

1. $\nabla(\alpha u + \beta v) = \alpha \nabla u + \beta \nabla v$
2. $\nabla \cdot (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \cdot \mathbf{F} + \beta \nabla \cdot \mathbf{G}$
3. $\nabla \times (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) = \alpha \nabla \times \mathbf{F} + \beta \nabla \times \mathbf{G}$
4. $\nabla \times (u\mathbf{F}) = \nabla u \times \mathbf{F} + u \nabla \times \mathbf{F}$
5. $\nabla \cdot (u\mathbf{F}) = \nabla u \cdot \mathbf{F} + u \nabla \cdot \mathbf{F}$
6. $\nabla \cdot [\mathbf{F} \times \mathbf{G}] = [\nabla \times \mathbf{F}] \cdot \mathbf{G} - \mathbf{F} \cdot [\nabla \times \mathbf{G}]$
7. $\nabla \times [\nabla \times \mathbf{F}] = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \Delta \mathbf{F}$
8. $\nabla \cdot [\nabla \times \mathbf{F}] = 0$, тобто $div\, rot\, \mathbf{F} = 0$
9. $\nabla \cdot \nabla u = \Delta u$, тобто $div\, grad\, u = \Delta u$
10. $[\nabla \times \nabla u] = 0$, тобто $rot\, grad\, u = 0$

Приклади на застосування диференціального числення

Задача 1

Дослідити функцію $y = 2x^4 - x^2 + 1$ на екстремум і точки перегину.

<u>*Розв'язання*</u>

Для того, щоб дослідити функцію на екстремум прирівняємо першу похідну до нуля: $y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1) = 0$.

Отримаємо такі корені рівняння: $x_1 = 0$ и $x_{2,3} = \pm\frac{1}{2}$.

Точок, в яких y' не існує, немає.

Перша похідна $y' < 0$ на $(-\infty;\ 0)$ і $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Відповідно $y' > 0$ на проміжках $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ і $\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Тому $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{8}\right)$ і $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{8}\right)$ – точки мінімуму, а $(0;\ 1)$ – точка максимуму.

Знайдемо y'': $y'' = 24x^2 - 2 = 2(12x^2 - 1)$.

Точки перегину функції: $2(12x^2 - 1) = 0$.

Отримаємо: $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}$. В цих точках друга похідна змінює свій знак. В інтервалах $\left(-\infty;-\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ та $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};+\infty\right)$ $y'' > 0$, а в $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ $y'' < 0$. Тому вони являються точками перегину.

Таким чином, точки $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72}\right)$ і $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72}\right)$ – точки перегину кривої.

Відповідь: $\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{8}\right)$ і $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{8}\right)$ – точки мінімуму; $(0;\ 1)$ – точка максимуму; $\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72}\right)$ і $\left(\frac{1}{2\sqrt{3}};\frac{67}{72}\right)$ – точки перегину кривої.

Задача 2

Знайти екстремум функції двох змінних: $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$.

<u>*Розв'язання*</u>

Знайдемо частинні похідні від заданої функції:

$z'_x = 2x + 2y - 4$;

$z'_y = 2x + 8$.

Розглянемо систему рівнянь: $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x = -8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 6 \end{cases}$.

Таким чином, стаціонарною точкою буде точка з координатами $x = -4$ та $y = 6$. Щоб з'ясувати чи буде стаціонарна точка екстремумом перевіремо достатню умову екстремуму. Для цього спочатку знайдемо похідні другого порядку в стаціонарній точці:

$z''_{xx} = 2$; $z''_{yy} = 0$; $z''_{xy} = 2$.

Обчислимо визначник Гессе: $\Delta = z''_{xx} z''_{yy} - \left(z''_{xy}\right)^2 = 2 \cdot 0 - 2^2 = -4 < 0$.

Так як $\Delta < 0$, то стаціонарна точка не являється екстремумом. Отже функція $z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ немає екстремумів.

Відповідь: Функція z немає екстремумів.

Задача 3

Дослідити на екстремум функцію $z = xy - x^2 - 2y^2 + x + 10y - 8$.

Розв'язання

Знайдемо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - 2x + 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - 4y + 10.$$

Прирівняємо частинні похідні до нуля і складемо систему:

$$\begin{cases} y - 2x + 1 = 0 \\ x - 4y + 10 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x + y = -1 \\ x - 4y = -10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$z''_{xx} = -2$; $z''_{xy} = 1$; $z''_{yy} = -4$.

Як бачимо, частинні похідні другого порядку дорівнюють сталим числам у будь-який точці.

Тому $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$ і $z''_{xx} = -2 < 0$ (умова максимуму).

Обчислимо значення функції: $z(2;3) = 2 \cdot 3 - 2^2 - 2 \cdot 3^2 + 2 + 10 \cdot 3 - 8 = 8$.

Відповідь: Таким чином, в точці $M(2;\,3;\,8)$ функція z має максимум.

Задача 4

Знайти асимптоти кривої, що задана рівнянням $y = \dfrac{2x}{x-1}$.

Розв'язання

Знайдемо похили та горизонтальні асимптоти $y_a = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x(x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{(x-1)} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{(x-1)} = 2.$$

Таким чином, що крива має горизонтальну асимптоту $y_a = 2$.

Щоб знайти вертикальну асимптоту, обчислимо границю в точці, в якої знаменник функції дорівнює 0, тобто при $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x}{(x-1)} = \infty.$$

Границя функції в точці прямує до нескінченності. Точка $x = 1$ є точкою нескінченного розриву. Таким чином, $x = 1$ – вертикальна асимптота.

Відповідь: функція має дві асимптоти, а саме $x_a = 1$ − вертикальна асимптота та $y_a = 2$ − горизонтальна асимптота.

Задача 5

Використовуючи правило Лопіталя, знайти: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$.

Розв'язання

Чисельник і знаменник функції при $x = 2$ дорівнюють 0. Тобто маємо невизначеність 0/0, для якої можна використовувати правило Лопіталя.

$$\lim_{x\to 2} \frac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = \lim_{x\to 2} \frac{(8-2x^2)'}{(x^2+4x-12)'} = \lim_{x\to 2} \frac{-4x}{2x+4} = \frac{-4\cdot 2}{2\cdot 2+4} = \frac{-8}{8} = -1.$$

Відповідь: $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = -1$.

Задача 6

Найти максимальну абсолютну і відносну похибки роботи, яка здійснюються струмом силою $I = 10{,}23 \pm 0{,}015$ *А, який протікає через опір* $r = =11{,}68 \pm 0{,}01$ *Ом за час* $t = 405{,}2 \pm 0{,}1$ *с. Робота визначається, як* $A = I^2 \cdot r \cdot t$.

Розв'язання

Відповідно, максимальна абсолютна похибка:

$$\Delta A = \left|\frac{\partial A}{\partial I}\right|\Delta I + \left|\frac{\partial A}{\partial r}\right|\Delta r + \left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\Delta t = 2Irt\Delta I + I^2 t\Delta r + I^2 r\Delta t$$

$$\Delta A = 2\cdot 10{,}23\cdot 11{,}68\cdot 405{,}2\cdot 0{,}015 + 10{,}23^2\cdot 405{,}2\cdot 0{,}01 + 10{,}23^2\cdot 11{,}68\cdot 0{,}1 = 199{,}8 \text{ Дж}$$

Максимальна відносна похибка: $\varepsilon = \frac{\Delta A}{A} = 2\frac{\Delta I}{I} + \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta t}{t}$

$$\varepsilon = 2\frac{0{,}015}{10{,}23} + \frac{0{,}01}{11{,}68} + \frac{0{,}1}{405{,}2} = 0{,}0041$$

Відповідь: ΔA = 199,8 Дж – максимальна абсолютна похибка; $\varepsilon = 0{,}4\%$ – максимальна відносна похибка.

Задача 7

За допомогою формули Тейлора обчислити експоненту з точністю до 0,001.

<u>*Розв'язання*</u>

Щоб знайти експоненту треба обчислити функцію

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \text{ при } x = 1.$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \ldots \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} =$$

$$= 2 + \frac{360 + 120 + 30 + 6}{720} + \frac{1}{720} = 2 + \frac{517}{720} = 2 + 0{,}7166\ldots + 0{,}01388\ldots = 2{,}718055\ldots$$

Знайдемо залишковий член за формою Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},\ 0 < \theta < 1$$

Нехай $\theta = 0{,}5$. Необхідно обчислити R при $n = 6$, $x = 1$ і $x_0 = 0$.

$$R_6(1) = \frac{f^{(7)}(1{,}5)}{7!} = \frac{e^{1{,}5}}{5040} = 8{,}89\cdot 10^{-4} < 0{,}001.$$

Відповідь: Таким чином, $e \approx 2{,}718$. Це значення можна порівняти з більш точним значенням $e \approx 2{,}7182818284590452$

Задача 8

Обчислити $\ln(0{,}9)$ *використав три перших додатка формули Тейлора.*

<u>*Розв'язання*</u>

$$\ln(0{,}9) = \ln(1 - 0{,}1);$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n};$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};$$

$$\ln(0{,}9) = \ln(1-0{,}1) = -10^{-1} - \frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-3}}{3} - ... \approx -0{,}1053(3).$$

Відповідь: $\ln(0{,}9) \approx -0{,}1053(3)$. Це значення можна порівняти з більш точним значенням $\ln(0{,}9) \approx -0{,}1053605156$.

Задачі на застосування диференціального числення

Визначити: а) екстремум; б) точки перегину.

1.157. $y = 2 + x - x^2$.

1.158. $y = \frac{e^x}{x}$.

1.159. $y = xe^x$.

1.160. $y = (x-2)\frac{8-x}{x^2}$.

1.161. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

1.162. $y = 16\frac{4-x^2}{x}$.

Визначити екстремум функції двох змінних.

1.163. $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$.

1.164. $z = 2xy - 4x - 2y$.

1.165. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

1.166. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

1.167. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$.

Знайти асимптоти.

1.168. $y = \frac{x}{x^2-1}$.

1.169. $y = \frac{x^2+2x-1}{x}$.

1.170. $y = \frac{8x}{9-x^2}$.

1.171. $y = \frac{x^2-2x+3}{x+2}$.

Обчислити границі функцій з допомогою правила Лопіталя.

1.172. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctgx}$.

1.173. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}$.

1.174. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-7^x}{x}$.

1.175. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctgx}{x^3}$.

1.176.. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{\sin x}$

Найти максимальну абсолютну і відносну похибку.

1.177. $z=\sqrt{x+y^2}$, при $x=2\pm 0{,}01$; $y=5\pm 0{,}01$.

1.178. $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, при $x=3\pm 0{,}01$; $y=4\pm 0{,}02$.

1.179. $z=e^{xy}$, при $x=1\pm 0{,}05$; $y=1\pm 0{,}01$.

1.180. $z=\frac{x+3y}{y-3x}$, при $x=2\pm 0{,}05$; $y=4\pm 0{,}05$.

1.181. $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$, при $x=2\pm 0{,}01$; $y=1\pm 0{,}03$.

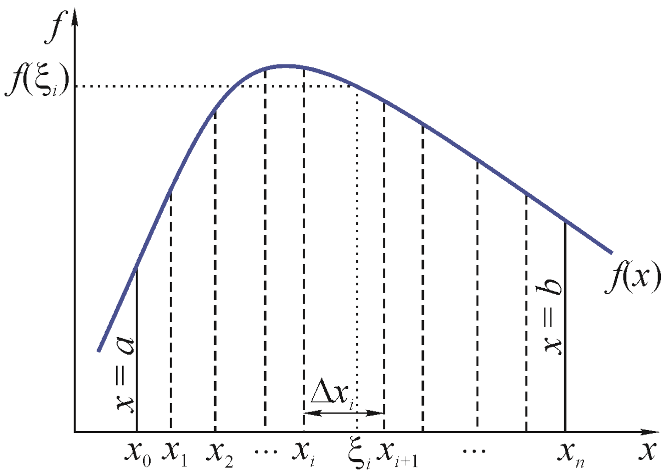
Контрольні питання

1. Які точки називаються екстремальними?
2. Про що свідчать необхідна і достатня умови існування екстремуму функції однієї змінної?
3. Які точки називаються точками перегину функції? Яким чином їх знаходять?
4. Які точки називаються точками екстремуму функції двох змінних? Яким чином їх можна визначити?
5. Назвіть необхідну та достатню умови існування екстремуму функції двох змінних?
6. Що називається асимптотою кривої? Які види асимптот Ви знаєте? Опишіть способи їх знаходження.
7. Які точки називаються точками розриву функції? Як їх розпізнати?
8. Дайте характеристику правилу Лопіталя.
9. Що називається похибкою? Які види похибок Ви знаєте?
10. Яка похибка називається абсолютною, а яка відносною?
11. Яким чином можна обчислити максимальну абсолютну і відносну похибки?

Тема 2. Інтегральне числення

2.1. Визначений інтеграл

Ріман формалізував поняття інтеграла, розроблене Ньютоном і Лейбніцем, як площі криволінійної трапеції (фігури, укладеної між графіком функції і віссю абсцис). Для цього він розбив криволінійну трапецію на безліч вертикальних прямокутників. Висота i-го прямокутника дорівнює значенню функції в будь-якій точці взятої всередині цього прямокутника.



Нехай на відрізку $[a, b]$ визначена функція $f(x)$. Розглянемо розбиття відрізка $[a, b]$ на безліччю точок. Це розбиття ділить інтервал $[a, b]$ на n елементарних відрізків. Довжина найбільшого з відрізків, називається кроком розбиття $\delta x = \max(\Delta x_i)$, де $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ – довжина елементарного відрізка.

Відзначимо на кожному відрізку розбиття по точці $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. Інтегральною сумою називається вираз $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Зрозуміло, що площа криволінійної трапеції $S \approx \sigma$

Означення визначеного інтеграла

Якщо при прямуванні кроку розбиття до нуля інтегральна сума прямує до одного і того ж числа, незалежно від вибору $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, то це число називається інтегралом функції на відрізку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Властивості визначеного інтеграла

1. Невирожденність $\int_a^b dx = b - a$

2. Додатність. Якщо інтегрована функція $f(x)$ не від’ємна, то її інтеграл на відрізку $[a, b]$ також не є від’ємним.

3. Лінійність. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є інтегрованими, то функція $\alpha f(x)$ + $\beta g(x)$ теж є інтегрована, і $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$.

4. $\int_a^a f(x)dx = 0$

5. Адитивність при розбитті відрізка. Нехай $a < c < b$. Функція $f(x)$ інтегрована на відрізку $[a, b]$, тоді і тільки тоді, коли вона інтегрована на кожному з відрізків $[a, c]$ і $[c, b]$, при цьому $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

6. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

7. Обчислення. Формула Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, де $F'(x) = f(x)$, $F'(x)$ – первісна функції $f(x)$

8. Середнє значення функції

Середнє значення функції – це деяке число, що знаходеться між найменшим і найбільшим її значеннями. У диференціальному і інтегральному численні є ряд «теорем про середню», що встановлюють існування таких точок, в яких функція або її похідна отримує те чи інше середнє значення.

Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то існує точка c із інтервалу $[a, b]$ така, що $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$

Внаслідок цього під середнім значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ зазвичай розуміють величину:

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

2.2. Невизначений інтеграл

З попереднього підрозділу слід, що знаходження визначеного інтегралу, залишається відкритим. Теорія визначеного інтеграла вказує, що по виду підінтегральній функції можна визначити чи буде кінцева площа криволінійної трапеції чи ні. Але не дає простого методу її знаходження. Використовувати означення визначеного інтеграла, тобто через границю інтегральної суми – задача складна, але вирішується за допомогою комп'ютера. Аналітично обчислити інтеграл вдається в деяких окремих випадках, коли підінтегральна функція має первісну. Тоді визначений інтеграл можна знайти за допомогою формули Ньютона-Лейбніца, в якій присутня первісна. Отже, виникає додаткова задача пошуку первісних функцій. С іншого боку задача розв'язання диференціальних рівнянь в аналітичному вигляді теж потребує пошук первісних функцій. Зважаючи на важливість цих задач, набір первісних функцій, що відрізняються сталим додатком отримало назву невизначеного інтеграла.

Означення невизначеного інтеграла

Нехай на відрізці $[a, b]$ визначена неперервна функція $f(x)$ і $F'(x) = f(x)$ ($F(x)$ – первісна функції $f(x)$), тоді ***невизначений інтеграл*** від функції $f(x)$ – набір первісних, що відрізняються сталою:

$\int f(x)dx = F(x) + c$, де $c - const$ (стала).

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$

2. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

3. $\int df(x) = f(x) + c$

4. $d\int f(x)dx = f(x)dx$

5. Нехай $\int f(x)dx = F(x) + c$ і $\varphi(x)$ має неперервну похідну.

Тоді $\int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + c$,

тобто $\int f(x)dx = \{x = \varphi(t); dx = \varphi'(t)dt\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

6. Інтегрування за частинами $\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$

Невизначені інтеграли деяких функцій

1. $\int 0dx = c$

2. $\int dx = x + c$

3. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$

4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(x) + c$

5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c,\ \int e^x dx = e^x + c$

6. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

7. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

8. $\int \cos^{-2}(x)dx = \mathrm{tg}(x) + c$

9. $\int \sin^{-2}(x)dx = -\mathrm{ctg}(x) + c$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$ або $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos(x) + c$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}(x) + c$ або $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\mathrm{arcctg}(x) + c$

12. $\int \mathrm{sh}(x)dx = \mathrm{ch}(x) + c$

13. $\int \mathrm{ch}(x)dx = \mathrm{sh}(x) + c$

14. $\int \sqrt{x^2+a}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{x^2+a}+x\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a}$

Методи інтегрування

1. *Безпосереднє інтегрування*. За допомогою тотожних перетворень підінтегральної функції необхідно отримати такий вираз, коли первісна відгадується (дивись список інтегралів)

2. *Метод підстановки* або метод інтегрування заміною змінної (аргументу). Використовується властивість інтеграла

$$\int f(x)dx = \{x = \varphi(t); dx = \varphi'(t)dt\} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

3. І*нтегрування по частинам*. Використовується формула

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$$

2.3. Невласний інтеграл

Невласний інтеграл є розширенням поняття інтеграла Рімана. При введенні поняття визначеного інтегралу Рімана, як границі інтегральної суми припускалось, що виконуються такі умови:

- Границі інтегрування *a* та *b* є скінченими;
- Підінтегральна функція *f*(*x*) на $x \in [a;b]$ неперервна або має кінцеве число точок розриву першого роду.

В цьому випадку визначений інтеграл називається *власним*. Якщо хоч одна з перерахованих вище умов не виконується, то такі інтеграли називаються *невласними*. Невласні інтеграли є узагальненням визначених інтегралів на випадок нескінчених проміжків інтегрування та необмежених функцій.

Невласний інтеграл першого роду

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна в області інтегрування. *Невласним інтегралом першого роду* називається визначний інтеграл функції $f(x)$, коли хоча б одна з границь інтегрування прямує до нескінченності:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \text{ або } \int_{-\infty}^{b} f(x)dx, \text{ або } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

При чому, якщо існує кінцева границя інтегралу із змінною границею інтегрування, яка прямує до нескінченності, наприклад

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^{t} f(x)dx,$$

то інтеграл називають *збіжним*, а саму функцію $f(x)$ інтегрованою на проміжку $[a; +\infty)$. Якщо границя не існує або прямує до нескінченності, то інтеграл називають *розбіжним*. Аналогічно для інтегралів $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду

*Теорема 1 (ознака порівняння)***.** Якщо на проміжку $[a; +\infty)$ визначені дві функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a; t]$, причому виконується нерівність $0 \le f(x) \le g(x)$ для будь яких $x \ge a$, тоді із збіжності невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ випливає збіжність невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$, а з розбіжності невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність невласного інтегралу $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 2 (гранична ознака порівняння). Якщо на проміжку $(a; +\infty]$ визначені дві функції $f(x)$ та $g(x)$, які інтегровані на кожному скінченому відрізку $[a; t]$ і існує кінцева границя $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то невласні інтеграли $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ та $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ на проміжку $[a;\ +\infty)$ змінює знак і невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ збігається, то невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ також збігається. В цьому випадку невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ називають *абсолютно збіжним*.

Теорема 4. Якщо невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ збігається, то збігатися буде невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}cf(x)dx$, де c – стала.

Теорема 5. Якщо невласні інтеграли $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ і $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ збігаються, то збігатися буде невласний інтеграл $\int_a^{+\infty}\left(f(x)+g(x)\right)dx$.

Зауваження. Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів першого роду $\int_{-\infty}^{b}f(x)dx$ і $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx$.

Невласний інтеграл другого роду

Нехай функція $f(x)$ визначена і неперервна при $a \le x < b$, а в точці b вона або невизначена, або має розрив другого роду. Тому говорити про інтеграл як про границю інтегральної суми неможна, тому що функція $f(x)$ не є неперервною на відрізку $[a;\ b]$ і, внаслідок цього, границя інтегральної суми, в класичному розумінні, не може існувати. Теж саме можна говорить у випадку, коли функція невизначена або має розрив другого роду в точці a або точках a і b, або в деякій точці c із проміжку $[a;\ b]$.

Означення. Нехай функція $f(x)$ неперервна в області інтегрування $[a;\ b]$ за винятком будь якої точки c із цього проміжку. Тоді інтеграл $\int_a^{b}f(x)dx$ називається *невласним інтегралом другого роду*.

При цьому $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$. Тоді якщо існує кінцева границя $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$ або сума відповідних лівосторонніх і правосторонніх границь $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{t\to c-0}\int\limits_a^t f(x)dx + \lim\limits_{t\to c+0}\int\limits_t^b f(x)dx$, то невласний інтеграл другого роду називають *збіжним*, а саму функцію $f(x)$ *інтегрованою* на відрізку $[a; b]$. Якщо ця границя є нескінченно великою або зовсім не існує, то інтеграл називають *розбіжним*.

Зауваження. Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на відрізку $[a; b]$ за виключенням скінченого числа точок α_1, α_2, …, α_n, які є внутрішніми точками відрізка і в цих точках має розриви другого роду, то інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ визначають так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{\alpha_1} f(x)dx + \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x)dx + \int\limits_{\alpha_2}^{\alpha_3} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{\alpha_{n-1}}^{\alpha_n} f(x)dx + \int\limits_{\alpha_n}^b f(x)dx,$$

якщо кожен з невласних інтегралів в правій частині рівності цього виразу збігається, то і сам інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ збігається.

Якщо хоча б один з інтегралів в правій частині рівності розбігається, то і $\int\limits_a^b f(x)dx$ *розбігається.*

Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду

Для визначення збіжності невласних інтегралів від функцій, які мають розриви другого роду, використовують теореми аналогічні теоремам для визначення збіжності невласних інтегралів першого роду.

