МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

Харьковский государственный университет питания и торговли

А. Л. Фощан, А. А. Борисова, А. А. Борисов

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ИНОСТРАННЫХ СТУДЕНТОВ ПОДГОТОВИТЕЛЬНОГО ОТДЕЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Харьков
ХГУПТ
2016

УДК 51 (075,8)
ББК 22.1
Ф81

Рецензенты:
д-р техн. наук, проф. В. А. Потапов,
канд. физ.-мат. наук, проф. Ж. А. Крутовой

Рекомендовано к печати ученым советом Харьковского государственного университета питания и торговли, протокол №7 от 25.02.2016 г.

Фощан А. Л.
Ф65 Математика для иностранных студентов подготовительного отделения : учебно-методическое пособие / А. Л. Фощан, А. А. Борисова, А. А. Борисов – Х. : ХГУПТ, 2016. – 119 с.
ISBN

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов подготовительных факультетов. В нем изложены основные разделы курса элементарной математики, что полностью соответствует рабочей программе по математике для подготовительных факультетов для иностранных студентов.

В пособии представлены примеры, задачи, графический материал, что впоследствии помогает в формировании собственных устных или письменных высказываний учащихся. Пособие может быть использовано при обучении иностранных граждан – слушателей подготовительных факультетов, языковых курсов, имеющих начальную языковую подготовку, а также студентами-иностранцами первого курса для повторения лексического материала и обобщения знаний по элементарной математике.

УДК 51 (075,8)
ББК 22.1

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………………................................... 4

Урок 1. Натуральные числа ………………………………………….......................... 5

Урок 2. Дроби…………………………………………………………………………… 13

Урок 3. Целые числа. Рациональные числа ………………….……………….. 25

Урок 4. Возведение числа в степень.. 28

Урок 5. Извлечение корня. Иррациональные числа…………………………... 32

Урок 6. Алгебраические выражения…………………………………………… 37

Урок 7. Уравнения и системы уравнений……………………………………… 45

Урок 8. Неравенства……………………………………………………………... 54

Урок 9. Функции... 63

Урок 10. Геометрия.. 74

Урок 11. Тригонометрия……………………………………………………… 86

Урок 12. Показательная функция……………………………………………. 107

Урок 13. Логарифмы………………………………………………………….. 111

ЛИТЕРАТУРА………………………………………………………………… 118

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов, которые обучаются на подготовительных факультетах университетов, готовящих студентов для последующего обучения в вузах Украины. В пособии изложены основные разделы курса элементарной математики, что полностью соответствует рабочей программе по математике для подготовительных факультетов высших учебных заведений.

Пособие содержит тексты, лексико-грамматический материал, вопросы и упражнения, а также графический материал, позволяющий студентам-иностранцам освоить основы элементарной математики. В пособии представлены примеры, задачи, графики, которые помогут формировать собственные устные или письменные высказывания учащегося.

В пособии систематизированная подача курса элементарной математики для иностранных студентов. Студенты, приезжающие из разных стран мира, имеют различный уровень знаний по элементарной математике, поэтому главной задачей является возмещение пробелов в знаниях по элементарной математике и создание платформы необходимой математической терминологии на русском языке для последующего использования ее в научном стиле речи.

Пособие состоит из 13 тем. Содержание пособия определяется целями, которые стоят перед студентами в связи с их коммуникативными потребностями в учебно-профессиональной сфере общения. В зависимости от уровня подготовки учащихся и конкретных задач обучения возможно изменение последовательности подачи учебного материала и выборочное его использование.

Программа изучения дисциплины реализуется через проведение лекций, практических занятий, выполнение самостоятельных и контрольных работ.

Целью учебной дисциплины является формирование базовых математических знаний у иностранных студентов для решения задач в профессиональной деятельности, а также умений аналитически мыслить.

Основные задачи курса:

– формирование у студентов-иностранцев необходимого базового минимума теоретических знаний в области элементарной математики;

– развитие математического и логического мышления у студентов-иностранцев;

– выработка и активизация у студентов практических навыков применения теоретических знаний для решения профессиональных задач.

Урок № 1

НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Цифра и число

Слова и словосочетания

Русский	*Английский*	*Французский*
Цифра	digit, figure	chiffre
Знак	sign, mark	signe
Целое число	integer, whole number	nombre entier
Четные **Нечетные числа**	even uneven numbers	nombre pair impair
Считать – сосчитать – *что*?	calculate, count	compter
Обозначать – *что*?	mean – *what?*	signifier

Что? – это что?
Что? – обозначать что?

Целые числа: 0 (ноль), 1 (один), 2 (два), 3 (три), 4 (четыре), 5 (пять), 6 (шесть), 7 (семь), 8 (восемь), 9 (девять), 10 (десять), 11 (одиннадцать), 12 (двенадцать), 13 (тринадцать), 14 (четырнадцать), 15 (пятнадцать), 16 (шестнадцать), 17 (семнадцать), 18 (восемнадцать), 19 (девятнадцать), 20 (двадцать), 21 (двадцать один), 22 (двадцать два), 23 (двадцать три), 24 (двадцать четыре), 25 (двадцать пять), 26 (двадцать шесть), 27 (двадцать семь), 28 (двадцать восемь), 29 (двадцать девять), 30 (тридцать), ... 40 (сорок), ... 50 (пятьдесят), ... 60 (шестьдесят), ... 70 (семьдесят), ... 80 (восемьдесят), ... 90 (девяносто), ... 100 (сто), ... 200 (двести), ... 300 (триста), ... 400 (четыреста), ... 500 (пятьсот), ... 600 (шестьсот), ... 700 (семьсот), ... 800 (восемьсот), ... 900 (девятьсот), ... 1 000 (тысяча, одна тысяча, ... 1 000 000 (миллион, один миллион), ...

Математика – это наука. Арифметика – это раздел математики. Она изучает числа.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 … – это натуральные числа.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это также целые числа.

Число 0 (ноль) – это целое число, но не натуральное число.

Мы считаем предметы и называем целые натуральные числа.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это цифры. Цифры – это математические знаки.

Цифры обозначают числа. Мы пишем числа цифрами. 10 – это число. 1 и 0 обозначают число 10.

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 – это однозначные числа, потому что одна цифра (один знак) обозначает число.

Числа 10, 22, 35 … – это двузначные числа, потому что две цифры (два знака) обозначают эти числа.

Еще есть трехзначные числа – 456, 873 …, четырехзначные – 7 834, 9 065 …, пятизначные – 63 862 и другие.

Двузначные, трехзначные, четырехзначные, пятизначные – это многозначные числа.

4, 6, 8, 10, 12, 24, 38, 102, 264 … – это чётные числа.

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 23, 35, 79, 101, 283 … – это нечётные числа.

Вопросы:

1. Что такое математика?
2. Что изучает арифметика?
3. Какие цифры обозначают число 50?
4. Какая цифра обозначает число 0?
5. Сколько цифр вы знаете?
6. Почему 38 – это двузначное число?
7. Почему 2 010 – это четырехзначное число?

Читайте числа: 28, 37, 45, 59, 67, 71, 88, 94, 110, 257, 485, 796, 945, 1 037, 3 650, 7 009, 8 430, 24 789, 67 901, 80 049.

1000 одна тысяч**а**
2 000 две тысяч**и**
4 000 четыре тысяч**и**
5 000 пять тысяч
… **11** одиннадцать тысяч
… **20** двадцать тысяч

1.1. Математические знаки

Русский	*English*	*French*
Называться, называется	be called	être nommé s'appeler
Больше	more (than)	plus grand que supérieur à
Меньше	less, smaller	plus petit .que, moins
Равно	equal	égal, inférieur
Получать(-ся), получить(-ся), получает(-ся), получит(-ся)	to receive to obtain	recevoir, obtenir
Открывать, открыть	open	ouvrir
Закрывать, закрыть	close	fermer

Знак	Читаем знак	Называется знак	Выражения
+	**плюс** *(что?)*	знак сложения	**a** + **b** сумма чисел **a** и **b**
–	**минус** *(что?)*	знак вычитания	**a** – **b** разность чисел **a** и **b**
x	**умножить на** *(что?)*	знак умножения	**a** x **b** произведение чисел **a** и **b**
÷	**разделить на** *(что?)*	знак деления	**a** – **b** отношение чисел **a** к **b**
=	**равно** *(чему?),* **будет** *(что?),* **получится** *(что?)*	знак равенства	2**a** = **b**
≠	**не равно** *(чему?)*	знак неравенства	
>	**больше** *(чего?)*, **больше чем** *(что?)*	знак неравенства	**a** > **b** **a** больше, чем **b**
≥	**больше или равно** *(чему?)*	знак неравенства	**a** ≥ **b** **a** больше или равно **b**
<	**меньше** *(чего?)*, **меньше чем** *(что?)*	знак неравенства	**a** < **b** **a** меньше, чем **b**
≤	**меньше или равно** *(чему?)*	знак неравенства	**a** ≤ **b** **a** меньше или равно **b**
(...)		круглые скобки	
[...]		квадратные скобки	
{…}		фигурные скобки	
(	**открыть** *(что?)* **круглую скобку**		
[	**открыть** *(что?)* **квадратную скобку**		
{	**открыть** *(что?)* **фигурную скобку**		
)	**закрыть** *(что?)* **круглую скобку**		
]	**закрыть** *(что?)* **квадратную скобку**		
}	**закрыть** *(что?)* **фигурную скобку**		

1.2. Арифметические действия с натуральными числами

1) ***Сложение***. 3 + 4 = 7. Три плюс четыре равно семи. 3 и 4 – слагаемые, 7 – сумма, "+" – знак плюс, "=" – знак равно.

2) ***Вычитание***. 9 – 5 = 4. Девять минус пять равно четырём 9 – уменьшаемое 5 – вычитаемое, 4 – разность, "–" – знак минус.

3) ***Умножение***. 4 · 2 = 8 или 4 х 2 = 8. Четыре умножить на два равно восьми. 4 и 2 – множители, 8 – произведение,"·" или " х" – знак умножить.

4) ***Деление***. 8 : 4 = 2 или 8 ÷ 4 = 2. Восемь разделить на четыре равно двум. 8 – делимое, 4 – делитель, 2 – частное, "**:**" или "÷" – знак разделить.

Таблица умножения

×	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Порядок арифметических действий

1. Сначала выполняют действия умножения и деления, а затем сложения и вычитания.

<u>Пример.</u>
25 : 5 + 2 · 7 – 3 = 5 + 14 – 3 = 16.
Сначала выполняют действия в скобках, а затем за скобками.
<u>Пример.</u>
4 · (3 + 5 · 2) = 4 · (3 + 10) = 4 · 13 = 52.

( ) – скобки. Четыре умножить, скобка открывается, три плюс пять умножить на два, скобка закрывается, равно пятидесяти двум.

Задание для самостоятельной работы
Вычислить:
(34 : 2 – 5 · 3) · 3 + (18 : 9 + 4 · 3) : 7
(7 · 3 + 28 : 7) · 4 – (15 · 6 – 32 : 4) : 2
(5 + 14 : 2) : 2 + (10 + 42 : 7) : 4 – (81 : 9 + 56 : 8) : 8
[(135 – 15) · 5 + 10 · 12] : 8 – 60
[(124 – 48) : 4 – (48 + 16) : 16] : 5
[(72 : 9 + 7 · 8) · 3 – (14 · 3 – 63 : 7) · 2] : 3
[(4 + 8 · 5) : 11 + 5 · 4] : 6 + [(6 – 30 : 6) · 2 + 7 · 5] · 3

1.3. Законы сложения и умножения

1) ***Переместительный (коммутативный) закон сложения***. Для любых натуральных чисел a и b верно равенство: a + b = b + a. От перестановки слагаемых значение суммы не изменяется.

2) ***Сочетательный (ассоциативный) закон сложения.*** Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: (a + b) + c = a + (b + c). Значение суммы не изменится, если какую–либо группу слагаемых заменить их суммой.

3) ***Переместительный (коммутативный) закон умножения.*** Для любых натуральных чисел a и b верно равенство: a · b = b · a. От перестановки множителей значение произведения не изменяется.

4) ***Сочетательный (ассоциативный) закон умножения.*** Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: (a · b) · c = a · (b · c). Значение произведения не изменится, если какую–либо группу множителей заменить их произведением.

5) ***Распределительный (дистрибутивный) закон умножения.*** Для любых натуральных чисел a, b и c верно равенство: (a + b) · c = a · c + b · c. Чтобы умножить сумму на число, достаточно умножить каждое слагаемое на это число и сложить полученные произведения. Аналогично можно написать: (a – b) · c = a · c – b · c.

1.4. Признаки делимости натуральных чисел

Признак делимости на 2. Число делится на 2 (число можно разделить на 2), если последняя цифра числа 0, 2, 4, 6, 8.

Число, которое *делится* на 2, называется **чётным**.

Число, которое *не делится* на 2, называется **нечётным**.

Пример.

1) Числа 242, 408, 1480, 16 354, 27 590 на 2 делятся. Это чётные числа.

2) Числа 87, 371, 5 247, 47 305, 986 343 на 2 не делятся. Это нечётные числа.

Определите, какие из чисел делятся на 2, а какие нет: 37, 74, 265, 740, 7 549, 90 138.

***Признак делимости на* 3.** Число делится на 3 (число можно разделить на 3), если сумма его цифр делится на 3.

Пример.

1) Числа 87, 273, 1 584, 37 506 на 3 делятся.

2) Числа 53, 149, 8 491, 54 658 на 3 не делятся.

Определите, какие из чисел делятся на 3, а какие нет: 85, 93, 486, 971, 4 584, 76 590.

Признак делимости на 4. Число делится на 4 (число можно разделить на 4), если его две последние цифры образуют число, которое делится на 4.

Пример.

1) Числа 144, 512, 2 752, 24 868, 207 600 на 4 делятся.

2) Числа 478, 966, 8 743, 93 285, 202 706 на 4 не делятся.

Определите, какие из чисел делятся на 4, а какие нет: 146, 896, 3 972, 65 016, 837 526.

Признак делимости на 5. Число делится на 5 (число можно разделить на 5), если его последняя цифра 0 или 5.

Пример.

1) Числа 55, 260, 3 865, 9 600, 48 565 на 5 делятся.

2) Числа 68, 931, 6 453, 56 439, 733 354 на 5 не делятся.

Определите, какие из чисел делятся на 5, а какие нет: 465, 874, 9 560, 56 405, 702 653.

Признак делимости на 9. Число делится на 9 (число можно разделить на 9), если сумма его цифр делится на 9.

Пример.

1) Числа 81, 252, 954, 7 641, 48 528 на 9 делятся.

2) Числа 46, 381, 867, 2 048, 95 647 на 9 не делятся.

Определите, какие из чисел делятся на 9, а какие нет: 72, 642, 945, 7 326, 83 459.

Признак делимости на 10. Число делится на 10 (число можно разделить на 10), если его последняя цифра 0.

Пример.

1) Числа 100, 580, 8 560, 465 900 на 10 делятся.

2) Числа 64, 742, 6 945, 93 645 на 10 не делятся.

Признак делимости на 25. Число делится на 25 (число можно разделить на 25), если его две последние цифры 00, 25, 50, 75.

Пример.

1) Числа 200, 950, 6 725, 84 675 на 25 делятся.

2) Числа 974, 8 456, 20 147, 946 324 на 25 не делятся.

1.5. Разложение натурального числа на простые множители

Простым числом называют такое натуральное число, которое делится только на 1 и само на себя.

<u>Пример</u>. Простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ...

Составным числом называют такое натуральное число, которое делится не только само на себя и на 1, но и на другие натуральны числа.

<u>Пример.</u> Составные числа: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

Задание для самостоятельной работы

1. Записать все простые числа до 50
2. Записать все составные числа до 50

ТЕОРЕМА *(Основная теорема арифметики):* Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители.

<u>Пример.</u>

	300,00	2,00			252,00	2,00	
	150,00	2,00			126,00	2,00	
	75,00	3,00			63,00	3,00	
1)	25,00	5,00	,поэтому 300 = 2·2·3·5·5	2)	21,00	3,00	,поэтому 252 = 2·2·3·3·7
	5,00	5,00			7,00	7,00	
	1,00				7,00		

Задание для самостоятельной работы.

Разложить на простые множители числа: 342, 540, 630, 711, 2 025.

1.6. Наибольший общий делитель

Делителем числа *а* называют такое число *b*, на которое число *а* делится.

<u>Пример</u>. 1) Число 9 – делитель числа 126: 126 ÷ 9 = 14.

2) Число 42 – делитель числа 126: 126 ÷ 42 = 3.

Пусть даны два числа 60 и 72.

Делители 60: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.

Делители 72: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72.

Общие делители чисел 60 и 72: 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Наибольший (самый большой) делитель чисел 60 и 72 равен 12. Записывают так: НОД (60; 72) = 12.

Наибольший общий делитель (НОД) *двух или нескольких чисел* – это наибольшее число, на которое эти числа делятся.

НОД двух или нескольких чисел равен произведению общих простых множителей этих чисел.

<u>Пример.</u> Найти НОД (70; 84). Разложим 70 и 84 на простые множители: 70 = 2 · 5 · 7, 84 = 2 · 2 · 3 · 7. Общие простые множители 70 и 84 – число 2 и 7. Поэтому НОД (70; 84) = 7 · 2 = 14.

Задание для самостоятельной работы

Найти: НОД (48; 54), НОД (60; 84), НОД (126; 270), НОД (420; 548), НОД (30; 54; 102).

1.7. Наименьшее общее кратное

Пример. Пусть даны два числа 6 и 8. На 6 и 8 делятся числа: 24, 48, 72, 96, ... Наименьшее (самое малое) число, которое одновременно делится на 6 и 8 – это 24. Число 24 называют наименьшим общим кратным чисел 6 и 8 и записывают *НОК* (6; 8) = 24.

Наименьшее общее кратное (НОК) *двух или нескольких чисел* – это наименьшее число, которое делится на каждое из данных чисел.

НОК двух или нескольких чисел равен произведению всех простых множителей этих чисел.

Если $6 = 2 \cdot 3$, а $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$, то НОК (6; 8) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$.

Пример. Найти НОК (18; 24). Разложим 18 и 24 на простые множители: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Все простые множители 18 и 24 – это 2, 2, 2, 3, 3. Поэтому НОК (18; 24) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$.

Проверка: 72 : 18 = 4, 72 : 24 = 3.

Задание для самостоятельной работы

Найти: НОК (15; 25), НОК (28; 35), НОК (48; 72), НОК (12; 20; 28), НОК (30; 40; 50).

Контрольные вопросы

1. Какие числа называют натуральными?
2. Назовите порядок арифметических действий.
3. Сформулируйте законы сложения и умножения.
4. Назовите признаки делимости натуральных чисел на 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25.
5. Какие числа называют простыми, сложными?
6. Дайте определение наибольшего общего делителя и наименьшее кратного двух или нескольких чисел.

2. ДРОБИ

2.1. Обыкновенная дробь, виды обыкновенных дробей

Разделим единицу (1) на 5 равных частей и возьмём одну часть (рис.1). Получим одну пятую часть единицы: $\frac{1}{5}$ – *одна пятая* (часть 1), $\frac{1}{5}$ – дробь.

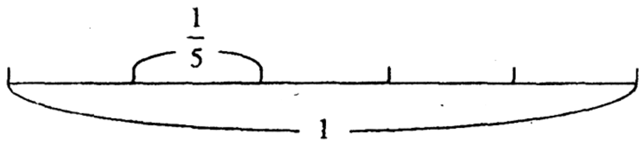


Рис. 1

Разделим единицу (1) на 7 равных частей и возьмём две части (рис. 2). Получим две седьмых части единицы: $\frac{2}{7}$ – *две седьмых* (части 1), $\frac{2}{7}$ – дробь.

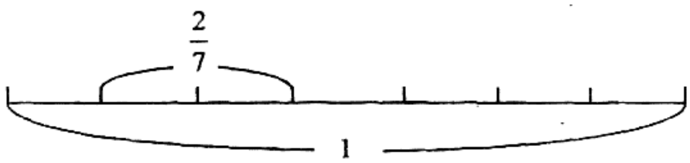


Рис.2

Обыкновенная дробь – это одна или несколько равных частей единицы.
Числитель обыкновенной дроби – это число над чертой.
Знаменатель обыкновенной дроби – это число под чертой.

В дроби $\frac{1}{5}$: число 1 – числитель, число 5 – знаменатель.

В дроби $\frac{2}{7}$: число 2 – числитель, число 7 – знаменатель.

Виды обыкновенных дробей

Правильная дробь – это дробь, у которой числитель меньше знаменателя.

Пример. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{2}{11}.$

Неправильная дробь – это дробь, у которой числитель или больше знаменателя, или равен ему.

Пример. $\frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{5}{5}, \frac{8}{5}, \frac{11}{6}, \frac{13}{6}, \frac{7}{7}, \frac{8}{7}, \frac{11}{8}, \frac{17}{8}, \frac{21}{11}.$

Смешанная дробь – это дробь, которая состоит из натурального числа и правильной дроби.

$1\frac{1}{2}$ – одна целая одна вторая, $3\frac{5}{7}$ – три целых пять седьмых.

Пример. $3\frac{1}{3},\ 5\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{4},\ 9\frac{3}{4},\ 11\frac{1}{5},\ 14\frac{4}{5},\ 20\frac{1}{6},\ 25\frac{5}{6},\ 31\frac{2}{7},\ 43\frac{6}{7}.$

2.2. Преобразование обыкновенных дробей

1) *Смешанную дробь можно привести к неправильной дроби*.

Пример. $1\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3+1}{3}=\frac{4}{3},\ 2\frac{7}{8}=\frac{2\cdot 8+7}{8}=\frac{23}{8},\ 5\frac{3}{11}=\frac{5\cdot 11+3}{11}=\frac{58}{11}.$

Задание для самостоятельной работы.

Привести смешанную дробь к неправильной дроби:

$3\frac{1}{3},\ 5\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{4},\ 9\frac{3}{4},\ 11\frac{1}{5},\ 14\frac{4}{5},\ 20\frac{1}{6},\ 25\frac{5}{6},\ 31\frac{2}{7},\ 43\frac{6}{7}.$

2) *Из неправильной дроби можно выделить целую часть и привести её к смешанной дроби.*

Пример. $\frac{3}{2}=1\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}=2\frac{1}{2},\ \frac{8}{3}=2\frac{2}{3},\ \frac{10}{3}=3\frac{1}{3},\ \frac{11}{4}=2\frac{3}{4},\ \frac{19}{5}=3\frac{4}{5}$

Задание для самостоятельной работы.

Привести неправильную дробь к смешанной дроби:

$\frac{5}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{4},\frac{25}{4},\frac{8}{5},\frac{32}{5},\frac{11}{6},\frac{13}{6},\frac{49}{6},\frac{8}{7},\frac{57}{7},\frac{11}{8},\frac{17}{8},\frac{67}{8},\frac{21}{11}.$

3) *Сокращение дроби – это деление числителя и знаменателя дроби на их общий делитель.*

Пример. $\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\frac{6}{8}=\frac{3}{4},\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\frac{12}{30}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5},\frac{45}{105}=\frac{15}{35}=\frac{3}{7}.$

Задание для самостоятельной работы

Сократить дробь: $\frac{9}{15},\frac{12}{18},\frac{15}{25},\frac{21}{28},\frac{28}{42},\frac{32}{48},\frac{36}{52},\frac{90}{120},\frac{84}{132},\frac{105}{153},\frac{120}{216},\frac{140}{350},\frac{150}{375}.$

2.3. Действия с обыкновенными дробями

2.3.1. Сложение и вычитание дробей

Знаменатели дробей равны между собой. При сложении дробей с равными знаменателями числитель первой дроби складывают с числителем второй дроби. Знаменатель оставляют тот же.