Теорема 1. Якщо на відрізку $[a; b]$ функції $f(x)$ та $g(x)$ в точці b мають розрив другого роду, причому в усіх точках цього відрізка виконуються нерівності $0 \le f(x) \le g(x)$ і $\int\limits_a^b g(x)dx$ збігається, то і $\int\limits_a^b f(x)dx$ також збігається. Якщо $\int\limits_a^b f(x)dx$ розбігається, то $\int\limits_a^b g(x)dx$ також розбігається.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)$ на відрізку $[a;\, b]$ є знакозмінною, має розрив другого роду в точці b і невласний інтеграл другого роду від модуля цієї функції $\int_a^b |f(x)|dx$ збігається, то збігається також невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$. Причому цей інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним.*

Зауваження. Було розглянути теореми для випадку, коли функція має розрив другого роду у верхній границі інтегрування. Слід відзначити, що аналогічні теореми мають місце і для невласних інтегралів другого роду від функції з точкою розриву, яка співпадає з нижньою границею інтегрування або точка розриву находиться між нижньою і верхньою границями інтегрування.

2.4. Інтегрування деяких видів функцій

Функції з квадратним многочленом в знаменнику

Частинні випадки:

1) $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c$; 2) $\int \frac{dx}{x^2+1} = arctg(x) + c$; 3) $\int \frac{dx}{x^2-1} = \ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + c$.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{b_1}{(x-1)} + \frac{b_2}{(x+1)} = \frac{b_1(x+1)+b_2(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{(b_1+b_2)x+b_1-b_2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\begin{cases} b_1+b_2=0 \\ b_1-b_2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} b_2=-1/2 \\ b_1=1/2 \end{cases}$$

4) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$; 5) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \ln \sqrt[2a]{\frac{x-a}{x+a}} + c$

$$\frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{b_1}{(x-a)} + \frac{b_2}{(x+a)} = \frac{b_1(x+a)+b_2(x-a)}{(x-a)(x+a)} = \frac{(b_1+b_2)x+(b_1-b_2)a}{(x-a)(x+a)}$$

$$\begin{cases} b_1+b_2=0 \\ b_1-b_2=1/a \end{cases} \quad \begin{cases} b_2=-1/2a \\ b_1=1/2a \end{cases}$$

Загальний випадок: $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$

1. Квадратний трьохчлен має два дійсних кореня при $\frac{p^2}{4} - q > 0$.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$\frac{1}{x^2 + px + q} = \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{a}{(x - x_1)} + \frac{b}{(x - x_2)} =$$

$$= \frac{a(x - x_2) + b(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{(a + b)x - x_2 a - x_1 b}{(x - x_1)(x - x_2)}$$

Сталі коефіцієнти знаходяться із розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -x_2 a - x_1 b = 1 \end{cases};$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -x_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x_1 - x_2};$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -x_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -x_2 & -x_1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{x_2 - x_1}$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_1)(x - x_2)} = a\int \frac{dx}{(x - x_1)} + b\int \frac{dx}{(x - x_2)} =$$

$$= a\ln\left(x - x_1\right) + b\ln\left(x - x_2\right) + c = \ln\left(\left(x - x_1\right)^a \left(x - x_2\right)^b\right) + c$$

2. Квадратний трьохчлен має один дійсний корінь при $\frac{p^2}{4} - q = 0$

$$x_0 = -\frac{p}{2}$$

Тобто $\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_0)^2} = -\frac{1}{x - x_0} + c = -\frac{1}{x + \frac{p}{2}} + c$

3. Квадратний трьохчлен має комплексно спряжені коріння при $\frac{p^2}{4} - q < 0$

В цьому випадку квадратний трьохчлен перетворюємо наступним чином.

$$x^2 + px + q = \left(x^2 + 2\frac{p}{2}x + \frac{p^2}{4}\right) + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) =$$

$$= (x - x_0)^2 + a^2$$

Таким чином,

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \int \frac{dx}{(x - x_0)^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg\left(\frac{x - x_0}{a}\right) + c$$

Раціональні функції

Раціональна функція – це функція вигляду $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ – поліноми, відповідно n і m степені.

Для інтегрування таких функцій рекомендується наступна послідовність.

1. ***Перетворення неправильної раціональної дробі***

Якщо дріб неправильна (ступінь чисельника $P_n(x)$ неменше ступеня знаменника $Q_m(x)$ тобто $n \geq m$), то виділяють цілу частину дробі:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = F_{n-m}(x) + \frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$$

де $\frac{R_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$ – правильна раціональна дріб.

2. ***Розклад знаменника***

Розкласти знаменник $Q(x)$ на множення одночленів та (або) нескоротних квадратичних виразів:

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\mu} \cdots (x^2 + rx + s)^{\nu}$$

де квадратичні функції є нескоротними, тобто не мають дійсних коренів, показник степені є ступень вродженості коренів.

3. ***Розклад раціональної дроби на суму простіших дробів.***

Запишемо раціональну функцію в наступному вигляді:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_{\alpha}}{(x-a)^{\alpha}} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{B_{\beta}}{(x-b)^{\beta}} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{(x-b)} +$$

$$+\frac{K_\mu x+L_\mu}{(x^2+px+q)^\mu}+\frac{K_{\mu-1}x+L_{\mu-1}}{(x^2+px+q)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{K_1x+L_1}{(x^2+px+q)}+$$
$$+\frac{M_\nu x+N_\nu}{(x^2+px+q)^\nu}+\frac{M_{\nu-1}x+N_{\nu-1}}{(x^2+px+q)^{\nu-1}}+\cdots+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)}$$

Загальне число невизначених коефіцієнтів A_i , B_i , K_i , L_i , M_i , N_i , ... має дорівнювати ступеня знаменника $Q(x)$. Потім помножимо обидві частини отриманого рівняння на знаменник $Q(x)$ і прирівняємо коефіцієнти при доданків з однаковими ступенями x. У результаті ми отримаємо систему лінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів A_i , B_i , K_i , L_i , M_i , N_i, ... Дана система завжди має єдине рішення. Описаний алгоритм являє собою метод *невизначених коефіцієнтів*.

4. ***Інтегрування найпростіших раціональних дробів.***

Найпростіші дроби, отримані при розкладанні довільній правильної раціональної дробі, інтегруються за допомогою наступних шести формул.

1. $\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+c$

2. $\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+c$

У дробі з квадратичним знаменником спочатку необхідно виділити повний квадрат:

$$\int\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx=\int\frac{At+B'}{\left(t^2+s^2\right)^k}dx$$

де $t=x+\frac{p}{2}$ $B'=B-A\frac{p}{2}$

Затим використовуються наступні формули.

3. $\int\frac{tdt}{t^2+s^2}=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+s^2\right|+c$

4. $\int\frac{tdt}{\left(t^2+s^2\right)^k}=\frac{1}{2(1-k)\left(t^2+s^2\right)^{k-1}}+c$

5. $\int\frac{dt}{t^2+s^2}=\frac{1}{s}arctg\left(\frac{t}{s}\right)+c$

6. $\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^k}$ може бути знайдено за k шагів за допомогою формули редукції:

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^k} = \frac{t}{2s^2(k-1)\left(t^2+s^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2s^2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+s^2\right)^{k-1}}$$

Таким чином, в загальному вигляді маємо

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = A\int \frac{xdx}{x^2+px+q} + B\int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+px+q} = \int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx = \int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dx -$$

$$-\frac{p}{2}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right| - \frac{p}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}\right)+c$$

$$\int \frac{xdx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = \int \frac{x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dx =$$

$$= \int \frac{x+\frac{p}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dx - \frac{p}{2}\int \frac{dx}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k} =$$

$$= \frac{1}{2(1-k)\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^{k-1}} - \frac{p}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}arctg\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}}\right)+c$$

Ірраціональні функції

Нехай $R(x, y)$ раціональна функція своїх аргументів x та y. Тобто над x та y здійснюються тільки арифметичні операції.

1. $\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де a, b, c, d – сталі числа, m – натурально число, $ad - bc \neq 0$, $R(x, y)$ – раціональна функція.

Функцію $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ називають дрібно лінійною ірраціональністю.

Заміна $t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ приводить до раціоналізації функції:

$$x = \frac{b - d\cdot t^m}{ct^m - a};\ dx = \frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2}dt$$

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{b - d\cdot t^m}{ct^m - a}, t\right)\frac{mt^{m-1}(ad - bc)}{(ct^m - a)^2}dt = \int R(t)dt$$

Приклад:

$$\int \frac{1}{(x-1)^2}\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \left\{t^3 = \frac{x+1}{x-1}; x = \frac{t^3+1}{t^3-1}; dx = -\frac{6t^2}{(t^3-1)^2}dt\right\} =$$

$$-\frac{6}{4}\int (t^3-1)^2\frac{t^2}{(t^3-1)^2}tdt = -\frac{3}{2}\int t^3 dt = -\frac{3}{2}\frac{t^4}{4} + c = -\frac{3}{8}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{4/3} + c$$

Приклад:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x^3}} = \left\{\begin{array}{l} t = \sqrt[6]{x};\ x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt \end{array}\right\} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^2 + t^3} =$$

$$6\int (t^2 - t + 1)dt - 6\int \frac{dt}{1+t} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|1+t| + c =$$

$$= 2\sqrt[6]{x}^3 - 3\sqrt[6]{x}^2 + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|1 + \sqrt[6]{x}\right| + c$$

2. $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$, де a, b, c – сталі числа.

2.1. Якщо $ax^2 + bx + c$ має два дійсних кореня x_1 і x_2, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ і

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,(x-x_1)\sqrt{a\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right)=R_1\left(x,\sqrt{\frac{x-x_2}{x-x_1}}\right).$$

Таким чином, задача зводиться до попередньої.

2.2. Якщо ax^2+bx+c має один дійсний корінь x_1, то $ax^2+bx+c=a(x-x_1)^2$ і

$$R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)=R\left(x,\sqrt{a}(x-x_1)\right).$$

Тобто отримуємо раціональну функцію

2.3. Якщо ax^2+bx+c не має дійсний корінь. Тоді раціоналізація інтегралу можна достигнуть за допомогою підстановки Ейлеру:

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}+x\sqrt{a}$$

$$ax^2+bx+c=t^2-2x\sqrt{a}+ax^2, \text{ тобто } x=\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b} \text{ і}$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\frac{t^2-c}{2t\sqrt{a}+b}\sqrt{a} \text{ – раціональна функція.}$$

$$\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dt=\int R_1(t)dt.$$

Приклад:

$$\int\sqrt{a^2+x^2}dx=\left\{t=\sqrt{x^2+a^2}+x;\ x=\frac{t^2-a^2}{2t};dt=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt\right\}=$$

$$\int\frac{t^2+a^2}{2t}\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\frac{1}{4}\int\left(t+\frac{2a^2}{t}+\frac{a^4}{t^3}\right)dt=\frac{t^2}{8}+\frac{2a^2}{4}\ln|t|-\frac{a^4}{8t^2}+c=$$

$$\frac{a^2}{2}\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|+\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+c$$

Тригонометричні функції

Розглянемо інтегрування виразив $R(\cos(x),\sin(x))$.

1. *Універсальна тригонометрична підстановка.*

Раціоналізація $R(\cos(x),\sin(x))$ завжди досягається за допомогою підстановки:

$$t=tg\left(\frac{x}{2}\right),\ (-\pi<x<\pi);$$

$$\sin(x)=\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos(x)=\frac{1-tg^2(x/2)}{1+tg^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x=2arctg(t);$$

$$dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Тому,

$$\int R(\cos(x),\sin(x))dx=\int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt$$

Наприклад,

$$\int\frac{dx}{\sin(x)}=\left\{t=tg(x/2);\ \sin(x)=\frac{2t}{1+t^2};\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\right\}=\int\frac{2dt}{1+t^2}\frac{1+t^2}{2t}=\int\frac{dt}{t}=$$
$$=\ln|t|+c=\ln|tg(x/2)|+c$$

2. Можливі різні частинні випадки, наприклад, для непарної (парної) функції $R(x,y)$ по змінним x і y.

Нехай $R(u,v)=\dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, $u=\cos(x)$, $v=\sin(x)$, де P і Q – багаточлені

2.1. Якщо один багаточленів P і Q є парним по v, а другий – непарний по v, то заміна змінної $t=\cos(x)$ раціоналізує інтеграл

2.2. Якщо один багаточленів P і Q є парним по u, а другий – непарний по u, то заміна змінної $t=\sin(x)$ раціоналізує інтеграл

Тобто інтеграли $\int\cos^{2n+1}(x)R(\sin(x))dx$ або $\int\sin^{2r+1}(x)R(\cos(x))dx$ знаходяться за наступним алгоритмом.

Від тригонометричній функції, що знаходиться в непарній степені відокремлюється один множник і переноситься під знак диференціалу. Далі використовуючи основну тригонометричну тотожність отримуємо інтеграл від раціональній функції. Наприклад,

$$\int\cos^{2n+1}(x)\sin^r(x)dx=\int\cos^{2n}(x)\sin^r(x)\cos(x)dx=$$
$$=\int\left(1-\sin^2(x)\right)^n\sin^r(x)d\sin(x)$$

$$\int \cos^n(x)\sin^{2r+1}(x)dx = \int \cos^n(x)\sin^{2r}(x)\sin(x)dx =$$

$$= -\int \cos^n(x)\left(1-\cos^2(x)\right)^r d\cos(x)$$

Для інтегралу $\int \cos^{2n+1}(x)\sin^{2r+1}(x)dx$ все одно для якої функції буде проведено відповідний алгоритм дій.

$$\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}dx = \int \frac{\sin^2(x)\sin(x)}{\cos^4(x)}dx = -\int \frac{1-\cos^2(x)}{\cos^4(x)}d\cos(x) =$$

$$= \int \frac{t^2-1}{t^4}dt = \int \left(t^{-2}-t^{-4}\right)dt = -\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}+c = \frac{1}{3\cos^3(x)}-\frac{1}{\cos(x)}+c$$

2.3. Для $R\left(\sin^{2r}(x);\ \cos^{2n}(x)\right)$ використовується формули зменшення показника степені:

$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2} \qquad\qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$

Таким чином, отримуємо інтеграл з тригонометричними функціями в непарній ступені. Наприклад,

$$\int \cos^2(x)\sin^2(x)dx = \int \frac{(1+\cos(2x))}{2}\frac{(1-\cos(2x))}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1-\cos^2(2x)\right)dx = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\int \frac{(1+\cos(4x))}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8}\int \cos(4x)dx = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x)+c$$

$$\int \cos^2(x)dx = \int \frac{(1+\cos(2x))}{2}dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)+c$$

2.4. Якщо аргументи тригонометричних функцій відрізняються, то для знаходження інтегралів від таких тригонометричних функцій широко застосовуються різні тригонометричні формули:

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)-\cos(a+b)\right);$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)+\cos(a+b)\right);$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\sin(a-b)+\sin(a+b)\right);$$

За допомогою цих формул легко знайти інтеграли $\int \sin(ax)\cos(bx)dx$, $\int \sin(ax)\sin(bx)dx$, $\int \cos(ax)\cos(bx)dx$

2.5. Кратні інтеграли

Загальні відомості о кратних інтегралах

Інтегралом *n*-го порядку від скалярної функції *f*(*X*), що залежіть від *n*-мірного вектору *X* по *n*-мірному об'єму *D* називається границя інтегральної суми: $\int\limits_D f(X)d\sigma = \lim\limits_{\Delta\sigma_{\max}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(X_i)\Delta\sigma_i$.

$$\int\limits_D f(X)d\sigma = \int\limits_D f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2 ... dx_n$$

Частині випадки *n*-кратного інтегралу.

Визначений інтеграл по Ріману (*n* = 1).

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta x_i$$

Подвійний інтеграл (*n* = 2).

Нехай на площині область *S*, що обмежена замкненою лінією *L*, яка не має самоперетинів, і існує безперервна в цій області *S* функція *f*(*x*, *y*). Розглянемо подрібнення області S на площадки Δσ, *i* = 1, 2, ..., *n*. Тоді границя інтегральної суми називається подвійним інтегралом по площині *S*:

$$\iint\limits_S f(x,y)d\sigma = \lim\limits_{\Delta\sigma_{\max}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

Потрійний інтеграл (*n* = 3).

Нехай в трьохмірній області *V*, що обмежена замкненою поверхнею *S*, що не має самоперетинів, і існує безперервна в цій області *V* функція *f*(*x*, *y*, *z*). Розглянемо подрібнення області *V* на об'єми Δ*v*, *i* = 1, 2, ..., *n*. Тоді границя інтегральної суми називається потрійним інтегралом по об'єму *V*:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dv = \lim\limits_{\Delta v_{\max}\to 0} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i, y_i, z_i)\Delta v_i$$

Тому, по-перше, подвійний інтеграл по двомірної області *D* дорівнює площині цієї області: $S = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma$.

По-друге, потрійний інтеграл по трьохмірній області D дорівнює об'єму цієї області: $V = \iiint\limits_D f(x, y, z)dv$.

Для загального випадку $\int\limits_D dX = \mu(D)$.

Властивості кратних інтегралів

1. Лінійність по функції:

$$\int\limits_D \big(\alpha f(X) + \beta g(X)\big)dX = \alpha \int\limits_D f(X)dX + \beta \int\limits_D g(X)dX.$$

2. Адитивність по області інтегрування

$$\int\limits_D f(X)dX = \int\limits_{D_1} f(X)dX + \int\limits_{D_2} f(X)dX, \text{ де } D_1 \cup D_2 = D.$$

3. Монотонність по функції. Нехай $f(X) \le g(X)$ в області D. Тоді:

$$\int\limits_D f(X)dX \le \int\limits_D g(X)dX.$$

4. Нерівність трикутника: $\left|\int\limits_D f(X)dX\right| \le \int\limits_D |f(X)|dX$.

5. Інтегральна теорема о середнім: $\int\limits_D f(X)dX = f(Y)\mu(D)$

6. Зведення кратного інтеграла до повторних.

$$\int\limits_D f(X)dX = \int\limits_{\varphi_1}^{\psi_1} dx_1 \int\limits_{\varphi_2(x_1)}^{\psi_2(x_1)} dx_2 \int\limits_{\varphi_3(x_1,x_2)}^{\psi_3(x_1,x_2)} dx_3 \ldots \int\limits_{\varphi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{\psi_n(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_n$$

7. Заміна змінної в кратному інтегралі.

Нехай $\begin{cases} t_1 = \psi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ t_2 = \psi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ t_n = \psi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$. Тоді $\int\limits_D f(T)dT = \int\limits_{D'} f(X)\dfrac{D(T)}{D(X)}dX$, де

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \psi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$ – визначник Якобі (Якобіан)

Перехід від Декартової системи координат до циліндричної:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(r,\varphi,z)rdrd\varphi dz, \qquad \text{де } \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

Перехід від Декартової системи координат до сферичної:

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(r,\varphi,\theta)r^2\sin(\theta)drd\varphi d\theta,$$

$$\text{де } \begin{cases} x = r\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ y = r\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

2.6. Криволінійні інтеграли

Криволінійний або контурний інтеграл – інтеграл, який вираховується уздовж кривої на площині або в просторі. Ствердження в цьому підрозділі наведені для трьохмірному простору, але можуть бути узагальнені на простір довільної розмірності.

Розрізняють криволінійні інтеграли першого і другого роду (типу).

Криволінійні інтеграли першого роду

Нехай C крива, що з'єднує точки A і B, а f(X) – обмежена скалярна функція. Розіб'ємо криву точками на дуги $M_{i-1}M_i$ $i = 1, 2, \ldots, n$. Виберемо на кожній з дуг $M_{i-1}M_i$ точку M_i, і складемо суму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, де Δl_i – довжина дуги $M_{i-1}M_i$. Якщо границя $\lim\limits_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$ існує, то його називають криволінійним інтегралом 1-го типу:

$$\int_C f(M)dl = \lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$$

Зробимо декілька зауважень з приводу даного визначення.

1. Залежно від способу вказівки точок у просторі, будемо використовувати також інші форми запису криволінійного інтеграла 1-го типу.

$$\int_C f(M)dl = \int_C f(X)dl = \int_C f(\vec{r})dl = \int_C f(x,y,z)dl$$

2. З визначення випливає, що величина криволінійного інтеграла 1-го типу не залежить від обраного напрямку обходу кривої

3. Якщо лінійна щільність матеріальної кривої C дорівнює f(X), то маса всієї кривої дорівнює криволінійному інтегралу

Властивості криволінійних інтегралів 1-го типу

1. Лінійність по функції:

$$\int_C (\alpha f(X) + \beta g(X))dl = \alpha \int_C f(X)dl + \beta \int_C g(X)dl$$

2. Адитивність по області інтегрування

$$\int_{C_1 \cup C_2} f(X)dl = \int_{C_1} f(X)dl + \int_{C_2} f(X)dl$$

Нехай крива C_1 починається в точці A і закінчується в точці B, а крива C_2 починається в точці B і закінчується в точці D. Тоді їх об'єднанням називатиметься крива C_1 U C_2, яка проходить від A до B уздовж кривої C_1 і потім від B до D уздовж кривої C_2. Для криволінійних інтегралів першого роду справедливо вказане вище співвідношення

3. Монотонність по функції. Нехай $f(X) \le g(X)$ на кривій C. Тоді

$$\int_C f(X)dl \le \int_C g(X)dl$$

4. Інтегральна теорема о середнім

Для неперервної функції f уздовж кривої C $\int_C f(X)dl = f(Y)|l|$

$\int_C dl = |l|$ – довжина кривої C.

5. Зміна напрямку обходу кривої інтегрування не впливає на знак інтеграла $\int_{AB} f(X)dl = \int_{BA} f(X)dl$

6. Криволінійний інтеграл першого роду не залежить від параметризації та орієнтації кривої

Обчислення криволінійних інтегралів 1-го типу

1. Якщо гладка крива C задана параметрично співвідношенням

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \text{ при } \alpha \le t \le \beta \\ z = z(t) \end{cases}$$

і скалярна функція f неперервна на кривій С, то

$$\int_C f(x,y,z)dl = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\,dt$$

2. Якщо C є гладкою кривою в площині Oxy, заданої рівнянням $y(x)$, $\alpha \le x \le \beta$ то

$$\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x, y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx$$

Якщо C є гладкою кривою в площині Oxy, заданої рівнянням $x(y)$, $\alpha \le y \le \beta$ то

$$\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(x(y), y)\sqrt{1+(x'(y))^2}\,dy$$

У полярних координатах інтеграл $\int_C f(x,y)dl$ виражається формулою

$$\int_C f(x,y)dl = \int_\alpha^\beta f(r\cos\varphi, r\cos\varphi)\sqrt{r^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

де крива С задана в полярних координатах функцією $r(\varphi)$

Криволінійні інтеграли другого роду

На відміну від криволінійного інтеграла 1-го типу, підінтегральною функцією в криволінійному інтегралі 2-го типу служить векторна функція векторного аргументу $\vec{F}(X)$

Нехай C – гладка крива, $\vec{F}(M)$ $M \in C$ – обмежена векторна функція, $\vec{\tau}(M)$ – дотичній одиничний вектор до кривої C в точці M, напрямок якого збігається з обраним напрямом обходу кривої.

Інтеграл

$$\int_C \left(\vec{F}(M)\cdot\vec{\tau}(M)\right)dl = \lim_{\max \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^n \left(\vec{F}(M)\cdot\vec{\tau}(M)\right)\Delta l_i$$

називають криволінійним інтегралом 2-го типу.

Спосіб позначення $\int_C \left(\vec{F}(M)\cdot\vec{\tau}(M)\right)dl \equiv \int_C \vec{F}(X)\cdot d\vec{l}$

Зауваження.

З визначення випливає , що криволінійний інтеграл 2 -го типу залежить від обраного напрямку обходу кривої. Зміна знака відбувається через те , що при зміні напрямку дотичного вектора на протилежний, змінюється знак скалярного твори у визначенні криволінійного інтеграла 2 -го типу.

Пояснимо фізичний зміст криволінійного інтеграла 2 -го типу на прикладі обчислення роботи, що здійснюється часткою в силовому полі.

Нехай є силове поле, що діє на рухому частку. Повна робота з переміщення частинки уздовж гладкою орієнтованої кривої C , що з'єднує точки A і B і є криволінійний інтеграл 2 -го типу

Властивості криволінійних інтегралів 2-го типу

1. Лінійність по функції:

$$\int_C \left(\alpha\vec{F}(X)+\beta\vec{G}(X)\right)d\vec{l} = \alpha\int_C \vec{F}(X)d\vec{l} + \beta\int_C \vec{G}(X)d\vec{l}$$

2. Адитивність по області інтегрування

Нехай крива C_1 починається в точці A і закінчується в точці B, а крива C_2 починається в точці B і закінчується в точці D. Тоді їх об'єднанням називатиметься крива $C_1 \cup C_2$, яка проходить від A до B уздовж кривої C_1 і потім від B до D уздовж кривої C_2. Тоді для криволінійних інтегралів 2-го типу справедливо співвідношення

$$\int_{C_1\cup C_2} \vec{F}(X)d\vec{l} = \int_{C_1} \vec{F}(X)d\vec{l} + \int_{C_2} \vec{F}(X)d\vec{l}$$

3. Зміна напрямку обходу кривої інтегрування змінює знак інтеграла

$$\int_{AB} \vec{F}(X)d\vec{l} = -\int_{BA} \vec{F}(X)d\vec{l}$$

Обчислення криволінійних інтегралів 2-го типу

1. Нехай $\vec{F}(X) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ і

$d\vec{l} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$.

Тоді $\int_C \vec{F}(X)d\vec{l} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$.

Вираз $\int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$ часто використовується, як визначення криволінійного інтегралу 2-го типу.

2. Якщо C є гладкою кривою, що задана параметрично

$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k};\ \alpha \le t \le \beta$

Крім цього $\vec{F}(X) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$.

Тоді,

$$\int_C \vec{F}(X)d\vec{l} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[P\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + R\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\right]dt$$

Криволінійний інтеграл по замкнутому контуру

Якщо початкова та кінцева точка інтегрування в криволінійному інтегралі збігаються і при цьому загальна довжина кривої інтегрування відмінна від нуля, то говорять про криволінійний інтеграл по замкнутому контуру, який позначають $\oint_C f(X)dl$ або $\oint_C \vec{F}(X)\cdot d\vec{l}$, відповідно для інтегралів 1-го і 2-го типу. При цьому інтеграл вважається позитивним, якщо обхід по кривій ведеться проти годинникової стрілки

2.7. Приклади розв’язання задач на інтегральне числення

Безпосереднє інтегрування

1. $\int \frac{x^3+2x-\sqrt{x}+1}{x^2}dx = \int\left(x+\frac{2}{x}-x^{-3/2}+x^{-2}\right)dx = \int xdx + 2\int\frac{dx}{x} -$

$-\int x^{-3/2}dx + \int x^{-2}dx = \frac{x^2}{2} + 2\ln(x) + 2x^{-1/2} - \frac{1}{x} + c\,.$

2. $\int_1^3 (x-4)^2dx = \int_1^3 (x^2-8x+16)dx = \int_1^3 x^2dx - 8\int_1^3 xdx + 16\int_1^3 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^3 - 8\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3 + 16x\Big|_0^3 =$

$= \frac{1}{3}(27-1) - 4(9-1) + 16(3-1) = \frac{26}{3} - 32 + 32 = \frac{26}{3}\,.$

3. $\int_0^{\pi/6} \cos(x)dx = \sin(x)\Big|_0^{\pi/6} = \sin(\pi/6) - \sin(0) = 0{,}5 - 0 = 0{,}5\,.$

4. $\int_0^{\pi/4} tg^2(x)dx = \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2(x)}dx - \int_0^{\pi/4}dx =$

$= tg(x)\Big|_0^{\pi/4} - x\Big|_0^{\pi/4} = tg(\pi/4) - tg(0) - \pi/4 + 0 = 1 - \pi/4\,.$

5. $\int \cos(\ln(x))d(\ln(x)) = \sin(\ln(x)) + c\,.$

6. $\int \sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx = \int \sqrt{\sin(x)}d(\sin(x)) = \frac{2}{3}\sin^{3/2}(x)$.

7. $\int \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \int \frac{2}{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \sin\left(2\frac{x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}\int \sin(x)dx = -\frac{1}{2}\cos(x) + c.$$

8. $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - arctg(x) + c$.

Метод підстановки

1. $\int \frac{dx}{(5x-3)^3} = \left\{\begin{matrix} t = 5x-3 \\ dt = 5dx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-2}}{5\cdot(-2)} + c = -\frac{1}{10}(5x-3)^{-2} + c$.

2. $\int \sin^7(x)\cos(x)dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)dx \end{matrix}\right\} = \int t^7 dt = \frac{t^8}{8} + c = \frac{\sin^8(x)}{8} + c$.

3. $\int \frac{x^2}{4x^3+1}dx = \left\{\begin{matrix} t = 4x^3+1 \\ dt = 12x^2dx \end{matrix}\right\} = \frac{1}{12}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{12}\ln t + c = \frac{1}{12}\ln(4x^3+1) + c$.

4. $\int \frac{7}{\cos^2(3x-2)}dx = \left\{\begin{matrix} t = 3x-2 \\ dt = 3dx \end{matrix}\right\} = \frac{7}{3}\int \frac{dt}{\cos^2(t)} = \frac{7}{3}tg(t) + c = \frac{7}{3}tg(3x-2) + c$.

5. $\int \frac{e^{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left\{\begin{matrix} t = 2\sqrt{x} \\ dt = \frac{dx}{\sqrt{x}} \end{matrix}\right\} = \int e^t\, dt = e^t + c = e^{2\sqrt{x}} + c$.

6. $\int ctg(5x+1)dx = \int \frac{\cos(5x+1)}{\sin(5x+1)}dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin(5x+1) \\ dt = 5\cos(5x+1)dx \end{matrix}\right\} =$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln(t) + c = \frac{1}{5}\ln\left|\sin(5x+1)\right| + c.$$

7. $$\int_1^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}=\left\{\begin{array}{l} t=1+\ln x,\ dt=\dfrac{dx}{x}, \\ \alpha=1+\ln 1=1, \beta=1+\ln e^3=1+3\ln e=1+3=4 \end{array}\right\}=$$

$$=\int_1^4\frac{dt}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\Big|_1^4=2(\sqrt{4}-\sqrt{1})=2(2-1)=2\,.$$

8. $$\int_0^1\frac{x^2+x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx+\int_0^1\frac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx=\left\{\begin{array}{l} t=x^2+1,\ dt=2xdx \\ \alpha=1,\ \beta=2 \end{array}\right\}=$$

$$=\int_0^1\frac{dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int_1^2\frac{dt}{t^2}=\left\{\begin{array}{l} t=x^2+1,\ dt=2xdx \\ \alpha=0+1=1,\ \beta=1+1=2 \end{array}\right\}=arctg(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2t}\Big|_1^2=$$

$$=arctg(1)-arctg(0)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\pi}{4}-0+\frac{1}{4}=\frac{\pi+1}{4}$$

9. $$\int_0^{\pi/2}\cos^5(x)\sin(2x)dx=2\int_0^{\pi/2}\cos^6(x)\sin(x)dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l} t=\cos(x),\ dt=-\sin(x)dx, \\ \alpha=\cos(0)=1,\ \beta=\cos(\pi/2)=0 \end{array}\right\}=-\int_1^0 t^6dt=-t^7\Big|_1^0=-(0-1)=1\,.$$

10. $$\int_1^e\frac{dx}{x\left(\ln^2 x+1\right)}=\left\{\begin{array}{l} t=\ln x,\ dt=\dfrac{dx}{x} \\ \alpha=\ln 1=0,\ \beta=\ln e=1 \end{array}\right\}=\int_0^1\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=arctg(x)\Big|_0^1=arctg(1)-arctg(0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}$$

Інтегрування по частинам

1. $$\int x\cdot arctg(x)\,dx=\left\{\begin{array}{l} u=arctg(x),\ du=\dfrac{dx}{x^2+1} \\ dv=xdx,\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\}=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2dx}{x^2+1}=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+1-1\right)dx}{x^2+1}=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\frac{dx}{x^2+1}\right)=$$

$$=\frac{x^2}{2}arctg(x)-\frac{1}{2}\left(x-arctg(x)\right)+c\,.$$

2. $\int \ln(x)dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln(x);\ du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx;\ v=x \end{matrix}\right\} = x\ln(x) - \int x\dfrac{dx}{x} = x\ln(x) - \int dx = x\ln(x) - x + c$.

3. $\int x^2e^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x^2;\ du=2xdx \\ dv=e^{-x}dx;\ v=-e^{x} \end{matrix}\right\} = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{-x}dx;\ v=-e^{x} \end{matrix}\right\}$

$$= -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right) = -x^2e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - e^{-x}\right) + c.$$

4. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \dfrac{x}{\cos^2(x)}dx = \left\{\begin{matrix} u=x;\ du=dx \\ dv=\dfrac{dx}{\cos^2(x)};\ \ v=tg(x) \end{matrix}\right\} = x\,tg(x)\Big|_{-\pi/3}^{\pi/3} - \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} tg(x)dx =$

$= \dfrac{\pi}{3}\left(tg(\pi/3) - tg(-\pi/3)\right) - \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}dx = \left\{\begin{matrix} t=\cos(x);\ dt=-\sin(x)dx \\ \alpha=\cos(-\pi/3)=1/2;\ \beta=\cos(\pi/3)=1/2 \end{matrix}\right\}$

$= \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{3} + \int\limits_{1/2}^{1/2}\dfrac{dt}{t} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}} + 0 = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$

5. $\int\limits_0^1 arctg\sqrt{x}dx = \left\{\begin{matrix} u=arctg\sqrt{x};\ du=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}(1+x)} \\ dv=dx;\ \ v=x \end{matrix}\right\} = x\,arctg\sqrt{x}\Big|_0^1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{xdx}{\sqrt{x}(1+x)} =$

$= arctg1 - \dfrac{1}{2}\int\limits_0^1\dfrac{\sqrt{x}dx}{(1+x)} = \left\{\begin{matrix} t=\sqrt{x};\ x=t^2 \\ dx=2tdt;\ \alpha=0;\ \ \beta=1 \end{matrix}\right\} = \dfrac{\pi}{4} - \int\limits_0^1\dfrac{t^2dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4} - \int\limits_0^1\dfrac{(1+t^2-1)dt}{1+t^2}$

$= \dfrac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 dt + \int\limits_0^1\dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4} - t\Big|_0^1 + arctg(t)\Big|_0^1 = \dfrac{\pi}{4} - 1 + arctg(1) - arctg(0) = \dfrac{\pi}{2} - 1$

Невласні інтеграли

1. Знайти $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^\lambda}$ в залежності від λ .

Перший випадок $\lambda \neq 1$.

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{t\to+\infty}\int\limits_1^t\frac{dx}{x^\lambda} = \lim_{t\to+\infty}\frac{x^{1-\lambda}}{1-\lambda}\Bigg|_1^t = \frac{1}{1-\lambda}\lim_{t\to+\infty}\left(t^{1-\lambda}-1\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda-1}, & \lambda>1 \\ +\infty, & \lambda<1 \end{cases}$$

Другий випадок $\lambda = 1$

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x}=\lim_{t\to+\infty}\ln(x)\Big|_1^t=\lim_{t\to+\infty}\big(\ln(t)-\ln(1)\big)=+\infty$$

Отже, інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}$ збігається при $\lambda>1$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=\frac{1}{\lambda-1}$ і розбігається при $\lambda\le 1$ $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\lambda}=+\infty$.

2. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}}dx$.

Скористаємось теоремою 1 для невласних інтегралів першого роду.

Легко бачити, що при $1\le x<\infty$ $\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}}>\frac{x}{\sqrt[3]{x^5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Але $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=\infty$ (див. попередній приклад). Отже, так як інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ є розбіжним і $\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}}>\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, то інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{x+9}{\sqrt[3]{x^5}}dx$ теж є розбіжним.

3. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+7}}$.

Скористаємось теоремою 2 для невласних інтегралів першого роду. Так як $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+7}}=1$ і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ є збіжним, тому що $\lambda = 3/2 > 1$ (див. приклад 1), то невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+7}}$ також збіжний.

4. Дослідити на збіжність інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^3(x)}{x^4}dx$.

Підінтегральна функція в області інтегрування змінює знак. Причому $\left|\frac{\cos^3(x)}{x^4}\right|\le\left|\frac{1}{x^4}\right|$ і невласний інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^4}$ збігається ($\lambda = 4 > 1$). Отже, за теоремою 3 для невласних інтегралів першого роду інтеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos^3(x)}{x^4}dx$ також є збіжним.

5. Обчислити $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$.

Всередині області інтегрування в точці $x = 0$ підінтегральна функція має розрив другого роду. Тобто треба обчислити невласний інтеграл другого роду.

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}=\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}+\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{x^3}=\lim_{t\to -0}\int\limits_{-1}^{t}\frac{dx}{x^3}+\lim_{t\to +0}\int\limits_{t}^{1}\frac{dx}{x^3}$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\lim_{t\to -0}\int\limits_{-1}^{t}\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to -0}\frac{1}{x^2}\Bigg|_{-1}^{t}=-\frac{1}{2}\lim_{t\to -0}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)=\infty$$ – інтеграл $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x^3}$ розбігається.

Отже, інтеграл $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}$ розбігається $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3}=\infty$.

Зауважимо, що якщо б обчислювати даний інтеграл, не звертаючи уваги на те, що функція $\frac{1}{x^3}$ має в нулі розрив другого роду, то отримали б невірний результат 2.

6. Обчислити $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$.

Всередині області інтегрування в точці $x = 1$ підінтегральна функція має розрив другого роду. Тобто треба обчислити невласний інтеграл другого роду.

$$\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}+\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{t\to 1-0}\int\limits_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}+\lim_{t\to 1+0}\int\limits_{t}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл:

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{t\to 1-0}\int\limits_{0}^{t}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=-\frac{3}{2}\lim_{t\to 1-0}\sqrt[3]{(1-x)^2}\Bigg|_{0}^{t}=-\frac{3}{2}(0-1)=\frac{3}{2};$$

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\lim_{t\to 1+0}\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=-\frac{3}{2}\lim_{t\to 1+0}\sqrt[3]{(1-x)^2}\Bigg|_{t}^{2}=-\frac{3}{2}(1-0)=-\frac{3}{2}.$$

Таким чином, інтеграл збігається, $\int\limits_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}=0$.

7. Дослідити на збіжність невласний інтеграл другого роду $\int\limits_{a}^{b}\frac{dx}{(b-x)^{\lambda}}$ в залежності від λ.

Перший випадок $\lambda\neq 1$.

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)^\lambda} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{d(b-x)}{(b-x)^\lambda} = -\lim_{t\to b-0}\left.\frac{(b-x)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right|_a^t =$$

$$= \lim_{t\to b-0}\left(\frac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{(b-t)^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right) = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-\lambda}}{1-\lambda}, & \lambda<1 \\ \infty, & \lambda>1 \end{cases}$$

Другий випадок $\lambda = 1$

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)} = \lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{dx}{(b-x)} = -\lim_{t\to b-0}\int_a^t \frac{d(b-x)}{(b-x)} = -\lim_{t\to b-0}\ln(b-x)\Big|_a^t =$$

$$= \lim_{t\to b-0}\big(\ln(b-a) - \ln(b-t)\big) = \infty$$

Отже, невласний інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\lambda}$ збігається при $\lambda>1$ і розбігається при $\lambda \le 1$.

8. Знайти площу, що утворюють криві функції $y = \frac{1}{1+x^2}$ і $x = 0$.

За означенням інтегралу площа фігури буде дорівнювати невласному інтегралу першого роду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg}(x)\Big|_{-\infty}^{\infty} = \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg}(x)\Big|_{-t}^{t} = \lim_{t\to+\infty}\big(\operatorname{arctg}(t) - \operatorname{arctg}(-t)\big) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

2.8. Задачі за темою інтегральне числення

Обчислити інтеграли.

2.1. $\int_1^2 x dx$.	2.2. $\int_{-2}^2 dx$.	2.3. $\int_4^9 \sqrt{x} dx$.	2.4. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
2.5. $\int_1^2 \frac{dx}{x^3}$.	2.6. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$.	2.7. $\int_0^{\pi/3} \sin(x) dx$.	2.8. $\int_0^{\pi/6} \cos(x) dx$.
2.9. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.	2.10. $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.	2.11. $\int_0^2 e^x dx$.	2.12. $\int_0^1 (x-2) dx$.
2.13. $\int_1^{-2} x^2 dx$.	2.14. $\int_0^{\pi/4} \cos^{-2}(x) dx$.	2.15. $\int_0^2 \frac{1}{4+x^2} dx$.	2.16. $\int_1^2 x^{-2} dx$.
2.17. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1}{\sin^2(x)} dx$.	2.18. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$.	2.19. $\int_{-4}^4 \frac{dx}{2}$.	2.20. $\int_{99}^{99} e^{\sqrt{x}} dx$.

2.21. $\int_0^{2\pi} \sin(x)dx$ 2.22. $\int_1^3 x^3 dx$ 2.23. $\int_0^1 2^x dx$ 2.24. $\int_0^4 x^{3/2} dx$

Знайти інтеграли заміною змінною.

2.25. $\int \sin(3x+1)dx$.

2.26. $\int \sqrt[5]{(2x-1)^2}\,dx$.

2.27. $\int e^{-6x}dx$.

2.28. $\int (2x-3)^6 dx$.

2.29. $\int 2^{-7x}dx$.

2.30. $\int (3x+5)^7 dx$.

2.31. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

2.32. $\int \frac{dx}{5x-1}$.

2.33. $\int \cos^{-2} 4x dx$.

2.34. $\int e^{-6x+2}dx$.

2.35. $\int \frac{dx}{2x+5}$.

2.36. $\int 3^{4x+1}dx$.

2.37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}}$.

2.38. $\int \frac{dx}{x^2-1}$.

2.39. $\int 2^{-3x}dx$.

2.40. $\int \sqrt[3]{(2-3x)^5}\,dx$.

2.41. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-3x}}$.

2.42. $\int \sin 5x dx$.

2.43. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}$.

2.44. $\int \frac{dx}{25x^2-1}$

2.45. $\int x^{-1/2} 3^{\sqrt{x}} dx$

2.46. $\int \cos^4 x dx$

2.47. $\int \frac{xdx}{\sqrt{25x^2-9}}$

2.48. $\int \sin(x) e^{-\cos(x)} dx$

Обчислити інтеграли використовував метод заміни змінної.

2.49. $\int_0^{1/3} e^{-3x}dx$.

2.50. $\int_0^{\pi/3} \sin(3x)dx$.

2.51. $\int_0^{\pi/9} \cos(3x)dx$.

2.52. $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$.

2.53. $\int_1^3 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx$.

2.54. $\int_0^{\pi/12} \frac{1}{\cos^2(3x)}dx$.

2.55. $\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-3}}dx$.

2.56. $\int_0^{\pi/4} \sin^2(x)\cos(x)dx$.

2.57. $\int_0^2 e^x\left(e^{-x}+1\right)dx$.

2.58. $\int_0^{\pi/4} \tan^2(x)dx$.

2.59. $\int_0^5 \frac{x}{\sqrt{16+x^2}}dx$.

2.60. $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$.

2.61. $\int_0^{\pi/3} \tan(x)dx$.

2.62. $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)dx$.

2.63. $\int_0^{\pi/2} \cos^3(x)dx$.

2.64. $\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{1-x^2}$.

2.65. $\int_2^3 \frac{x^3-x^2+1}{x-1}dx$.

2.66. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}dx$.

2.67. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

2.68. $\int_0^{\pi/2} \sin(x)e^{-\cos(x)}dx$.

2.69. $\int_0^{\pi/6} \cos(x)e^{\sin(x)}dx$.

2.70. $\int\limits_{\pi/12}^{\pi/6} \sin^{-2}(3x)dx$. 2.71. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^2(x)dx$. 2.72. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{2x+1}{x^2-3x+2}dx$

Обчислити інтеграли за формулою інтегрування частинами.

2.73. $\int\limits_{0}^{\pi/3} x\sin(x)dx$. 2.74. $\int\limits_{0}^{\pi/6} x\cos(x)dx$. 2.75. $\int\limits_{1}^{e} \ln(x)dx$.

2.76. $\int\limits_{1}^{2} x\ln(x)dx$. 2.77. $\int\limits_{0}^{1} x^2 e^x dx$. 2.78. $\int\limits_{1}^{e} x2^x dx$.

2.79. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(x)\ln(\sin(x))dx$ 2.80. $\int\limits_{1}^{e} \ln^2(x)dx$ 2.81. $\int\limits_{0}^{1} \arctan(x)dx$.

2.82. $\int\limits_{0}^{1} \arccos(x)dx$. 2.83. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{xdx}{\sin^2(x)}$. 2.84. $\int\limits_{0}^{1} xe^{-x}dx$.

2.85. $\int\limits_{1}^{10} \lg(x)dx$ 2.86. $\int\limits_{0}^{1} x\arctan(x)dx$. 2.87. $\int\limits_{0}^{\pi} \frac{xdx}{\cos^2(x/4)}$

Обчислити невласні інтеграли.

2.88. $\int\limits_{-\infty}^{4} \frac{dx}{4+x^2}$. 2.89. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x-1)^2}$. 2.90. $\int\limits_{1}^{3} \frac{xdx}{x^2-1}$.

2.91. $\int\limits_{0}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2}$. 2.92. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 2.93. $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

2.94. $\int\limits_{0,5}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}}$. 2.95. $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. 2.96. $\int\limits_{1}^{\infty} e^{-x}dx$.

2.97. . $\int\limits_{0}^{\pi/2} \tan(x)dx$. 2.98. $\int\limits_{0}^{\infty} xe^{-x^2}dx$. 2.99. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln^3(x)}}$.

2.100. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$. 2.101. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$. 2.102. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\ln(x)}$.

2.103. $\int\limits_{0}^{\infty} x\sin(x)dx$. 2.104. $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$. 2.105. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$

Визначити середнє значення функцій в інтервалі.

2.106. $f(x) = x^2$ на [0; 1].

2.107. $f(x) = \sqrt{x}$ на [0; 100].

2.108. $f(x)=10+2\sin x+3\cos x$ на $[0; 2\pi]$.

2.109.Сила струму в ланцюгу змінюється по закону $i=i_0\sin(2\pi t/T)$, i_0 – де амплітуда, T – період коливань, t – час. Знайти середнє значення за період коливань квадрата сили струму.

2.110.Через провідник тече струм $i=i_0e^{-\lambda t}$. Який сумарний заряд пройде через провідник за час від 0 до t_0

2.111.Найти середнє потужність, виділилося на опорі R = 100 Ом за період коливання T = 0,02 напруження $u(t)=311\cdot\cos(100\pi t)$, якщо миттєва значення потужності $P=u^2/R$.