При вычитании дробей с равными знаменателями из числителя первой дроби вычитают числитель второй дроби. Знаменатель оставляют тот же.

Пример. $\frac{3}{7}+\frac{2}{3}=\frac{3+2}{7}=\frac{5}{7},\quad \frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}.$

Знаменатели дробей неравны между собой. Для того чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, нужно привести их к общему знаменателю, а затем выполнить действия по правилу сложения (вычитания) дробей с равным знаменателями. Наименьший общий знаменатель двух дробей равен НОК (наименьшему общему кратному) знаменателей.

Пример.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{3+2}{6}=\frac{5}{6}$;

2) $\frac{5}{6}-\frac{7}{9}=\frac{5}{2\cdot 3}-\frac{7}{3\cdot 3}=\frac{5\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 3}-\frac{7\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 2}=\frac{15}{18}-\frac{14}{18}=\frac{15-14}{18}=\frac{1}{18}$;

3) $2\frac{8}{15}+3\frac{7}{12}=2\frac{8}{3\cdot 5}+3\frac{7}{4\cdot 3}=2\frac{8\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 4}+3\frac{7\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 5}=2\frac{35}{60}+3\frac{35}{60}=2+3+\frac{32}{60}+\frac{35}{60}=5+\frac{67}{60}=$
$=5+1\frac{7}{60}=6\frac{7}{60}$;

4) $7\frac{2}{5}-4\frac{4}{7}=7\frac{2\cdot 7}{5\cdot 7}-4\frac{4\cdot 5}{7\cdot 5}=7\frac{14}{35}-4\frac{20}{35}=6+1\frac{14}{35}-4-\frac{20}{35}=6-4+1\frac{14}{35}-\frac{20}{35}=$
$=2+\frac{49}{35}-\frac{20}{35}=2+\frac{29}{35}=2\frac{29}{35}$.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить арифметические действия с дробями:

1. $\frac{3}{4}+\frac{2}{5}$;
2. $\frac{7}{9}-\frac{2}{3}$;
3. $5\frac{5}{12}+3\frac{7}{18}$;
4. $12\frac{8}{15}-9\frac{16}{25}$;
5. $41\frac{7}{8}+32$;
6. $26\frac{17}{24}-12\frac{25}{32}$;
7. $14\frac{5}{9}+21\frac{5}{12}$;
8. $46\frac{5}{14}-39\frac{11}{21}$.

2.3.2. Умножение дробей

Умножение правильных и неправильных дробей. Для того чтобы умножить две правильные или неправильные дроби, нужно:

а) числитель первой дроби умножить на числитель второй дроби и произведение записать в числителе;

б) знаменатель первой дроби умножить на знаменатель второй дроби и произведение записать в знаменателе.

Пример. 1) $\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 2}{5\cdot 7}=\frac{6}{35}$, 2) $\frac{3}{8}\cdot\frac{2}{9}=\frac{3\cdot 2}{8\cdot 9}=\frac{1\cdot 1}{4\cdot 3}=\frac{1}{12}$.

Умножение смешанных дробей. Для того чтобы умножить две смешанные дроби нужно:

1) привести смешанные дроби к неправильным дробям;

2) выполнить умножение неправильных дробей.

Пример.

1) $3\frac{2}{5}\cdot 1\frac{3}{7}=\frac{17}{5}\cdot\frac{10}{7}=\frac{17\cdot 10}{5\cdot 7}=\frac{34}{7}=4\frac{6}{7}$;

2) $3\frac{3}{8}\cdot 4\frac{2}{9}=\frac{27}{8}\cdot\frac{38}{9}=\frac{27\cdot 38}{8\cdot 9}=\frac{3\cdot 19}{4\cdot 1}=\frac{57}{4}=14\frac{1}{4}$.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить умножение дробей:

1. $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$;
2. $\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{14}$;
3. $7\frac{1}{8}\cdot 4\frac{2}{3}$;
4. $4\frac{4}{5}\cdot 3\frac{5}{6}$;
5. $5\frac{3}{5}\cdot 2\frac{1}{7}$;
6. $3\frac{1}{3}\cdot 5\frac{4}{7}$.

2.3.3. Деление дробей

Деление правильных и неправильных дробей. Для того чтобы разделить правильные или неправильные дроби нужно:

а) числитель делителя записать в знаменателе, а знаменатель делителя – в числителе (перевернуть дробь);

б) умножить дроби.

Пример.

1) $\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2\cdot 6}{3\cdot 5}=\frac{2\cdot 2}{1\cdot 5}=\frac{4}{5}$;

2) $\frac{8}{5}:\frac{6}{7}=\frac{8}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{8\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{4\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{28}{15}=1\frac{13}{15}$;

3) $\frac{2}{3}:\frac{10}{7}=\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{10}=\frac{2\cdot 7}{3\cdot 10}=\frac{1\cdot 7}{3\cdot 5}=\frac{7}{15}$;

4) $\frac{14}{5}:\frac{21}{15}=\frac{14}{5}\cdot\frac{15}{21}=\frac{14\cdot 15}{5\cdot 21}=\frac{2\cdot 3}{1\cdot 3}=2$.

Деление смешанных дробей. Для того чтобы разделить две смешанные дроби нужно:

а) привести смешанные дроби к неправильным дробям;

б) выполнить деление неправильных дробей.

Пример.

1) $1\frac{1}{2}:2\frac{3}{5}=\frac{3}{2}:\frac{13}{5}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{13}=\frac{3\cdot 5}{2\cdot 13}=\frac{15}{26}$;

2) $5\frac{1}{4}:1\frac{2}{5}=\frac{21}{4}:\frac{7}{5}=\frac{21}{4}\cdot\frac{5}{7}=\frac{21\cdot 5}{4\cdot 7}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 1}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$.

Задание для самостоятельной работы.

Выполнить деление дробей:

1. $\frac{2}{3}:\frac{5}{7}$;
2. $\frac{3}{8}:\frac{2}{7}$;
3. $\frac{8}{5}:\frac{7}{6}$;
4. $\frac{12}{7}:\frac{6}{5}$;
5. $3\frac{1}{5}:\frac{2}{3}$;
6. $7\frac{4}{8}:8\frac{2}{3}$.

Задание для самостоятельной работы.

Выполнить действия с дробями:

1. $\dfrac{\left(5\frac{1}{3}+1\frac{3}{4}\right):6\frac{1}{14}}{7\frac{1}{4}-2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{1}{2}}$;
2. $\dfrac{\left(3\frac{1}{3}+1\frac{3}{5}\right):3\frac{11}{21}}{9\frac{4}{5}-5\frac{1}{3}\cdot 1\frac{3}{4}}$;
3. $\dfrac{\left(4\frac{1}{6}+1\frac{2}{5}\right):20\frac{7}{8}}{4\frac{2}{3}-1\frac{5}{7}\cdot 2\frac{1}{2}}$;
4. $\dfrac{\left(1\frac{5}{7}+2\frac{1}{2}\right):7\frac{3}{8}}{5\frac{1}{5}-2\frac{2}{7}\cdot 2\frac{1}{4}}$;
5. $\dfrac{\left(2\frac{1}{7}+1\frac{3}{5}\right):14\frac{5}{9}}{5\frac{6}{7}-4\frac{1}{6}\cdot 1\frac{2}{5}}$;
6. $7\frac{4}{8}:8\frac{2}{3}$.

2.4. Десятичные дроби

2.4.1. *Определение и действия с десятичными дробями*

Десятичная дробь – это обыкновенная дробь, у которой знаменатель равен 10, 100, 1 000 и т. д.

$\frac{3}{10}=0{,}3$ – ноль целых три десятых;

$1\frac{13}{100}=1{,}13$ – одна целая тринадцать сотых;

$2\frac{139}{1\,000}=2{,}139$ – две целых сто тридцать девять тысячных;

$7\frac{9}{10\,000}=7{,}0009$ – семь целых девять десятитысячных.

Пример.

8,7; 13,8; 15,1; 20,6; 18,12; 25,48; 31,83; 39,01; 42,12.

Сложение и вычитание десятичных дробей. При сложении (вычитании) десятичных дробей числа записывают так, чтобы одинаковые разряды были записаны один под другим, а запятая – под запятой, и складывают (вычитают) как натуральные числа.

Пример.

$$1)\ \begin{array}{r} 3{,}5 \\ +\underline{2{,}9} \\ 6{,}4 \end{array};\qquad 2)\ \begin{array}{r} 1{,}284 \\ +\underline{2{,}657} \\ 3{,}941 \end{array};\qquad 3)\ \begin{array}{r} 7{,}2 \\ -\underline{5{,}6} \\ 1{,}6 \end{array};\qquad 4)\ \begin{array}{r} 8{,}372 \\ -\underline{5{,}756} \\ 2{,}616 \end{array}.$$

Задание для самостоятельной работы

Выполнить сложение и вычитание чисел:

1. 3,43 + 5,78;
2. 6,17 – 4,4;
3. 3,897 + 8,105;
4. 17,134 – 9,278.

Умножение десятичных дробей

Чтобы умножить одну десятичную дробь на другую, нужно выполнить умножение, не обращая внимания на запятые. В полученном произведении отделить справа от запятой столько цифр, сколько их стоит после запятой в обоих множителях в сумме.

Пример.

$$1)\ \begin{array}{r} 0{,}5 \\ \times\underline{0{,}9} \\ 0{,}45 \end{array};\qquad 2)\ \begin{array}{r} 1{,}3 \\ \times\underline{0{,}6} \\ 0{,}78 \end{array};\qquad 3)\ \begin{array}{r} 0{,}8 \\ \times\underline{2{,}6} \\ 48 \\ +\underline{16} \\ 2{,}08 \end{array};\qquad 4)\ \begin{array}{r} 1{,}6 \\ \times\underline{5{,}9} \\ 144 \\ +\underline{80} \\ 9{,}44 \end{array}.$$

Задание для самостоятельной работы

Выполнить умножение чисел:

1. 0,7 · 0,3;
2. 0,2 · 0,09;
3. 0,08 · 1,5;
4. 0,12 · 0,67;
5. 12,6 · 4,6;
6. 87,3 · 0,21.

Деление десятичных дробей

Пример 1. Разделим 8,42. Сначала делим на 2 целую часть числа. Получим 4. Делим на 2 по правилу деления натуральных чисел десятые, далее сотые, то есть 8,42 : 2 = 4,21.

Пример 2. Разделим 2,315 на 5. В целой части частного получим ноль (так как 2 на 5 не делится). Далее делим число на 5 по правилам деления натуральных чисел, то есть 2,315 : 5 = 0,463.

Пример 3. Разделим 4,27 на 1,6. Умножим делимое и делитель на 10. Получим 42,7 : 16 = 2,65.

Для того чтобы разделить число на десятичную дробь, нужно в делимом и делителе перенести запятую вправо на столько цифр, сколько цифр после запятой в делителе, а затем выполнить деление на натуральное число.

Задание для самостоятельной работы

Выполнить деление чисел:

1. 21,7 : 7
2. 25,2 : 9
3. 1,84 : 4
4. 24,5 : 1,4
5. 2,385 : 1,8
6. 8,15 : 1,25

2.4.2. Обращение десятичной дроби в обыкновенную и обыкновенной в десятичную

Периодические дроби

Чтобы обратить десятичную дробь в обыкновенную, необходимо в числителе дроби записать число, которое стоит после запятой, а в знаменателе – единицу с нулями, причём нулей должно быть столько, сколько имеется цифр справа от запятой.

Пример.

$1)\,0{,}8=\dfrac{8}{10};\ 2)\,0{,}17=\dfrac{17}{100};\ 3)\,0{,}003=\dfrac{3}{1\,000};\ \ 4)\,3{,}012=3\dfrac{12}{1\,000}.$

Задание для самостоятельной работы.

Обратить десятичную дробь в обыкновенную:

1. 0,3;
2. 0,11;
3. 0,103;
4. 0,004;
5. 3,83;
6. 7,0013.

Чтобы обратить обыкновенную дробь в десятичную, необходимо разделить числитель на знаменатель по правилу деления десятичной дроби на натуральное число.

Пример.

$1)\ \dfrac{3}{4}=3{,}0:4=0{,}75;\ 2)\ \dfrac{8}{25}=8{,}00:25=0{,}32.$

Задание для самостоятельной работы

Обратить обыкновенную дробь в десятичную:

1. $\dfrac{1}{2}$;
2. $\dfrac{1}{4}$;
3. $\dfrac{1}{5}$;
4. $\dfrac{2}{5}$;
5. $\dfrac{7}{8}$;
6. $\dfrac{1}{25}$;
7. $\dfrac{7}{25}$.

При делении числителя на знаменатель может получиться бесконечная десятичная дробь.

Пример. $1)\ \dfrac{1}{3}=0{,}333...;\ 2)\ \dfrac{2}{7}=0{,}28571...;\ 3)\ \dfrac{8}{11}=0{,}7272...$

Дробь называется ***периодической***, если в бесконечной десятичной дроби, начиная с некоторого разряда, цифры повторяются.

Пример.

1) 0,555...= 0,(5); 2) 0,4242...= 0,(42); 3) 4,0313131...= 4,0(31); 4) 5,123123...= 5,(123).

Любую обыкновенную дробь можно записать в виде либо конечной десятичной дроби, либо бесконечной периодической дроби.

Правило перевода бесконечной периодической дроби в обыкновенную дробь. Чтобы обратить периодическую дробь в обыкновенную дробь, нужно из числа, которое стоит до второго периода, вычесть число, которое стоит до первого периода и записать эту разность в числителе. В знаменателе нужно написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, а после девяток написать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Пример.

1) $0{,}555...=\frac{5-0}{9}=\frac{5}{9}$; 2) $0{,}4242...=\frac{42-0}{99}=\frac{42}{99}=\frac{14}{33}$;

3) $4{,}03131...=4+\frac{031-0}{990}=4+\frac{31}{990}=4\frac{31}{990}$;

4) $5{,}123123...=5+\frac{123-0}{999}=5+\frac{123}{999}=5\frac{41}{333}$;

5) $0{,}772727...=\frac{7727-77}{9900}=\frac{7650}{9900}=\frac{765}{990}=\frac{153}{198}=\frac{17}{22}$.

Задание для самостоятельной работы

Обратить бесконечную десятичную дробь в обыкновенную дробь:

1. 0,444...
2. 0,2727...
3. 0,3888...
4. 0,8333...
5. 0,91666...
6. 0,02777...
7. 0,208333...

Задание для самостоятельной работы

Выполнить действия с дробями:

1. $\dfrac{\left(1\frac{7}{9}+3{,}5\right):13\frac{4}{7}}{6{,}2666...-2\frac{2}{9}\cdot 2{,}75}$;
2. $\dfrac{12{,}8-3{,}333...\cdot 3{,}5}{(2{,}666...+1{,}25):5{,}875}$;
3. $\dfrac{\left(1\frac{5}{7}+2{,}5\right):7{,}375}{4{,}666...-1\frac{5}{7}\cdot 2{,}5}$;
4. $\dfrac{7{,}2-2\frac{2}{7}\cdot 2{,}25}{\left(2\frac{1}{7}+1{,}6\right):14{,}555...}$;
5. $\dfrac{9{,}8-5{,}333...\cdot 1{,}75}{(4{,}1666...+1{,}4):20{,}875}$;
6. $\dfrac{7{,}25-2{,}666....\cdot 2{,}5}{(2{,}666...+2{,}5):4\frac{3}{7}}$.

2.5. Отношение. Пропорция

Отношение числа a к числу b – это *частное* чисел ***a*** и ***b***, то есть $\frac{a}{b}$ или ***a:b***. Отношение $\frac{a}{b}$ означает, во сколько раз число ***a*** больше числа ***b*** или *какую часть* числа ***b*** составляет число ***a***. Число *a* – это предыдущий член, *b* – последующий член отношения.

Пример.

1) $\frac{8}{2}$ – отношение 8 к 2; 2) $\frac{3}{5}$ – отношение 3 к 5; 3) $\frac{1}{11}$ – отношение 1 к 11.

Пропорция – это равенство двух отношений, то есть $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

a и *d* – это крайние члены пропорции, *b* и *c* – это средние члены пропорции.

Пример.

1) $\frac{2}{7}=\frac{6}{21}$ 2 относится к 7, как 6 к 21; 2) $\frac{1{,}5}{3}=\frac{3}{6}$; 3) $\frac{1{,}4}{1{,}8}=\frac{4}{3}$.

Свойства пропорции

Произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов пропорции, то есть если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $a\cdot d=b\cdot c$.

Числа a, b, c, d составляют пропорцию, если $a\cdot d=b\cdot c$.

Из пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ вытекают следующие пропорции:

$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$, $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$, то есть в пропорции можно менять местами крайние и средние члены или те и другие одновременно.

Чтобы найти неизвестный средний (крайний) член пропорции, нужно произведение крайних (средних) членов разделить на известный средний (крайний) член пропорции:

из $\frac{a}{x}=\frac{c}{d}\Rightarrow$ (следует) $x=\frac{ad}{c}$; из $\frac{x}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow x=\frac{bc}{d}$

Пример.

1) $\frac{28}{x}=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{28\cdot 3}{7}=12$

2) $\frac{x}{3{,}5}=\frac{48}{21}\Rightarrow x=\frac{3{,}5\cdot 48}{21}=8$

Задание для самостоятельной работы

Найти ***x*** из пропорции:

1) $\frac{11{,}2}{4{,}5}=-\frac{28}{x}$; 2) $\frac{12-x}{8{,}4}=\frac{3{,}25}{2{,}1}$; 3) $\frac{2\frac{1}{2}:1\frac{1}{4}-1\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{x}=\frac{2\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}}{2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}}$;

4) $\dfrac{x}{2\frac{1}{2}\cdot 0{,}4+2\frac{2}{3}:1\frac{2}{3}}=\dfrac{1\frac{1}{3}+\frac{3}{4}}{2-\frac{3}{4}}$; 5) $\dfrac{93\frac{1}{12}-92\frac{1}{3}}{7{,}25-2\frac{2}{3}\cdot 2{,}5}=\dfrac{x}{\left(5\frac{1}{3}+1{,}75\right):6\frac{1}{14}}$;

6) $\dfrac{9{,}8-5\frac{1}{3}\cdot 1{,}75}{87\frac{1}{6}-86\frac{1}{2}}=\dfrac{\left(3\frac{1}{3}+1{,}6\right):3\frac{11}{21}}{x}$.

2.6. Процент числа

Процент числа – это сотая часть числа. Процент обозначается значком %. Например, 5%, 25%, 49%. Если число принять за 1, то 1% составляет 0,01 этого числа. 25% составляют 0,25 числа. Чтобы число процентов выразить в виде дроби, нужно число процентов разделить на 100. Например, 135% = 1,35; 2,7% = 0,027.

Нахождение процентов от числа. Чтобы найти ***a%*** от числа b, нужно число *b* умножить на *a* и разделить на 100. Например, 20% от 70 составляют $\dfrac{70\cdot 20}{100}=14$.

Пример.

1) 20% от 70 составляют $\dfrac{70\cdot 20}{100}=14$;

2) 25% от 84 составляют $\dfrac{84\cdot 25}{100}=21$.

Задание для самостоятельной работы

Найти:

1.	40% от 80	4.	12,5% от 48
2.	35% от 60	5.	17% от 92
3.	25% от 64	6.	7% от 52

Нахождение числа по его процентам. Если известно, что *a%* от числа *x* равно *b*, то число *x* можно найти из пропорции:

$a\% - b$

$100\% - x$ или $\dfrac{a}{100}=\dfrac{b}{x}$. Откуда $x=\dfrac{b}{a}\cdot 100$.

Пример.

1) Найти *x*, если 25% от *x* равно 5. Из пропорции

$5\% - 5$

$100\% - x$ найдем $x=\dfrac{5}{25}\cdot 100=20$.

2) Найти *x*, если 3% от *x* равно 4,2. Из пропорции

$3\%\ 4{,}2$

$100\% - x$ найдем $x=\dfrac{4{,}2}{3}\cdot 100=140$.

Задание для самостоятельной работы

Найти x, если:

1. 40% от x = 32;
2. 35% от x = 49;
3. 12,5% от x = 37,5;
4. 12% от x = 93.

Нахождение процентного отношения чисел. Чтобы найти сколько процентов от числа a составляет число b (то есть *x%)* нужно составить пропорцию: $\begin{matrix} a-100\% \\ b-x\% \end{matrix}$, откуда получим $x\% = \frac{b}{a} \cdot 100\%$.

<u>Пример.</u>

1) Найти, сколько процентов от 20 составляет число 2. Составим пропорцию $\begin{matrix} 20-100\% \\ 2-x\% \end{matrix}$, откуда $x\% = \frac{2}{20} \cdot 100\% = 10\%$.

2) Найти, сколько процентов от 18 составляет число 72. Составим пропорцию $\begin{matrix} 18-100\% \\ 72-x\% \end{matrix}$, откуда $x\% = \frac{72}{18} \cdot 100\% = 400\%$.

3) Найти, на сколько процентов число 15 меньше 20. Составим пропорцию и найдём, сколько процентов от 20 составляет 15:

$\begin{matrix} 20-100\% \\ 15-x\% \end{matrix}$, откуда $x\% = \frac{15}{20} \cdot 100\% = 75\%$. Найдём, на сколько процентов 15 меньше 20. Для этого из 100% вычтем 75%: 100% –75% = 25%.

4) Найти, на сколько процентов 30 больше 25. Составим пропорцию и найдем, сколько процентов от 25 составляет 30: $\begin{matrix} 25-100\% \\ 30-x\% \end{matrix}$, откуда $x\% = \frac{30}{25} \cdot 100\% = 120\%$. Найдём, на сколько процентов число 30 больше 25. Для этого из 120% вычтем 100%: 120% – 100% = 20%.

Задания для самостоятельной работы

Найти, сколько процентов составляет

1. 5 от 50
2. 12 от 60
3. 3,5 от
4. 1,05 от 0,7
5. 4,5 от 3,75
6. 0,8 от 0,64

Найти, на сколько процентов

1. 10 больше 5
2. 8,5 больше 3,4
3. 12,5 меньше 20
4. 12 больше 8
5. 5 меньше 10
6. 42 меньше 54

Контрольные вопросы

1. Дайте определение обыкновенной дроби.
2. Что такое числитель и знаменатель дроби?
3. Какая дробь называется правильной, неправильной, смешанной?
4. Сформулируйте правило сложения и вычитания обыкновенных дробей с равными и разными знаменателями.
5. Сформулируйте правило умножения и деления обыкновенных дробей.
6. Какая дробь называется десятичной?
7. Что называется отношением, пропорцией? Сформулируйте свойства пропорции.
8. Что называется процентом числа? Какие основные задачи на проценты вы знаете?

3. ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

3.1. Целые числа

Результат сложения и умножения натуральных чисел всегда является натуральным числом. Вычитание не всегда выполнимо, если оставаться в области натуральных чисел. Например, число, которое получено в результате вычитании (4 – 7) не является натуральным.

Для образования разности любых двух натуральных чисел необходимо расширить совокупность чисел, вводя *ноль* и *целые отрицательные числа* –1, –2, –3 ... –n, …

Натуральные числа называют также *целыми положительными числами*. Если хотят подчеркнуть, что данное число положительно, то перед ним ставится знак "+", но, как правило, пишут не +4, а просто 4 и т. д., перед отрицательными числами знак "–" ставится обязательно.