2.112. Нехай сила змінюється з відстанню x за законом: $F=100x$. Яку роботу потрібно зробити проти сили F, щоб змінити положення даної точки з 0 до 10.

2.113.Швидкість кровотоку з часом змінюється згідно із законом $v=3+0{,}2t+1{,}5\sin(2\pi t)$. З точністю до однієї сотої знайти середню швидкість за інтервал часу від 0 до 10.

З точністю до однієї сотої знайти масу речовини, яку було введено пацієнту за проміжок часу від 0 до 3, якщо швидкість введення змінювалася за законом $v=10e^{-0{,}2t}$.

Знайти площу фігури, що обмежують лінії.

2.114. $y=x^2;\quad y=6-x;\quad y=0$.

2.115. $y=x-2;\quad \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3}=1;\quad y=0$.

2.116. $y=x^2+3x+2;\quad y=5x+2$.

2.117. $y=-2x^2+12x;\quad y=0$.

2.118. $x^2-y^2=9;\quad x=-5;\quad x=5$.

2.119. $y=-x^2+6x;\quad y=0$.

2.120. $y=-x^2-6x-5;\quad y+x+5=0$.

2.121. $y=\dfrac{2}{1+x^2};\quad x=-2;\quad x=2$.

2.122. $y=x^2;\quad xy=8;\quad x=6$.

2.123. $y=4x-x^2;\quad y=0$.

2.124. $x=y^2;\ y=x^2$.

2.125. $y=-x^2+8x;\quad y=x^2-4x+2$.

Знайти інтеграли від раціональних функцій.

2.126. $\int\dfrac{dx}{x^2-25}$

2.127. $\int\dfrac{dx}{x^2+9}$

2.128. $\int\dfrac{dx}{x^2+4x+5}$

2.129. $\int\dfrac{dx}{x^2+6x+13}$

2.130. $\int\dfrac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

2.131. $\int\dfrac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$.

2.132. $\int \frac{xdx}{x^4-3x^2+2}$

2.133. $\int \frac{2x+7}{x^2+x-2}dx$

2.134. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$

2.135. $\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}$

2.136. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$

2.137. $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2}dx$

Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.

2.138. $\int \sin^2(3x)dx$.

2.139. $\int (1+2\cos(x))^2 dx$.

2.140. $\int (1-\sin 2x)^2 dx$.

2.141. $\int \cos^4(x)dx$.

2.142. $\int \sin^2(x)\cos^2(x)dx$.

2.143. $\int \sin^4(x)\cos^4(x)dx$.

2.144. $\int \sin^2(x)\cos^4(x)dx$.

2.145. $\int \sin^5(x)dx$.

2.146. $\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$.

2.147. $\int \sin^3(x)\cos^3(x)dx$.

2.148. $\int \cos^7(x)dx$.

2.149. $\int (1+2\cos(x))^3 dx$.

2.150. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^2(x)}dx$.

2.151. $\int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)}dx$.

2.152. $\int \frac{dx}{\sin(2x)}$.

2.153. $\int \frac{dx}{\sin(x)}$.

2.154. $\int \frac{dx}{\cos(x)}$.

2.155. $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(2x)}dx$.

2.156. $\int \frac{dx}{\sin(x)-\cos(x)}$.

2.157. $\int \mathrm{tg}^3(x)dx$.

2.158. $\int \mathrm{ctg}^3(x)dx$.

2.159. $\int \sin(3x)\cos(x)dx$.

2.160. $\int \cos(mx)\cos(nx)dx$.

2.161. $\int \sin(3x)\sin(5x)dx$.

2.162. $\int \sin(mx)\sin(nx)dx$.

2.163. $\int \sin(5x-\pi/4)\cos(x+\pi/4)dx$.

2.164. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

2.165. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$

2.166. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$

2.167. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$

2.168. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}}$

2.169. $\int \sqrt{4-x^2}dx$

2.170. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$

Обчислити подвійні інтеграли по прямокутним областям *D*.

2.171. $\iint\limits_D xydxdy,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le x\le 2$.

2.172. $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy,\quad 0\le x\le 1,\ 0\le x\le 1$.

2.173. $\iint\limits_D x\sin(x+y)dxdy,\quad 0\le x\le \pi,\ 0\le x\le \pi/2$.

2.174. $\iint\limits_D x^2y\cos(xy^2)dxdy,\quad 0\le x\le \pi/2,\ 0\le x\le 2$.

Обчислити інтеграли.

2.175. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{x}} dy$

2.176. $\int\limits_2^4 dx\int\limits_x^{2x}\frac{y}{x}dy$

2.177. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dy$

2.178. $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{1/x}^{x}\frac{x^2}{y^2}dy$

2.179. $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 dz$

2.180. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c (x+y+z)dz$

2.181. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^y xyzdz$

2.182. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^x dy\int\limits_0^{xy} x^3y^3zdz$

2.183. $\int\limits_L \frac{dl}{x-y}$, де L – відрізок прямої $y=0{,}5x-2$ між точками A(0, –2) і B(4, 0).

2.184. $\int\limits_L xydl$, де L – контур прямокутника з вершинами A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2).

2.185. $\int\limits_L ydl$, де L – парабола $y^2=2px$ прямокутника з вершинами A(0, 0), B(4, 0), C(4, 2), D(0, 2).

2.186. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, де L – перша арка циклоїди $x=a(t-\sin t)$, $y=a(t-\cos t)$.

2.187. $\int\limits_L \frac{z^2}{x^2+y^2}dl$, де L – перший виток гвинтової лінії $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$

2.188. $\int\limits_L \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl$, де L – перший виток гвинтової конічної лінії $x=t\cos t$, $y=t\sin t$, $z=t$

2.189. $\int\limits_L xdy$, де L – контур трикутника, сторони якого складаються осями координат і прямою $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ в додатному напрямку (тобто проти годинної стрілки)

2.190. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,1)} 2xydx + x^2dy$ у вздовж лінії 1) $y = x$, 2) $y = x^2$, 3) $y = x^4$, 4) $y^2 = x$.

2.191. $\oint\limits_L ydx + xdy$, де L – еліпс $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ в додатному напрямку.

2.192. $\int\limits_{(1,1,1)}^{(4,4,4)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - x - y + 2z}}$ у вздовж прямої.

2.193. $\int\limits_L yzdx + zxdy + xydz$, де L – дуга гвинтової лінії $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $z = at/2\pi$, від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = a$.

2.194. $\int\limits_L xdx + ydy + (x + y + 1)dz$, де L – відрізок прямої від точки (1, 1, 1) до точки (2, 3, 4).

2.195. $\int\limits_L \frac{x^2dy + y^2dz}{x^{5/3} + y^{5/3}}$, де L – четверть астроїди $x = r\cos^3 t$, $y = r\sin^3 t$ від точки (r, 0) до точки (0, r).

2.9. Контрольні питання

1. Що таке визначений інтеграл?
2. Сформулюйте основну теорему математичного аналізу (формула Ньютона-Лейбница)
3. Сформулюйте інтегральну теорему про середнє?
4. Що таке невизначений інтеграл.
5. Що таке невласний інтеграл I- та II-го роду?
6. Що таке подвійний інтеграл?
7. Що таке потрійний інтеграл?
8. Що таке контурний інтеграл I- та II-го роду?

Тема 3. Диференціальні рівняння

3.1. Основні означення

Диференціальні рівняння широко використовуються для опису, моделювання та дослідження фізичних, хімічних, біологічних, економічних процесів. Нижче будуть розглянуті диференціальні рівняння та їх розв'язання, які найчастіше зустрічаються в фізиці та біофізиці.

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке містить похідні невідомої функції (або декількох невідомих функцій). Замість похідних можуть входити диференціали: $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої з похідних, які входять до цього рівняння.

Якщо невідомі функції залежать від одного аргументу, то диференціальне рівняння називається ***звичайним***, якщо від декількох, то – ***диференціальним рівнянням з частинними похідними***.

Приклад:

Звичайне диференціальне рівняння	Диференціальне рівняння з частинними похідними
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} - k\dfrac{dx}{dt} = F(x,t)$	$\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 S}{\partial t^2}$

Розв'язок диференціального рівняння

Функція $y = f(x)$ називається ***розв'язком диференціального рівняння*** n-го порядку, якщо останнє обертається в тотожність для всіх $x \in (a, b)$ після підстановки цієї функції та її похідних у рівняння.

Види розв'язків

- **Загальний** розв'язок – це нескінченний набір функцій, які відрізняються сталими та які задовольняють рівняння
- **Частинний** розв'язок – загальний розв'язок при будь-якому наборі конкретних значень невідомих постійних
- **Особливий** розв'язок – розв'язок, в якому порушується одиничність розв'язку задачі Коші для цього рівняння в будь-якої точці. Особливий розв'язок не описується загальним інтегралом. Тому, воно не виводиться із загального розв'язку ні при якому значенні невідомої сталої.

Будь-яке диференціальне рівняння має безліч розв'язків, які можуть бути записані у вигляді: $f(x, c_1, c_2, ..., c_n)$, де $c_1, c_2, ..., c_n$ – довільні сталі, n – порядок диференціального рівняння.

Сукупність всіх частинних розв'язків утворює загальний розв'язок.

При розв'язанні практичних задач найчастіше цікавляться частковим розв'язком, який задовольняє початковим або крайовим умовам.

Задача Коші (задача з початковими умовами) – задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння порядку r сумісно з r початковими умовами для функції та її (r-1) перших похідних $y(x_0)=y_0$; $y'(x_0)=y_1$;…; $y^{(r-1)}(x_0)=y_{r-1}$

Крайова задача – задача знаходження часткового розв'язку, який задовольняє r умовам на кінцях відрізків $x_0 \le x \le x_i$, где i=1,2,…r–1

Крайова задача	***Задача Коші***
$\begin{cases} y(x_0, c_1, c_2, ..., c_r) = y_0 \\ y(x_1, c_1, c_2, ..., c_r) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y(x_{r-1}, c_1, c_2, ..., c_r) = y_{r-1} \end{cases}$	$\begin{cases} y(x_0, c_1, c_2, ..., c_r) = y_0 \\ y'(x_0, c_1, c_2, ..., c_r) = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(r-1)}(x_0, c_1, c_2, ..., c_r) = y_{r-1} \end{cases}$

Теорема про одиничність розв'язку задачі Коші

Якщо права частина рівняння $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}\right)$ та її частинні похідні по змінним $y', y'', ..., y^{(n-1)}$ неперервні в розглянутій області G, то для будь-якій точки $\left(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, ..., y_{0n-1}\right)$ з G на деякому інтервалі $\left(x_0 - h, x_0 + h\right)$ існує розв'язок $y(x)$ рівняння і він є одиничний, який задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_{01}$, $y''(x_0) = y_{02}$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}$.

Крайова задача також має одиничний розв'язок

Графік розв'язку диференціального рівняння називають *інтегральною кривою диференціального рівняння*.

Процедура розв'язання диференціального рівняння іноді називають *інтегруванням диференціального рівняння.*

3.2. Диференціальні рівняння першого порядку

Рівнянням з відокремлюваними змінними

Означення 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які зводяться до рівняння виду $f(y)\cdot y' = g(x)$ називаються ***рівнянням з відокремлюваними змінними.***

Означення 2. Нехай дано рівняння виду $f_1(x,y)dy - f_2(x,y)dx$. Якщо функції $f_1(x,y)$ та $f_2(x,y)$ мають такі властивості, що $f_1(x,y) = X_1(x) \cdot Y_1(y)$ та $f_2(x,y) = X_2(x) \cdot Y_2(y)$ причому функції X_1, X_2, Y_1, Y_2 – неперервні, то рівняння буде ***рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними.***

Для рівняння першого порядку задача Коші та крайова задача співпадають: $\begin{cases} f(y)y' = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Метод розв'язування

Нехай дано диференціальне рівняння $f(y) \cdot y' = g(x)$. Враховуючи, що $y' = \dfrac{dy}{dx}$, диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними зводиться до вигляду $f(y)dy = g(x)dx$, якщо рівняння помножити на dx. Тобто маємо рівність диференціалів невідомих функцій $F(y)$ і $G(x)$, де $dF(y) = f(y)dy$ і $dG(x) = g(x)dx$.

Із властивостей диференціалів функцій випливає, що з точністю до невідомої сталої дорівнюють і самі функції: $F(y) = G(x) + c$.

Щоб отримати функції $F(y)$ та $G(x)$ потрібно про інтегрувати праву і ліву частки рівняння. Тому процес розв'язання диференціального рівняння іноді називають інтегруванням.

Таким чином, маємо $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ – *рівняння в інтегральній формі.*

Первісні функції $F(y)$ та $G(x)$ функцій $f(y)$·та $g(x)$ можуть існувати або не існувати. Якщо первісні функції не існують, то наведена формула все одно є розв'язком диференціального рівняння.

Тоді розв'язок задачі Коші записується через інтеграли зі змінними верхніми границями: $\int\limits_{y_0}^{y} f(y)dy = \int\limits_{x_0}^{x} g(x)dx$.

Якщо первісні функції $F(y)$ та $G(x)$ існують, то інтегрування рівняння зводяться до виразів:

$F(y) = G(x) + c$ – неявний загальний розв'язок.

або $F(y) - F(y_0) = G(x) - G(x_0)$ – неявний частинний розв'язок, що задовольняє початкової умові (розв'язок задачі Коші).

Якщо вдається, то можна знайти розв'язок в явному вигляді: $y = \Phi(x)$

Розв’язати задачу Коші можна із загального розв’язку шляхом підстановки початкової умови у знайдений розв’язок:

$$F(y_0) = G(x_0) + c$$

$$c = F(y_0) - G(x_0)$$

$$F(y) = G(x) + F(y_0) - G(x_0)$$

Однорідні рівняння

Означення 1. Диференціальні рівняння першого порядку, які зводяться до рівняння виду $y' = f(x,y)$, де $f(x,y)$ – однорідна функція називається ***однорідним рівнянням першого порядку.***

Означення 2. Функція $f(x,y)$ називається однорідною порядку r, якщо $f(ax, ay) = a^r f(x, y)$.

Однорідну функцію також можна уявити, як $f(x, y) = f_1\left(\frac{y}{x}\right)$.

Метод розв’язання

Однорідні рівняння першого порядку можна звести до рівняння з відокремлюваними змінними, відносно невідомої функції $u(x)$: $y(x) = u(x) \cdot x$.

За правилами диференціювання: $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x) \cdot x' = u'(x) \cdot x + u(x)$

Таким чином, заміна $y(x) = u(x) \cdot x$ та $y'(x) = u'(x) \cdot x + u(x)$ рівняння $y' = f(x, y)$ перетворює в рівняння $u' \cdot x + u = f_1(u),\ x \neq 0$, яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Лінійні рівняння першого порядку

Означення. Лінійне диференціальне рівняння першого порядку – це рівняння вигляду $y' + p(x)\, y = q(x)$

Лінійність – дуже важливе поняття, яке детально розглядається в розділі Лінійна алгебра і який в даному курсі не вивчається. Ви можете самостійно вивчити це питання.

Даний тип рівнянь має два частинних випадки:

1) $q(x) \equiv 0$ – **однорідне** лінійне рівняння

2) $p(x) \equiv q(x)$

Для цих випадків лінійне рівняння є рівнянням з відокремлюваними змінними, розв’язання яких не викликає труднощів і вже розглянуто.

У загальному випадку, якщо $q(x) \neq 0$, то лінійне рівняння є **неоднорідним**

Методи розв’язання

Існує два підходи до розв'язання таких рівнянь.

Метод 1. Метод Лагранжа (метод варіації довільних сталих) ґрунтується на теоремі, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку однорідного рівняння та будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння.

Тому в методі Лагранжа знаходиться загальний розв'язок однорідного рівняння $y_0 = f(x,c)$, де c – невідома стала. Потім розв'язок неоднорідного рівняння знаходять у вигляді: $y = f(x,c(x))$, де $c(x)$ – невідома функція. Невідому функцію $c(x)$ знаходять шляхом підстановки $y = f(x,c(x))$ у неоднорідне лінійне диференціальне рівняння та з наступним розв'язанням відносно невідомої функції $c(x)$.

Метод 2. Розв'язок шукається, як добуток двох невідомих функцій:

$y(x) = u(x)\cdot v(x)$.

Тоді, $y'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$

Після підстановки у рівняння отримуємо:

$u'v + uv' + puv = q$

Можна, наприклад, згрупувати другий та третій доданок та винести за дужки загальний множник u:

$u'v + u(v' + pv) = q$

Далі справедливі наступні міркування. На функції u та v накладено тільки одна вимога, щоб їх добуток був розв'язком диференціального рівняння. З цього виходить, що існує довільний вибір цих функцій.

Будемо вимагати, щоб функція v володіла такою властивістю, що $v' + pv = 0$. Тоді отримуємо систему з двох диференціальних рівнянь:

$$\begin{cases} v' + pv = 0 \\ u'v = q \end{cases}$$

Перше диференціальне рівняння – рівняння з відокремлюваними змінними відносно v. З нього знайдемо будь-який частковий розв'язок, тобто v при будь-якій невідомій сталій, яку отримуємо при інтегруванні (v – будь-яка функція, яка задовольняє першому рівнянню)

В загальному вигляді $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$

Після підстановки $v(x) = e^{-\int p(x)dx}$ у друге рівняння шукається функція u:

$u'v = u'e^{-\int p(x)dx} = q(x)$;

$du = q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$;

$\int du = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$;

$u = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$.

Відповіддю буде $y(x) = u(x)\cdot v(x)$

Інші диференціальні рівняння першого порядку

Окрім розглянутих найпростіших диференціальних рівнянь існують більш складні рівняння.

Рівняння в повних диференціалах

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$.

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то рівняння має вигляд $du = 0$ та його розв'язок $u = c$.

Якщо $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, то при деяких умовах існує функція $\mu(x,y)$, така, що $\mu P dx + \mu Q dy = du$. Функція $\mu(x,y)$ називається інтегруючим множником. Інтегруючий множник можна знайти в таких випадках:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \Phi(x), \text{ тоді } \ln\mu = \int \Phi(x)dx;$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \mathrm{T}(y), \text{ тоді } \ln\mu = \int \mathrm{T}(y)dy.$$

Рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{Ax+By+C}\right)$

Рівняння зводиться до однорідного.

Якщо $aB - bA \neq 0$, то заміною $t = x - x_0$ і $u = y - y_0$, де x_0 та y_0 – одиничний розв'язок системи рівнянь.

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

Якщо $aB - bA = 0$, то вважають $t = x$ і $u = ay - by$

Рівняння Бернуллі

$y' + P(x)y = Q(x)y^n$ зводиться до лінійного рівняння замінною $z = y^{1-n}$

$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$.

Рівняння Ріккаті

$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$ в загальному випадку не розв'язується в квадратурах

Рівняння, що розв'язуються відносно *y'*

Нехай у даній точці (x_0, y_0) рівняння $F(x_0, y_0, p) = 0$, де $p = y'$, має дійсні корені $p_1, p_2, \ldots, p_n$, функція $F(x, y, p)$ та її перші частинні похідні неперервні по всім змінним у кожній точці $x = x_0,\ y = y_0,\ p = p_i$ та $\dfrac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. Тоді рівняння $F(x, y, y') = 0$ розпадається на n диференціальних рівнянь виду $y' = f_i(x, y)$, де $f_i(x_0, y_0) = p_i$. Через точку (x_0, y_0) проходять точно n інтегральних кривих.

Рівняння, що не розв'язуються відносно *y'*

1. Рівняння $F(x, y, y') = 0$, що розв'язується відносно y

2. Рівняння $F(x, y, y') = 0$, що розв'язується відносно x

Рівняння Лагранжа $a(y')x + b(y')y + c(y') = 0$

Рівняння Клеро Частинний випадок рівняння Лагранжа при $a(p) + b(p)p = 0$: $y = y'x + f(y')$

У зв'язку зі складнощами, що виникають при розв'язанні цих рівнянь методи їх інтегрування ми не розглядаємо.

3.3. Диференціальні рівняння другого порядку

Рівняння, що дозволяють знизити порядок

Зниження порядку в диференціальних рівняннях роздивимось на прикладі рівнянь другого порядку: $F(x, y, y', y'') = 0$

Рівняння виду *F*(*x*, *y*', *y*'') = 0

У рівняннях, в яких відсутня невідома функція y можна знизити порядок заміною: $z(x) = y'(x)$. Тоді, $z'(x) = y''(x)$. Рівняння другого порядку зводиться до системи рівнянь першого порядку: $\begin{cases} F(x, z, z') = 0 \\ y' = z(x) \end{cases}$

Рівняння виду *F*(*y*, *y*', *y*'') = 0

У рівняннях, в яких відсутня змінна x можна знизити порядок заміною: $z(y) = y'(x)$. Тоді, $y'' = z'_x(y) = z'_y(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$. Рівняння другого порядку зводиться до системи рівнянь першого порядку: $\begin{cases} F(y, z, z') = 0 \\ y' = z(y) \end{cases}$.

Рівняння, однорідне відносно змінних $y, y', ..., y^{(n)}$

Якщо рівняння виду $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ має наступну властивість $F(x, ay, ay', ay'', ..., ay^{(n)}) = a^r F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)})$, то

- підстановка $z(x) = \dfrac{y'}{y}$ може понизити порядок рівняння на одиницю
- вводячи нові змінні t та z по формулам $x = e^t$ та $y = ze^{rt}$, приходимо до рівняння, що не містить явно t та, отже, ймовірно зниження порядку.

Рівняння $F(x, y, y', y'') = 0$, яке є точною похідною $\Phi(x, y, y') = C$

Якщо вдається знайти таку функцію $\Phi(x, y, y')$, яка не містить іншої похідної y'' та, задовольняє рівності $F(x, y, y', y'') = \dfrac{d}{dx}\Phi(x, y, y')$, то розв'язок вихідного рівняння представляється інтегралом $\Phi(x, y, y') = C$

Лінійні рівняння вищих порядків

Означення. ***Лінійним диференціальним рівнянням*** n-го порядку називається рівняння виду $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x)$

- Якщо коефіцієнти $a_i(x)$ не є функціями, а є сталими величинами, то рівняння буде з постійними коефіцієнтами.
- Якщо $f(x) \equiv 0$, тобто права частина рівняння дорівнює 0, то рівняння однорідне.
- У загальному випадку при $f(x) \neq 0$ рівняння є неоднорідним

Розв'язання таких рівнянь будується на загальному розв'язку однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку неоднорідного рівняння:

$$y_{\text{загальне неоднорідне}} = y_{\text{загальне однорідне}} + y_{\text{частинне неоднорідне}}.$$

Розглянемо на прикладі рівняння другого порядку. Спочатку знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння зі сталими коефіцієнтами.

Розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами $y'' + py' + qy = 0$ ($y_{\text{загальне однорідне}}$).

Метод розв'язання (метод Ейлера)

Розв'язання ґрунтується на теоремі, яка стверджує, що загальний розв'язок лінійного диференціального рівняння другого порядку є лінійною комбінацією будь-яких двох лінійно незалежних частинних розв'язань:

$y_{\text{загальне однорідне}} = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Частинні розв'язки шукаються у класі експоненціальних функцій: $y = e^{\lambda x}$.

Підставляючи $e^{\lambda x}$ замість y в диференціальне рівняння $y'' + py' + qy = 0$ отримаємо наступне алгебраїчне рівняння: $(\lambda^2 + p\lambda + q)e^{\lambda x} = 0$. Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то розв'язання рівняння можливе тільки при $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Це рівняння називається ***характеристичним***. Можливі такі випадки розв'язків.

- Два дійсних кореня $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, якщо $b^2 - 4ac > 0$. Тоді, розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$.
- Один дійсний корінь $\lambda = \dfrac{-p}{2}$, якщо $b^2 - 4ac = 0$. Тоді, розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\boxed{y = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}}$.
- Два комплексно спряжених кореня $\lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{4q - p^2} \cdot i}{2} = k \pm \alpha i$, якщо $b^2 - 4ac < 0$. Тоді розв'язок диференціального рівняння має вигляд $\boxed{y = e^{kx}(c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x))}$.

Частинний розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з постійними коефіцієнтами (y частинне неоднорідне).

Метод невизначених коефіцієнтів

Метод невизначених коефіцієнтів застосовується в тому випадку, коли функція $f(x)$ є квазімногочленом: $f(x) = e^{\sigma x} P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен n – го ступеня: $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$. При розв'язанні рівняння методом невизначених коефіцієнтів частинні розв'язки цього рівняння шукаються у вигляді $y = x^s e^{\sigma x} Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – многочлен того самого порядку, що й $P_n(x)$, коефіцієнти якого не визначені: $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ... + b_n x^n$, коефіцієнти b_i, $i = 1, 2,..., n$ є дійсними. Якщо σ не є коренем характеристичного рівняння, то число $s = 0$, якщо σ є коренем характеристичного рівняння, то число s дорівнює кратності цього характеристичного рівняння.

Щоб знайти коефіцієнти многочлена $Q_n(x)$, потрібно спочатку розв'язок $y(x) = x^s e^{\sigma x} Q_n(x)$ підставити у рівняння, а потім прирівняти коефіцієнти при подібних доданках лівої і правої частин отриманої рівності.

У випадку, коли права частина рівняння має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\sin\beta x + K_m(x)\cos\beta x)$, де $P_n(x)$ та $K_m(x)$ – многочлени n-го та m-го степеня відповідно, тоді частинний розв'язок шукається у вигляді $y(x) = x^s\ e^{\alpha x}(R_l(x)\sin\beta x + Q_l(x)\cos\beta x)$, де число s визначається таким чином: якщо комплексне число $\alpha + i\beta$ є коренем характеристичного рівняння, то число s дорівнює кратності цього комплексного числа, якщо ж комплексне число $\alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння (4.2), то число $s = 0$; $l = max\{n, m\}$, $R_l(x)$, $Q_l(x)$ – многочлени l-го порядку з невизначеними сталими коефіцієнтами.

Метод варіації довільних сталих (метод Лагранжа).

Метод варіації довільної сталої використовується для довільної неперервної функції $f(x)$, суть цього методу полягає в тому, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукають у вигляді:

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

В диференціальному рівнянні, що ми розв'язуємо y_1 та y_2 – частинні розв'язки відповідного однорідного диференціального рівняння другого порядку, $C_1(x)$ і $C_2(x)$ – невідомі функції, які шукаються з системи:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0 \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь методом Крамера:

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_1(x),\quad C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx,\ C_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \varphi_2(x),\ C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx.$$

3.4. Приклади розв'язання задач по диференціальним рівнянням

Задача 1

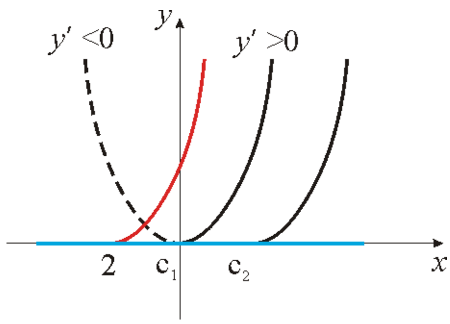
Розв'язати рівняння $y' = 2\sqrt{y}$

Рівняння першого порядку відокремлюваними змінними. С початку треба поділити праву та ліву частку рівняння на $\sqrt{y}$. Замість y' використаємо форму запису похідної Лейбниця $\dfrac{dy}{dx}$:

$$y' = 2\sqrt{y};$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y};$$

$$\frac{dy}{2\sqrt{y}} = dx;\ y \neq 0.$$



Далі ми можемо інтегрувати рівняння:

$$\int \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int dx;$$

$$\sqrt{y} = x + c > 0; x > -c;$$

$$y = (x+c)^2,\ y \neq 0,\ x \geq -c.$$

Відповідь: $y = (x+c)^2,\ y \neq 0,\ x \geq -c$ – загальний розв'язок рівняння; особливий розв'язок $y = 0$ було загублено при діленні рівняння на $\sqrt{y}$.

Задача 2

Розв'язати рівняння $\begin{cases} xy' - y = 0 \\ y(1) = 5 \end{cases}$

Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними та початковими умовами. Розв'яжемо спочатку диференціальне рівняння. Для цього перенесемо вільний член рівняння y в праву частину, а потім поділимо на x та y

$$xy' = y;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},\ x \neq 0;$$

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{1}{x},\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Тут замість y' застосована форма запису похідної Лейбниця $\frac{dy}{dx}$. Помноживши праву та ліву частки рівняння н*а* dx отримуємо рівняння в якому змінні відокремлені:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Далі знайдемо інтеграли від правої і лівої частки рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},\ x \neq 0,\ y \neq 0;$$

$$\ln(y) = \ln(x) + \ln(c) = \ln(cx),\ x \neq 0,\ y \neq 0.$$

Розв’язав логарифмічне рівняння $\ln(y) = \ln(cx)$ отримуємо загальний розв’язок рівняння у вигляді $y = cx$.

Тепер знайдемо невідому сталу, яка задовольнить початковій умові. Для цього підставимо початкову умову в знайдений загальний розв’язок: $5 = c \cdot 1$. Таким чином, отримали невідому сталу $c = 5$, що задовольняє початковій умові.

Відповідь: $y = 5x$ – розв’язок задачі Коші.

Задача 3

Розв’язати рівняння $x^2 \cos(y)dy - \sqrt{x}dx = 0$

Рівняння першого порядку відокремлюваними змінними

$$x^2 \cos(y)dy - \sqrt{x}dx = 0$$

$$\cos(y)dy = \frac{\sqrt{x}dx}{x^2}, \; x \neq 0$$

$$\cos(y)dy = x^{-3/4}dx, \; x \neq 0$$

$$\int \cos(y)dy = \int x^{-3/4}dx, \; x \neq 0$$

$$\sin(y) = 4x^{1/4} + c, \; x \neq 0$$

$$y = \arcsin(4x^{1/4} + c)$$

Відповідь: $y = \arcsin(4x^{1/4} + c)$ – загальний розв’язок диференціального рівняння

Задача 5

Розв’язати рівняння $y' + y\sin x = 0$.

Рівняння першого порядку відокремлюваними змінними

Відокремимо змінні: $\frac{dy}{dx} = -y\sin x \;\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\sin x dx$,

звідси $\int \frac{dy}{y} = -\int \sin x dx \;\Rightarrow \ln y = \cos x + C \;\Rightarrow y = e^{\cos x + C} = e^C e^{\cos x} = Ce^{\cos x}$.

Відповідь: $y = ce^{\cos(x)}$.

Задача 5

Розв’язати рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$

Рівняння однорідне першого порядку. Зробимо заміну:

$$u = \frac{y}{x}; \; x \neq 0; \; y = u \cdot x; \; y' = u'x + u$$

$$2xyy' = x^2 + y^2$$
$$2\frac{y}{x}y' = 1 + \frac{y^2}{x^2};$$
$$2u(u'x + u) = 1 + u^2;$$
$$2uu'x + 2u^2 = 1 + u^2;$$

$$2uu'x = 1 - u^2;$$
$$\frac{2udu}{u^2 - 1} = -\frac{dx}{x};$$
$$\int\frac{2udu}{u^2 - 1} = -\int\frac{dx}{x};$$

$$\int\frac{2udu}{u^2 - 1} = \begin{Bmatrix} t = u^2 - 1; \\ dt = 2udu \end{Bmatrix} = \int\frac{dt}{t} = \ln(t) + c =$$
$$= \ln\left(u^2 - 1\right) + c; \int\frac{dx}{x} = \ln(x) + c;$$
$$\ln\left(u^2 - 1\right) = -\ln(x) + \ln(c) = \ln(c/x);$$
$$u^2 - 1 = \frac{c}{x};\ u^2 = \frac{c}{x} + 1;\ \frac{y^2}{x^2} = \frac{c}{x} + 1;$$
$$y^2 = cx + x^2$$

Відповідь: $y^2 = cx + x^2$.

Задача 6

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + 3y = x^2$.

Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо шукати y у вигляді множення двох невідомих функцій: $y = uv;\ y' = u'v + uv'$.

$$y' + \frac{3}{x}y = x$$
$$u'v + uv' + \frac{3}{x}uv = x;$$
$$u'v + u\left(v' + \frac{3}{x}v\right) = x;$$
$$\begin{cases} v' + \frac{3}{x}v = 0 \\ u'v = x \end{cases}$$

$$v' + \frac{3}{x}v = 0;\ \frac{dv}{v} = -\frac{3dx}{x};\ \int\frac{dv}{v} = -3\int\frac{dx}{x};$$
$$\ln(v) = -3\ln(x) = \ln(x^{-3});\ v = x^{-3}$$
$$\frac{u'}{x^3} = x;\ u' = x^4;\ du = x^4dx;\ \int du = \int x^4dx;$$
$$u = \frac{x^5}{5} + c$$
$$y = uv = \left(\frac{x^5}{5} + c\right)\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{x^2}{5} + \frac{c}{x^3}$$

Відповідь: $y = \frac{x^2}{5} + \frac{c}{x^3}$.

Задача 7

Знайти розв'язок диференціального рівняння $y' + 2xy = (2x - 1)e^{-x}$

Це лінійне рівняння першого порядку. Будемо використовувати метод Лагранжа. Розв'яжемо однорідне рівняння $y_0' + 2xy_0 = 0$

$$\frac{dy_0}{y_0} = -2xdx; \ \int \frac{dy_0}{y_0} = -2\int xdx;$$

$$\ln y_0 = -x^2 + \ln(c)$$

$$\ln\left(\frac{y_0}{c}\right) = -x^2; \ \frac{y_0}{c} = e^{-x^2}; \ y_0 = ce^{-x^2}.$$

Тепер будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $y = c(x)e^{-x^2}$.

$$y' = \left(c(x)e^{-x^2}\right)' = c'e^{-x^2} - 2cxe^{-x^2}.$$

Підставимо $y = c(x)e^{-x^2}$ та $y' = c'e^{-x^2} - 2cxe^{-x^2}$ у неоднорідне рівняння:

$$c'e^{-x^2} - 2cxe^{-x^2} + 2cxe^{-x^2} = (2x-1)e^{x^2-x}$$

$$c'e^{-x^2} = (2x-1)e^{-x}; \ \frac{dc}{dx} = (2x-1)e^{x^2-x};$$

$$dc = (2x-1)e^{x^2-x}dx; \ \int dc = \int (2x-1)e^{x^2-x}dx;$$

$$\int (2x-1)e^{x^2-x}dx = \begin{Bmatrix} t = x^2 - x; \\ dt = (2x-1)dx \end{Bmatrix} = \int e^t dt = e^t + c = e^{x^2-x} + c_0;$$

$$c(x) = e^{x^2-x} + c_0$$

$$y = c(x)e^{-x^2} = \left(e^{x^2-x} + c_0\right)e^{-x^2} = e^{-x} + c_0e^{-x^2}$$

Відповідь: $y = e^{-x} + c_0e^{-x^2}$.

Задача 8

Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 3y = 0$.

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Його корені: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Отже, розв'язок має вигляд: $y = C_1e^{3x} + C_2e^x$.

Відповідь: $y = C_1e^{3x} + C_2e^x$.

Задача 9

Розв'язати рівняння $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку

Складаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$. Його корені $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$. Отже, розв'язок має вигляд: $y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$.

Відповідь: $y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$.

Задача 10

Розв'язати рівняння $y'' - 2y' + 2y = 0$

Це однорідне лінійне диференціальне рівняння другого порядку. Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ має комплексні корені $\lambda_1 = 1 - i$ та $\lambda_2 = 1 + i$. Значить, загальним розв'язком є: $y = e^x(\mathrm{C_1 cosx + C_2 sinx})$.

Відповідь: $y = e^x(\mathrm{C_1 cosx + C_2 sinx})$.

Задача 11

Розв'язати рівняння $\dfrac{y''}{\sqrt{y'}} = \cos(x)$.

Зменшимо порядок рівняння заміною $z(x) = y'(x)$; $z'(x) = y''(x)$:

$$\begin{cases} \dfrac{z'}{\sqrt{z}} = \cos(x) \\ y' = z \end{cases}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = \cos(x)dx$$

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int \cos(x)dx$$

$$2\sqrt{z} = \sin(x) + c_1$$

$$4z = \sin^2(x) + 2c_1\sin(x) + c_1{}^2$$

Розв'яжемо тепер рівняння відносно *y*:

$$\frac{dy}{dx} = z = \frac{\sin^2(x) + 2c_1\sin(x) + c_1{}^2}{4}$$

$$dy = \frac{1}{4}\left(\sin^2(x) + 2c_1\sin(x) + c_1{}^2\right)dx$$

$$\int dy = \frac{1}{4}\int\left(\sin^2(x) + 2c_1\sin(x) + c_1{}^2\right)dx$$

Після інтегрування маємо:

$$\int \sin^2(x)dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4} + c$$

$$y = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin(2x)}{4}\right) - \frac{c_1}{2}\cos(x) + c_1^2 x + c_2$$

Відповідь: $y = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{\sin(2x)}{4}\right) - \dfrac{c_1}{2}\cos(x) + c_1^2 x + c_2$

Задача 12

Розв'язати рівняння $2\sqrt{y}\,y'' - y' = 0$.

Зменшимо порядок рівняння заміною $y'' = z'_x(y) = z'_y(y) \cdot y' = z'(y) \cdot z(y)$:

$2\sqrt{y}zz' - z = 0$; $2\sqrt{y}zz' = z$; $2\sqrt{y}z' = 1$.

$\frac{dz}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$; $dz = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$; $\int dz = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{\sqrt{y}}$.

$z = \sqrt{y} + c_1$.

Розв'яжемо тепер рівняння відносно y:

$\frac{dy}{dx} = z = \sqrt{y} + c_1$; $\frac{dy}{\sqrt{y} + c_1} = dx$; $\int \frac{dy}{\sqrt{y} + c_1} = \int dx$.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y} + c_1} = \begin{cases} t = \sqrt{y},\ t^2 = y, \\ dy = 2tdt. \end{cases} = 2\int \frac{tdt}{t + c_1} = 2\int \frac{(t + c_1 - c_1)dt}{t + c_1} = 2\left(\int dt - c_1 \int \frac{dt}{t + c_1}\right) =$$

$$= 2(t - c_1 \ln(t + c_1)) + c_2 = 2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + c_1\right)\right) + c_2.$$

$$2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + c_1\right)\right) = x + c_2.$$

Відповідь: $2\left(\sqrt{y} - c_1 \ln\left(\sqrt{y} + c_1\right)\right) = x + c_2$.

Задача 13

Знайти частинний розв'язок $y'' + y = 0, y(0) = -4,\ y'(0) = 1$

Знаходимо загальний розв'язок:

$\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda^2 = -1,\ \lambda = \pm i$.

Отже, $y = C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$

Знайдемо похідну: $y' = -C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$

Підставимо початкові умови: $\begin{cases} y(0) = C_1 = -4 \\ y'(0) = C_2 = 1 \end{cases}$

Відповідь: $y = -4\cos(x) + \sin(x)$

Задача 14

Знайти частинний розв'язок $y'' + 4y' = 0, y(0) = -6,\ y'(0) = -1$

Знаходимо загальний розв'язок:

$\lambda^2 + 4\lambda = 0,\ \lambda(\lambda + 4) = 0,\ \ \lambda = -4;\ \lambda = 0$.

Отже, $y = C_1 + C_2 e^{-4x}$

Знайдемо похідну: $y' = -4C_2 e^{-4x}$.

Підставимо початкові умови: $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 e^0 = -6 \\ y'(0) = -4C_2 e^0 = -1 \end{cases}$

Розв'яжемо систему рівнянь: $\begin{cases} C_2 = 1/4 \\ C_1 = -6 - 1/4 = -25/4 \end{cases}$

Відповідь: $y = -\frac{25}{4} + \frac{1}{4}e^{-4x}$.

Задача 15

Знайти частинний розв'язок $y'' + 6y' + 8y = 0, y(0) = 0,\ y'(0) = -5$

Знаходимо загальний розв'язок:

$$y'' + 6y' + 8y = 0$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0;$$

$$\lambda = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{-6 \pm 2}{2}$$

$$\lambda = -4;\ \lambda = -2$$

$$y = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{-2x}$$

Знайдемо похідну: $y' = -4C_1 e^{-4x} - 2C_2 e^{-2x}$

Підставимо початкові умови: $\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = -4C_1 - 2C_2 = -5 \end{cases}$

Розв'яжемо систему рівнянь:

$\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 4C_2 - 2C_2 = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} C_1 = -C_2 \\ 2C_2 = -5 \end{cases}$; $\begin{cases} C_1 = 2.5 \\ C_2 = -2.5 \end{cases}$

Відповідь: $y = 2.5e^{-4x} - 2.5e^{-2x}$.

3.5. Задачі на розв'язання диференціальних рівнянь

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь з відокремлюваними змінними

3.1. $y' = -x^2 + 4$.

3.2. $y' = -\frac{y}{1+x}$.

3.3. $y' = y$.

3.4. $xyy' = 1 - x^2$.

3.5. $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

3.6. $x^3 y' + y = 7,\ y(0) = 5$.

3.7. $2\sqrt{x}y' = y,\ y(4) = 1$.

3.8. $x^2 y' + y^2 = 0,\ y(-1) = 1$

3.9. $dr + r\,\mathrm{tg}(\varphi)d\varphi = 0,\ r(\pi) = 2$.

3.10. $y' = 2\sqrt{y}\ln x,\ y(e) = 1$.

Знайти розв'язок однорідних диференціальних рівнянь.

3.11. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - 2$.

3.12. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$.

3.13. $xdy - ydx = ydy$.

3.14. $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$.

3.15. $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$.

3.16. $xy' = y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

3.17. $xy' = y - x$.

3.18. $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$.

3.19. $y' = \dfrac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2} - \dfrac{y}{x},\ y(1) = -1$

3.20. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x},\ y(-1) = 1$.

3.21. $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2},\ y(1) = 0$.

3.22. $xy' = y\left[1 + \ln\left(\dfrac{y}{x}\right)\right],\ y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Знайти розв'язок лінійних диференціальних рівнянь.

3.23. $y' + 2y = 4x$.

3.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

3.25. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$.

3.26. $y' + \dfrac{x}{a^2 + x^2}y = 1$.

3.27. $y' + y = \cos(x)$.

3.28. $y' - \mathrm{tg}(x)y = \sec(x),\ y(0) = 0$.

3.29. $xy' + y - e^x = 0,\ y(a) = b$.

3.30. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x,\ y(0) = 0$.

3.31. $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x,\ y(0) = 1$.

3.32. $y' = 3x^2y + x^5 + x^2,\ y(0) = 1$.

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь Бернуллі.

3.33. $xy' + y = -xy^2$.

3.34. $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$.

3.35. $x^2y' = y^2 + xy$.

3.36. $y' + xy = xy^3$.

3.37. $3y^2y' + y^3 = x + 1,\ y(-1) = 1$.

3.38. $y' + 2xy = 2x^3y^3,\ y(0) = 1$

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь в повних диференціалах

3.39. $\left(2x^3 - xy^2\right)dx + \left(2y^3 - x^2y\right)dy = 0$.

3.40. $\dfrac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\dfrac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$.

3.41. $e^ydx + \left(xe^y - 2y\right)dy = 0$.

3.42. $yx^{y-1}dx + x^y\ln(x)dy = 0$.

3.43. $\left(x^2 + y\right)dx - xdy = 0$.

3.44. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$.

3.45. $(x^2 + 2x + y^2)dx + 2ydy = 0$.

3.46. $y^2dx + (yx - 1)dy = 0$.

Знайти розв'язок диференціальних рівнянь другого і вищих порядків

3.47. $y'' = x + \sin(x)$.

3.48. $y'' = \operatorname{arctg} x$.

3.49. $y'' = \ln x$.

3.50. $xy'' = y'$.

3.51. $y'' = y' + x$.

3.52. $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$.

3.53. $yy'' = (y')^2$.

3.54. $2yy'' - 3(y')^2 = 4y^2$.

3.55. $y'' = 2yy'$.

3.56. $y''' = \dfrac{6}{x^3},\ y(1) = 2,\ y'(1) = 1,\ y''(1) = 1$.

3.57. $y'' = 4\cos(2x),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

3.58. $y'' = \dfrac{1}{\cos^2(x)},\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\ln 2}{2},\ y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

3.59. $y''x\ln x = y',\ y(e) = 2,\ y'(e) = 3$.

3.60. $y'' + 2x(y')^2,\ y(1) = 0,\ y'(1) = 0$.

3.61. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1,\ y(\pi/2) = 0,\ y'(\pi/2) = 0$.

3.62. $yy'' + (y')^2 = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$.

3.63. $y^3y'' = 1,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

3.64. $2yy'' = 1 + (y')^2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Знайти розв'язок лінійних однорідних диференціальних рівнянь.

3.65. $y'' + y' - 2y = 0$.

3.66. $y'' - 9y = 0$.

3.67. $y'' - 4y' = 0$.

3.68. $y'' - 2y' - y = 0$.

3.69. $3y'' - 2y' - 8y = 0$.

3.70. $y'' + y = 0$.

3.71. $y'' + 6y' + 13y = 0$.

3.72. $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

3.73. $y'' - 2y' + y = 0$.

3.74. $4\ddot{x}_{tt} - 20\dot{x}_t + 25x = 0$.

3.75. $2y'' + y' + 2\sin^2(15^\circ)\cos^2(15^\circ)y = 0$.

3.76. $y'' + 4y' + 4y = 0$.

3.77. $y'' + 2y' + 1 = 0$.

3.78. $y'' - 13y' + 12y = 0$.

3.79. $y'' + 4y = 0$.

3.80. $y'' - 4y' + 3y = 0,\ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$.

3.81. $y'' + 4y' + 29y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 15$.

3.82. $4y'' + 4y' + y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$.

3.83. $\ddot{S}_{tt} + 2\dot{S}_t + 2S = 0,\ S(0) = 1,\ \dot{S}(0) = 1$.

3.84. $y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

3.85. $y'' - 6y' + 9y = 0,\ \ y(1) = 3,\ \ y'(1) = 0$.

Знайти розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь.

3.86. $y'' + y' - 2y = 6x^2$.

3.87. $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$.

3.88. $y'' + 2y' + y = e^x$.

3.89. $2y'' + y' - y = 2e^x$.

3.90. $2y'' + a^2 y = e^x$.