Число *ноль* не относится ни к отрицательным, ни к положительным числам. Числа n и -n называют противоположными.

Например, противоположными являются числа 3 и -3. Вся совокупность целых чисел -n, ..., –2, –1, 0, 1, 2,..., n, состоит из целых положительных (натуральных) чисел, целых отрицательных чисел и нуля.

Теперь, во множестве всех целых чисел, действие вычитания (так же, как и сложения) всегда выполнимо. При этом действие вычитания может быть сведено к сложению с числом, противоположным вычитаемому: $a – b = a + (–b), a – (–b) = a + b$.

<u>Пример.</u>

1) 18 – 21 = –3; 2) 71 – 71 = 0; 3) 43 – (–12) = 43 + 12 = 55.

Для умножения или деления целых чисел вводится *правило знаков*: если доли a и b – положительные, то $(–a) \cdot b = a \cdot (–b) = -ab$ или $(–a):b = a:(–b) = –(a:b)$.

В частности, $(–1) – a = -a$ или $a:(-1) = –a$.

Таким образом, произведение или частное двух чисел одного знака есть положительное число, двух чисел противоположного знака – отрицательное число.

Число, противоположное данному, равно произведению данного числа на минус единицу. Произведение любого числа на ноль равно нулю.

<u>Пример</u>.

1. (–3)·7 = -21 3. (–4) · (–8) = 32
2. 72:(–9) = –8 4. (–54):(–6) = 9

Задание для самостоятельной работы

Вычислить:

1. (–3)·(–5) – 17·(–4);
2. 4·(–12) – (–63):(–7);
3. (25 – 28)·(31 – 42) – (17 – 22)·(47 – 55);
4. 24:(–6) – (-28):(–4);
5. (38 – 53):(29 – 24) – (72 – 68)·(53 – 64);
6. (48 – 55)·(25 – 17) – (l5 – 96):(32 – 41);
7. [(46 – 91):(–9) – 56:(84 – 92)]·(–4) – (–13 – 11)·2

3.2. Рациональные числа

Рациональное число – это число, которое можно записать в виде отношения $\frac{a}{b}$, где числитель a – целое, а знаменатель b – натуральное число. Если a делится на b нацело, то рациональное число – целое; в противном случае рациональное число называется дробным. Оно считается положительным, если a – положительное, и отрицательным, если a – отрицательное.

К рациональным числам относятся:

- все целые числа;
- обыкновенные дроби, как положительные, так и отрицательные;
- конечные и бесконечные периодические десятичные дроби.

<u>Пример</u> рациональных чисел: 0; 2; –4; –8; $\frac{7}{9}$; $-\frac{4}{11}$; 1,3333...; 0,12.

На множестве рациональных чисел выполнимы все арифметические действия (кроме деления на ноль). Сумма, разность, произведение и частное рациональных чисел также являются рациональными числами. Правила действий над рациональными числами такие же, как и для целых чисел. Для сложения и умножения справедливы те же основные законы, что и для натуральных чисел.

<u>Пример.</u>

1) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{2-3}{6}=-\frac{1}{6}$;

2) $-\frac{5}{6}-\frac{2}{9}=\frac{-15-4}{18}=-\frac{19}{18}=-1\frac{1}{18}$.

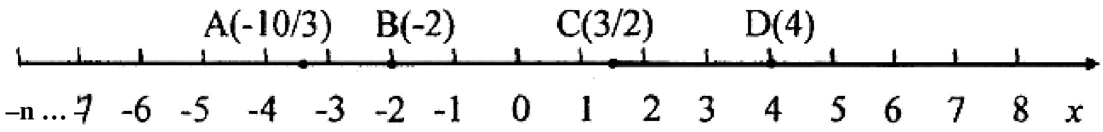
Задание для самостоятельной работы

Выполнить действия:

1. $\frac{3}{8}-2\frac{5}{6}$;
2. $1\frac{3}{7}\cdot 1{,}5-2\frac{1}{3}$;
3. $\left(-2\frac{2}{7}\right)\cdot 2{,}25-7{,}2$;
4. $2\frac{5}{9}-6\frac{7}{12}$;
5. $1\frac{5}{7}\cdot(-2{,}5)-4\frac{2}{3}$;
6. $\frac{3}{2}-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)+\left(-2\frac{7}{12}\right)$;
7. $\left(-1\frac{1}{3}\right)\cdot\left(4\frac{1}{6}-6\frac{1}{9}\right)-5\frac{1}{3}:\left(3\frac{3}{4}-2\frac{5}{8}\right)$.

3.3. Числовая ось (координатная прямая)

Числовая ось (координатная прямая) – это прямая линия, которая имеет начало отсчёта (точка 0), направление и единицу масштаба или масштабный отрезок. За положительное направление принято направление вправо от точки 0. Противоположное направление – отрицательное.



Рациональные числа изображают с помощью точек числовой оси. Целые числа изображают точками, которые получают откладыванием масштабного отрезка нужное число раз вправо от начала 0 в случае положительного целого числа и влево – в случае отрицательного. Ноль изображается начальной точкой 0. Дробные (рациональные) числа также изображают точками оси; например, чтобы построить точку, которая соответствует числу $-\frac{10}{3}=-3\frac{1}{3}$, нужно отложить влево от точки 0 три масштабных отрезка и еще одну третью часть масштабного отрезка (точка *A* на рисунке). Кроме точки *A* на рисунке показаны еще точки *B, C, D,* которые изображают числа –2; $\frac{3}{2}$; 4.

Целых чисел имеется бесконечное множество, но на числовой оси целые числа изображаются точками, которые расположены «редко». Целочисленные точки оси отстоят от соседних точек на единицу масштаба. Рациональные точки расположены на оси «густо». На любом, сколь угодно малом участке оси имеется бесконечно много точек, которые изображают рациональные числа.

Контрольные вопросы

1. Какие числа называют целыми, противоположными?
2. Сформулируйте правило умножения чисел с разными и одинаковыми знаками.
3. Какие числа называются рациональными?
4. Что такое числовая ось (координатная прямая)?
5. Как на числовой оси изображаются положительные и отрицательные числа?

4. ВОЗВЕДЕНИЕ ЧИСЛА В СТЕПЕНЬ

4.1. Степени с натуральным показателем

Степенью числа ***a*** с показателем ***n*** называется произведение множителей, каждый из которых равен ***a***:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n}$$

«a» в степени **«*n*»**,

где *a* – это основание степени; *n* – показатель степени;
a^2 – «*a* во второй степени», «*a* в квадрате», «*a* квадрат»;
a^3 – «*a* в третьей степени», «*a* в кубе", "*a* куб";
a^4 – "*a* в четвёртой степени", "*a* в степени четыре".

Пример.

$2^2 = 4$	$2^3 = 8$
$3^2 = 9$	$3^3 = 27$
$4^2 = 16$	$4^3 = 64$
$5^2 = 25$	$2^4 = 16$
$6^2 = 36$	$3^4 = 81$

***Задание для самостоятельной работы*.**
1) Написать квадраты натуральных чисел от 1 до 20.
2) Написать кубы и четвёртые степени натуральных чисел от 1 до 5.

Чётная степень отрицательного числа есть число положительное.

Пример.

$(-1{,}2)^2 = 1{,}44$	$(-0{,}5)^2 = 0{,}25$
$(-0{,}3)^2 = 0{,}09$	$(-3)^4 = 81$
$(-1{,}4)^2 = 1{,}96$	$(-2)^6 = 64$

***Нечётная степень отрицательного числ*а** есть число отрицательное.

Пример.

$(-2)^3 = -8$	$(-3)^3 = -27$
$(-2)^5 = -32$	$(-2)^5 = -32$

Любая степень положительного числа есть число положительное.
При возведении нуля в любую натуральную степень получим 0: $0^n = 0$.
При возведении единицы в любую степень получим 1: $1^n = 1$.

4.2. Свойства степеней

1) При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются, а основание остаётся прежним:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, и наоборот: $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

Пример.

$2^4 \cdot 2^3 = 2^{4+3} = 2^7 = 128$

$3^3 \cdot 3^2 = 3^{3+2} = 3^5 = 243$

2) При делении степеней с одинаковыми основаниями показатели вычитаются, а основание остаётся прежним:

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ и наоборот: $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

Пример.

$\frac{4^7}{4^4} = 4^{7-4} = 4^3 = 64$

$\frac{5^9}{5^5} = 5^{9-5} = 5^4 = 625$

3) При возведении степени в степень показатели степеней перемножаются, а основание остаётся прежним:

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ и наоборот: $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

Пример.

$(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

$(5^2)^2 = 5^{2 \cdot 2} = 5^4 = 625$

4) Степень произведения равна произведению степеней множителей:

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ и наоборот: $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$.

Пример.

$18^2 = (9 \cdot 2)^2 = 9^2 \cdot 2^2 = 81 \cdot 4 = 324$

$2^4 \cdot 5^4 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10\ 000$

5) Степень частного равна частному степеней делимого и делителя:

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ и наоборот $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Пример.

$\left(\frac{13}{10}\right)^2 = \frac{13^2}{10^2} = \frac{169}{100} = 1{,}69$

$\frac{48^4}{16^4} = \left(\frac{48}{16}\right)^4 = 3^4 = 27$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить, используя свойства степеней:

1. $\dfrac{12^5}{3^4 \cdot 4^6}$
2. $\dfrac{10^5}{2^6 \cdot 5^3}$
3. $\dfrac{39^5 \cdot 10^6}{26^4 \cdot 15^5}$
4. $\dfrac{2^8 \cdot 7^9}{14^7} \cdot \dfrac{26^5 \cdot 2^{10}}{13^4 \cdot 8^6}$
5. $\dfrac{12^8}{2^6 \cdot 3^7} : \dfrac{10^{10}}{2^3 \cdot 5^8}$
6. $\dfrac{5^6}{2^6 \cdot 7^5} \cdot \dfrac{21^5 \cdot 4^5 \cdot 3^3}{90^4}$

4.3. Степени с целым показателем

Второе свойство степеней: $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ установлено, когда $m > n$ (m больше n). При $m = n$ или $n < m$ правая часть этого равенства не определена, но левая часть сохраняет смысл. Это дает повод ввести определение степени с нулевым и целыми отрицательными показателями степени.

Степень числа $a \neq 0$ с нулевым показателем равна единице:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$$

Степень числа $a \neq 0$ с отрицательным показателем равна обратному числу (число, обратное данному числу a, равно $\dfrac{1}{a}$):

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

Пример.

$$\frac{2^{-3} \cdot 2^5}{2^{-4} \cdot 2^3} = 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 2^4 \cdot 2^{-3} = 2^{-3+5+4-3} = 2^3 = 8$$

$$\frac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 6^4}{2 \cdot 3^9 \cdot 6^{-2}} = \frac{2^{-5} \cdot 3^5 \cdot 3^4 \cdot 2^4}{2 \cdot 3^9 \cdot 3^{-2} \cdot 2^{-2}} = 2^{-5+4-1+2} \cdot 3^{5+4-9+2} = 2^0 \cdot 3^2 = 9$$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить, используя свойства степеней:

1. $\dfrac{25^8 \cdot 15^{-15}}{9^{-8}}$
2. $\dfrac{18^4 \cdot 3^{-6}}{2^8 \cdot 4^{-3}}$
3. $\dfrac{4^6 \cdot 2^{-20} \cdot 14^{10}}{49^8 \cdot 7^{-7}}$
4. $\dfrac{2^{-10} \cdot 6^{-10} \cdot 9^9}{8^{-7} \cdot 3^6}$;
4. $\dfrac{3^{-25} \cdot 15^{12}}{25^9 \cdot 5^{-6} \cdot 9^{-8}}$
5. $\dfrac{3^{14} \cdot 15^{-16} \cdot 25^{12}}{27^{-2} \cdot 5^8}$
6. $\dfrac{2^{-8} \cdot 25^9 \cdot 10^{-12}}{8^{-8} \cdot 5^2}$

Контрольные вопросы.

1. Что называется степенью числа a с показателем n?
2. Назовите свойства степеней.
3. Чему равна степень числа $a \neq 0$ с нулевым показателем?
4. Чему равна степень числа $a \neq 0$ с отрицательным показателем?

5. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

5.1. Корень числа.

Пусть n > 1 – натуральное число. ***Корнем*** *n-ой степени из числа a называют число b, степень n которого равна числу a:*

$\sqrt[n]{a} = b$ (корень энной степени из *a*), если $b^n = a$ или $(\sqrt[n]{a})^n = b$.

Действие нахождения корня из числа *a* называют *извлечением корня n*-ой степени из числа *a.* Число *a* называют подкоренным числом, *n* – показателем корня, знак $\sqrt[n]{\ }$ – радикалом.

$\sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ – корень квадратный из *a*, ***квадратный корень*** из *a*.

$\sqrt[3]{a}$ – корень кубический из *a*, ***кубический корень*** из *a*.

$\sqrt[4]{a}$ – ***корень четвёртой степени*** из *a*.

Пример.

$\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$; $\sqrt{0{,}36} = 0{,}6$; $\sqrt[3]{8} = 2$; $\sqrt[4]{16} = 2$.

Корень чётной степени из отрицательного числа не существует.

Пример. $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-9}$; $\sqrt[4]{-16}$ – не существуют.

Корень нечётной степени из отрицательного числа есть отрицательное число.

Пример. $\sqrt[3]{-8} = -2$; $\sqrt[3]{-27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить корни:

$\sqrt{25}$; $\sqrt{16}$; $\sqrt{49}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{121}$; $\sqrt{144}$; $\sqrt{169}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{225}$; $\sqrt{256}$; $\sqrt{289}$; $\sqrt{324}$; $\sqrt{361}$; $\sqrt[3]{-64}$; $\sqrt[3]{-125}$; $\sqrt[4]{625}$.

5.2. Иррациональные и действительные числа

Если корень числа нельзя выразить рациональным числом (то есть числом, которое можно записать в виде отношения *a/b*), то такое число называют иррациональным. Иррациональными называют такие числа, которые нельзя записать в виде отношения *a/b*. ***Иррациональные числа*** – это бесконечные десятичные непериодические дроби.

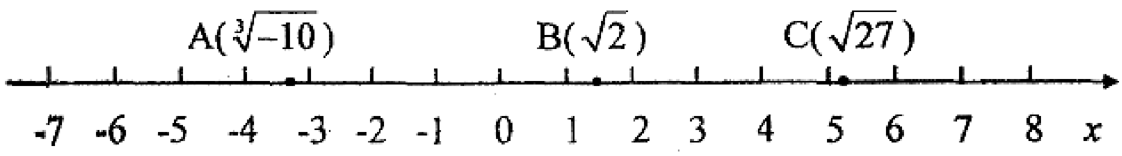
Пример.

$\sqrt{2} = 1{,}414213...$

$\sqrt{13} = 3{,}60555...$

$\sqrt[3]{-10} = -2{,}154434...$

Действительные числа – это множество всех рациональных и иррациональных чисел. Действительные числа изображают с помощью точек числовой оси. На рисунке показаны точки, которые изображают числа $\sqrt[3]{-10}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{27}$.



5.2. Свойства и преобразование корней

1) Корень из произведения чисел равен произведению корней этих чисел:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

и, наоборот, произведение корней этих чисел равно корню из произведения этих чисел:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

<u>Пример.</u>

$\sqrt[3]{27 \cdot 64} = \cdot\sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{64} = 3 \cdot 4 = 12$

$\sqrt[3]{20} \cdot \sqrt[3]{50} = \sqrt[3]{20 \cdot 50} = \sqrt[3]{1\,000} = 10$

2) Корень из частного двух чисел равен частному корней этих чисел:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

и, наоборот, частное корней чисел равно корню из частного этих чисел:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

<u>Пример.</u>

$\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$

$\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{50}{2}} = \sqrt{25} = 5$

3) Для возведения корня в степень нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, сохраняя показатель корня:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

и, наоборот, для извлечения корня из степени числа нужно возвести корень числа в степень:

$$\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Пример.

$$\left(\sqrt{2}\right)^4 = \sqrt{2^4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\sqrt[3]{64^4} = \left(\sqrt[3]{64}\right)^4 = 4^4 = 2$$

4) Если показатели корня и подкоренного выражения имеют общий делитель, то на него их можно сократить, не меняя величины корня. То есть, если $m = k \cdot p$, а $n = k \cdot q$, то:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[k \cdot p]{a^{k \cdot q}} = \sqrt[p]{a^q}$$

Пример:

$$\sqrt[15]{a^{12}} = \sqrt[5 \cdot 3]{a^{4 \cdot 3}} = \sqrt[5]{a^4}$$

$$\sqrt[20]{2^{16}} = \sqrt[4 \cdot 5]{2^{4 \cdot 4}} = \sqrt[5]{2^4} = \sqrt[5]{16}$$

5) Для извлечения корня из корня нужно перемножить показатели корней, сохранив подкоренное выражение:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \text{ и наоборот: } \sqrt[m \cdot n]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Пример:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

$$\sqrt[8]{256} = \sqrt[4 \cdot 2]{256} = \sqrt[4]{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

6) Если показатель степени множителя под корнем больше, чем показатель корня, то множитель можно вынести из-под корня:

$$\sqrt[n]{a^{m+n}} = \sqrt[n]{a^m a^n} = a\sqrt[n]{a^m}$$

Пример:

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^{3+2}} = \sqrt[3]{2^3 + 2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^{2+1}} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5\sqrt{5}$$

7) Множитель, который стоит перед корнем, можно внести под корень:

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Пример:

$$5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$$

$$2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$$

8) Если корень из числа стоит в знаменателе дроби (иррациональность в знаменателе), то дробь можно преобразовать так, чтобы иррациональности в знаменателе не было (избавиться от иррациональности в знаменателе).

Пример.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5\cdot 5^2}}=\frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

Задание для самостоятельной работы.

1) Вынести множитель из-под корня:

$\sqrt{8};\sqrt{12};\sqrt{18};\sqrt{20};\sqrt{24};\sqrt{28};\sqrt{32};\sqrt{44};\sqrt{45};\sqrt[3]{16};\sqrt[3]{54};\sqrt[3]{500}$

2) Внести множитель под корень:

$2\sqrt{7};\ 3\sqrt{5};\ 5\sqrt{3};\ 3\sqrt{11};10\sqrt{13};\ 2\sqrt[3]{5};\ 3\sqrt[3]{2};\ 5\sqrt[3]{3};\ 4\sqrt[3]{5};\ 2\sqrt[4]{3}$

3) Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби:

$\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{6}{\sqrt{3}};\frac{10}{\sqrt{5}};\frac{5}{\sqrt{10}};\frac{14}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{21}{\sqrt{7}};\frac{2}{\sqrt{12}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{3}};\frac{10}{\sqrt[3]{5}};\frac{4}{\sqrt[3]{6}}$

4) Вычислить корни:

1. $\dfrac{\sqrt{21\cdot\sqrt[3]{27}}}{\sqrt[6]{49\cdot\sqrt{49}}}$
2. $\dfrac{\sqrt[5]{27\cdot\sqrt{81}}}{\sqrt{12\cdot\sqrt[4]{81}}}$
3. $\dfrac{\sqrt{18\cdot\sqrt[3]{8}}}{\sqrt[6]{16\cdot\sqrt{16}}}$
4. $\dfrac{\sqrt[4]{5\cdot\sqrt[4]{625}}}{\sqrt[3]{10\cdot\sqrt{80}}}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{30\cdot\sqrt{810}}}{\sqrt[4]{20\cdot\sqrt[3]{125}}}$
6. $\dfrac{\sqrt[3]{20\cdot\sqrt{160}}}{\sqrt[4]{25\cdot\sqrt[3]{64}}}$
7. $\dfrac{\sqrt[6]{16\sqrt[3]{64}}}{\sqrt{4\sqrt{256}}}$

5.4. Степени с рациональными показателями

Корень *n*-ой степени из *a* можно записать как степень *1/n* числа *a*:

$$\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$$

Корень *n*-ой степени из a^m можно записать как степень *m/n* числа *a*:

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$$

Если и корень *n*-ой степени из *a* находится в знаменателе, число *a* можно записать в степени *(-1/n):*

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=a^{-1/n}$$

Если корень *n*-ой степени из a^m находится в знаменателе, можно записать:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-m/n}$$

<u>Пример</u>.

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}} = 5^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = 2^{\frac{3}{5}}$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. $\left(\dfrac{3^{\frac{3}{2}} \cdot 15^{\frac{5}{3}} \cdot 25^{\frac{3}{2}}}{27^{\frac{1}{6}} \cdot 5^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$

2. $\left(\dfrac{2^{\frac{7}{3}} \cdot 25^{\frac{3}{4}} \cdot 10^{-\frac{4}{3}}}{8^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}\right)^{\frac{4}{3}}$

3. $\left(\dfrac{2^{\frac{3}{2}} \cdot 6^{-\frac{5}{3}} \cdot 9^{\frac{3}{2}}}{8^{-\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$

4. $\left(\dfrac{9^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} \cdot 15^{\frac{1}{2}}}{25^{\frac{3}{8}} \cdot 5^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

5. $\left(\dfrac{4^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{-\frac{2}{3}} \cdot 14^{\frac{1}{2}}}{49^{\frac{3}{8}} \cdot 7^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{3}{2}}$

6. $\left(\dfrac{2^{\frac{4}{3}} \cdot 10^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{3}{4}}}{4^{\frac{5}{4}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}$

Контрольные вопросы

1. Что называют корнем *n*-ой степени из числа *a*?
2. Какие числа называют иррациональными?
3. Что такое действительные числа?
4. Назовите свойства корней.
5. Какие существуют преобразования корней?
6. Что называют степенью *m/n, -m/n* числа *a*?

6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

6.1. Основные понятия про алгебраические выражения

Числовое выражение – это математическое выражение, которое состоит из чисел с использованием действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пример.

$1{,}5\cdot(3{,}2 - \sqrt{3})^2:(1{,}3 + \sqrt[3]{5})^3$

Алгебраическое выражение – это математическое выражение, которое состоит из чисел и букв (переменных величин) с использованием действий сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пример.

$3xy^3\left(x^2+5\sqrt{y}\right)^4:\left(\sqrt[3]{x}-y\right)^2$

Тождество – это равенство двух алгебраических выражений при любых значениях переменных.

Пример.

$a + b = b + c$

$a(b + c) = ab + ac$

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

Виды алгебраических выражений

Одночлен – это алгебраическое выражение, в котором могут быть только два действия – умножение и возведение в степень.

Пример.

$2axy$

$5y^3z^2$

$-\frac{1}{3}x^2yz^3$

Многочлен (полином) – это сумма одночленов.

Пример.

$(3a^2b + 2ab^3)$ – двучлен;

$(2x^3y + 3xy^2 - xy)$ – трёхчлен;

$(1 + x + x^2 + x^3)$ – многочлен, полином.

Алгебраическая дробь – это дробь, которая состоит из переменных величин.

Пример:

$\frac{a}{b}$; $\frac{x+y}{x-y}$; $\frac{x^3+3x^2-2}{2x^2+1}$

Иррациональное алгебраическое выражение – это выражение, в котором есть действие извлечения корня из переменных величин.

Пример.

$3\sqrt{x};\ 3\cdot\sqrt{xy}-2\cdot\sqrt[3]{yz^2};\ \dfrac{2x^{0,5}-y^{1,5}}{3x^{1,5}-y^{0,5}}$

Область допустимых значений (ОДЗ) алгебраических выражений

Если вместо букв подставлять числа, алгебраическое выражение будет принимать определенные числовые значения. Выражение *a/b* имеет смысл при любых значениях *a* и при всех значениях $b \neq 0$.