3.91. $y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$.

3.92. $y'' - 2y' + 2y = 2x$.

3.93. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$.

3.94. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

3.95. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

3.96. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3.97. $4y'' + 16y' + 15y = 4e^{-3x/2},\ \ y(0) = 3,\ \ y'(0) = -5{,}5$.

3.98. $y'' - y' = 2(1 - x),\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 1$.

3.99. $y'' + y + \sin 2x = 0,\ \ y(\pi) = 1,\ \ y'(\pi) = 1$.

3.100. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 3{,}2$.

3.6. Контрольні питання

1. Дайте означення диференціального рівняння і його розв'язків.
2. Як визначити порядок диференціального рівняння?
3. Які диференціальні рівняння називаються рівняннями першого порядку?
4. Які рівняння називаються диференціальними рівняннями з відокремлюваними змінними? Як розв'язати такі рівняння?
5. Як можна розв'язати однорідне диференціальне рівняння першого порядку?.
6. Як можна розв'язати лінійне диференціальне рівняння першого порядку?
7. Які диференціальні рівняння другого порядку дозволяють знизити порядок? Наведіть методи вирішення таких рівнянь.
8. Яке рівняння називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами? Наведіть типи рішень таких рівнянь.

Тема 4. Ряди

4.1. Числові ряди

Основні поняття

Нехай $\{a_n: n\in N\}$ – числова послідовність, то нескінченна сума елементів a_n цієї числової послідовності називається *числовим рядом*:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Числа $a_1, a_2, \ldots$ називають *членами ряду*, a_n, – *загальним членом ряду*

Сума перших n членів рядів *називається n-ю частинною сумою числового ряду*: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Нехай $\{a_n: n\in N\}$ – числова послідовність, тоді послідовність $\{S_n: n\in N\}$:

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$, $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

називають *послідовністю частинних сум.*

Числовий ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності $\{S_n\}$ часткових сум:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S .$$

Причому число S називається *сумою числового ряду*.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує або нескінченністю, то ряд називають *розбіжним*.

Члени ряди можуть бути додатними або від'ємними. Якщо в знаку членів ряду відсутня якась послідовність, то ряд називається *знакозмінним*.

Якщо знак членів ряду не змінюється, то ряд називається *знакосталим*. Якщо усі члени ряду додатні $a_n > 0$, то – *знакододатними*, а якщо $a_n \ge 0$, то *знаконевід'ємними*.

Якщо знак членів ряду послідовно змінюється на протилежний, то ряд називається *знакопочережний*: $-a_1 + a_2 - \ldots + a_n + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

Необхідна і достатня умова збіжності числового ряду

Для того щоб послідовність була збіжною необхідно й достатньо, щоб вона була фундаментальна. Означення фундаментальності: для кожного $\varepsilon > 0$ існує номер $N(\varepsilon)$ такий, що для будь-якого $n > N$ і для кожного $p > 0$ ($p\in N$), виконане $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$.

Ця умова є необхідною й достатньою умовою збіжності ряду, якщо під S_n розуміти послідовність часткових сум цього ряду.

Теорема. (Критерій Коші для рядів)

Для того, щоб ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ був збіжним, необхідно й достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ існував номер $N(\varepsilon)$ такий, що для будь-якого $n > N$ і для кожного $p > 0$, $p \in N$, було виконане $\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i < \varepsilon$.

Зауважимо, що критерій Коші не дуже зручний у застосуванні. Однак існує дуже проста необхідна умова збіжності ряду.

Теорема (необхідна умова збіжності ряду)

Необхідна умова збіжності означає:

- якщо вона виконується, то ряд може бути або збіжним або розбіжним,
- якщо вона не виконується, то ряд є розбіжним.

Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Достатні ознаки збіжності числового ряду

1. Ознаки порівняння.

Нехай маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ такі, що для усіх n, починаючи з деякого номера k, виконується нерівність $a_n \le b_n$. Тоді, якщо:

- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ збігається, то збігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ розбігається, то розбігається і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

2. Гранична ознака порівняння.

Нехай маємо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Якщо $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty$, то ряди одночасно або збіжні, або розбіжні.

3. Ознака Д’аламбера

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Тоді:

- якщо $0 \le q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;

- якщо $q = 1$, то ознака не дає відповідь (потрібно застосувати іншу ознаку).

4. Радикальна ознака Коші

Якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, існує границя $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. Тоді:

- якщо $0 \le q < 1$, то ряд збігається;
- якщо $q > 1$, то ряд розбігається;
- якщо $q = 1$, то ознака не дає відповідь (потрібно застосувати іншу ознаку).

5. Інтегральна ознака Коші

Нехай члени ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ додатні та не зростають: $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots$. Припустимо, що на проміжку $[1, +\infty)$ визначена додатна не зростаюча функція $f(x)$ така, що $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, … , $f(n) = a_n$, . Тоді невласний інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігаються або розбігаються одночасно.

6. Ознака Лейбниця (збіжність знакопочережний рядів).

Знакопочережний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ – збіжний, якщо $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1}$ і $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Абсолютна збіжність

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається абсолютно, якщо збігається ряд $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$.

Умовна збіжність

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається умовно, якщо $\sum_{n=1}^{\infty} | a_n |$ – розбігається, але $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається.

Основні властивості числових рядів

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збіжний і має суму S, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$, де λ – стала, також збіжний і його сума дорівнює λS.

Теорема 2. Якщо ряди $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ є збіжними і мають суми відповідно S_a і S_b, то збіжними є також ряди $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ і суми їх дорівнюють $S_a \pm S_b$.

Теорема 3. На збіжність ряду не впливає відкидання або приєднання до нього скінченної кількості членів.

Теорема 4. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ є збіжним (розбіжним) тоді і лише тоді, коли збіжним (розбіжним) є його n-й залишок.

Гармонічний та геометричні ряди

Геометричний ряд. Ряд, що складений з елементів геометричної прогресії називається *геометричним рядом*:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n ,$$

де число q – знаменник геометричної прогресії, a – стала.

Геометрична прогресія — послідовність чисел, перший член якої не дорівнює нулю, а відношення будь-якого елемента послідовності до попереднього є сталим числом, що називається *знаменником прогресії*.

- **$|q| < 1$ – геометричний ряд збігається і сума ряду $S = \dfrac{a}{1-q}$.**
- **$|q| \geq 1$ – геометричний ряд розбігається.**

Гармонічний ряд.

Ряд вигляду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ називається *гармонічним рядом*.

Числовий ряд вигляду $1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ називається *узагальненим гармонічним рядом або рядом Дерехле*:

- **$\alpha > 1$ – ряд збігається.**
- **$\alpha \leq 1$ – ряд розбігається.**

Приклади розв'язання задач

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$.

Розв'язання. 1. Оскільки $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ є збіжним,

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ за ознакою порівняння також є збіжним.

2. Оскільки $\ln(x) < x$ при $x > 0$, то $\ln(n+1) < n+1$ і $\frac{1}{\ln(n+1)} > \frac{1}{n+1}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...$ є розбіжним (це гармонічний ряд з вилученим першим членом), тому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ за ознакою порівняння також є розбіжним.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^3+2}$.

Розв'язання. 1. Застосуємо граничну ознаку порівняння.

Нехай $a_n = \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, $b_n = \frac{1}{n}$.

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\tan(\pi/2n)}{1/n} = \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{n}, \\ n\to\infty,\ x\to 0 \end{matrix}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan(\pi x/2)}{x} = \frac{\pi}{2} \neq 0$.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – розбіжний (це гармонічний ряд), тому розбіжним є ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

2. Позначимо $a_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$. Виберемо $b_n = \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ є збіжним, оскільки це ряд Діріхле $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\lambda}$ при $\lambda = 2 > 1$.

Знайдемо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)/(n^3+2)}{1/n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+n^2}{n^3+2} = 2 \neq 0$.

За граничною ознакою порівняння з збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, де $a_n = \frac{2n+1}{n^3+2}$.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Д'Аламбера.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3 3^n}{n^3 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3} = \frac{1}{3} < 1$.

Отже, за ознакою Д'Аламбера ряд збіжний.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{5}=\infty>1$.

За ознакою Д'Аламбера ряд розбіжний.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}\cdot n!}{(n+1)!\cdot n^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+1/n)^n(n+1)}{(n+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$.

Отже, ряд є розбіжним.

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+2}\right)^2=\lim\limits_{n\to\infty}2^2=4>1$

За радикальною ознакою Коші ряд є розбіжним. Зауважимо, що розбіжність даного ряду нескладно встановити за допомогою необхідної умови збіжності, отже, ряд розбіжний.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)=\sin(0)=0<1$.

За радикальною ознакою Коші ряд є збіжним.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряди: 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+5}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші.

1. Візьмемо функцію $f(x)=\frac{2x}{x^2+5}$, $x\in[1;+\infty)$.

Розглянемо невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{2x}{x^2+5}dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\int\limits_1^{M}\frac{2x}{x^2+5}dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\ln\left(x^2+5\right)\Big|_1^M=+\infty.$$

Цей інтеграл є розбіжним, отже розбіжним і ряд.

2. Дослідимо на збіжність ряд Діріхле.

Розглянемо функцію $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$, $x\in[1;+\infty)$.

Розглянемо відповідний невласний інтеграл:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim\limits_{M\to+\infty}\int\limits_1^{M}\frac{1}{x^\alpha}dx=\frac{1}{1-\alpha}\lim\limits_{M\to+\infty}x^{1-\alpha}\Big|_1^M=\begin{cases}0, & \alpha>1\\ +\infty, & \alpha<1\end{cases}$$

Отже, ряд Діріхле збігається при $\alpha > 1$ і він розбіжний при $\alpha < 1$. При $\alpha = 1$ інтеграл набуває вигляду:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \ln(x)\Big|_1^M = +\infty .$$

Отже, при $\alpha = 1$ ряд Діріхле є розбіжним. Таким чином, цей ряд збігається при $\alpha > 1$ і є розбіжним при $\alpha \le 1$.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n^2}$.

Розв'язання. Даний ряд є знакозмінним, оскільки знаки його членів залежать від знаку виразу $\cos n\alpha$.

$a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge a_{n+1}$ і $\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\cos(n\alpha)}{n^2} = 0$

За ознакою Лейбніца ряд збігається.

Складемо ряд з модулів членів заданого ряду. Отримуємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(n\alpha)|}{n^2}$. Оскільки $|\cos n\alpha| \le 1$, то $\frac{|\cos(n\alpha)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ є збіжним (це ряд Діріхле при $\alpha = 2 > 1$), то за ознакою порівняння ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n\alpha|}{n^2}$ є збіжним. Відповідно, ряд збігається абсолютно.

4.2. Функціональні ряди

Основні поняття

Ряд, членами якого є функції, визначені на деякій числовій множині D називається *функціональним рядом*: $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Якщо взяти деяке число $x_0 \in D$ і у функціональному ряді покласти $x = x_0$, то отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Цей ряд може бути як збіжним, так і розбіжним. Якщо він збіжний, то точку x_0 називають *точкою збіжності функціонального ряду*, якщо є розбіжним, то x_0 – *точка розбіжності функціонального ряду*. Множину всіх точок збіжності функціонального ряду називають його *областю збіжності*.

Частинна сума функціонального ряду є функцією від x і визначається за аналогією з частинною сумою числового ряду:

$$S_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)=\sum_{i=1}^{n}u_i(x).$$

У кожній точці x, що належить області збіжності функціонального ряду $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, існує скінченна границя $\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$, яку називають *сумою функціонального ряду*: $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$.

Відомо, що сума скінченного числа неперервних функцій є неперервною. Крім того, суму скінченного числа доданків можна почленно диференціювати та інтегрувати. Проте ці властивості не завжди виконуються для сум нескінченного числа функцій, тобто для функціональних рядів, але вони зберігаються для рівномірно збіжних функціональних рядів.

Функціональний ряд називають *рівномірно збіжним* на множині D, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число N, яке залежить лише від ε і не залежить від x, що для всіх $n > N$ і для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|r_n(x)| < \varepsilon$.

Рівномірна збіжність функціонального ряду означає, що його суму $S(x)$ на множині D можна наближено, з наперед заданою точністю замінити однією й тією ж самою частинною сумою $S_n(x)$ незалежно від значення $x \in D$.

Рівномірно збіжні функціональні ряди мають важливі властивості, основні з яких сформулюємо тут без доведення.

1. Сума членів рівномірно збіжного на деякому проміжку ряду неперервних функцій є функцією, неперервною на цьому проміжку.

2. Якщо на відрізку $[a; b]$ функціональний ряд рівномірно збіжний і члени ряду неперервні на цьому відрізку, то його можна почленно інтегрувати у межах від α до β, де $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$:

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}u_n(x)dx.$$

3. Якщо функціональний ряд збіжний на відрізку $[a; b]$, а його члени мають неперервні похідні $u_n'(x)$, то заданий ряд можна почленно диференціювати:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{du_n(x)}{dx}.$$

Для дослідження функціонального ряду на рівномірну збіжність використовують наступну достатню умову рівномірної збіжності.

Теорема Вейєрштрасса: Функціональний ряд є абсолютно та рівномірно збіжним на відрізку $[a;\ b]$, якщо існує знакододатний збіжний числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, такий, що $|u_n(x)| \le a_n$.

Степеневі ряди

Степеневим рядом називають ряд виду:

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

де a_0, a_1, … , a_n – *коефіцієнти степеневого ряду*, x_0 – *центр степеневого ряду*.

Властивості степеневих рядів

1. Теорема Абеля. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ збігається при $x = x_1$, то він є абсолютно збігається для всіх значень x, що задовольняють нерівності $|x| < |x_1|$, а якщо степеневий ряд розбігається при $x = x_2$, то він розбігається для всіх x, що задовольняють нерівності $|x| < |x_2|$.

2. Якщо степеневий ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ при деяких $x \ne 0$ збігається, а при інших x розбігається, то існує і тільки одне, додатне число R таке, що степеневий ряд при $|x| < R$ збігається абсолютно, а при $|x| > R$ розбігається. При $x = \pm R$ ряд може як збігатися, так і розбігатися. Число $R > 0$ називається *радіусом збіжності* степеневого ряду. Інтервал $(-R;\ R)$ називається *інтервалом збіжності степеневого ряду.*

Радіус збіжності степеневого ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ визначаємо за формулами:

- $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right|$;
- $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Питання про збіжність степеневого ряду при $x = \pm R$ вирішується для кожного ряду окремо.

Радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ визначається за тими ж формулами. Інтервал збіжності такого ряду знаходять з нерівності $|x-x_0| < R$, тобто цей інтервал має вигляд $(x_0 - R; x_0 + R)$

3. Якщо степеневий ряд збігається при $x = \pm R$ (необов'язково абсолютно), то він збігається абсолютно та рівномірно в інтервалі $[-r; r]$, який цілком міститься у інтервалі збіжності $(-R; R)$. (Якщо степеневий ряд розбігається при $x = \pm R$, то степеневий ряд на $(-R; R)$ не може збігатися рівномірно.)

4. Сума степеневого ряду для всіх значень x із інтервалу збіжності $(-R; R)$ є неперервною функцією.

5. Степеневий ряд можна почленно диференціювати та інтегрувати в інтервалі збіжності $(-R; R)$. Зокрема, степеневий ряд, який отримуємо при диференціюванні або інтегруванні даного ряду має такий же інтервал збіжності.

6. Якщо $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ і $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, то для будь-якого x з інтервалу збіжності обох степеневих рядів можна побудувати збіжні ряди:

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n ;$$

$$f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m \cdot b_{n-m} \right) x^n .$$

Розвинення функцій у степеневі ряди

Якщо функція $f(x)$ в деякому околі точки x_0 має похідні довільного порядку, то функцію можна розвинути в околі точки x_0 у степеневий ряд, який називають *рядом Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n .$$

Тут під похідною нульового порядку розуміють саму функцію.

Частинним випадком ряду Тейлора є ряд Маклорена, для якого $x_0 = 0$.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ у інтервалі $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ можна розвинути у степеневий ряд за степенями $(x - x_0)$, то це розвинення є єдиним і воно є рядом Тейлора для цієї функції.

Теорема 2. Для того, що ряд Тейлора збігався у проміжку $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ до функції $f(x)$, необхідно і достатньо, щоб у цьому інтервалі функція $f(x)$ мала похідні всіх порядків і залишковий член її формули Тейлора $R_n(x)$ прямував до нуля при $n \to \infty$ при будь-якому x з інтервалу $(x_0 - R;\, x_0 + R)$.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ у інтервалі $(x_0 - R;\, x_0 + R)$ має похідні всіх порядків та існує число $M > 0$, таке, що $|f^{(n)}(x)| < M$ при будь-якому x з інтервалу $(x_0 - R;\, x_0 + R)$, то цю функцію можна розвинути у ряд Тейлора.

Ряд Маклорена для деяких функцій

- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ для всіх $|x| < 1$.
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.
- $\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$ для $|x| < \frac{\pi}{2}$.
- $\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!\, x^{2n+1}}{4^n n!^2 (2n+1)}$ для всіх $|x| < 1$.
- $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$.
- $\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ для всіх $|x| < 1$.
- $\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
- $\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

- $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$
  $+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^3$ для всіх $|x|<1$.
- $\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!^2 4^n}x^n$ для всіх $|x|\le 1$.
- $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ для всіх $|x|<1$.

Застосування степеневих рядів

Обчислити значення функції. Розглянемо наближене обчислення значень функцій за допомогою степеневих рядів. Нехай треба обчислити значення функції $f(x)$ при $x = x_0$. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути у степеневий ряд у інтервалі $(-R; R)$ і при цьому $x_0 \in (-R; R)$, то точне значення $f(x_0)$ дорівнює сумі цього ряду при $x = x_0$, а наближене значення – частинній сумі. Похибка такого наближення $|f(x_0) - S_n(x)|$ дорівнює абсолютній величині залишкового члена ряду: $|f(x_0) - S_n(x)| = |r_n(x_0)|$.

Якщо ряд для $f(x_0)$ є знакопочережним, то, за ознакою Лейбніца, $|r_n(x_0)| < |u_{n+1}(x_0)|$. Для довільних рядів величину похибки оцінюють наступним чином:

$$|r_n(x_0)|\le \sum_{k=n+1}^{\infty}|u_k(x_0)|\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S,$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k$ – збіжний числовий ряд з додатними членами, сума якого S наперед відома (наприклад, це сума нескінченно спадної геометричної прогресії), і для якого $a_1 \ge |u_{n+1}(x_0)|$, $a_2 \ge |u_{n+2}(x_0)|, \ldots$.

Приклад 1. Обчислити з точністю до 0,001 значення $\sin 18°$.

Розв'язання. Використаємо ряд Маклорена для $\sin(x)$:

$\sin(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $x\in(-\infty;+\infty)$. При $x = 18° = \pi/10$ отримаємо:

$$\sin(\pi/10)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 10^{2n+1}}.$$

Це знакопочережний ряд, тому $|r_n(\pi/10)| < |u_{n+1}(\pi/10)| = \pi^{2n+1}/(2n+1)!/10^{2n+1}$. Нерівність $\dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!\cdot 10^{2n+1}} < 0{,}001$ виконується вже при $n = 2$, тому для досягнення заданої точності достатньо взяти суму $u_0 + u_1$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) \approx \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{6\cdot 10^3} \approx 0{,}309\,.$$

Приклад 2. Обчислити з точністю до 0,001 число e.

Розв'язання. Застосуємо ряд: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Підставивши сюди $x = 1$, отримуємо ряд з додатними членами: $e = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/n!$. Оцінимо n-й залишок цього ряду:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1 + \frac{1}{(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\cdot\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1 - 1/(n+1)} = \frac{1}{n\cdot n!}$$

Безпосередньою перевіркою впевнюємося у тому, що нерівність $1/n/n! < 0{,}001$ при $n \geq 6$, тому для досягнення заданої точності 0,001 достатньо взяти частинну суму ряду S_6:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} \approx 2{,}71(6)\,.$$

Розглянемо застосування степеневих рядів до наближеного обчислення визначених інтегралів. Нехай потрібно обчислити визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, причому первісна підінтегральної функції не виражається скінченним числом елементарних функцій, або ж інтеграл складний для обчислення. Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути в степеневий ряд, що рівномірно збігається на відрізку інтегрування $[a; b]$, то для обчислення заданого інтеграла можна скористатися властивістю про по членне інтегрування цього ряду. Похибку обчислень визначають так само, як і при обчисленні значень функцій.

Приклад 3. Обчислити з точністю до 0,001 інтеграл $\int\limits_0^{1/3} \exp\{-x^2\}dx$.

Розв'язання. Первісна підінтегральної функції не виражається скінченним числом елементарних функцій, тому для обчислення заданого інтегралу представимо $\exp\{-x^2\}$ у вигляді степеневого ряду, для чого використаємо:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $x \in (-\infty; +\infty)$. Підставивши сюди замість x $-x^2$, отримаємо:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!},\ x \in (-\infty; +\infty).$$

Інтегруємо цей ряд почленно у межах від 0 до 1/3. Маємо:

$$\int_0^{1/3}\exp\{-x^2\}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{1/3}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)n!}\Bigg|_0^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{2n+1}(2n+1)n!}.$$

Отримали збіжний знакопочережний ряд. Знайдемо кількість членів цього ряду, які потрібно скласти, щоб отримати суму ряду з точністю до 0,001. За ознакою Лейбніца $|r_n| < |u_{n+1}| < 1/(3^{2n+1}\cdot(2n+1)\cdot n!) < 0{,}001$. Послідовно підставляючи у цю нерівність різні значення n, отримуємо, що ця нерівність виконується вже при $n = 2$. Отже, для досягнення заданої точності достатньо 2 доданка:

$$\int_0^{1/3}\exp\{-x^2\}dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^3\cdot 3\cdot 1!} \approx 0{,}321.$$

Приклад 4. Написати у вигляді ряду розв'язання рівняння $y'' + xy = 0$ з початковими умовами $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$$

Усі похідні невідомої функції $y^{(n)}(0)$ знайдемо з диференціального рівняння послідовно його диференціював і підставив відомі похідні:

		$y(0) = 1;$
		$y'(0) = 0;$
$y'' + xy = 0,$	$y''(0) = -0\cdot y(0) = -0\cdot 1,$	$y''(0) = 0;$
$y''' + xy' + y = 0,$	$y'''(0) + 0\cdot 0 + 1 = 0,$	$y'''(0) = -1;$
$y^{(4)} + xy^{(2)} + 2y^{(1)} = 0,$	$y^{(4)}(0) + 0\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0,$	$y^{(4)}(0) = 0;$
$y^{(5)} + xy^{(3)} + 3y^{(2)} = 0,$	$y^{(5)}(0) + 0\cdot(-1) + 3\cdot 0 = 0,$	$y^{(5)}(0) = 0;$
$y^{(6)} + xy^{(4)} + 4y^{(3)} = 0,$	$y^{(6)}(0) + 0\cdot 0 + 4\cdot(-1) = 0,$	$y^{(6)}(0) = 4;$
$y^{(n)} + xy^{(n-2)} + (n-2)y^{(n-3)} = 0,$	$y^{(n)} + 0\cdot y^{(n-2)} + (n-2)y^{(n-3)} = 0,$	$y^{(n)} = (2-n)y^{(n-3)}.$

Підставимо найдені похідні в ряд Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\frac{y'''(0)}{3!}x^3+...=1-\frac{1}{3!}x^3+\frac{4}{6!}x^6-\frac{28}{9!}x^9+...$$

Ряд Фур'є

У природі та техніці розповсюджені процеси, які через певні проміжки часу повторюються. Такі процеси називають *періодичними*. Прикладами таких процесів є коливання. Моделюються періодичні процеси за допомогою періодичних функцій. прикладом такої функції є функція, яка описує просте гармонічне коливання: $x(t) = a\cdot\sin(\omega t+\varphi_0)$, де a – амплітуда коливання, ω – його циклічна частота, φ_0 – початкова фаза. Періодом функції є час, за який відбувається одне повне коливання: $T = 2\pi/\omega$. Функцію $x(t)$ називають *простою гармонікою*. Просту гармоніку можна представити також у вигляді лінійної комбінації тригонометричних функцій: $x(t) = a\cdot\cos(\omega t+\varphi_0) + b\cdot\sin(\omega t)$.