Выражение $3\sqrt{x}$ имеет смысл при всех значениях x ≥ 0 (больше или равном нулю).

Область допустимых значений алгебраического выражения – это множество числовых значений букв, при которых алгебраическое выражение имеет смысл.

Пример.

$\dfrac{x-2}{x+1}$ ОДЗ: $x\in(-\infty;1)\cup(-1;\infty)$

$\in$ – "принадлежит", $\cup$ – объединение".

$\dfrac{4(2x-5)}{(x+3)(x-4)}$ ОДЗ: $x\in(-\infty;-3)\cup(-3;4)\cup(4;\infty)$;

$\sqrt{x-5}$ ОДЗ: $x\in(5;\infty)$.

Задание для самостоятельной работы.

Найти ОДЗ алгебраических выражений:

1. $\dfrac{1}{z-2}$
2. $\dfrac{1}{z-2}$
3. $\dfrac{x^2-1}{2}$
4. $\dfrac{2}{z^2-1}$
5. $\dfrac{x+1}{(x-1)(x-6)}$
6. $\sqrt{x+3}$

6.2. Действия с алгебраическими выражениями

1. Действия с многочленами

Приведение подобных членов

Подобные члены – это одночлены, которые отличаются только числовыми множителями.

Пример.

$3x^2 + 3x - 2x^2 + 5x$. Здесь $3x^2$ и $(-2x^2)$ – подобные члены, 3x и 5x – подобные члены.

Сумму подобных членов можно заменить одним членом.

Приведение подобных членов – это сложение подобных членов.

Пример.

$3x^2 + 3x – 2x^2 + 5x = x^2 + 8x$

$4x^3y^2 – 2x^2y – x^3y^2 + 3x^2y = 3x^3y^2 + x^2y$

Задание для самостоятельной работы.

Привести подобные члены в многочленах:

1. $-a^4 + 2a^3 – 4a^4 + 2a^2 – 3a^2$;
2. $2a^2 – ax^3 – a^4 – a^2x^3 + ax^5 + 2a^4$
3. $2x^4 + 3x^2 + 7 – 2x^6 – 3x^6 + 4x^2$
4. $12ax^2 – x^3 – 6ax^2 + 3a^2x – 5ax^2 + 2x^3$

Сумма и разность многочленов

Для того чтобы сложить или вычесть многочлены, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Пример.

Сложить и вычесть многочлены $(5x^2 – 4x + 3)$ и $(3x^2 – x + 2)$.

$(5x^2 – 4x + 3) + (3x^2 – x + 2) = 5x^2 – 4x + 3 + 3x^2 – x + 2 = 8x^2 – 5x + 5$

$(5x^2 – 4x + 3) – (3x^2 – x + 2) = 5x^2 – 4x + 3 – 3x^2 + x – 2 = 2x^2 – 3x + 1$

Задание для самостоятельной работы.

Сложить и вычесть многочлены:

1. $(12a + 16x)$ и $(6a – 7x)$
2. $(4x^2y + 8xy^2)$ и $(3x^2y – 5xy^2)$
3. $(l3x – 11y + 10a)$ и $(-15x + 10y – 15a)$
4. $(4a^2 – 2ax – y^2)$ и $(-5a^2 + 3y^2 – 2ax)$

Умножение многочленов

Чтобы умножить одночлен на многочлен, нужно одночлен умножить на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример.

$2x(x^3 + 3x^2 – 4x + 5) = 2x^4 + 6x^3 – 8x^2 + 10x$

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.

Пример.

$(x + y)(x – 2y) = x^2 – 2xy + yx – 2y^2 = x^2 – xy – 2y^2$

$(x + 3y – z)(2x – y + 2z) = 2x^2 – xy + 2xz + 6yx – 3y^2 + 6yz – – 2zx + zy – 2 = = 2x^2 – 3y^2 – 2z^2 + 5xy + 7yz$

Задание для самостоятельной работы.

1) Выполнить умножение многочленов:

1. $(x + 4)(x + 1)$
2. $(3a – x)(2a + 5x – 3)$
3. $(3a – 2b + c)(a + 3b – 2c)$
4. $(a + x)(2a + 3x)$
5. $(4x + y + 2)(x – 3y)$
6. $(3x – 5y + 2z)(2x + 3y – 4z)$

2) Выполнить действия с многочленами:

1. $a(a + x) – x(a – x)$
2. $(a – 4)(a – 2) – (a – 1)(a – 3)$
3. $(a^2 + 4a)(a – 1) – (a^2 – 1)(a + 2)$
4. $(2x + 3y – z)(x – y + 2z) – (3x – y – 2z)(x + 5y + z)$
5. $(5a – 2b + 3c)(a + b – 2c) – (2a + b – 3c)(a – 3b + 2c)$

Разложение многочлена на множители

Разложение многочлена на множители – это преобразование многочлена в произведение многочленов.

Пример.

$3a + 3b = 3(a + b)$, общий множитель одночленов *3a* и *3b* число *3* вынесли за скобки;

$7ax + 7ay = 7a(x + y)$

$y(x – z) – z(x – z) = (x – z)(y – z)$

$x^3 – 2x – xy + 2y = x(x – 2) – y(x – 2) = (x – 2)(x – y)$

Задание для самостоятельной работы.

Разложить многочлены на множители:

1. $-15ax – 20ay$
2. $3a^2x + 6ax^3$
3. $a^3 – 2a^2 – a$
4. $x(a – c) + y(a – c)$
5. $2a(3b + c) – 3c(3b + c)$
6. $3(x + y) + (x + y)^2$
7. $(a + x)^3 –a(a + x)^2$
8. $10ay – 5cy + 2ax – cx$
9. $ax + 2a – 3x – 6$
10. $ax^2 – cx^2 – cx + ax – a + c$
11. $5ax^2 – 10ax – yx + 2y – x + 2$
12. $ax^2 + cx^2 – cx – ax + a + c$

Формулы сокращённого умножения

Формулами сокращённого умножения называют формулы:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	квадрат суммы
$(a – b)^2= a^2 –2ab+ b^2$	квадрат разности
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	куб суммы
$(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$	куб разности
$a^2 – b^2= (a – b)(a + b)$	разность квадратов
$a^3 – b^3 = (a – b)(a^2 + ab + b^2)$	разность кубов
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 – ab + b^2)$	сумма кубов

Формулы сокращённого умножения используют при возведении двучленов в квадрат и куб, а также при разложении многочленов на множители.

Пример

$(3x + 5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot(3x)\cdot(5y) + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2$

$(4a - 5b)^2 = (4a)^2 - 2\cdot(4a)\cdot(5b) + (5b)^2 = 16a^2 - 40ab + 25b^2$

$(2a + 3b)^3 = (2a)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot(3b) + 3\cdot(2a)\cdot(3b)^2 + (3b)^3 = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3$

$(x + 2y)^3 = x^3 - 3x^2\cdot(2y) + 3x\cdot(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^2$

$16x^2 - 25y^4 = (4x)^2 - (5y^2)^2 = (4x - 5y^2)(4x + 5y^2)$

$8x^3 - 27y^3 = (2x)^3 - (3y)^3 = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$

$64a^6 + 125b^3 = (4a^2)^3 + (5b)^3 = (4a^2 + 5b)(16a^4 - 20a^2b + 25b)$

Задания для самостоятельной работы.

1) Возвести в квадрат и куб двучлены:

1.	$(4a + 3b)^2$	4.	$(5b^3 - 4b^4)^2$
2.	$(2x - 7y)^2$	5.	$\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^3$
3.	$(3y^2 + 5z^3)^2$	6.	$\left(4b-\frac{1}{3}c^2\right)^3$

2) Разложить многочлены на множители:

1.	$4x^2 - y^2$	7.	$(2a + 3b)^2 - (a - 2b)^2$
2.	$16a^2 - 9b^2$	8.	$27 - a^3$
3.	$x^4 - 16y^8$	9.	$64 + y^3$
4.	$(x + 3)^2 - 16$	10.	$27 + x^3y^3$
5.	$25 - (a + 3)$	11.	$8x^3 - 27y^9$
6.	$(y - 3)^2 - (2y + 1)^2$		

2. Действия с алгебраическими дробями

Сокращение алгебраических дробей

Сокращение алгебраических дробей – это деление числителя и знаменателя на их общий делитель.

Пример.

$$\frac{x^2-16}{3x+12}=\frac{(x-4)(x+4)}{3(x+4)}=\frac{x-4}{3}$$

$$\frac{x^3+8}{x+2}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}=x^2-2x+4$$

Задание для самостоятельной работы.

Сократить алгебраические дроби:

1.	$\frac{3x\cdot12}{x^2\cdot16}$	4.	$\frac{x^6+x^4}{x^4+x^2}$	7.	$\frac{(x-2)^2}{2-x}$
2.	$\frac{x^2+10x+25}{x^2-25}$	5.	$\frac{x^6-x^4}{x^3+x^2}$		
3.	$\frac{x^2+2x+4}{x^3-8}$	6.	$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$		

Сложение и вычитание алгебраических дробей

Если знаменатели дробей одинаковые, то по правилу сложения и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями получим:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

Если знаменатели дробей разные, то их сначала приводят к общему знаменателю. Числитель и знаменатель первой дроби умножают на знаменатель второй дроби, а числитель и знаменатель второй дроби умножают на знаменатель первой дроби:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Пример.

$$\frac{a^2}{ax - x^2} + \frac{x}{x - a} = \frac{a^2}{x(a - x)} + \frac{x}{(x - a)} = \frac{a^2}{x(a - x)} - \frac{x}{a - x} = \frac{a^2 - x^2}{x(a - x)} = \frac{(a - x)(a + x)}{x(a - x)} = \frac{(a + x)}{x}$$

$$\frac{x^2 - 4xy}{2y^2 - xy} - \frac{4y}{x - 2y} = \frac{x^2 - 4xy}{y(2y - x)} - \frac{4y}{x - 2y} = \frac{x^2 - 4xy}{y(2y - x)} + \frac{4y}{2y - x} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{y(2y - x)} = \frac{(2y - x)^2}{y(2y - x)} =$$

$$= \frac{(2y - x)}{y}$$

Задание для самостоятельной работы.

Выполнить сложение и вычитание дробей:

1. $\dfrac{x}{2a^2 - ax} - \dfrac{4a}{2ax - x^2}$
2. $\dfrac{4y}{3x^2 + 2xy} - \dfrac{9x}{3xy + 2x^2}$
3. $\dfrac{x - 25}{5x - 25} - \dfrac{3x + 5}{5x - x}$
4. $\dfrac{12 - y}{6y - 36} + \dfrac{6}{6y - y^2}$
5. $\dfrac{a^2 + 1}{a^2 - 1} + \dfrac{1}{a + 1} + \dfrac{1}{a - 1}$
6. $\dfrac{a^2 + 3a}{ax - 5x + 8a - 40} - \dfrac{a}{x + 8}$
7. $\dfrac{3x}{2y + 3} + \dfrac{x^2 + 3x}{4xy - 3 - 2y + 6x}$

Умножение и деление алгебраических дробей

Произведение двух дробей тождественно равно дроби, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель – произведению знаменателей: $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$

При делении дроби на дробь числитель и знаменатель делителей меняются местами и выполняется умножение: $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Пример.

$$\frac{2a^6b^2}{3c^5}\cdot\frac{9b^3c^3}{8a^4}=\frac{2a^6b^2\cdot 9b^3c^3}{3c^5\cdot 8a}=\frac{3a^5b^5}{4c^2}$$

$$\frac{8yz^5}{9x^6}:\frac{2y^6z^2}{3x^3}=\frac{8yz^5}{9x^6}\cdot\frac{3x^3}{2y^6z^2}=\frac{8yz^5\cdot 3x^3}{9x^6\cdot 2y^6z^2}=\frac{4z^3}{3x^3y^5}$$

Задания для самостоятельной работы.

1) Выполнить умножение и деление дробей:

1. $\frac{3x^3y^5}{4z^3}\cdot\frac{18y^2z^5}{9x^4}$
2. $\frac{\left(a^2\right)^3\left(b^3\right)^2}{\left(c^4\right)^2}:\frac{\left(a^3\right)^2}{\left(b^{-2}\right)^3\left(c^2\right)^4}$
3. $\frac{9b^2c^3}{8a^4}:\frac{3a^2b^5}{4c^2}$
4. $\frac{\left(x^{-1}\right)^2\left(y^{-2}\right)^{-3}}{\left(z^2\right)^4}:\frac{\left(x^2\right)^{-3}\left(y^{-1}\right)^6}{\left(z^{-4}\right)^{-2}}$

2) Выполнить действия с дробями:

1. $\frac{x^2}{x^2-y^2}-\frac{x+y}{x}-\frac{y}{x-y}$
2. $\left(\frac{x}{x+1}+1\right)\cdot\frac{1-x^2}{4x^2-1}$
3. $\left(\frac{6a+1}{a^2-6a}+\frac{6a-1}{a^2+6a}\right)\cdot\frac{a^2-36}{a^2+1}$
4. $\left(a-1+\frac{2}{a+1}\right):\frac{a_2+1}{a^2+2a+1}$
5. $\left(\frac{4x}{1-x^2}+\frac{1-x}{1+x}\right):\frac{1+x}{x}+\frac{1}{1-x}$
6. $\left(a-\frac{a+b}{a-b}+b\right):\left(1-\frac{2b+1}{a^2-b^2}\right)$

3. Действия с иррациональными алгебраическими выражениями

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений используются все правила действий с корнями, а также правила действий с рациональными алгебраическими выражениями.

Пример:

$$(2\sqrt{x}+3\sqrt{y})\cdot(\sqrt{x}-4\sqrt{y})=2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-8\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+3\sqrt{y}\cdot\sqrt{x}-12\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}=2x-5\sqrt{xy}-12y$$

$$\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}-\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}+2)\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}-\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}=\frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}-\frac{x+2\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}=\frac{3}{(\sqrt{x}+3)\sqrt{x}}$$

При преобразовании иррациональных алгебраических выражений используются формулы сокращённого умножения.

Пример.

$$\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)=a-b$$

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\pm b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}}\pm a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}\right)=a\pm b$$

$$a^{\frac{3}{2}} \pm b^{\frac{3}{2}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^3 \pm \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^3 = \left(a^{\frac{1}{3}} \pm b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a \pm a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) = a \pm b$$

$$a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}\right)$$

Задание для самостоятельной работы.

Выполнить действия с иррациональными алгебраическими выражениями:

1. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2-\sqrt{x}}$

2. $\dfrac{\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}} : \dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}$

3. $\left(\dfrac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2} + \dfrac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2} - \dfrac{16}{a-4}\right)^2$

4. $\dfrac{x-1}{x+x^{0,5}+1} : \dfrac{x^{0,5}+1}{x^{1,5}-1} + \dfrac{2}{x^{-0,5}}$

5. $\left(\dfrac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}} - \dfrac{m-\sqrt{m^2-n^2}}{m+\sqrt{m^2-n^2}}\right) \cdot \dfrac{n^2}{2m\sqrt{m^2-n^2}}$

6. $\dfrac{2b^{1/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}} + \left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{a^{1/2}+b^{1/2}} - \dfrac{1}{(ab)^{-1/2}}\right) \cdot (a-b)^{-1}$

7. $\dfrac{x^{2/3}+2(xy)^{1/3}+4y^{2/3}}{(x^{4/3}-8y\cdot x^{1/3}):(xy)^{1/3}} \cdot \left(2-\dfrac{x^{1/3}}{y^{1/3}}\right)$

Контрольные вопросы

1. Что такое числовое выражение, алгебраическое выражение?
2. Назовите виды алгебраических выражений.
3. Что называют областью допустимых значений (ОДЗ) алгебраических выражений?
4. Что такое подобные члены? Какое действие называют приведениям подобных членов?
5. Какое действие называют разложением многочлена на множители?
6. Назовите формулы сокращённого умножения.
7. Какое действие называют сокращением алгебраических дробей?

7. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

7.1. Основные понятия про уравнения

Дано равенство $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$, где $f(x)$ и $g(x)$ – алгебраические выражения, содержащие неизвестную величину x.

Требуется найти все значения x, которые *удовлетворяют равенству* (то есть значения x, подстановка которых равенство обращает его в верное числовое равенство). Равенство выступает в этом случае *уравнением с одной неизвестной x*. Множество значений x, при которых определены обе части уравнения, называют *областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения. Каждое значение x, удовлетворяющее уравнению, называется *решением и корнем уравнения*. Уравнение может и не иметь корней, тогда говорят, что множество его решений *пусто*. *Решить уравнение* – это значит найти все корни уравнения или доказать, что их нет.

Пример.

Уравнение $2x + 1 = 5x – 2$ имеет один корень.

Уравнение $x^2 – x + 2 = 3x – 1$ имеет два корня $x = 1$ и $x = 3$.

Уравнение $\sqrt{x-1} = -1$ не имеет корней, множество его решений пусто Ø.

Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют ***равносильными (эквивалентными)***, если все корни одного уравнения одновременно являются корнями другого уравнения. Если уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ равносильны, это записывают с помощью знака $\Leftrightarrow$ – «равносильно»: $f_1(x) = g_1(x) \Leftrightarrow f_2(x) = g_2(x)$. Если два уравнения не имеют корней (множества их решений пусты), то также можно считать равносильными: все уравнения, которые не имеют решений, равносильны между собой.

В процессе решения уравнений часто выполняют действия, в результате которых данное уравнение заменяется другим (обычно более простым), ему равносильным. Такой переход от одного уравнения другому может выполняться на основе следующих утверждений:

1) Если к обеим частям уравнения прибавить (вычесть) выражение, имеющее смысл во всей ОДЗ данного уравнения, то получите уравнение, равносильное данному.

Пример.

К обеим частям уравнения $2x + 1 = 5x – 2$ прибавим выражение $(-5x – 1)$. В результате получим уравнение, эквивалентное данному уравнению: $2x +1 = 5x – 2 \Leftrightarrow -3x = -3$

В частности, из этого утверждения вытекает правило о переносе членов уравнения из одной части в другую (с надлежащей переменой знака). Так, уравнение всегда можно записать в равносильной форме: $f(x) – g(x) = 0$.

Пример.

$x^2 – x + 2 = 3x – 1 \Leftrightarrow x^2– 4x + 3 = 0$

2) Если обе части уравнения умножить (разделить) на выражение, не равное нулю и имеющее смысл во всей ОДЗ данного уравнения, то получится уравнение, равносильное данному.

Пример. Обе части уравнения -3x = -3 разделим на (-3). В результате получим уравнение, эквивалентное данному уравнению: -3x = -3 $\Leftrightarrow$ x = 1

7.2. Разновидности уравнений

1. Уравнения первой степени (линейные уравнения)

Уравнением первой степени ***(линейным уравнением)*** называют уравнение вида $ax + b = cx + d$, где x – неизвестное, a, b, c, d – некоторые числа, причём, a $\neq$ c.

Для решения такого уравнения неизвестные слагаемые переносим в левую часть уравнения, а числа – в правую часть уравнения:

$$ax + b = cx + d \Leftrightarrow (a - c)x = d - b$$

После этого левую и правую части уравнения делим на (a – c) $\neq$ 0. В результате получим решение уравнения: $x = \dfrac{d - b}{a - c}$

Пример.

7x – 2 = 2x + 3 $\Leftrightarrow$ 5x = 5 $\Leftrightarrow$ x = 1

2x + 3 = 6x + 5 $\Leftrightarrow$ -4x = 2 $\Leftrightarrow$ x = $-\dfrac{1}{2}$

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. 2x + 5 = 0	4. 5x + 3 = 4 – x
2. 3x – 1 = 2x + 2	5. 8 – 7x = 3x – 5
3. 4x + 3 = 3x + 4	

2. Уравнения второй степени (квадратные уравнения)

Корни квадратного уравнения

Уравнением второй степени ***(квадратным уравнением)*** называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – неизвестная, a, b, c – некоторые числа, причём, $a \neq 0$. В квадратном уравнении число a называют первым коэффициентом, число b – вторым коэффициентом, c – свободным членом.

Корни квадратного уравнения определяют по формуле:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называют ***дискриминантом квадратного уравнения.***

Если D > 0, то уравнение имеет два действительных корня.

Если D = 0, то уравнение имеет один действительный корень.

Если D <0, то уравнение не имеет действительных корней.

Пример.

Решить уравнения:

1) $x^2 – 4x + 3 = 0$

Вычислим дискриминант:

$D = (-4)^2 – 4\cdot 3 = 4 > 0$, уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-(-4)+\sqrt{4}}{2} = 3,\ x_2 = \frac{-(-4)-\sqrt{4}}{2} = 1$$

2) $x^2 – 6x + 9 = 0$

Вычислим дискриминант:

$D = (-6)^2 – 4\cdot 9 = 0$, уравнение имеет один действительный корень:

$$x_1 = x_2 = \frac{-(-6)\pm 0}{2} = 3$$

3) $3x^2 – 5x + 4 = 0$

Вычислим дискриминант:

$D = (-5)^2 – 4\cdot 3\cdot 4 = -23 < 0$, уравнение не имеет действительных корней.

Задание для самостоятельной работы.

1) Решить уравнения:

1. $x^2 – 3x + 2 = 0$
2. $x^2 + 2x – 8 = 0$
3. $x^2 + 7x = -10$
4. $3x^2 – 8x + 1 = x – x^2 – 1$
5. $3x^2 + 5x + 5 = x^2 – 7x –7$
6. $x^2 + 6x + 7 = x^2 – 3x + 2$
7. $x^2 + 5x – 10 = 3 – 5x – 2x^2$

2) Решить уравнения:

1. $\frac{2}{x} = x+1$
2. $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{4}$
3. $\frac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3} = 1$
4. $\frac{x-1}{x-3} - \frac{4-x}{x+2} = 3$
5. $\frac{6-x}{x+2} + \frac{x+4}{1-x} = -5$

Частные случаи квадратных уравнений.

1) Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным квадратным уравнением*. Данное уравнение можно получить из уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, если разделить его на *a*.

2) Уравнения вида $ax^2 + bx = 0$ $(c = 0)$ и $ax^2 + c = 0$ $(b = 0)$ называют *неполными квадратными уравнениями*.

Пример.

Как решить уравнения.

1) $3x^2 + 5x = 0.$

Разложим левую часть уравнения на множители:

$3x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow x(3x + 5) = 0$, следовательно $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{5}{3}$

2) $4x^2 – 25 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 25$, извлекая корень из левой и правой частей уравнения, получим: $2x = \pm 5$, следовательно, $x_1 = 2{,}5$ $x_2 = -2{,}5$

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. $2x^2 - 3x = x^2 - x$
2. $x^2 - 5x = 2x^2 - 4x$
3. $x^2 - 4 = 0$
4. $4x^2 - 9 = 0$
5. $2x^2 + 9 = 0$

Теорема Виета

Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Наоборот, если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 - x_2 = q$, то x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Пример.

Составить квадратное уравнение по его корням $x_1 = 3$, $x_2 = -5$.

Определим p и q: $p = -(3 - 5) = 2$, $q = 3 \cdot (-5) = -15$.

Получим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$

Задание для самостоятельной работы.

Составить квадратные уравнения по их корням:

1. $x_1 = 2$, $x_2 = -4$
2. $x_1 = -6$, $x_2 = -7$
3. $x_1 = 5$, $x_2 = -0{,}4$
4. $x_1 = 3$, $x_2 = 21$

Квадратный трёхчлен

Алгебраическое выражение $ax^2 + bx + c$ называют ***квадратным трёхчленом.*** Если корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны x_1 и x_2, то квадратный трёхчлен можно разложить на множители по формуле: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Если корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равны между собой, то есть $x_1 = x_2$, то квадратный трёхчлен можно разложить на множители по формуле:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

Пример.

Разложить на множители квадратный трёхчлен $7x^2 - 3x - 4$

Корни уравнения $7x^2 - 3x - 4 = 0$ равны $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{7}$

Следовательно, $7x^2 - 3x - 4 = 7\,(x - 1)(x + \frac{4}{7})$

Действие разложения квадратного трёхчлена на множители используют при решении уравнений.

Пример.

Решить уравнение $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-3x}{x^2+x-6}=\frac{x+1}{x+3}$

Преобразуем знаменатель второго слагаемого: $\frac{2x+1}{x-2}+\frac{1-3x}{(x-2)(x+3)}=\frac{x+1}{x+3}$

После этого приводим выражение к общему знаменателю и получаем равносильное уравнение $\frac{x^2+5x+6}{(x-2)(x+3)}=0$. Умножив обе части уравнения на выражение (x – 2)(x + 3), приводим уравнение к виду $x^2+5x+6=0$. Корнями уравнения является $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

Задание для самостоятельной работы.

1) Разложить множители на квадратные трёхчлены:

1. $x^2 + 2x - 8 = 0$
2. $x^2 + 7x + 10 = 0$
3. $3x^2 - 2x - 5 = 0$
4. $4x^2 - 7x - 15 = 0$

2) Решить уравнения:

1. $\frac{x+2}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}+\frac{x+5}{1-x^2}=0$
2. $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{3x+1}{x^2-x-6}=\frac{x-1}{x-3}$
3. $\frac{1}{x^2-x-6}-\frac{1}{x^2+x-6}=\frac{1}{x^2+5x+6}$
4. $\frac{1}{x^2+x-6}-\frac{1}{x^2-x-6}=\frac{1}{x^2-5x+6}$
5. $\frac{x-1}{x+2}+\frac{x+1}{x-2}+\frac{2(x+4)}{4-x^2}=0$

Уравнения, которые приводятся к квадратным уравнениям

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется ***биквадратным уравнением***. С помощью замены переменной по формуле $x^2 = y$ оно приводится к квадратному уравнению $ay^2 + by + c = 0$.

Пример.

Решить уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Выполним замену переменной $x^2 = y$ и получим уравнение $y^2 - 5y + 4 = 0$. Корни данного уравнения равны $y_1 = 1$, $y_2 = 4$. Следовательно, $x^2 = 1$, $x^2 = 4$. Корни данных уравнений являются корнями исходного уравнения $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$.

Метод замены переменной применяется и в более сложных случаях.

Пример.

Решить уравнение $\frac{x^2+1}{x}+\frac{x}{x^2+1}=-2{,}5$. Выполним замену переменной $\frac{x^2+1}{x}$ = y.

В результате получим уравнение $y + \frac{1}{y} = -2,5$, которое преобразуем к равносильному квадратному уравнению $y^2 + 2,5y + 1 = 0$. Корни данного уравнения равны $y_1 = -2$, $y_2 = 0,5$. Подставив выражение $\frac{x^2+1}{x}$, получим два уравнения $\frac{x^2+1}{x} = -2$ и $\frac{x^2+1}{x} = -0,5$, которые приводятся к квадратным уравнениям $x^2 + 2x + 1 = 0$ и $x^2 + 0,5x + 1 = 0$.
Первое уравнение имеет корень x = -1, второе уравнение корней не имеет.
Следовательно, исходное уравнение имеет один корень x = -1.

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$
2. $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
3. $x^4 + x^2 - 2 = 0$
4. $(x^2 + 4x)^2 - (x^2 + 4x) - 20 = 0$
5. $\frac{x^2 - 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 - 2x - 6} - 2 = 0$
6. $\frac{x^2 + 2x - 6}{x} - \frac{3x}{x^2 + 2x - 6} + 2 = 0$

3. Иррациональные уравнения

Иррациональными называются уравнения, которые содержат неизвестную величину под знаком корня. Например: $\sqrt{x} = 5$, $\sqrt{4x-3} = x$. Во многих случаях, применяя возведение в степень обеих частей уравнения, можно свести иррациональное уравнение к алгебраическому уравнению, которое является следствием исходного уравнения. Однако при возведении уравнения в степень могут полниться посторонние корни. Поэтому после решения алгебраического уравнения, к которому привели данное иррациональное уравнение, следует сделать проверку – подставить найденные корни в исходное уравнение и сохранить лишь те, которые ему удовлетворяют, а остальные – посторонние – отбросить.

<u>Пример.</u>

1) $\sqrt{x} = 5$. Возводим в квадрат левую и правую части уравнения и находим корень уравнения x = 5.

2) $\sqrt{4x-3} = x$. Возводим в квадрат левую и правую части уравнения $4x - 3 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$. Корни данного уравнения равны: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Проверка показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

3) $\sqrt{10-x} = 3x$. Возводим в квадрат левую и правую части уравнения $10 - x = 9x^2 \Leftrightarrow 9x^2 + x - 10 = 0$. Корни данного уравнения равны $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{4}{7}$. Проверка показывает, что исходному уравнению удовлетворяет только корень $x_1 = 1$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. $\sqrt{5x-6}=x$
2. $\sqrt{7x-8}=x$
3. $-2x=\sqrt{5x-1}$
4. $x+1=2\sqrt{x}$
5. $x+\sqrt{x+4}=3x-7$
6. $\sqrt{x^2+5x+1}+1-2x=0$
7. $\sqrt{x-1}+x-3=0$
8. $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x-2}=0$
9. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+4}=6$
10. $\sqrt{10-x}-\sqrt{x+3}=1$
11. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-8}=7$
12. $\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=\sqrt{3x}$
13. $\sqrt{x+4}+\sqrt{3-2x}=\sqrt{1-5x}$
14. $x^2+2\sqrt{x^2-5}=13$

7.3. Системы уравнений

Пусть даны равенства:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$$

где $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ – алгебраические выражения, содержащие известные величины x и y. Требуется найти все значения x и y, которые одновременно *удовлетворяют равенствам*. Равенства называют ***системой*** *двух* ***уравнений*** с двумя неизвестными x и y. Значения x и y, удовлетворяющие уравнениям, называются *решением системы уравнений*. Решить систему уравнений – это значит найти все решения системы или доказать, что их нет.

Если система уравнений содержит n уравнений и n неизвестных, ее называют *системой "n" уравнений с "n" неизвестными* (число неизвестных может и не равняться числу уравнений).

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Система называется *определённой*, если она имеет конечное число ращений, и *неопределённой*, если она имеет бесконечное число решений.

Две системы называются *равносильными*, если они имеют одно и то же множество решений.

Система уравнений вида $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ называется системой двух линейных уравнений (уравнений первого порядка) с двумя неизвестными.

Пример.

Решить системы уравнений.

1) $\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-y=3 \end{cases}$

Данную систему решим методом исключений (методом Гаусса). Для этого первое уравнение умножим на (–2) и сложим со вторым уравнением:

$$\begin{cases} x+3y=5, \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-6y=-10, \\ 2x-y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5, \\ -7y=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=5, \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=1 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 4x - y = -6, \\ -8x + 2y = 3 \end{cases}$

Первое уравнение умножим на 2 и сложим со вторым уравнением:

$$\begin{cases} 4x - y = -6, \\ -8x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 2y = -12, \\ -8x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - y = -6, \\ 0 = -9 \end{cases}$$

Данная система несовместная.

3) $\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = -4 \end{cases}$

Первое уравнение умножим на 2 и сложим со вторым уравнением:

$$\begin{cases} 5x - 3y = 2, \\ -10x + 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 6y = 4, \\ -10x + 6y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3 = 2, \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Данная система неопределённая.

Задание для самостоятельной работы.

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 8, \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ 6x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1, \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$
5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 11 \end{cases}$
6. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 16, \\ 3x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$
7. $\begin{cases} x - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$
8. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = -1, \\ x + 2y = 0 \end{cases}$
9. $\begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 1, \\ x - 2y = 1 \end{cases}$
10. $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 3x^2 - 2xy - y^2 - 7 = 0 \end{cases}$
11. $\begin{cases} x - 5y - 3 = 0, \\ x^2 - 3xy - 2y^2 = 8 \end{cases}$

Контрольные вопросы

1. Что называют уравнением с одной неизвестной?
2. Что называют областью допустимых значений уравнения?
3. Что называется решением или корнем уравнения?
4. Что означает решить уравнение?
5. Какие уравнения называют равносильными (эквивалентными)?
6. Какое уравнение называется уравнением первой степени (линейным уравнением)?

7. Какое уравнение называется квадратным?

8. По какой формуле определяются корни квадратного уравнения?

9. В каких случаях квадратное уравнение имеет два корня, один корень, не имеет корней?

10. Назовите частные случаи квадратных уравнений.

11. Сформулируйте теорему Виета.

12. Какое алгебраическое выражение называют квадратным трёхчленом?

13. Какое уравнение называется биквадратным?

14. Какое уравнение называется иррациональным?

15. Что называют системой двух уравнений с двумя неизвестными?

16. Что называется решением системы уравнений?

17. Что означает решить систему уравнений?

18. Какая система уравнений называется совместной, несовместной?

19. Какая система уравнений называется определённой, неопределённой?

8. НЕРАВЕНСТВА

8.1. Основные определения и свойства неравенств

При сравнении двух действительных чисел a и b возможны три случая:

1) $a = b$ (a равно b);

2) $a > b$ (a больше b);

3) $a < b$ (a меньше b).

Например, $8 > 5$, $7 < 9$. Запись $a \geq b$ "a больше или равно b" ($b \leq a$ "b меньше или равно a") означает, что или $a > b$ ($b < a$) или $a = b$.

Неравенством называют запись, в котором два числа или два выражения, содержащие переменные, соединяются знаком >, <, ≤ или ≥. Неравенства, которые соединяются знаками > или <, называются ***строгими неравенствами***. Неравенства, которые соединяются знаками ≤ или ≥, называются ***нестрогими неравенствами.***

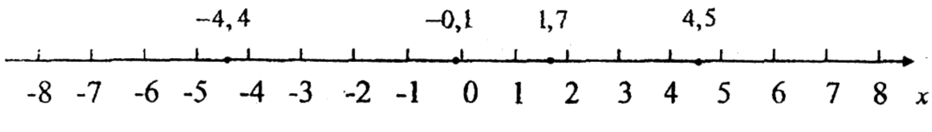
Два неравенства вида $a > b$ и $c > d$ называются *неравенствами одинакового смысла*, а неравенства вида $a > b$ и $c < d$ – *неравенствами противоположного смысла*. Например, неравенства $7 > 3$ и $11 > 8$ – это неравенства одинакового смысла, а неравенства $9 > 5$ и $6 < 12$ – неравенства противоположного смысла.

Вместо двух неравенств $a < b$ и $b < c$ используют запись $a < b < c$. Такое неравенство называют *двойным неравенством*.

Из определения неравенства сразу следует, что:

1) любое положительное число больше нуля;
2) любое отрицательное число меньше нуля;
3) любое положительное число больше любого отрицательного число;
4) из двух отрицательных чисел больше то, абсолютная величина которого меньше.

Все эти утверждения имеют простой геометрический смысл. Большее из чисел изображается точкой на числовой оси, которая лежит правее точки, изображающей меньшее число (независимо от знака чисел). Для чисел, показанных на числовой оси, справедливы неравенства: $-4,4 < -0,1 < 1,7 < 4,5$.



Свойства неравенств

1) *Несимметричность (необратимость):* если $a > b$, то $b < a$, и наоборот. Например, так как $5 > 3$, то $3 < 5$.

2) *Транзитивность*: если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$. Например, так как $9 > 6$ и $6 > 3$, то $9 > 3$.

3) *Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, смысл неравенства не изменится*, то есть если $a > b$, то $a + c > b + c$. Например, так как 7 > 5, то 7 + 2 > 5 + 2 $\Leftrightarrow$ 9 > 7.

4) *Смысл неравенства не изменится, если из одной части неравенства перенести в другую какое–либо слагаемое, изменив его знак на противоположный,* то есть, если $a + b > c$, то $a - c > b$. Например, так как 5 + 4 > 7, то 5 – 7 > -4.

5) *При умножении членов неравенства на одно и то же положительное число смысл неравенства не изменяется.* Например, если $a > b$, то $7a > 7b$.

6) *При умножении членов неравенства на одно и то же отрицательное число смысл неравенства изменяется на противоположный.* Например, если $a > b$, то $(-1)\cdot a < (-1)\cdot b$, то есть $-a < -b$.

7) Пусть члены неравенства положительны. Тогда *при возведении его членов в одну и ту же положительную степень смысл неравенства не изменяется*: если $a > b$, то $a^m > b^m$. Например, так как 5 > 3, то, $5^3 > 3^3$.

8) *От неравенства $a > b$ можно перейти к неравенству между обратными числами $1/a$* и *$1/b$.* Если члены неравенства оба положительны или оба отрицательны, то между их обратными величинами имеется неравенство противоположного смысла: $1/a < 1/b$. Например, так как 10 > 5, то 1/10 < 1/5.

8.2. Действия с неравенствами, доказательство неравенств.

Действия с неравенствами

1) *При почленном сложении неравенств одного и того же смысла образуется неравенство того же смысла, что и данные,* то есть, если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$. Например, так как 8 > 7 и 5 > 4, то 8 + 5 > 7 + 4 $\Leftrightarrow$ 13 > 11.

2) *Если из одного неравенства почленно вычесть другое неравенство противоположного смысла, то образуется неравенство того же смысла, что и первое*, то есть, если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.

Например, так как 9 > 5 и 3 < 7, то 9 – 3 > 5 – 7 $\Leftrightarrow$ 6 > -2.

3) *Если почленно перемножить два неравенства одинакового смысла с положительными членами, то образуется неравенство того же смысла*, то есть, если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$. Например, так как 5 > 3 и 6 > 4, то 5·6 > 3·4 $\Leftrightarrow$ 30 > 12.

Доказательство неравенств

Неравенства между двумя алгебраическими выражениями при подстановке чисел вместо букв могут переходить либо в верные, либо и неверные числовые равенства. Например, неравенство $a^2 + b^2 > a + b$ переходит в верное числовое равенство, если $a = 3$, $b = 4$ (25 > 7) и в неверное числовое равенство, если $a = 0{,}5$, $b = 0{,}3$ (0,34 < 0,8).

Имеются, однако, такие неравенства, которые являются справедливыми для всех числовых значений, входящих в них буквенных параметров. Например, $a^2 + b^2 > 0$.

Иногда приходится проводить доказательство неравенств; при этом «доказать неравенство» – значит установить, что оно справедливо для любых допустимых значений параметров.

Пример.

Средним арифметическим двух положительных чисел a и b называют число $(a + b)/2$, а их средним геометрическим называют число $\sqrt{ab}$. Задание: доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше их среднего геометрического, то есть $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Доказательство. Неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ равносильно неравенству $a + b - 2\sqrt{ab}$, которое равносильно $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Данное неравенство исполняется при любых положительных a и b, причём, если, $a \neq b$, то неравенство строгое, если, $a = b$, то среднее арифметическое равно среднему геометрическому.

Задание для самостоятельной работы.

Доказать неравенства:

1. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2 (a>0, b>0)$
2. $x^2+4x+5>0$
3. $a^4+b^4 \geq a^3b+ab^3 (a \geq 0, b \geq 0)$
4. $x^2+2y^2+2xy+6y>0$
5. $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

8.3. Разновидности неравенств

1. Линейные неравенства и системы неравенств

Линейным неравенством называют неравенства вида $ax + b > 0$ (или $ax + b \geq 0$, $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$). Если $a > 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x > -b/a$, если $a < 0$, то неравенство $ax + b > 0$ равносильно неравенству $x < -b/a$. Решение неравенства: $x \in (-\infty; -b/a)$.

Пример.

Решить неравенства:

1) $2x - 5 > 0$

$2x - 5 > 0 \Leftrightarrow 2x > 5 \Leftrightarrow x > 2{,}5$; $x \in (2{,}5; \infty)$

2) $3x + 2 \le 5x - 1$

$3x + 2 < 5x - 1 \Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow x > 1{,}5;\ x \in [1{,}5; \infty)$

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1. $6x + 2 > 0$
2. $4x - 3 < 0$
3. $5 - 4x > 0$
4. $2 - 3 > 4x - 5$
5. $7x + 3 < 4 - 3x$
6. $5x - 11 \ge -6 - 2x$
7. $1{,}7 - 1{,}2x \le 3x + 2$
8. $0{,}3 - 7{,}6 < 5{,}8 - 0{,}2x$

В случае, если задана система линейных неравенств с одним неизвестным *x*, например, система двух неравенств вида $\begin{cases} ax + b > 0, \\ cx + d < 0, \end{cases}$, то её решение проводится так: решают каждое неравенство в отдельности, а затем находят те значения *x*, которые входят во множества решений каждого из неравенств. В случае двух неравенств решением каждого из них служит бесконечный интервал вида *(c; ∞)* или *(–∞; d)*. Решением такой системы неравенств является пересечение интервалов $x \in (-\infty; d) \cap (c; \infty)$, где ($\cap$ – знак пересечения). Если интервалы не пересекаются, система неравенств решений не имеет.

Пример.

Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 4x - 1 \le 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 7 > 0, \\ 4 - 5x \ge 0 \end{cases}$

Решение.

1) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 4x - 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2{,}5, \\ x \le 0{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-2{,}5; \infty), \\ x \le (-\infty; 0{,}25] \end{cases}$

$x \in (-2{,}5; \infty) \cap (-\infty; 0{,}25] = (-2{,}5; 0{,}25]$

2) $\begin{cases} 3x - 7 > 0, \\ 4 - 5x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 7/3, \\ x \le 5/4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > (7/3; \infty), \\ x \le (-\infty; 5/4] \end{cases}$

$x \in (7/3; \infty) \cap (-\infty; 5/4] = \varnothing$

Задание для самостоятельной работы.

Решить системы неравенств:

1. $\begin{cases} 3x + 5 > 0, \\ 2x - 1 > 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x + 5 < 0, \\ 3 - 2x > 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 5x - 2 < 0, \\ 4x + 3 > 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 4x + 1 < 0, \\ 2x - 7 > 0 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3 - 5x < 0 \end{cases}$

2. Квадратные неравенства

Квадратным неравенством называется неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$. Для решения квадратного неравенства нужно квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ разложить на множители $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ и определить знак квадратного трёхчлена в каждом из интервалов: $(-\infty; x_1)$, $(x_1; x_2)$ и $(x_1; \infty)$. Если квадратный трёхчлен не имеет корней (дискриминант трёхчлена отрицательный), то неравенство или не имеет решений, или решением являются все действительные числа.

Пример.

Решить неравенства:

1) $2x^2 + 5x - 7 < 0$

2) $-x^2 + 3x - 7 > 0$

3) $x^2 - 2x + 1 < 0$

Решение.

1) $2x^2 + 5x - 7 < 0 \Leftrightarrow 2(x + 3{,}5)(x - l) < 0$. В интервале $(-\infty; -3{,}5)$ и $(1; \infty)$ квадратный трёхчлен больше нуля, а в интервале $(-3{,}5; 1)$ – меньше нуля.
Следовательно, решением неравенства является $x \in (-3{,}5; 1)$.

2) $-x^2 + 3x - 7 > 0$. Вычислим дискриминант: $D = (3)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-7) = 9 - = = -19 < 0$. Следовательно, знак трёхчлена является постоянным при любых значениях x. Подставив в квадратный трёхчлен $x = 0$, получим $-7 < 0$, то есть неравенство решений не имеет: $x \in \varnothing$.

3) $x^2 - 2x + 1 \le 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 \le 0$. Выражение $(x - 1)^2 \ge 0$ при любых значениях x.
Так как неравенство нестрогое, оно имеет решение $x = 1$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1. $x^2 - 3x + 2 > 0$
2. $x^2 - 5x + 4 \le 0$
3. $x^2 -4x - 21 \ge 0$
4. $x^2 - 14x + 49 > 0$
5. $4x^2 - 20x + 25 < 0$
6. $x^2 - 8x + 17 > 0$
7. $2x^2 + 3x +2 \le 0$

3. Дробно–рациональные неравенства

Дробно–рациональными называются неравенства вида

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + b_n} > 0$$

Такие неравенства решают с помощью разложения входящих в них многочленов на множители, после чего оказывается достаточным установить знак левой части неравенства в каждом из интервалов, на которые числовая ось разбивается действительными корнями числителя и знаменателя.

Пример.

Решить неравенства:

1) $\frac{2x+3}{x-4} > 3$

2) $\dfrac{x-1}{x-3}-\dfrac{4-x}{x+2}\geq 3$

Решение.

1) $\dfrac{2x+3}{x-4}>3 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-4}-3>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3-3x+12}{x-4}>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+15}{x-4}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-15}{x-4}<0.$

В интервале (-∞; 4) дробь положительна, в интервале (4; 15) – отрицательна, в интервале (15; ∞) – вновь положительна. Область решений неравенства $x \in$ *(4; 15).*

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{4-x}{x+2}\geq 3 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2)-(4-x)(x-3)-3(x-3)(x+2)}{(x-3)(x+2)}\geq 0$$

$$\frac{x^2+x-2+x^2-7x+12-3x^2+3x+18}{(x-3)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-3x+28}{(x-3)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2+3x-28}{(x-3)(x+2)}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-4)(x+7)}{(x-3)(x+2)}\leq 0.$$

Дробное выражение в интервалах (-∞; -7], (-2; 3) и [4; ∞) положительно, а в интервалах [-7; -2) и (3; 4] – отрицательно. Следовательно, область решений неравенства $x \in [-7; -2) \cup (3; 4]$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1. $\dfrac{3x-2}{2x+1}\geq 4$
2. $\dfrac{4x-1}{2x+3}<-2$
3. $\dfrac{2x-2}{5x-1}\geq -3$
4. $\dfrac{6-x}{x+1}+\dfrac{x+4}{1-x}\leq -5$
5. $\dfrac{4+x}{2-x}-\dfrac{x-1}{x-4}\leq -5$
6. $\dfrac{x-4}{x+2}-\dfrac{x+6}{2-x}\geq 5$
7. $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}\geq 1$
8. $\dfrac{1}{x^2-x-6}-\dfrac{1}{x^2+x-6}\leq \dfrac{1}{x^2+5x+6}$

4. Иррациональные неравенства

Если переменная в неравенстве входит под знаком корня, такое неравенство называется иррациональным. При решении иррациональных неравенств используют те же приёмы, что и при решении рациональных неравенств, а также при решении иррациональных уравнений.

Пример.

Решить неравенства:

1) $\sqrt{x-1}>2$

2) $\sqrt{x+5}>7-x$

3) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+6}\leq 5$

Решение.

1) $\sqrt{x-1} > 2$. ОДЗ неравенства задается условием $x \geq 1$. Так как обе части неравенства неотрицательны, неравенство можно возвести в квадрат: $x - 1 > 4$, откуда получим решение $x > 5$.