Коливання, утворені внаслідок накладання кількох простих гармонік, називають *складними гармонічними коливаннями*. Графік такого коливання може значно відрізнятися від графіків простих гармонік, що його утворюють.

Далі розглянемо задачу представлення довільного періодичного процесу за допомогою суми простих гармонік. У багатьох випадках для цього доведеться використовувати нескінченну кількість простих гармонік.

Тригонометричний ряд – ряд виду:

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos(x)+b_1\sin(x)+a_2\cos(2x)+b_2\sin(2x)+...+a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)+...=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right).$$

Дійсні числа a_0, a_n, b_n, $n = 1, 2, \ldots$ – коефіцієнти тригонометричного ряду.

Припустимо, що такий тригонометричний ряд на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$ рівномірно збігається до функції $f(x)$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\right).$$

Проінтегрувавши почленно цей ряд по відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$, отримаємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos(nx)dx+\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin(nx)dx\right).$$

Оскільки $\int_{-\pi}^{\pi}a_n\cos(nx)dx=\int_{-\pi}^{\pi}b_n\sin(nx)dx=0$, то маємо $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=a_0\pi$ і

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Вирази для коефіцієнтів a_n знайдемо, якщо помножимо обидві частини рівності на $\cos(kx)$ і проінтегруємо отриманий ряд почленно по відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$.

Враховуючи, що $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(kx)dx = 0,\ k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\cos(kx)dx = 0$ отримуємо:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)dx = a_n\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx.$$

Аналогічно, помноживши рівність на $\sin(kx)$ і проінтегрувавши почленно по відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$, знайдемо формулу для обчислення коефіцієнтів b_n:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx.$$

Нехай $f(x)$ – інтегровна функція на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$. Числа a_0, a_n, b_n, що визначаються знайденими формулами називають *коефіцієнтами Фур'є* функції $f(x)$. Сам тригонометричний ряд, коефіцієнтами якого є коефіцієнти Фур'є функції $f(x)$, називають *рядом Фур'є* цієї функції і позначають:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right).$$

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 1. Якщо функцію $f(x)$ можна представити на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$ у вигляді рівномірно збіжного на цьому відрізку тригонометричного ряду, то цей тригонометричний ряд єдиний і є рядом Фур'є для функції $f(x)$.

Теорема 2. (Достатня умова подання функції через її ряд Фур'є). Нехай періодична функція $f(x)$ періодом 2π є кусково-монотонною та обмежено на відрізку $[-\pi\,;\,\pi]$. Тоді ряд Фур'є функції $f(x)$ є збіжним на всій числовій осі. Сума цього ряду дорівнює значенню функції $f(x)$ у всіх точках її неперервності. Якщо x_0 – точка розриву функції $f(x)$, то сума ряду Фур'є у точці x_0 дорівнює середньому арифметичному односторонніх границь функції $f(x)$ у цій точці. У точках $x = \pm\pi$ сума ряду Фур'є набуває значень: $S(-\pi) = S(\pi) = 0{,}5(f(-\pi+0)+f(\pi-0)$

На відміну від розвинення функції у степеневий ряд, для чого потрібна її диференційовність довільне число разів, для розвинення функції у ряд Фур'є у цьому немає потреби. Тут достатньо лише, щоб ця функція була неперервною або мала на відрізку довжиною у період скінченну кількість точок розриву першого роду. Отже, клас функцій, які можна представити рядом Фур'є, є значно ширшим, ніж клас функцій, які можна подати у вигляді ряду Тейлора.

Якщо функцію $f(x)$ можна розвинути у ряд Фур'є, то частинні суми цього ряду, які називають *тригонометричними многочленами*, дають змогу знайти наближення цієї функції. Похибка цієї формули зменшується з збільшенням числа n, проте її оцінка є набагато складнішою, ніж оцінка похибки наближення функції за допомогою ряду Тейлора.

Задачі до теми ряди

Знайти часткову суму *n* перших членів ряду та найти суму ряду.

4.1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$

4.2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+1)}+\ldots$

4.3. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-21)\cdot(3n+1)}+\ldots$

4.4. $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+\ldots$

4.5. $\frac{1}{9}+\frac{2}{225}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2\cdot(2n+1)^2}+\ldots$

4.6. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{8}\right)+\ldots+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\cdot n^2}\right)+\ldots$

Знайти суму ряду

4.7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

4.8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+8^n}{24^n}$

4.9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-3^n}{15^n}$

4.10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+5)(n+6)}$

4.11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+9)(n+10)}$

4.12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$

Перевірити, чи виконується необхідна ознака збіжності ряду

4.13. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\ldots$

4.14. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots$

4.15. $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\frac{8}{81}+\ldots$

4.16. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{2^n}$

Дослідити ряди на збіжність за допомогою ознаки порівняння

4.17. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+\ldots$

4.18. $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$

4.19. $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot(n+4)}+\ldots$

4.20. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\ldots+\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$

4.21. $\frac{2}{3}+\frac{3}{8}+\ldots+\frac{n+1}{(n+2)\cdot n}+\ldots$

4.22. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\ldots+\frac{1+n}{1+n^2}$

Довести збіжність рядів за допомогою ознаки Даламбера

4.23. $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$

4.24. $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

4.25. $\tan\frac{\pi}{4}+2\tan\frac{\pi}{8}+\ldots+n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}+\ldots$

4.26. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}+\ldots$

4.27. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{n^2}{3^n}+\ldots$

4.28. $\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{3\cdot 6}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{3\cdot 6\cdot n!}+\ldots$

4.29. $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$

4.30. $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$

Дослідити ряди на збіжність за допомогою радикальної ознаки Коші

4.31. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{2n+1}\right)^n$

4.32. $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$

4.33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{((n+1)/n)^n}$

4.34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^{5n}$

4.35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2^n}{1+2^{2n}}\right)^n$

4.36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{n}\right)^{2n}$

Дослідити ряди на збіжність за допомогою інтегральної ознаки Коші

4.37. $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$

4.38. $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln^2 n}+\ldots$

4.39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{(4n+5)^3}}$

4.40. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n+1)^3}}$

4.41. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$

4.42. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$

4.43. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+n}{9+n^2}$

4.44. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/3}}$

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність ряди

4.45. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot 3^n}$

4.46. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

4.47. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln n}$

4.48. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{6n+5}$

4.49. $1-\frac{1}{3}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+...$

4.50. $1-\frac{1}{3^3}+...+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}+...$

4.51. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+...+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+...$

4.52. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-...+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Визначити інтервал збіжності степеневих рядів

4.53. $10x+100x^2+...+10^n x^n+...$

4.54. $x-\frac{1}{2}x^2+...+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+...$

4.55. $x+\frac{x^2}{20}+...+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+...$

4.56. $1+x+...+n!x^n+...$

4.57. $1+2x^2+...+2^{n-1}x^{2(n-1)}+...$

4.58. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2+1}x^n$

4.59. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$

4.60. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$

4.61. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n!}{(2n-1)(2n-1)!}x^{2n-1}$

4.62. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}x^n$

4.63. $x+4x^2+...+2^n x^n+...$

4.64. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^n$

Розкласти в ряд Маклорена функцію *f*(*x*) та вказати область збіжності отриманого ряду

4.65. $f(x)=\cos(3x)$.

4.66. $f(x)=x^3\,\mathrm{arctg}\,x$.

4.67. $f(x)=\sin(x^2)$.

4.68. $f(x)=x\cos\sqrt{x}$.

4.69. $f(x)=\cos(x-a)$.

4.70. $f(x)=\sin^2(x)$.

4.71. $f(x)=xe^x$.

4.72. $f(x)=1/\sqrt{e^x}$.

4.73. $f(x)=5^x$.

4.74. $f(x)=\dfrac{2}{1-3x^2}$.

4.75. $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

4.76. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$.

4.77. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

4.78. $f(x)=\ln\left(2-3x+x^2\right)$.

4.79. $f(x)=\ln\left(1-x+x^2\right)$.

4.80. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Розкласти функцію *f*(*x*) в ряд Тейлора в околиці точки x_0 та вказати область збіжності отриманого ряду

4.81. $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$.

4.82. $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$, $x_0=-2$.

4.83. $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}$, $x_0=3$.

4.84. $f(x)=\dfrac{1}{(x-3)^2}$, $x_0=1$.

4.85. $f(x)=\ln(5x+3)$, $x_0=2/5$.

4.86. $f(x)=\sqrt{x^3}$, $x_0=1$.

Знайти перші п'ять членів ряду Маклорена наступних функцій *f*(*x*)

4.87. $f(x)=\ln\left(1+e^x\right)$.

4.88. $f(x)=e^{\cos(x)}$

4.89. $f(x)=-\ln(\cos(x))$.

4.90. $f(x)=(1+x)^x$.

Виразити у формі ряду інтеграли використовуючи розклад в ряд підінтегральних функцій

4.91. $\int\dfrac{\sin x}{x}dx$.

4.92. $\int\dfrac{\cos x}{x}dx$.

4.93. $\int\dfrac{e^x}{x}dx$.

4.94. $\int\dfrac{e^x}{x^2}dx$.

4.95. $\int e^{-x^2}dx$.

4.96. $\int\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

4.97. $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

4.98. $\int\sqrt{1+x^3}\,dx$.

4.99. $\int\dfrac{dx}{1-x^9}$.

4.100. $\int\dfrac{\arccos x}{x}dx$

Обчислити інтеграли за допомогою степеневих рядів з точністю до 0,001

4.101. $\int\limits_0^1\sin\left(x^2\right)dx$.

4.102. $\int\limits_{0,3}^{0,5}\dfrac{1+\cos x}{x^2}dx$.

4.103. $\int\limits_{0,3}^{0,5}x^2\cos(3x)dx$.

4.104. $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right)dx$. 4.105. $\int\limits_0^{0,5} \ln\left(1+x^3\right)dx$. 4.106. $\int\limits_0^{0,2} \sqrt{x}e^{-x}dx$.

4.107. $\int\limits_0^{0,1} \ln(1-x)dx$. 4.108. $\int\limits_0^{0,25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$. 4.109. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{1+\frac{x^2}{4}}dx$.

4.110. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^3}$. 4.111. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}dx$. 4.112. $\int\limits_0^1 e^{-x^2/2}dx$.

Розв'язати диференціальне рівняння за допомогою степеневих рядів

4.113. $y' = xy + e^y$, $y(0) = 0$. 4.114. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 0{,}5$.

4.115. $y' = 2\cos x - xy^2$, $y(0) = 1$. 4.116. $y' = e^{3x} + 2xy^2$, $y(0) = 1$.

4.117. $y' = x^2 + xy + y^2$, $y(0) = 0{,}5$. 4.118. $y' = 2\sin x + xy,\ y(0) = 0$.

4.119. $y' = xy + \ln(x+y),\ y(1) = 0$. 4.120. $y'' = 2yy',\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.

4.121. $y''' = y'' + \left(y'\right)^2 + y^3 + x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 0{,}5$.

4.122. $y''' = ye^x - xy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 1$.

4.123. $y'' = xyy',\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$. 4.124. $4x^2y'' + y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0{,}5$.

4.125. $y'' = \frac{y'}{y} - \frac{1}{x},\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0$. 4.126. $y'' = e^y \sin y',\ y(\pi) = 1,\ y'(\pi) = \pi/2$.

Розкласти функцію ряд Фур'є в заданому інтервалі

4.127. $f(x) = -1$ в інтервалі $(-\pi, 0)$ та $y = 1$ в інтервалі $(0, \pi)$.

4.128. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в інтервалі $(0, \pi)$.

4.129. $f(x) = x^2$ в інтервалі 1) $(-\pi, \pi)$ та 2) $(0, \pi)$.

4.130. $f(x) = x^3$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

4.131. $f(x) = |x|$ в інтервалі $(-l, l)$.

4.132. $f(x) = e^x$ в інтервалі $(-l, l)$.

4.133. $f(x) = \operatorname{sh}(ax)$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

4.134. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \le x < 0 \\ x-1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$ в інтервалі $(-\pi, \pi)$.

Відповіді

До теми 1. Диференціальне числення

1.1. 108.	1.2. $-\pi$.	1.3. 1,25.	1.4. –7.
1.5. 25.	1.6. –3.	1.7. $-\infty$.	1.8. $+\infty$.
1.9. 0.	1.10. 1/9.	1.11. 0,125.	1.12. 1/3.
1.13. 4.	1.14. 0,5.	1.15. 1.	1.16. $+\infty$.
1.17. 0.	1.18. $+\infty$.	1.19. 0.	1.20. 0.
1.21. $+\infty$.	1.22. 0.	1.23. $+\infty$.	1.24. 0,5.
1.25. 9.	1.26. 0.	1.27. $+\infty$.	1.28. 1.
1.29. 1.	1.30. $+\infty$.	1.31. 2.	1.32. 2.
1.33. 0.	1.34. 1.	1.35. 2.	1.36. $+\infty$.
1.37. $-\infty$.	1.38. $-\infty$.	1.39. $+\infty$.	1.40. $-\infty$.
1.41. 0.	1.42. 0.	1.43. –0,25.	1.44. 0.
1.45. 1,5.	1.46. $+\infty$.	1.47. 0.	1.48. 1,5.
1.49. 4.	1.50. 1.	1.51. e^{-4}.	1.52. e^{-1}.
1.53. e^4.	1.54. 9.	1.55. 1/9.	1.56. 2.
1.57. 0,5.	1.58. –1.	1.59.	1.60.

1.59. $\dfrac{3dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 1.60. $\dfrac{-dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 1.61. $\dfrac{2}{3}x^{-1/3}dx$

1.62. $3^x\ln(3)dx$ 1.63. $\dfrac{dx}{x}$ 1.64. $\dfrac{5dx}{1+x^2}$

1.65. $\dfrac{3}{2}\sqrt{x}dx$ 1.66. $-\dfrac{6dx}{x^3}$ 1.67. $e^x dx$

1.68. $\dfrac{dx}{x\ln 3}$ 1.69. $\dfrac{dx}{x\ln 10}$ 1.70. $3\,\mathrm{ch}(x)dx$

1.71. $\mathrm{sh}(x)dx$ 1.72. $-\dfrac{dx}{x^2}$ 1.73. $\dfrac{dx}{2\sqrt{x^3}}$

1.74. $\dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2(x)}$ 1.75. $\left(2x\,\mathrm{tg}\,x + x^2\sec^2 x\right)dx$ 1.76. $\cos(x)dx$

1.77. $(1-\sin(x))dx$ 1.78. $\left(\cot x - \dfrac{x}{\sin^2 x}\right)dx$ 1.79. $\dfrac{dx}{2\sqrt{x-x^2}}$

1.80. $\dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{1-x^{2/3}}}$ 1.81. $\dfrac{2}{3}(x+3)^{-1/3}dx$ 1.82. $3^{\sin(x)}\ln(3)\cos(x)dx$

1.83. $\dfrac{2x-2}{x^2-2x+1}dx$ 1.84. $\dfrac{dx}{2(\sqrt{x}+\sqrt{x^3})}$ 1.85. $\dfrac{3}{2}\sqrt{\sin(x)}\cos(x)dx$

1.86. $\dfrac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}dx$ 1.87. $-\dfrac{dx}{2x\sqrt{\ln^3(x)}}$ 1.88. $-2xe^{-x^2}dx$

1.89. $\dfrac{dx}{(x+3)\ln 3}$ 1.90. $\dfrac{2xdx}{(x^2-1)\ln 10}$ 1.91. $\left(4x^3\operatorname{sh}x+x^4\operatorname{ch}x\right)dx$

1.92. $\left(\operatorname{ch}^4x+4x\operatorname{ch}^3x\operatorname{sh}x\right)dx$ 1.93. $\left(\operatorname{th}x+\dfrac{x}{\operatorname{ch}^2x}\right)dx$ 1.94. $2x\sec^2\left(x^2\right)dx$

1.95. $3x^2\sin(2x^3-2)dx$ 1.96. $\dfrac{1-\sin(x)}{2\sqrt{\cos(x)+x}}dx$ 1.97. $-\dfrac{\sin(x)dx}{2\sqrt{\cos(x)}}$

1.98. $\cot(x)dx$ 1.99. $\dfrac{\cos(\ln(x))}{x}dx$ 1.100. $\dfrac{e^xdx}{1+e^{2x}}$

1.101. $\dfrac{3\sqrt{x}dx}{2(1+x^3)}$ 1.102. $-e^{-x}\sec^2\left(e^{-x}\right)dx$ 1.103. $\left(\dfrac{3}{x}+\cot x\right)dx$

1.104. $\cos x(\ln\sin x+1)dx$ 1.105. $\left(3^x\ln 3+3x^2\right)dx$

1.106. $\left(3^{\sin x}\ln 3+3\sin^2x\right)\cos xdx$ 1.107. $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^5}}\right)\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+\ln x\right)dx$

1.108. $x^x(1+\ln x)dx$ 1.109. $\left(\cos^x x\ln\cos x-x\cos^{x-1}x\sin x\right)dx$

1.110. $\sqrt[x]{x^{1-2x}}(1-\ln x)dx$ 1.111. $2x^{\ln x-1}\ln xdx$

1.112. $\left(\ln^{x-1}(x)+\ln^x x\ln\ln x\right)dx$ 1.113. $\left(\cos xx^{\cos x-1}-x^{\cos x}\ln x\sin x\right)dx$

1.114. $\left(\dfrac{x\tan^{x-1}x}{\cos^2x}-\tan^x x\ln\tan x\right)dx$ 1.115. $2\dfrac{\sin x}{\cos^3x}$ 1.116. $-\dfrac{1}{x^2}$

1.117. $\dfrac{xdx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$ 1.118. $\dfrac{-2xdx}{1+2x^2+x^4}$

1.119. $(x-2)e^{-x}$ 1.120. $\left(\left(2-x^2\right)\sin x+4x\cos x\right)dx$

1.121. 0,32 1.122. 1,00 1.123. 1,25 1.124. 0,20 1.125. –0,11 1.126. 0,52

1.127. $\left(\ln 2x^{\ln 2-1}-yx^{-y-1}\right)dx-x^{-y}\ln xdy$ 1.128. $\dfrac{ydx}{y^2+x^2}-\dfrac{xdy}{y^2+x^2}$

1.129. $\dfrac{2\sin(x^2-y^2)}{3\sqrt[3]{\cos^2(x^2-y^2)}}(ydy-xdx)$ 1.130. $e^{-xy^2}\left(\left(1-xy^2\right)dx-2yx^2dy\right)$

1.131. $\dfrac{\cos x}{\sin x}dx-\dfrac{\sin x\cos y}{\sin^2y}dy$ 1.132. $e^{-3x}(2\cos 2ydy-3\sin 2ydx)$

1.133. $\left(3x^2+2xy+y^2\right)dx+\left(x^2+2xy\right)dy$ 1.134. $e^{-x}\left(1{,}5\sqrt{y}\operatorname{sh}\sqrt{y^3}dy-\operatorname{ch}\sqrt{y^3}dx\right)$

1.135. $x\sin^{x-1} y\cos y dy + \sin^{x} y \ln(\sin x) dx$

1.136. $\dfrac{\sqrt[y]{\operatorname{arctg}^{1-y}(x)}}{y(1+x^2)}dx - \dfrac{\sqrt[y]{\operatorname{arctg}(x)}\ln(\operatorname{arctg}(x))}{y^2}dy$

1.137. $-\dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x+y^2)^5}}(dx+2ydy)$

1.138. $\operatorname{ctg}(x-y)(dx-dy)$

1.139. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2+y^2}}(xdx-ydy)$

1.140. $\dfrac{3}{y}\sqrt[y]{x^{3-y}}dx - \dfrac{3\sqrt[y]{x^3}\ln x}{y^2}dy$

1.141. $\sin(2x+2y)(dx+dy)$

1.142. $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - y^3\right)dx + \left(\dfrac{4}{3\sqrt[3]{y}} - 3xy^2\right)dy$

1.143. $\dfrac{x^2dy - y^2dx}{(x-y)^2}$

1.144. $\operatorname{tg}(y)dx + x\sec^2(y)dy$

1.145. $y' = \dfrac{8}{1+2y}$ 1.146. $y' = \dfrac{1}{1+y^2}$

1.147. $y' = \dfrac{25}{4+2y}$ 1.148. $y' = -\dfrac{4+4y^2}{6+5y^2}$

1.149. $y' = \dfrac{3}{5-\cos(y)}$

1.150. $y' = \dfrac{3\cos^2(y)}{1-5\cos^2(y)}$

1.151. $y' = \dfrac{9t^2}{2\cos(t)-(2t+3)\sin(t)}$

1.152. $y' = -1{,}5$

1.153. $y' = 1/(3t^3)$

1.154. $y' = -2e^{6t}$

1.155. $y' = 2/(5t^{0{,}3})$

1.156. $y' = -0{,}5\operatorname{tg}(2t)$

1.157. $y_{\max}(0{,}5) = 2{,}25$; точок перегину нема.

1.158. $y_{\min}(1) = e$; точок перегину нема.

1.159. $y_{\min}(-1) = -1/e$; $y_{пер}(-2) = -0{,}27$.

1.160. $y_{\min}(2) = 0$; $y_{\max}(3{,}2) = 0{,}5625$; $y_{пер}(4{,}8) = 0{,}38(8)$.

1.161. $y_{\min}(1) = -2$; $y_{\max}(-2) = 25$; $y_{пер}(-0{,}5) = 11{,}5$.

1.162. Точок екстремуму нема; точок перегину нема.

1.163. $z_{\min}(-4;\ 1) = -1$.

1.164. Точок екстремуму нема.

1.165. $z_{max}(0;3) = 9$.

1.166. $z_{\min}(-1;1) = 0$.

1.167. $z_{\max}(4;-2) = 13$.

1.168. $x = \pm 1$ − вертикальна асимптота; $y = 0$ − горизонтальна асимптота.

1.169. $x = 0$ − вертикальна асимптота; $y = x + 2$ − похила асимптота.

1.170. $x=\pm 3$ – вертикальна асимптота; $y=0$ – горизонтальна асимптота.

1.171. $x=-2$ – вертикальна асимптота; $y=x-4$ – похила асимптота.