2) $\sqrt{x+5} > 7 - x$. ОДЗ неравенства задаётся условием $x \geq -5$. Далее рассматриваем два возможных случая: 1) правая часть неравенства отрицательна, 2) правая часть неравенства неотрицательна. Если $7 - x < 0 \Leftrightarrow x > 7$, то неравенство заведомо удовлетворяется: левая часть не меньше нуля. Остается рассмотреть случай $x \leq 7$. В этом случае обе части неравенства неотрицательны, и неравенство можно возвести в квадрат: $x + 5 > 49 - 14x + x^2$. Это приводит к квадратному неравенству $x^2 - 15x + 44 < 0$, которое удовлетворяется при $4 < x < 7$. Но по предположению $x \leq 7$, поэтому получим $4 < x \leq 7$. Итак, неравенство удовлетворяется при $x > 7$ и при $4 < x \leq 7$, то есть вообще при $x > 4$.

3) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} \leq 5$. ОДЗ неравенства задаётся условием $x \geq -1$. Так как при любых допустимых значениях *x* обе части неравенства положительны, то возводим неравенство в квадрат:

$$x + 1 + x + 6 + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} \leq 25 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 7x + 6} \leq 9 - x$$

Так как слева неотрицательное выражение, то должно выполняться условие $x \leq 9$; в этом случае можно еще раз возвести в квадрат обе части нового неравенства и получить:

$x^2 + 7x + 6 \leq 81 - 18x + x^2 \Leftrightarrow x \leq 3$. Учитывая все найденные ограничения на *x*: $x \geq -1$, $x \leq 9$, $x \leq 3$, приходим к следующему решению $x \in [-1; 3]$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1. $\sqrt{x-2} < 1$
2. $\sqrt{x+3} \leq 2$
3. $\sqrt{\dfrac{x+5}{2x-1}} \geq 2$
4. $\sqrt{\dfrac{1-x}{2x-5}} < 3$
5. $\sqrt{x+1} < 1 - x$
6. $2 - \sqrt{x+18} \geq x$
7. $\sqrt{x^2 - x - 2} < x - 1$
8. $\sqrt{x-5} + \sqrt{10-x} < 3$
9. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} < 2$

8.3. Уравнения и неравенства, которые содержат модуль

1. Уравнения, которые содержат модуль

2.

Модулем действительного числа *a* называют само это число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Модуль *a* обозначается $|a|$. Итак,

$$|a| = \begin{cases} a, \text{если } \mathbf{a \geq 0}, \\ -a, \text{если } \mathbf{a \leq 0} \end{cases} \qquad (1)$$

Если в уравнении неизвестная величина находится под знаком модуля, то модуль нужно раскрыть по формуле (1) и решить уравнения для каждого из случаев формулы (1).

Пример. Решить уравнения:

1) $|x| = 5$

2) $|x - 3| = 7$

3) $|x + 3| + |x - 2| = 5 + x$

Решение.

1) Раскроем модуль x по формуле (1): $|x| = \begin{cases} x, (\text{если } x \geq 0) \\ -x, (\text{если } x < 0) \end{cases} = 5$

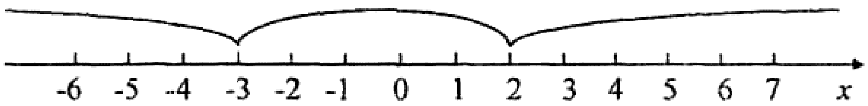
Итак, нужно решить два уравнения $x = 5$ (при $x \geq 0$) и $-x = 5$ (при $x < 0$). Корни уравнений равны: $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

2) Раскроем модуль $(x - 3)$ по формуле (1): $|x-3| = \begin{cases} x-3, (\text{если } x \geq 3) \\ -(x-3), (\text{если } x < 3) \end{cases}$

Итак, нужно решить два уравнения: $x - 3 = 7$, (при $x \geq 3$) и $-(x - 3) = 7$, (при $x < 3$). Корни уравнений равны: $x_1 = 10$, $x_2 = -4$.

3) Данное уравнение решим методом интервалов. Для этого:

- определим, при каких значениях x обращаются в ноль выражения, которые стоят под знаком модуля: $x_1 = -3$, $x_2 = 2$;
- полученные значения x откладываем на числовой прямой, которая разбивается на интервалы: $(-\infty; -3)$, $(-3; 2)$, $(2; \infty)$.



- решаем уравнение в каждом интервале, раскрывая модули по правилу (1).

Первый интервал – $(-\infty; -3)$: $-(x + 3) - (x - 2) = x + 5 \Leftrightarrow -3x = 6 \Leftrightarrow x = -2$, но $-2 \notin (-\infty; -3)$, поэтому в данном интервале решений нет, $x \in \varnothing$.

Второй интервал – $(-3; 2)$:$(x + 3) - (x - 2) = x + 5 \Leftrightarrow x = 0$. Так как $0 \in (-3; 2)$, то $x = 0$ является корнем данного уравнения.

Третий интервал – $(2; \infty)$: $(x + 3) + (x - 2) = x + 5 \Leftrightarrow x = 4$. Так как $4 \in (2; \infty)$, то $x = 4$ является корнем данного уравнения. Итак, $S = \{0, 4\}$.

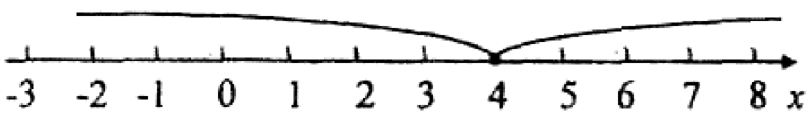
2. Неравенства, которые содержат модуль

Если в неравенстве неизвестная величина находится под знаком модуля, то такое неравенство лучше всего решать методом интервалов.

Пример.

Решить неравенство: $|x - 4| \leq 5$.

Определим, при каких значениях x обращается в ноль выражение под знаком модуля: $x = 4$. Значение $x = 4$ откладываем на числовой прямой, которая разбивается на интервалы $(-\infty; 4)$ и $(4; \infty)$. Решим неравенство в каждом интервале.



Первый интервал – $(-\infty; 4)$: $-(x-4) \le 5 \Leftrightarrow -x+4 \le 5 \Leftrightarrow x \ge -1$. Решение неравенства в данном интервале: $-1 \le x \le 4$.

Второй интервал – $(4; \infty)$: $x-4 \le 5 \Leftrightarrow x \le 9$. Решение неравенства в данном интервале: $4 \le x \le 9$.

Решение неравенства: $x \in [-1, 4] \cup [4, 9]$, или $x \in [-1, 9]$.

Задания для самостоятельной работы.

1) Решить уравнения:

1. $\lvert x-5\rvert = 3$	5. $\lvert x-3\rvert + 2\lvert x+1\rvert = 4$
2. $\lvert 2x+3\rvert = x+1$	6. $\lvert x-1\rvert + \lvert 2-x\rvert = x+3$
3. $\lvert 2-3x\rvert = 1-2x$	7. $\lvert x-4\rvert + 2\lvert x+1\rvert = 2x+3$
4. $\lvert x+3\rvert + \lvert 2x-1\rvert = 8$	8. $\lvert x-1\rvert + 3\lvert x+1\rvert = 2x+8$

2) Решить неравенства:

1. $\lvert x-7\rvert \le 9$	5. $\lvert x+2\rvert + \lvert x-4\rvert < x-3$
2. $\lvert 3x-1\rvert > 2x+5$	6. $\lvert 3x-1\rvert - 2\lvert x+2\rvert < x+3$
3. $\lvert 3-5x\rvert \le 7-4x$	7. $\lvert 3x+7\rvert + \lvert x-4\rvert < 14$
4. $\lvert 5-2x\rvert - \lvert x-1\rvert \ge 10$	

Контрольные вопросы

1. Что называется неравенством?
2. Какое неравенство называется строгим, нестрогим?
3. Какие неравенства называются неравенствами одинакового смысла, а какие – неравенствами противоположного смысла?
4. Назовите свойства неравенств.
5. Какие действия можно выполнять с неравенствами?
6. Что означает «доказать неравенство»?
7. Какое неравенство называется линейным, квадратным, дробно–рациональным, иррациональным?
8. Что называется модулем числа?

9. ФУНКЦИИ

9.1. Основные понятия про функции, график функции

Зависимость переменной y от переменной x называется функцией, если каждому значению x соответствует единственное значение y, которое определяется по заданному закону. Функцию записывают $y = f(x)$ (игрек равен эф от икс). Переменная x называется *независимой переменной (аргументом)*, а область её изменения X – *областью определения функции y, D(f)*. Множество значений, которые принимает y при изменении x, называется *множеством значений функции, E(f)*.

Пример.

1) $y = ax + b$ – линейная функция.

2) $y = ax^2 + bx + c$ – квадратичная функция.

График функции

Декартова прямоугольная система координат – это две взаимно перпендикулярные числовые оси, которые имеют общее начало координат (рис.3). Числовая ось значений переменной $\boldsymbol{x}$ называется ***осью абсцисс***, а числовая ось значений переменной $\boldsymbol{y}$ называется ***осью ординат***. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек плоскости, абсциссы которых есть значения аргумента x, а ординаты – значения функции $y = f(x)$(рис. 3).

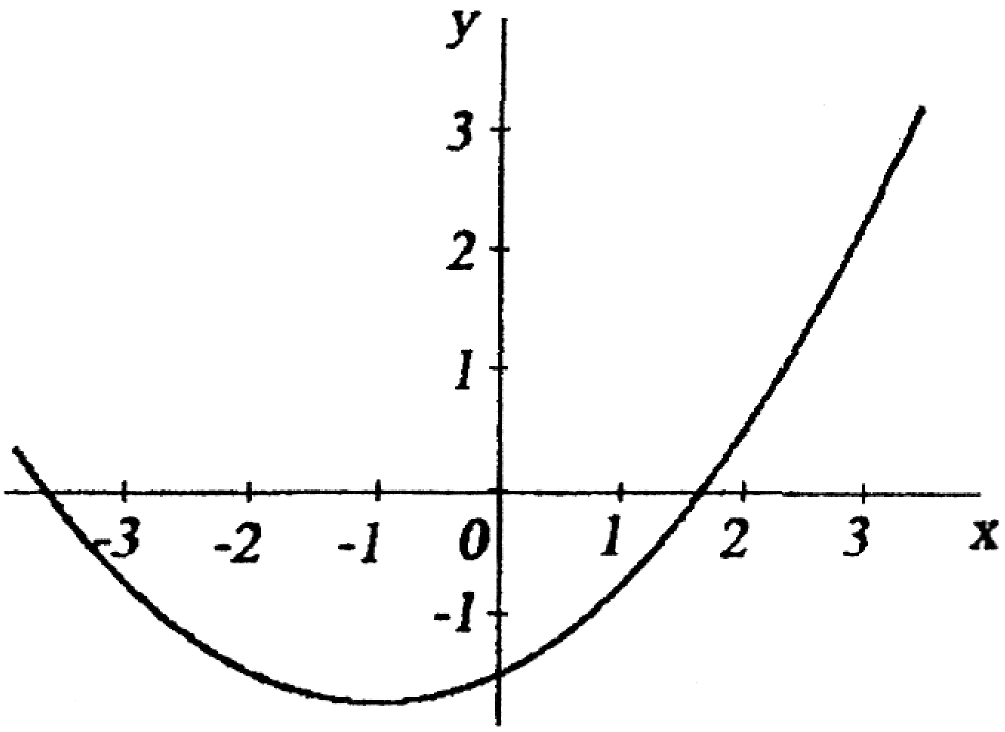


Рис. 3

9.2. Свойства функций

1. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей* на данном числовом промежутке X, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует большее значение функции $f(x)$. То есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$называется *убывающей* на данном числовом промежутке x, если большему значению аргумента $x \in X$ соответствует меньшее значение функции $f(x)$, то есть для любых x_1 и x_2 из промежутка X, таких, что $x_2 > x_1$ выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция $y = f(x)$ только возрастает или только убывает на данном числовом промежутке, то она называется *монотонной* на данном промежутке.

Монотонность функции можно определить по её графику. Например, функция $y = f(x)$, график которой изображён на рис.4, монотонно возрастает на промежутке (-3; 3).

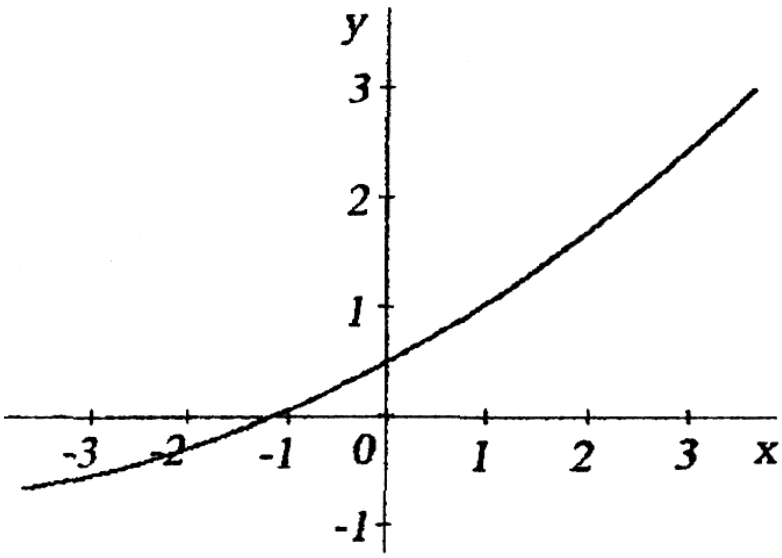


Рис. 4

3. Чётные и нечётные функции
4.

Функция $y = f(x)$называется ***чётной***, если она имеет свойства:

1) область определения этой функции симметрична относительно начала отсчёта O;

2) для любого x из области определения функции выполняется равенство

$f(x) = f(-x)$.

Например, *чётными* являются функции $y = x^2$, $y = 2x^4 – 3x^2$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy (рис. 5).

Функция $y = f(x)$ называется ***нечётной***, если она имеет свойства:

1) область определения этой функции симметрична относительно начала отсчета O;

2) для любого x из области определения функции выполняется равенство

$f(x)= -f(-x)$.

Например, нечетными являются функции $y = x^3$, $y = 3x^5 – 2x^3 + x$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 6).

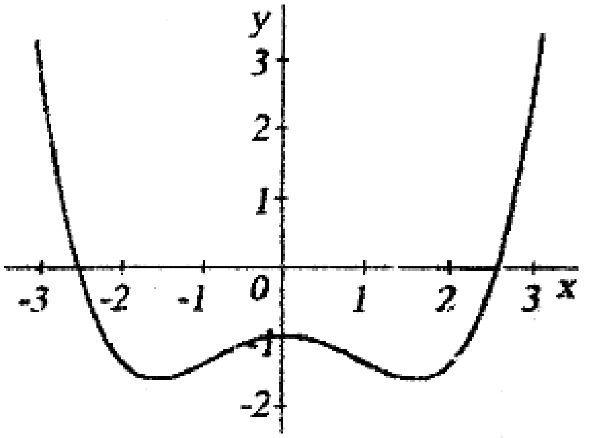


Рис. 5

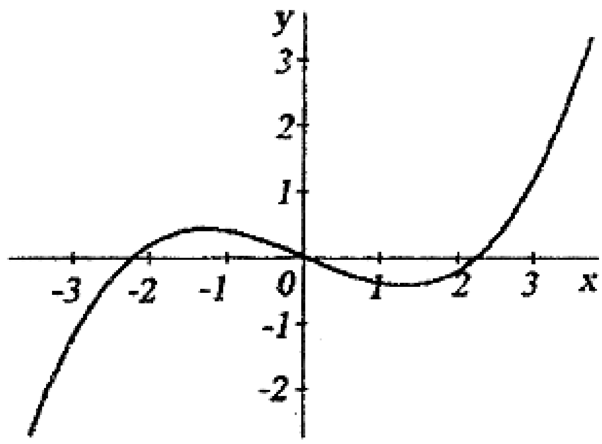


Рис. 6

Не всякая функция является четной или нечётной. Например, ни четными, ни нечётными не являются функции $y = 2x - 1$, $y = x^2 + 2x - 1$.

***Задание для самостоятельной работы*.**

Определить, какие из функций являются чётными, какие нечетными, а какие ни четными, ни нечётными.

1. $y = 3x^3 - 7x$
2. $y = 2x^6 - 3x^3 + x$
3. $y = x^4 - 5x^2 + 1$
4. $y = \frac{1}{x^2}$
5. $y = \frac{1}{x^3 - x}$

9.3. Разновидности функций

1. Линейная функция

Линейной функцией называют функцию вида $\boldsymbol{y = ax + b}$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ – некоторые числа. Область определения линейной функции – это множество всех действительных чисел, так как выражение $ax + b$ имеет смысл при любых значениях x. В частном случае, когда $b = 0$, зависимость $y = ax$ называют прямо пропорциональной зависимостью. Графиком линейной функции $y = ax + b$ является прямая линия. Для построения графика линейной функции достаточно двух точек. Построим, например, график функции $y = 2x - 1$. Для этого возьмём два значения аргумента $x = 0$ и $x = 2$.

Значения функции при данных значениях x равны $y(0) = -1$ и $y(2) = 3$. Поставим на координатной плоскости точки $A(0; -1)$ и $B(2; -3)$ и проводим через них прямую (рис. 7).

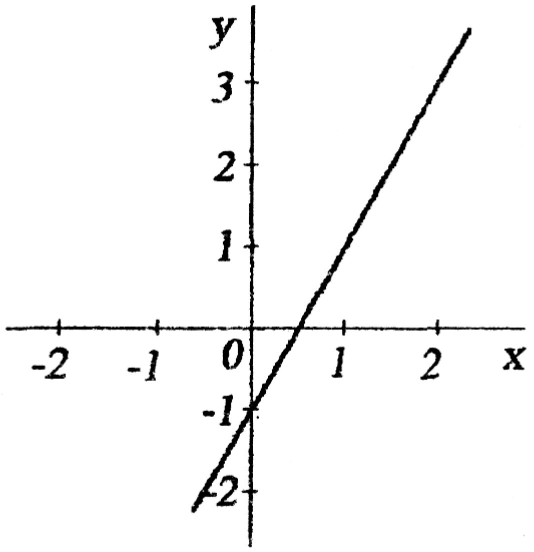


Рис 7.

Задание для самостоятельной работы.

Построить графики функций:

1. $y = x$
2. $y = x + 2$
3. $y = \frac{1}{2}x - 1$
4. $y = -2x + 3$
5. $y = -\frac{1}{3} - 2$
6. $y = 2$
7. $x = -1$

3. Квадратичная функция

Квадратичной функцией называют **функцию** вида $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$, где a, b и c – некоторые числа ($a \neq 0$). Область определения квадратичной функции – это множество всех действительных чисел, так как выражение $ax^2 + bx + c$ имеет смысл при любых значениях x. Графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является ***парабола***. Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. На рис.8 изображён график функции $y = x^2$. Вершина такой параболы находится в начале координат. В общем случае абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x = -b/2a$. Например, абсцисса графика функции $y = x^2 - 2x - 3$ равна $x_0 = 1$, ордината вершины параболы равна $y_0 = 1 - 2 - 3 = -4$. Ветви данной параболы направлены вверх. Для построения графика функции найдём некоторые точки, через которые проходит данная парабола, в частности, точки пересечения с осями координат. Точки пересечения параболы с осью Оx определяются из уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$. Они равны $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$. Точку пересечения параболы с осью Оy определим, подставив в функцию значение $x = 0$: $y_1 = -3$. Желательно также найти ещё несколько точек, через которые проходит парабола. График функции $y = x^2 - 2x - 3$ изображён на рис. 9.

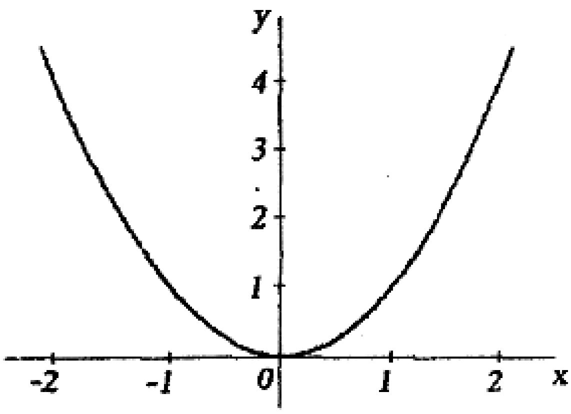


Рис.8

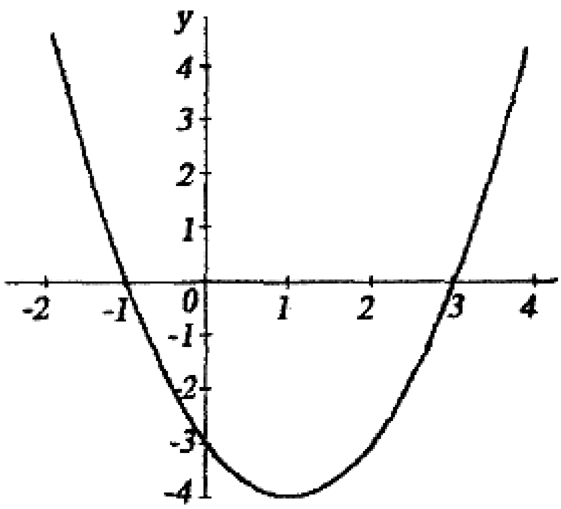


Рис.9

Задание для самостоятельной работы.

Построить графики функций:

1. $y = x^2 - 2x$
2. $y = x^2 - 4$
3. $y = x^2 + 3x - 4$
4. $y = -x^2 + 2$
5. $y = -x^2 + 4x - 3$

4. Функция $y = \frac{a}{x}$

Функцию $y = \frac{a}{x}$ называют **функцией *обратной пропорциональности*** *(обратная пропорциональная зависимость)*. Область определения функции $y = \frac{a}{x}$ – это множество чисел, отличных от нуля, то есть $D(f) = (-\infty ;0)\cup(0; -\infty)$. Данная функция является **нечётной**.

Графиком функции $y = \frac{a}{x}$ является кривая, которая состоит из двух ветвей, симметричных относительно начала координат. Такая кривая называется гиперболой (рис.10). Гипербола не имеет точек пересечения с осями координат, а лишь сколько угодно близко ним приближается.

Прямые, к которым сколько угодно близко приближается график функции при удалении на бесконечность, называются ***асимптотами графика функции***. Асимптоты гиперболы – это числовые оси *Ox* и *Oy*. Они имеют уравнения $y = 0$ и $x = 0$.

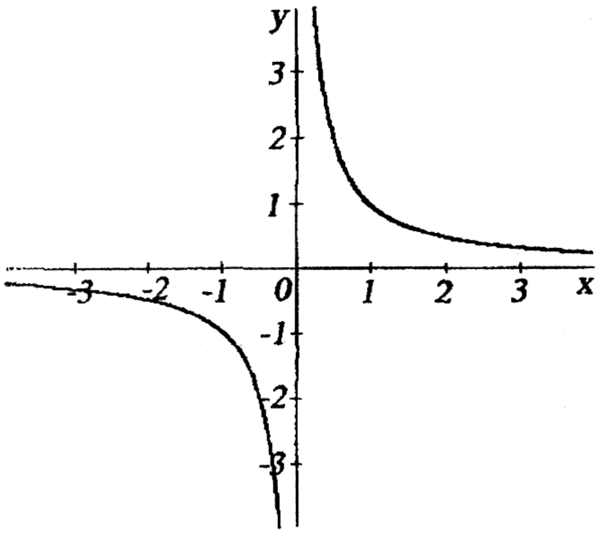


Рис. 10

Задание для самостоятельной работы.

Построить графики функции

1. $y=\dfrac{2}{x}$ 3. $y=-\dfrac{1}{x}$

2. $y=\dfrac{1}{3x}$ 4. $y=-\dfrac{2}{x}$

5. Дробно–линейная функция

Дробно–линейной функцией называют функцию вида $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где *a, b, c* и *d* – некоторые числа ($c\neq 0,\ ad\neq bc$). Область определения функций – это все значения *x*, кроме $x=-\dfrac{d}{c}$. Для построения графика дробно–линейной функции нужно найти асимптоты графика функции. Уравнения асимптот имеют вид: $y=\dfrac{a}{c}$ и $x=-\dfrac{d}{c}$.

График дробно–линейной функции представляет собой гиперболу, симметричную относительно точки пересечения асимптот O_1. Точка O_1 имеет координаты $(-d/c;\ a/c)$. Построим график функции $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$. Асимптотами графика данной функции являются прямые $x = 2$ и $y = 2$. Найдём точки пересечения графика с осями координат. С осью *Ox* – это x = -0,5, с осью *Oy* – это y = -0,5. Желательно также найти ещё несколько точек, через которые проходит гипербола. График функции $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ изображён на рис. 11.

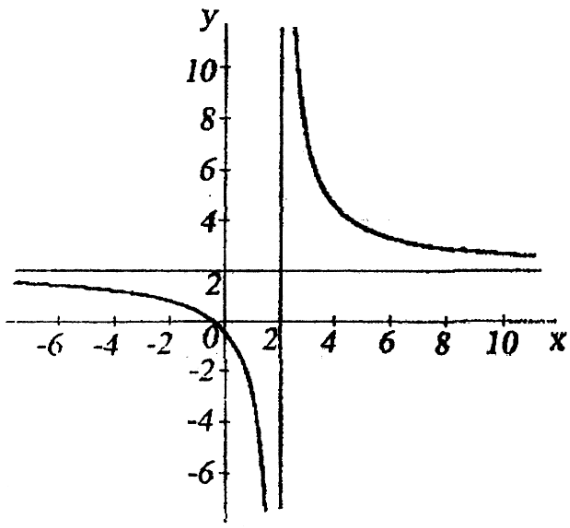


Рис.11

Задание для самостоятельной работы.

Построить графики функций:

1. $y = \dfrac{1}{x-3}$
2. $y = \dfrac{2}{x+2}$
3. $y = \dfrac{x+1}{x-1}$
4. $y = \dfrac{2x-3}{2x+1}$
5. $y = \dfrac{3x+2}{6x-4}$
6. $y = \dfrac{4x+1}{2x+3}$

6. Степенная функция

Степенной функцией называют функцию вида $y = x^a$. Рассмотрим разновидности степенной функции в зависимости от значения числа a.

1) $a = n$ – натуральное число. К этой разновидности относятся функции $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ и так далее. Область определения таких функций – все действительные числа. Если n – чётное число, то функция чётная, если n – нечётное число, то функция нечётная. На рис.12 представлены графики функций $y = x$ $(a = 1)$, $y = x^3$ $(a = 3)$ и $y = x^5 (a = 5)$. На рис.13 представлены графики функций $y = x^2$ и $y = x^4$.

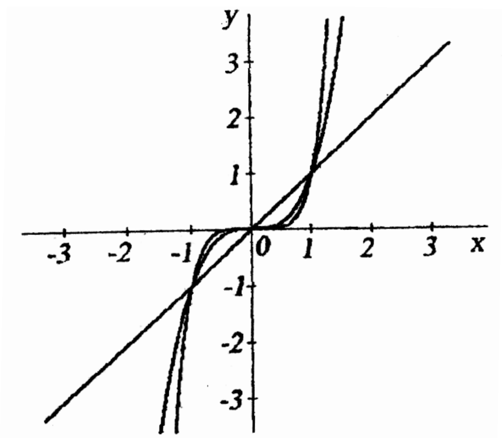


Рис.12

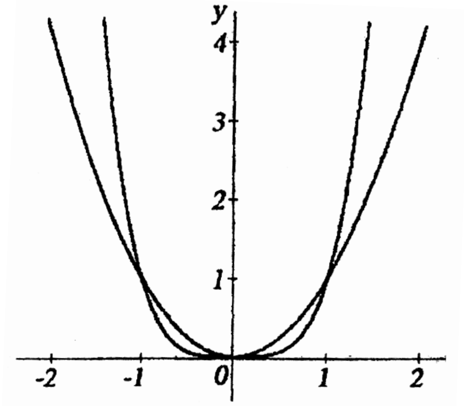


Рис.13

2) $a = -n$ – целые отрицательные числа. К этой разновидности относятся функции $y = 1/x$, $y = 1/x^2$, $y = 1/x^3$ и т. д. Область определения таких функций – все действительные числа, кроме $x = 0$. Если n – чётное число, то функция чётная, если n – нечётное число, то функция нечётная. На рис.14 представлены графики функций $y = 1/x$ и $y = 1/x^2$.

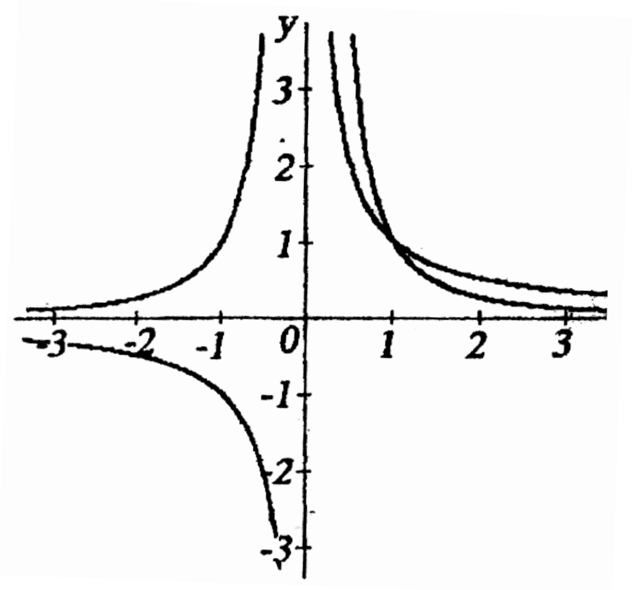


Рис. 14

3) $a = m/n$ – дробные числа (как положительные, так и отрицательные). К этой разновидности относятся, например, функции $y = x\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1/\sqrt{x}$ и другие. Область определения первых двух функций $D(f) = [0; \infty)$, функции $y = \sqrt[3]{x}$ – $D(f) = (-\infty; \infty)$, функции $y = 1/\sqrt{x}$ – $D(f) = (0; \infty)$. На рис.15 представлены графики функций $y = x\sqrt{x}$ и $y = \sqrt{x}$, анарис. На рис.16 – графики функций $y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1/\sqrt{x}$.

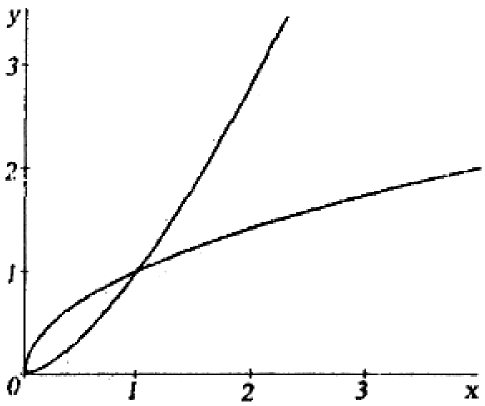


Рис. 15

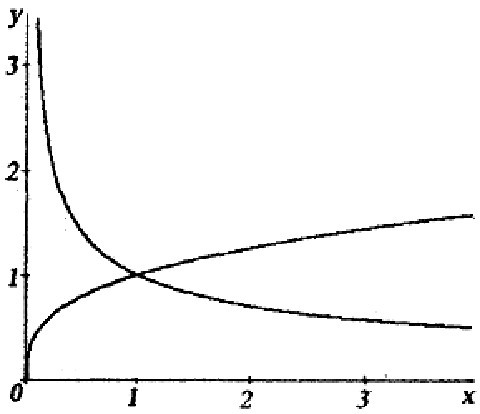


Рис. 16

9.4. Геометрические преобразования графиков функций

Во многих случаях графики функций могут быть построены путем некоторых преобразований уже известных графиков других функций более простого вида. Так, если известен график функции $y = f(x)$, то можно построить графики функций вида $y = f(x) + a$, $y = f(x + b)$, $y = cf(x)$, $y = f(kx)$, $y = -f(x)$ и $y = f(-x)$.

График функции $y = f(x) + a$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на a единиц вверх при $a > 0$ и на $|a|$ единиц вниз при $a < 0$. Например, на рис.17 показаны графики функции $y = -x^2$ и $y = -x^2 + 4$. График функции $y = -x^2 + 4$ получен параллельным переносом графика функции $y = -x^2$ на четыре единицы вверх. График функции $y = f(x + b)$ получается параллельным переносом графика функции $y = f(x)$ на b единиц влево при $b > 0$ и на $|b|$ единиц вправо при $b < 0$. Например, на рис.18 показаны трафики функций $y = x^2$ и $y = (x - 2)^2$. График функции $y = (x - 2)^2$ получен параллельным переносом графика функции $y = x^2$ на 2 единицы вправо.

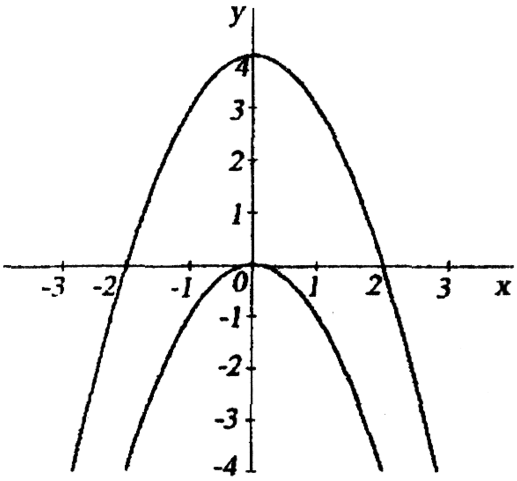


Рис.17

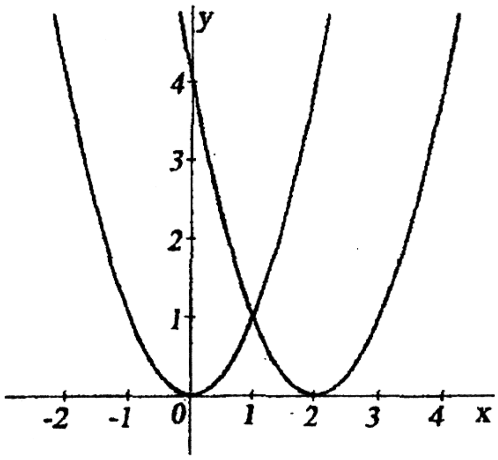


Рис.18

График функции $y = cf(x)$ получается растяжением графика функции $y = f(x)$ вдоль оси Oy в c раз при $c > 1$ и сжатием вдоль оси Oy в $1/c$ раз при $c < 1$. Например, на рис.19 показаны графики функций $y = x^2$ и $y = 3x^2$. График функции $y = 3x^2$ получен растяжением графика функции $y = x^2$ вдоль оси Oy в 3 раза.

График функции $y = f(kx)$ получается сжатием графика функции $y = f(x)$ к оси Oy в k раз при $k > 1$ и растяжением от оси Oy в $1/k$ раз при $k < 1$. Например, на рис.20 показаны графики функций $y = 1/x^2$ и $y = 1/(2x)^2$. График функции $y = 1/(2x)^2$ получен сжатием графика функции $y = 1/x^2$ к оси Oy в 2 раза.

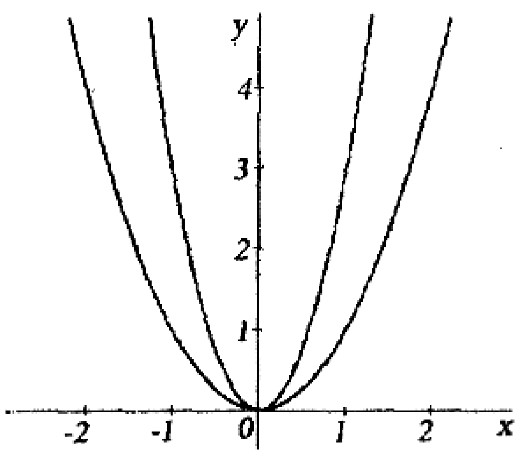


Рис. 19

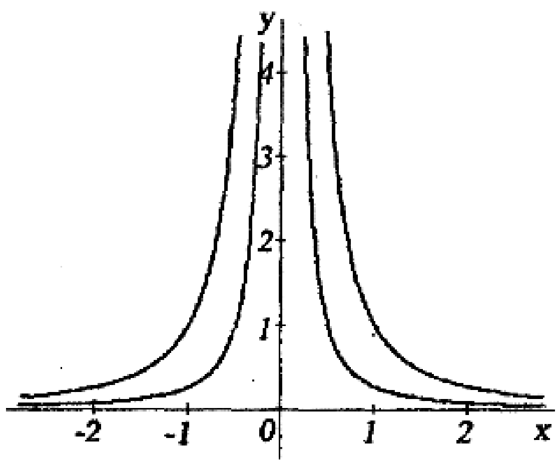


Рис. 20

График функции $y = -f(x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Ox. Например, на рис.21 показаны графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$. График функции $y = -\sqrt{x}$ получен симметричным отображением графика функции $y = \sqrt{x}$ относительно оси Ox.

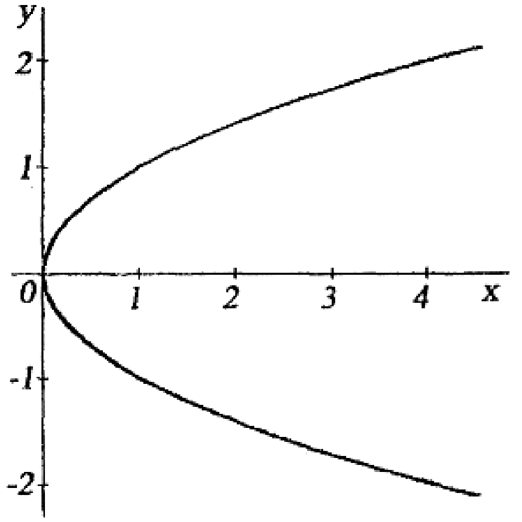


Рис.21

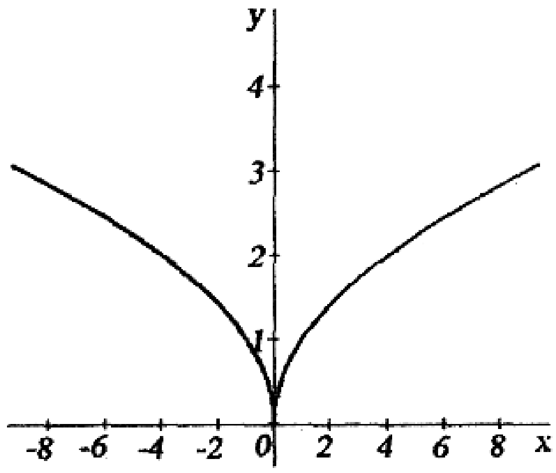


Рис. 22

График функции $y = f(-x)$ получается симметричным отображением графика функции $y = f(x)$ относительно оси Oy. Например, на рис.22 показаны графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \sqrt{-x}$. График функции $y = \sqrt{-x}$ получен симметричным отображением графика функции $y = \sqrt{x}$ относительно оси Oy.

Задание для самостоятельной работы.

Используя геометрические преобразования, построить графики функций:

1. $y = (x - 2)^2 - 1$
2. $y = (x + 1)^2$
3. $y = \dfrac{1}{3x}$
4. $y = -\dfrac{1}{x^2}$
5. $y = (-x)^{3/2}$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение функции. Что такое аргумент функции?
2. Что называется областью определения функции?
3. Что называется областью изменения функции?
4. Дайте определение декартовой прямоугольной системы координат.
5. Как называют оси координат Ox и Oy?

6. Что называется графиком функции?
7. Какая функция называется возрастающей, убывающей?
8. Что такое монотонная функция?
9. Дайте определение чётной и нечетной функции.
10. Какие особенности графиков чётных и нечётных функций?
11. Какую функцию называют линейной, квадратичной, дробно–линейной, степенной, функцией обратной пропорциональности?
12. Как называют графики квадратичной функции, функции обратной пропорциональности?
13. Назовите разновидности степенной функции. Какой вид имеют графики этих функций?
14. Назовите преобразования графиков функций, с помощью которых можно построить графики более сложных функций.

10.ГЕОМЕТРИЯ

10.1. Основные геометрические фигуры

Основные геометрические фигуры – это ***точка и прямая***. Точки обозначают прописными буквами: *A, B, C, D*, ... Прямые обозначают строчными латинскими буквами: *a, b, c, d*, ...

О расположении точки *A* и прямой *a*, которые показаны на рис.23 говорят, что:

1) точка *A лежит на прямой a*;

2) точка *A принадлежит прямой a*;

3) прямая *a проходит через точку A*.

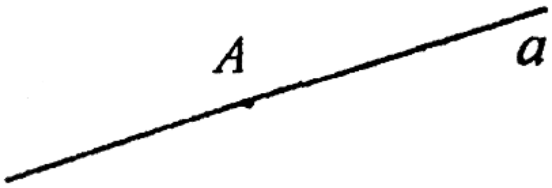


Рис. 23

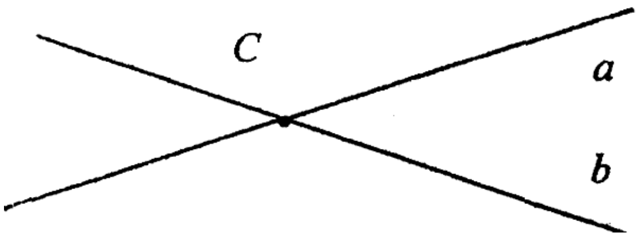


Рис. 24

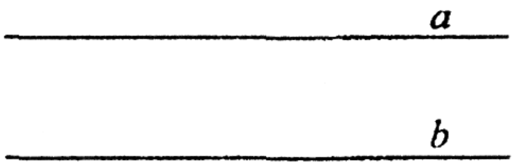


Рис. 25

О расположении точки *C* и прямых а и *b*, которые показаны на рис.24 говорят, что:

1) прямые *a* и *b* пересекаются в точке *C*;

2) точка *C* – это точка пересечения прямых *a* и *b*.

Прямые *a* и *b*, которые показаны на рис.25 – ***параллельные прямые***. Прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются. Параллельные прямые обозначают $a \parallel b$ (прямая *a* параллельна прямой *b*).

Основные свойства точек и прямых

1) Через любые две точки можно провести только одну прямую.

2) Две прямые или не пересекаются (параллельные прямые), или пересекаются в одной точке.

Если на прямой лежат точки *A* и *B*, то часть прямой между точками *A* и *B* называется *отрезком прямой* (рис.26). Отрезок обозначают *AB*. Точки *A* и *B* называются *концами отрезка. Длина отрезка* – это расстояние между концами отрезка. Длина измеряется в миллиметрах, сантиметрах, метрах и т. д.

Пусть на прямой *a* лежит точка *A* (рис.27). ***Полупрямая или луч*** – это часть прямой, которая лежит по одну сторону от данной точки *A*.

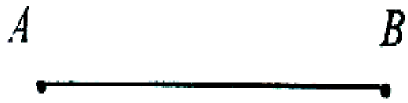


Рис. 26

Рис. 27

Точка *A* называется *начальной точкой* луча. Луч образуют AB, где *B* – любая другая точка луча. Полупрямая, которая лежит по другую сторону от данной точки *A*, называется *дополнительной* полупрямой к полупрямой *AB*.

10.2. Угол

Угол – это фигура, которая состоит из двух лучей с общей начальной точкой (рис.28). Точка C, общая начальная точка, называется *вершиной угла*.

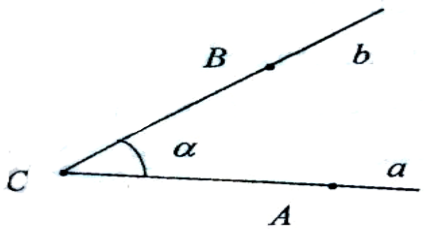


Рис. 28

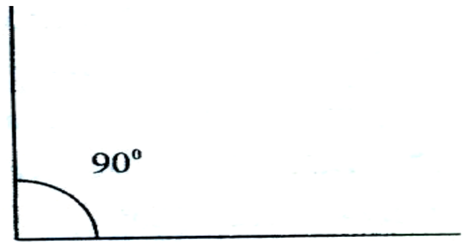


Рис. 29

Лучи CA (*a*) и CB (*b*) называются сторонами угла. Угол обозначают ∠(*a b*), ∠ACB, ∠C или *a*. Углы измеряются в *градусах*.

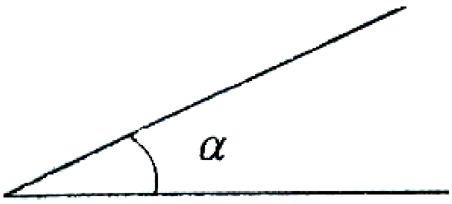


Рис. 30

Рис. 31

Прямой угол – это угол, равный 90° (рис.29). Если величина угла меньше 90°, то есть 0° < *a* < 90°, то такой угол называется ***острым*** (рис.30). Если величина угла больше 90°, то есть 90° < B < 180° , такой угол называется ***тупым*** (рис.31). ***Развернутый угол*** – это угол, равный 180° (рис.32), ***полный угол*** – это угол, равный 360° (рис.33).

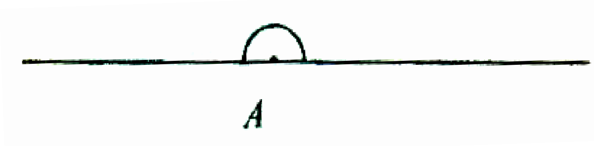


Рис. 32

Рис. 33

Два угла называются ***смежными***, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рис.34 углы CAD и BAC смежные. У них сторона Ac общая, а стороны AB и AD являются дополнительными полупрямыми прямой DB. Смежные углы в сумме дают 180°, то есть $\angle CAD + \angle BAC = 180°$.

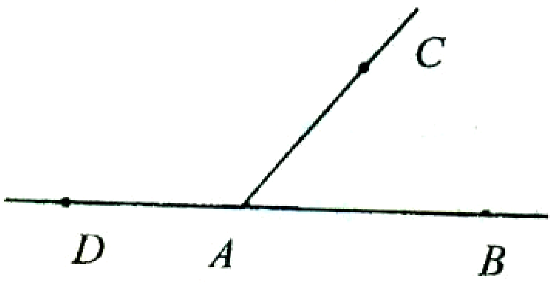


Рис. 34

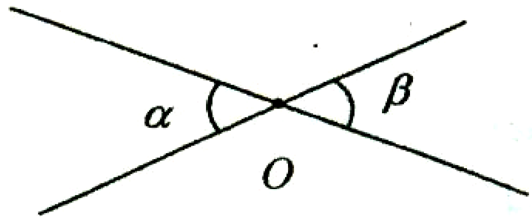


Рис.35

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого. На рис.35 углы α и β являются вертикальными. Стороны угла β являются дополнительными полупрямыми угла α. Вертикальные углы равны между собой, то есть $\alpha = \beta$.

Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом. Перпендикулярность прямых обозначается знаком ⊥. Запись $\alpha \perp b$ читается: «прямая α перпендикулярна прямой b». На рис.36 прямая α перпендикулярна прямой b.