1.172. 0.	1.173. 0.
1.174. $\ln(3/7)$.	1.175. 0,3(3).
1.176. $\ln 2$.	1.177. $\delta z=0{,}01$; $\varepsilon=0{,}2\%$.
1.178. $\delta z=0{,}0008$; $\varepsilon=0{,}16\%$.	1.179. $\delta z=0{,}162$; $\varepsilon=6\%$.
1.180. $\delta z=0{,}75$; $\varepsilon=10{,}7\%$.	1.181. $\delta z=0{,}277$; $\varepsilon=4{,}2\%$.

До теми 2. Інтегральне числення

2.1.	1,5	2.2.	4	2.3.	3,6(6)	2.4.	2
2.5.	0,375	2.6.	0,69	2.7.	0,5	2.8.	0,5
2.9.	π/6	2.10.	π/4	2.11.	6,39	2.12.	–1,5
2.13.	–3	2.14.	1	2.15.	π/8	2.16.	0,5
2.17.	108,42	2.18.	π/6	2.19.	4	2.20.	0
2.21.	0	2.22.	20	2.23.	0,6931	2.24.	12,8

2.25.	$-\frac{1}{3}\cos(3x+1)+c$	2.26.	$\frac{5}{14}\sqrt[5]{(2x-1)^7}+c$	2.27.	$-\frac{1}{6}e^{-6x}+c$
2.28.	$\frac{1}{14}(2x-3)^7+c$	2.29.	$-\frac{2^{-7x}}{7\ln 2}+c$	2.30.	$\frac{1}{24}(3x+5)^8+c$
2.31.	$\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3}{2}x\right)+c$	2.32.	$\frac{1}{5}\ln(5x-1)+c$	2.33.	$0{,}25\tan(4x)+c$
2.34.	$-\frac{1}{6}e^{-6x+2}+c$	2.35.	$\ln\sqrt{2x+5}+c$	2.36.	$\frac{3^{4x+1}}{4\ln 3}+c$
2.37.	$\frac{1}{5}\arcsin(5x)+c$	2.38.	$\ln\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+c$	2.39.	$-\frac{2^{-3x}}{3\ln 2}+c$
2.40.	$-0{,}125\sqrt[3]{(2-3x)^8}+c$	2.41.	$-\frac{4}{9}\sqrt[4]{(1-3x)^3}+c$	2.42.	$-0{,}2\cos 5x+c$
2.43.	$-\sqrt{9-x^2}+c$	2.44.	$\ln\sqrt{\frac{5x-1}{5x+1}}+c$	2.45.	$\frac{2\cdot 3^{\sqrt{x}}}{\ln 3}+c$
2.46.	$\frac{3}{8}x+\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$	2.47.	$0{,}04\sqrt{25x^2-9}+c$	2.48.	$e^{-\cos x}+c$

2.49.	0,21.	2.50.	0,3(3).	2.51.	0,16(6).	2.52.	1.
2.53.	1,946.	2.54.	0,3(3).	2.55.	2.	2.56.	0,118.
2.57.	8,389.	2.58.	0,215.	2.59.	3.	2.60.	0,62.
2.61.	0,693	2.62.	0,785	2.63.	0,6(6)	2.64.	0,718
2.65.	7,026	2.66.	0,288	2.67.	0,386	2.68.	0,632

2.69. 0,649	2.70. 0,3(3)	2.71. 0,643	2.72. 0,641
2.73. 0,342	2.74. 0,128	2.75. 1	2.76. 2,097
2.77. 0,718	2.78. 13,388	2.79. –0,153	2.80. 0,718
2.81. 0,739	2.82. 1	2.83. 0,468	2.84. 0,264
2.85. 6,091	2.86. 0,285	2.87. 7,021	2.88. 1,339
2.89. ∞	2.90. ∞	2.91. ∞	2.92. 1,571
2.93. 1,571	2.94. ∞	2.95. ∞	2.96. 0,368
2.97. ∞	2.98. 0,5	2.99. 1,897	2.100. ∞
2.101. 2	2.102. ∞	2.103. ∞	2.104. –1
2.105. 1,772	2.106. 0,3(3)	2.107. 6,6(6)	2.108. 10
2.109. $i_0^2/2$	2.110. $i_0\left(1-e^{-\lambda t_0}\right)/\lambda$	2.111. 483,6 Вт	2.112. $5\cdot 10^3$ Дж
2.113. 4	2.114. 22,56	2.115. 0,25	2.116. 1,3(3)
2.117. 72	2.118. ≈5,056	2.119. 36	2.120. 20,83(3)
2.121. ≈2,2143	2.122. ≈11,456	2.123. 10,6(6)	2.124. 0,3(3)
2.125. ≈60,3398			

2.126. $0{,}1\ln\left|\dfrac{x-5}{x+5}\right|+c$.

2.127. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)+c$.

2.128. $\operatorname{arctg}(x+2)+c$.

2.129. $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x-3}{2}\right)+c$.

2.130. $\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+c$.

2.131. $\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\dfrac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+c$.

2.132. $\ln\sqrt{\dfrac{x^2-2}{x^2-1}}+c$.

2.133. $\ln\left|\dfrac{(x-1)^3}{x+2}\right|+c$.

2.134. $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+c$.

2.135. $\dfrac{1}{x}+\ln\left|\dfrac{x-2}{x}\right|+c$.

2.136. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+c$

2.137. $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x}{x-2}\right|-\dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)-\dfrac{1}{2(x-2)}+c$.

2.138. $x/2-\sin(6x)/12+c$.

2.139. $3x+4\sin x+\sin 2x+c$.

2.140. $\dfrac{3x}{2}+\cos 2x-\dfrac{\sin 4x}{8}+c$.

2.141. $\dfrac{3x}{8}+\dfrac{\sin 2x}{4}-\dfrac{\sin 4x}{32}+c$.

2.142. $\dfrac{x}{8}-\dfrac{\sin 4x}{32}+c$.

2.143. $\dfrac{3x}{128}-\dfrac{\sin 4x}{128}+1024+c$.

2.144. $\dfrac{x}{16}-\dfrac{\sin 4x}{64}+\dfrac{\sin^3 2x}{48}+c$.

2.145. $-\cos x+\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\dfrac{\cos^5 x}{5}+c$.

2.146. $\dfrac{\sin^3 x}{3}-\dfrac{\sin^5 x}{5}+c$.

2.147. $\dfrac{\sin^4 x}{4}-\dfrac{\sin^6 x}{6}+c$.

2.148. $\sin x-\sin^3 x+\frac{3}{5}\sin^5 x-\frac{1}{7}\sin^7 x+c$ 2.149. $7x+14\sin x+3\sin 2x-\frac{8}{3}\sin^3 x+c$

2.150. $-\frac{1}{\sin x}-\sin x+c$. 2.151. $\frac{1}{\cos x}+\cos x+c$.

2.152. $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x|+c$. 2.153. $\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+c$.

2.154. $\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+c$. 2.155. $\frac{1}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]+c$.

2.156. $\int\frac{dx}{\sin x-\sin(\pi/2-x)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sin(x-\pi/4)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right|+c$.

2.157. $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+\ln|\cos x|+c$. 2.158. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2}-\ln|\sin x|+c$.

2.159. $-\frac{1}{8}(\cos 4x+2\cos 2x)+c$. 2.160. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right)+c$.

2.161. $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+c$. 2.162. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(m-n)x}{m-n}-\frac{\sin(m+n)x}{m+n}\right)+c$.

2.163. $-\frac{\sin(4x)}{8}-\frac{\cos(6x)}{12}+c$. 2.164. $\arcsin\frac{x}{2}+c$.

2.165. $\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|+c$. 2.166. $\ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right|+c$.

2.167. $\arcsin\frac{x}{\sqrt{5}}+c$. 2.168. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+c$.

2.169. $\frac{1}{2}\left[x\sqrt{4-x^2}+4\arcsin\frac{x}{2}\right]+c$. 2.170. $2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x}{4}(2-x^2)\sqrt{4-x^2}+c$.

2.171. 1 2.172. $\pi/12$ 2.173. $\pi-2$. 2.174. $-\pi/16$.

2.175. $2/3a^{3/2}$ 2.176. 9 2.177. 0,5. 2.178. 9/4.

2.179. 6. 2.180. $\frac{abc(a+b+c)}{2}$.

2.181. $a^6/48$. 2.182. $a^{11}/110$

2.183. $\sqrt{5}\ln 2$. 2.184. 24.

2.185. $\frac{p^2}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right)$. 2.186. $4\pi a\sqrt{a}$.

2.187. $\frac{8a\pi\sqrt{2}}{3}$. 2.188. $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{3/2}-1\right]$.

2.189. 3. 2.190. Для всіх випадків 1. 2.191. $-2\pi ab$.

2.192. $3\sqrt{3}$. 2.193. 0. 2.194. 13. 2.195. $\frac{3}{16}\pi r\sqrt[3]{r}$.

До теми 3. Диференціальні рівняння

3.1. $y = 4x - \frac{x^3}{3} + c$.

3.2. $y = \frac{c}{1+x}, \ x \neq 1$.

3.3. $y = ce^x$

3.4. $x^2 + y^2 = \ln(cx^2)$.

3.5. $y = \sqrt[3]{c + 3x - 3x^2}$.

3.6. $y = 7 - 2e^{-x^4/4}$.

3.7. $y = e^{\sqrt{x}-2}$.

3.8. $y = -x$.

3.9. $r = -2\cos(\varphi)$.

3.10. $\sqrt{y} = x\ln|x| - x + 1$.

3.11. $y - 2x = cx^2(y + x)$.

3.12. $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \ln\left(c\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

3.13. $\ln|y| + \frac{x}{y} = c$.

3.14. $x^2 + y^2 = cy$.

3.15. $y = \pm x\sqrt{2\ln|cx|}$.

3.16. $y = xe^{1+cx}$.

3.17. $y - x = c\exp\left\{\frac{x}{y-x}\right\}$.

3.18. $x^2 - y^2 = cx$

3.19. $y = -x$.

3.20. $y = \frac{2x}{1-3x^2}$.

3.21. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$.

3.22. $y = xe^{-x/2}$.

3.23. $y = ce^{-2x} + 2x - 1$.

3.24. $y = e^{-x^2}\left(c + \frac{x^2}{2}\right)$.

3.25. $y = cx^2 e^{1/x} + x^2$.

3.26. $y = \frac{\ln c\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

3.27. $y = ce^{-x} + 0{,}5(\cos x + \sin x)$.

3.28. $y = \frac{x}{\cos x}$.

3.29. $y = \frac{e^x + ab - e^a}{x}$.

3.30. $y = \frac{x}{x+1}(x - 1) + \ln|x|$.

3.31. $y = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}\left[2 + x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right]}$.

3.32. $y = \frac{5}{3}e^{x^3} - \frac{1}{3}\left(2 + x^3\right)$.

3.33. $y = \frac{1}{x\ln cx}$.

3.34. $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + c}$.

3.35. $y = \frac{x}{c - \ln x}$.

3.36. $y^2 = \dfrac{1}{1+ce^{x^2}}$.

3.37. $y^3 = x - 2e^{1-x}$, $y \neq 0$.

3.38. $\dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{2}e^{2x^2} + x^2 + \dfrac{1}{2}$.

3.39. $x^4 - x^2y^2 + y^4 = c$.

3.40. $x + \operatorname{arctg}(y/x) = c$.

3.41. $xe^y - y^2 = c$.

3.42. $x^y = c$.

3.43. $x - y/x = c$.

3.44. $x^2 + 2x/y = c$.

3.45. $\left(x^2 + y^2\right)e^x = c$.

3.46. $xy - \ln y = c$.

3.47. $y = \dfrac{x^6}{6} - \sin(x) + c_1x + c_2$.

3.48. $y = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{2}\left(x^2 - 1\right) - \dfrac{x}{2}\ln\left(1 + x^2\right) + c_1x + c_2$.

3.49. $y = \dfrac{x^2}{2}\left[\ln x - \dfrac{3}{2}\right] + c_1x + c_2$.

3.50. $y = c_1x^2 + c_2$.

3.51. $y = c_1e^x + c_2 - x - x^2/2$.

3.52. $y = \dfrac{x^3}{3} + c_1x^2 + c_2$.

3.53. $y = c_1e^{c_2x}$.

3.54. $y\cos^2(x + c_1) = c_2$.

3.55. $y = c_1 \operatorname{tg}(c_1x + c_2)$, $c_1^2 > 0$.

3.56. $y = 3\ln x + 2x^2 - 6x + 6$.

3.57. $y = 1 - \cos 2x$.

3.58. $y = -\ln|\cos(x)|$.

3.59. $y = 3x(\ln|x| - 1) + 2$.

3.60. $y = e^x(x - 1) - 0{,}5ex^2 + 0{,}5e$

3.61. $y = \pi/2 - \cos x - x$

3.62. $y^2 = 4x + 4$.

3.63. $2y^2 = 1 + (2x + 1)^2$.

3.64. $4(17y - 1) = (17x + 8)^2$.

3.65. $y = c_1e^x + c_2e^{-2x}$.

3.66. $y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}$.

3.67. $y = c_1e^{4x} + c_2$.

3.68. $y = c_1\exp\left\{\left(1 + \sqrt{2}\right)x\right\} + c_2\exp\left\{\left(1 - \sqrt{2}\right)x\right\}$.

3.69. $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-4x/3}$.

3.70. $y = c_1\cos x + c_2\sin x$.

3.71. $y = e^{-3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$.

3.72. $y = e^x(c_1\cos(x/2) + c_2\sin(x/2))$.

3.73. $y = e^x(c_1 + c_2x)$.

3.74. $x = e^{2,5t}(c_1 + c_2t)$.

3.75. $y = e^{-x/4}(c_1 + c_2x)$.

3.76. $y = e^{-2x}(c_1 + c_2x)$.

3.77. $y = e^{-x}(c_1 + c_2x)$.

3.78. $y = c_1e^x + c_2e^{12x}$.

3.79. $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

3.80. $y = 4e^x + 2e^{3x}$.

3.81. $y = 3e^{-2x}\sin(5x)$.

3.82. $y = e^{-x/2}(2+x)$.

3.83. $S = e^{-t}(\cos t + 2\sin t)$.

3.84. $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$.

3.85. $y = 3e^{3x-3}(2-x)$.

3.86. $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} - 3(x^2 + x + 1{,}5)$.

3.87. $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} + \dfrac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$.

3.88. $y = (c_1 + c_2 x)e^{-x} - \dfrac{1}{4}e^x$.

3.89. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x/2} + e^x$.

3.90. $y = c_1 \cos ax + c_2 \sin ax + \dfrac{e^x}{a^2+1}$.

3.91. $y = (c_1 + c_2 x)e^{3x} + \dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{5}{27}x + \dfrac{11}{27}$.

3.92. $y = e^x(c_1 \cos ax + c_2 \sin ax) + x + 1$.

3.93. $y = \left(\dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{3x^2}{4} + c_1 + c_2 x\right)e^{-2x}$.

3.94. $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + \dfrac{1}{2\cos x}$.

3.95. $y = \left(c_1 - \dfrac{x}{2}\right)\cos 2x + \left(c_2 + \dfrac{1}{4}\ln(\sin 2x)\right)\sin 2x$.

3.96. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln\left(tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

3.97. $y = (1+x)e^{-3/2} + 2e^{-5x/2}$.

3.98. $y = e^x + x^2$.

3.99. $y = \dfrac{1}{3}\sin 2x - \dfrac{1}{3}\sin x - \cos x$.

3.100. $y = e^x(0{,}16\cos 3x + 0{,}28\sin 3x) + x^2 + 2{,}2x + 0{,}84$.

До теми 4. Ряди

4.1. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, $S = 1$.

4.2. $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$, $S = 1/2$.

4.3. $S_n = \dfrac{1}{3}\left(1 - \dfrac{1}{3n+1}\right)$, $S = 1/3$.

4.4. $S_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$, $S = 1$.

4.5. $S_n = \dfrac{1}{8}\left(1 - \dfrac{1}{(2n+1)^2}\right)$, $S = 1/8$.

4.6. $S_n = \arctan\dfrac{n}{n+1}$, $S = \pi/4$.

4.7. $S = 3/4$	4.8. $S = 9/14$	4.9. $S = 3/4$
4.10. $S = 0{,}2$	4.11. $S = 0{,}1$	4.12. $S = 1/6$
4.13. Ні	4.14. Так	4.15. Так
4.16. Так	4.17. Збігається	4.18. Збігається
4.19. Збігається	4.20. Розбігається	4.21. Розбігається
4.22. Розбігається	4.23. Збігається	4.24. Збігається

4.25. Збігається	4.26. Збігається	4.27. Збігається
4.28. Збігається	4.29. Збігається	4.30. Збігається
4.31. Збігається	4.32. Збігається	4.33. Розбігається
4.34. Збігається	4.35. Збігається	4.36. Розбігається
4.37. Розбігається	4.38. Збігається	4.39. Розбігається
4.40. Збігається	4.41. Розбігається	4.42. Збігається
4.43. Розбігається	4.44. Збігається	
4.45. Збігається абсолютно		4.46. Збігається умовно
4.47. Збігається умовно	4.48. Розбігається	4.49. Збігається умовно
4.50. Збігається абсолютно		
4.51. Збігається абсолютно		
4.52. Збігається умовно	4.53. $(-0{,}1;\ 0{,}1)$	4.54. $(-1;\ 1]$
4.55. $[-10;\ 10)$	4.56. $x=0$	4.57. $(-1/\sqrt{2};\ 1/\sqrt{2})$
4.58. $[-0{,}5;\ 0{,}5]$	4.59. $[-1;\ 1)$	4.60. $(-e;\ e)$
4.61. $(-\infty;\ \infty)$	4.62. $[-1;\ 1]$	4.63. $x=0$
4.64. $[-1;\ 1]$.		

4.65. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 5^{2n} x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.$

4.66. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+4}}{2n+1},\ |x|\le 1.$

4.67. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!},\ |x|<\infty.$

4.68. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(2n)!},\ |x|<\infty.$

4.69. $\sin(\alpha)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cos(\alpha)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.$

4.70. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},\ |x|<\infty.$

4.71. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!},|x|<\infty.$

4.72. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{2^n n!},|x|<\infty.$

4.73. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n \ln^n(5)}{n!},|x|<\infty.$

4.74. $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^2,|x|<1/\sqrt{3}.$

4.75. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2}(-x)^{n-1},|x|<1.$

4.76. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{n+2},|x|<1.$

4.77. $2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},|x|<1.$

4.78. $\ln(1-x)(2-x)=\ln 2-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+2^{-n}\right)\frac{x^n}{n},\ |x|<1.$

4.79. $\ln\frac{1+x^3}{1+x}=-2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)\frac{x^n}{n},\ |x|<1.$

4.80. $1-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4-\frac{225}{6!}x^6+...+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5...(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^{2n}$, $|x|<1$.

4.81. $-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n}, -4<x<0$.

4.82. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(x+2)^n, -3<x<-1$.

4.83. $\frac{1}{11}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{11}\right)^n(x-3)^n, -\frac{5}{2}<x<\frac{17}{2}$.

4.84. $\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}(x-1)^n, -1<x<3$.

4.85. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}5^n}{n}\left(x+\frac{2}{5}\right)^n, -\frac{7}{5}<x\le\frac{3}{5}$.

4.86. $1+3\left(\frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2^2\cdot2!}(x-1)^2-\sum_{n=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\frac{(-1)^n}{2^{n+2}\cdot(n+2)!}(x-1)^{n+2}\right), |x|\le1$.

4.87. $\ln2+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}-\frac{x^4}{192}+...$

4.88. $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-...\right)$.

4.89. $\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+...$

4.90. $1+x^2-\frac{x^3}{2}+\frac{5x^4}{6}+...$

4.91. $c+x-\frac{x^3}{3\cdot3!}+...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+..., |x|<\infty$.

4.92. $c+\ln|x|-\frac{x^2}{2\cdot2!}+\frac{x^4}{4\cdot4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n\cdot(2n)!}+..., x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4.93. $c+\ln|x|+x+\frac{x^2}{2\cdot2!}+...+\frac{x^n}{n\cdot n!}+..., x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4.94. $c-\frac{1}{x}+\ln|x|+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2\cdot3!}+...+\frac{x^n}{n\cdot(n+1)!}+..., x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

4.95. $c+x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5\cdot2!}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(n-1)!}+..., x\in(-\infty,+\infty)$.

4.96. $c+x-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^5}{5^2}-...+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)^2}+..., x\in[-1,1]$.

4.97. $c+x+\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^9}{9}+...+\frac{1\cdot3...(2n-3)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+..., x\in[-1,1]$.

4.98. $c+x+\frac{1}{2}\frac{x^4}{4}-\frac{1}{2\cdot4}\frac{x^7}{7}+...+(-1)^n\frac{1\cdot3...(2n-5)}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\frac{x^{3n-2}}{3n-2}+..., x\in[-1,1]$.

4.99. $c+x+\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{19}}{19}+...+\frac{x^{9n-8}}{9n-8}+..., x\in[-1,1]$.

4.100. $c+\frac{\pi}{2}\ln|x|-x-\frac{x^3}{18}-\frac{3x^5}{120}-...-\frac{(2n)!x^{2n+1}}{(2n+1)^2 4^n n!^2}-..., x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

4.101. 0,310. 4.102. 2,568. 4.103. 0,018. 4.104. 0,162.

4.105. 0,015. 4.106. 0,054. 4.107. 0,098. 4.108. 0,070.

4.109. 1,027. 4.110. 0,484. 4.111. 0,508. 4.112. 0,855.

4.113. $y = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \ldots$ 4.114. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}x^2 - \ldots$

4.115. $y = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ 4.116. $y = 1 + x + \frac{5}{2}x^2 + \ldots$

4.117. $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}x + \frac{3}{2^3}x^3 + \ldots$ 4.118. $y = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{11}{360}x^6 + \ldots$

4.119. $y = \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{6} + \ldots$ 4.120. $y = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{12}{5!}x^5 + \ldots$

4.121. $y = 1 + 2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{12}x^3 + \frac{29}{48}x^4 + \frac{25}{48}x^5 + \ldots$

4.122. $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + 0x^5 + \ldots$ 4.123. $y = 1 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{3x^5}{5!} + \ldots$

4.124. $y = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \ldots$

4.125. $y = 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} - \frac{(x-1)^4}{4!} + \frac{4(x-1)^5}{5!} + \ldots$

4.126. $y = 1 + \frac{\pi}{2}(x-\pi) + \frac{e}{2}(x-\pi)^2 + \ldots$

4.127. $\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$. 4.128. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}$ або $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$.

4.129. 1) $\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos(nx)}{n^2}$, 2) $\frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$.

4.130. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n}\right)\sin(nx)$. 4.131. $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right)}{(2n+1)^2}$.

4.132. $$\frac{e^l - e^{-l}}{2l} + l\left(e^l - e^{-l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{l^2 + n^2\pi^2} + l\left(e^l - e^{-l}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{l^2 + n^2\pi^2} =$$
$$= \operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) - \pi n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{l^2 + n^2\pi^2}\right].$$

4.133. $\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{a^2 + n^2}\sin(nx)$.

4.134. $\frac{\pi - 2}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} + \frac{\pi - 2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin((2n-1)x)}{(2n-1)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2nx)}{2n}$.

Навчальне видання

СТОРОЖЕНКО Ігор Петрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА

ЧАСТИНА II

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Навчальний посібник