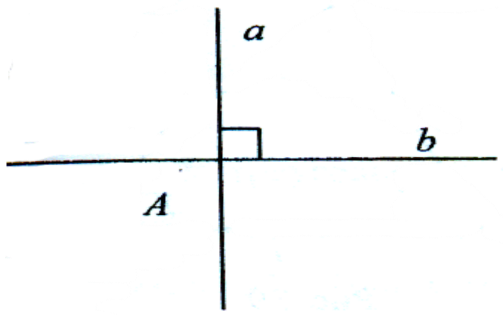


Рис. 36

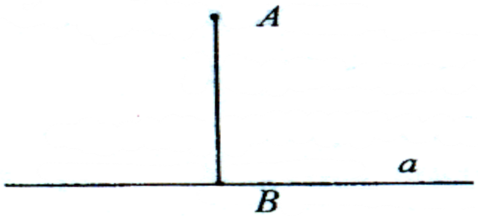


Рис. 37

Перпендикуляром к данной прямой называют отрезок прямой, перпендикулярной к данной прямой, причем один конец отрезка лежит на прямой. Этот конец отрезка называется *основанием перпендикуляра*. На рис.37 перпендикуляр AB проведен из точки A к прямой α. Точка B – основание перпендикуляра.

Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между сторонами и делит угол пополам. На рис.38 показан угол (α b). Луч C исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам: $\angle(ac) = \angle(bc)$. Луч C является биссектрисой угла (α b).

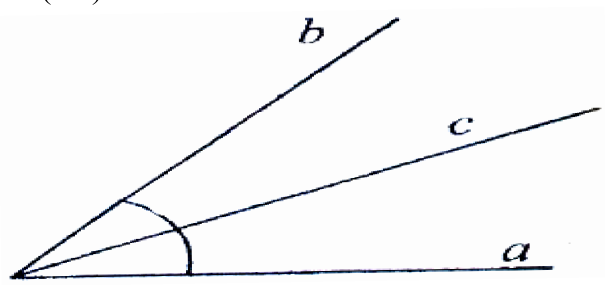


Рис. 38

10.3. Треугольники

На рис.39 изображен треугольник АВС. Треугольник обозначают знаком Δ. Точки А, В и С называют ***вершинами треугольника***. Отрезки АВ, АС и ВС – ***сторонами треугольника***. Сумма длин сторон треугольника называется периметром треугольника: $p = a + b + c$. Сумма углов треугольника равна 180° : $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

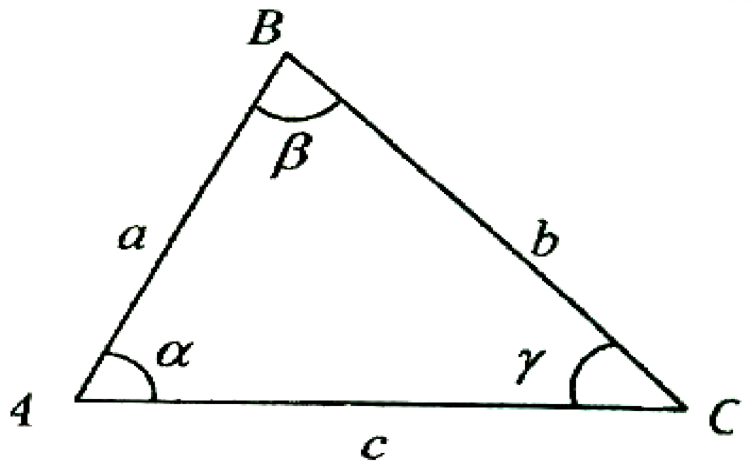


Рис. 39

В треугольнике рассматривают такие отрезки: медиана, высота и биссектриса.

Медианой треугольника называется отрезок, который соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. На рис.40 отрезок АМ – медиана. Он делит сторону ВС пополам. У треугольника имеется три медианы. Все медианы треугольника пересекаются в одной точке.

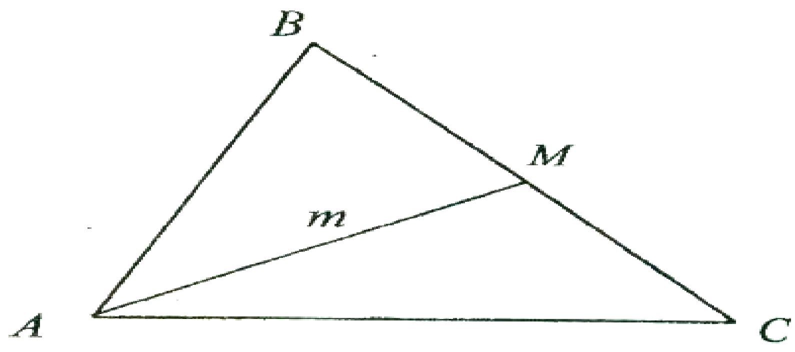


Рис. 40

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на противоположную сторону. На рис.41 отрезок BD – высота. Отрезок BD перпендикулярен стороне АС: $BD \perp AC$. У треугольника имеется три высоты. Все высоты треугольника пересекаются в одной точке.

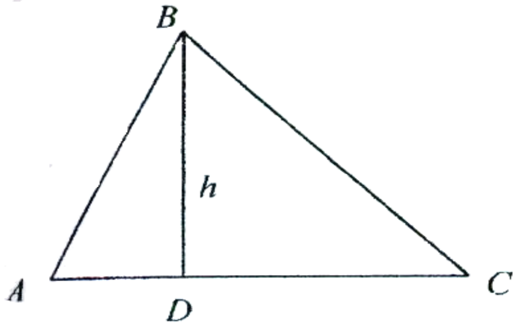


Рис. 41

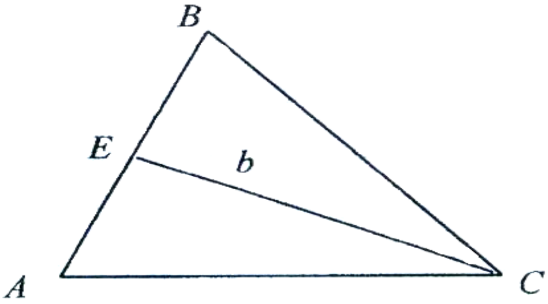


Рис.42

Биссектрисой угла треугольника называется отрезок, которой выходит из вершины на противоположную сторону и делит угол треугольника пополам. На рис.42 отрезок CE – биссектриса угла ACB. Биссектриса CE делит угол ACB пополам. У треугольника – три биссектрисы. Все они пересекаются в одной точке.

Площадь треугольника S равна половине произведения длин высоты и стороны, на которую она опущена. Если длина высоты BD равна h, а длина стороны AC равна a, то $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\, ah}$

Виды треугольников

Равнобедренный треугольник – это треугольник, у которого две стороны равны. Равнобедренный треугольник ABC показан на рис. 43. Стороны AB и BC называются *боковыми сторонами*, сторона AC – *основанием*. Боковые стороны равны между собой, $a = b$. Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой, $\alpha = \beta$. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

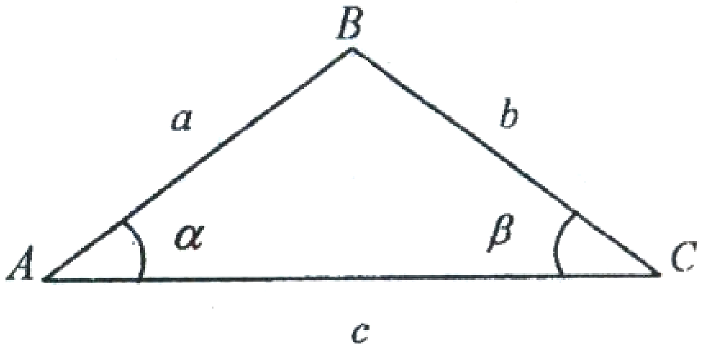


Рис.43

Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны. Все углы равностороннего треугольника равны 60°. Равносторонний треугольник ABC показан на рис.44. В равностороннем треугольнике высоты, медианы и биссектрисы углов совпадают.

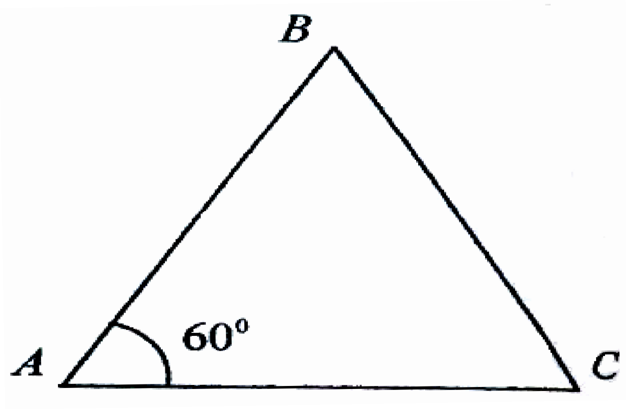


Рис. 44

Прямоугольный треугольник – это треугольник, у которого один из углов прямой. Прямоугольный треугольник ABC показан на рис. 45. Сторона, которая находится напротив прямого угла, называется **гипотенузой**. Стороны, прилежащие к прямому углу, называются **катетами**. Площадь прямоугольного треугольника можно вычислить по формуле $\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\, ab}$

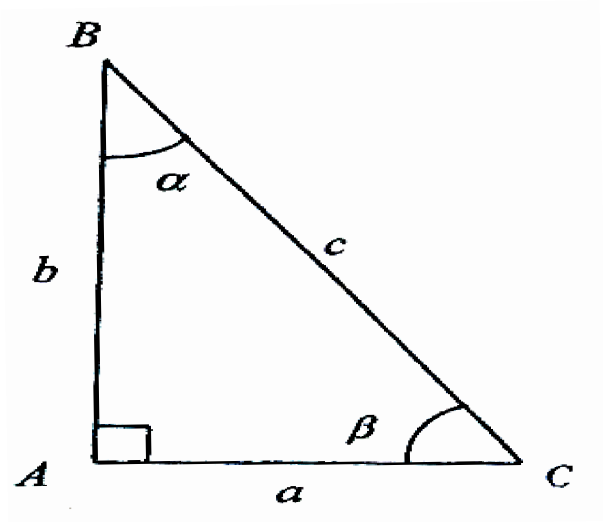


Рис. 45

Синусом острого угла называют отношение длин противолежащего катета и гипотенузы, **sin α=a/c**.

Косинусом острого угла называют отношение длин прилежащего катета и гипотенузы, **cos α=b/c.**

Тангенсом острого угла называют отношение длин противолежащего катета к прилежащему, **tg α=a/b**.

Котангенсом острого угла называют отношение длин прилежащего катета к противолежащему, ctg **α=b/a**. Можно также записать, что **tg α** $= \frac{\sin a}{\cos a}$ и **ctg α** $= \frac{\cos a}{\sin a}$ **.**

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$ Из теоремы Пифагора следует, что $\mathbf{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$.

Функции **sinα, cosα, tgα** и **ctgα** называются ***тригонометрическими функциями.*** Тригонометрические функции при значении углов 30°, 45° и 60° равны: sin30° = 1/2, sin45° = $\sqrt{2}$/2, sin60° = $\sqrt{3}$/2, cos30° = $\sqrt{3}$/2, cos45° = $\sqrt{2}$/2, cos60° = 1/2, tg30° = $\sqrt{3}$/3, tg45° = 1, tg60° = $\sqrt{3}$, ctg30° = $\sqrt{3}$, ctg45° = 1, ctg60° = $\sqrt{3}$/3.

10.4. Четырёхугольники

На рис.46 изображён четырехугольник ABCD. Точки A, B, C и D называются ***вершинами четырехугольника***. Отрезки AB, BC, CD и AD – ***стороны четырехугольника***. Углы α, β,γ и δ – *углы четырёхугольника*. Отрезки BD и AC называются ***диагоналями четырёхугольника***. Сумма длин сторон четырёхугольника называется ***периметром четырёхугольника*** $\boldsymbol{P = a + b + c + d}$. Сумма углов четырёхугольника равна 360°: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

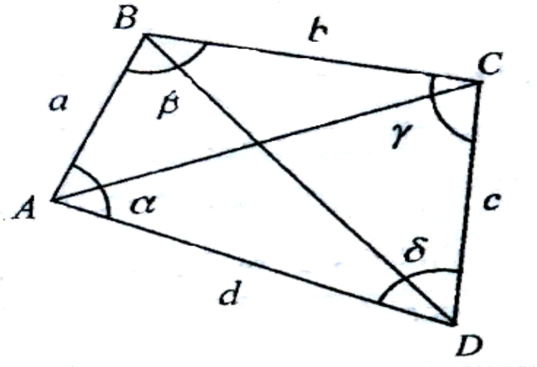


Рис. 46

Виды четырёхугольников

Параллелограмм – это четырёхугольник, у которого противоположные стороны параллельны между собой. На рис. 47 показан параллелограмм ABCD. Здесь *AB* || *CD, AD* || *BC*. Отрезок h называется высотой параллелограмма.

Свойства параллелограмма:

1) противоположные стороны параллелограмма равны между собой, *AD* = *BC, AB* = *CD*;

2) диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, *AO* = *OC, BO* = *OD.* Площадь параллелограмма равна произведению длин его стороны и высоты, опущенной на эту сторону, ***S = ah***

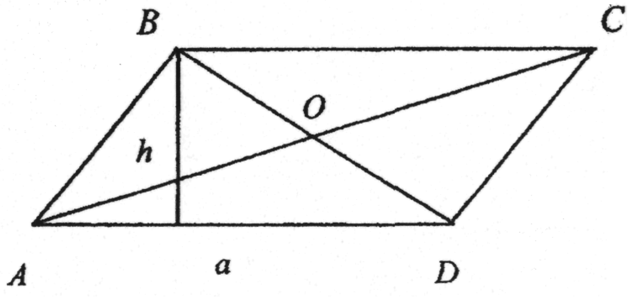


Рис. 47

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые. На рис.48 показан прямоугольник *ABCD*. Свойство прямоугольника: диагонали прямоугольника равны между собой, *AC* = *BD*. Площадь прямоугольника равна произведению длин его сторон, $\boldsymbol{S = ab}$

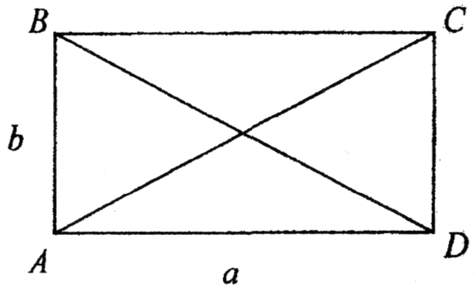


Рис. 48

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны между собой. На рис.49 показан ромб *ABCD*. Свойство ромба: диагонали ромба взаимно перпендикулярны, AC ⊥ BD. Площадь ромба равна половине произведения длин его диагоналей, $\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2}$

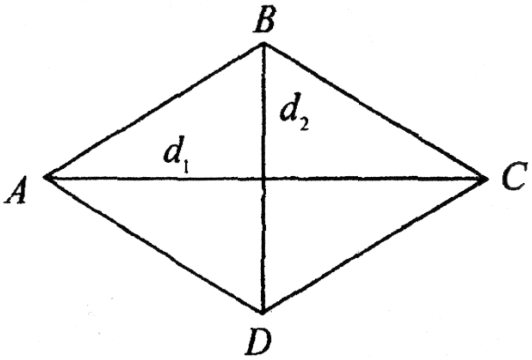


Рис.49

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны между собой, или ромб, у которого все углы прямые. На рис.50 показан квадрат *ABCD*. Диагонали квадрата равны и перпендикулярны между собой, *AC = BD, AC* ⊥ *BD*. Площадь квадрата равна квадрату длины его стороны, $\boldsymbol{S = a^2}$

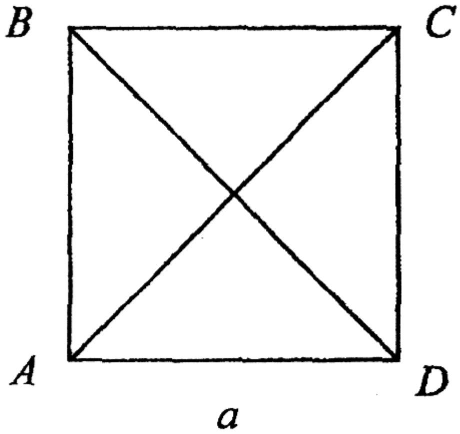


Рис.50

Трапеция – это четырёхугольник, у которого две противоположные стороны параллельны между собой. На рис.51 показана трапеция *ABCD*. Параллельные стороны *AD* и *BC* называются основаниями трапеции, две другие, *AB* и *CD* – боковые стороны. Средняя линия трапеции – это отрезок, который соединяет середины боковых сторон. Длина средней линии равна среднему арифметическому длин оснований трапеции, $m = (a + b)/2$. Высота трапеции h – это перпендикуляр, проведенный от одного основания к другому.

Площадь трапеции равна произведению длин её средней линии и высоты, $S = mh$

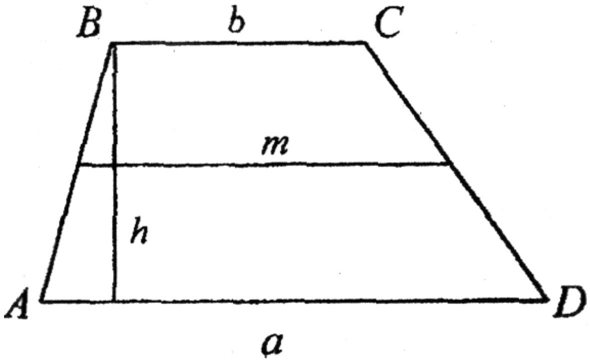


Рис. 51

10.5. Окружность, круг

Окружность – это линия, все точки которой равноудалены от одной точки, которая называется *центром* окружности.

Круг – это часть плоскости, ограниченная окружностью. На рис.52 показана окружность. Центр окружности находится в точке *O*.

Радиусом окружности (круга) называется отрезок прямой, который соединяет центр окружности с любой точкой на окружности. На рис. 52 радиус окружности – это отрезок *OB*.

Диаметром окружности называется отрезок прямой, который соединяет две точки окружности и проходит через центр окружности. На рис.52 диаметр окружности – это отрезок *AC*.

Хордой называется отрезок прямой, который соединяет две любые точки на окружности. На рис.52 отрезок *EF* – хорда. ***Дугой*** называют часть окружности, например, на рис.52 дугами являются части окружности *AE, EF* и т. д.

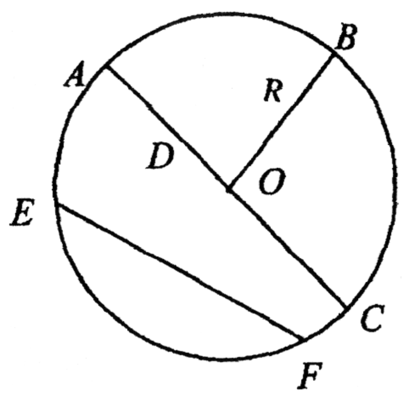


Рис. 52

Прямая называется ***касательной*** к окружности, если она имеет с окружностью одну общую точку. На рис.53 прямая *a* имеет с окружностью одну общую точку *A*. Прямая *a* – касательная. Общая точка окружности и касательной называется *точкой касания*. Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной, $OA \perp a$.

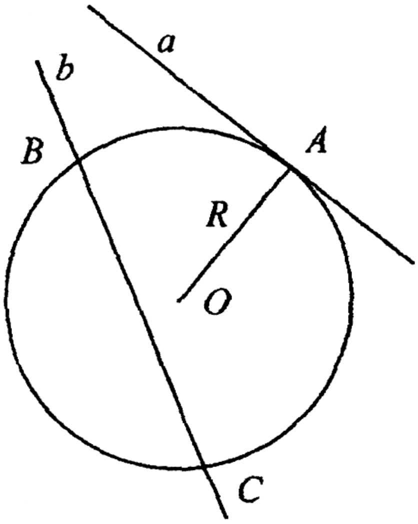


Рис. 53

Прямая называется ***секущей***, если она имеет с окружностью две общие точки. На рис.53 прямая *b* пересекает окружность и имеет с окружностью две общие точки *B* и *C*. Прямая *b* – секущая.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным* в окружность. На рис.54 вершина угла *ABC* лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность в точках *A* и *C*, угол *ABC* вписан в окружность. Угол, вершина которого лежит в центре окружности, а сторонами являются радиусы, называется *центральным* углом. На рис.54 вершина угла *AOC* лежит в точке *O*, а его сторонами являются радиусы *OA* и *OC*, угол *AOC* – центральный угол. Если концы вписанного угла α и центрального угла β совпадают, то центральный угол в два раза больше вписанного, β = 2α.

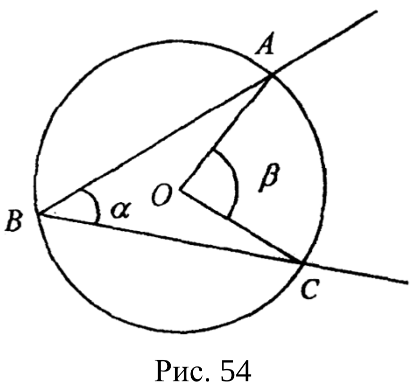


Рис. 54

Длину окружности *L* вычисляют по формуле: $\boldsymbol{L = 2\pi R^2 = \pi D}$, ***площадь круга*** вычисляют по формуле: $\boldsymbol{S = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2}$

Задание для самостоятельной работы.

Решить задачи.

1) В прямоугольном треугольнике катеты равны 3 см и 4 см, найти гипотенузу, *sin α, cos α, tg α, ctg α* .

2) В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 13 см, а один из катетов 5 см. Найти периметр и площадь треугольника.

3) В прямоугольном треугольнике cos α= 0,6, а прилежащий кати равен 12 см. Найти sin α, периметр и площадь треугольника.

4) В прямоугольном треугольнике tg α=4/3, гипотенуза равна 100 см. Найти периметр и площадь треугольника.

5) Высота равностороннего треугольника равна $12\sqrt{3}$ см. Найти периметр и площадь треугольника.

6) Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 13 см, а биссектриса угла, противолежащего основанию 12 см. Найти периметр и площадь треугольника.

7) В равнобедренном треугольнике основание равно16 см, а боковая сторона 10 см. Найти периметр и площадь треугольника.

8) Диагональ квадрата равна $6\sqrt{2}$ см. Найти периметр и площадь квадрата.

9) Разность сторон прямоугольника равна 4 см, диагональ 20 см. Найти периметр и площадь прямоугольника.

10) Периметр прямоугольника равен 112 см, а разность сторон 8 см. найти площадь и диагональ прямоугольника.

11) Острый угол параллелограмма равен 60°, а стороны 10 и 16 см. Найти площадь параллелограмма.

12) Сторона ромба равна 10 см, а острый угол 60°. Найти диагонали и площадь ромба.

13) Расстояния от точки на окружности до концов диаметра равны 16 см и 12 см. Найти радиус, длину окружности и площадь круга.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные расположения точек и прямых.
2. Какие прямые называются параллельными?
3. Назовите основные свойства точек и прямых.
4. Что называется полупрямой (лучом)?
5. Что такое угол? Назовите разновидности углов.
6. Что называется биссектрисой угла?
7. Какие прямые называются перпендикулярными? Что такое перпендикуляр?
8. Какую фигуру называют треугольником?
9. Назовите разновидности треугольников.
10. Как называют стороны равнобедренного, прямоугольного треугольника?
11. Какие отрезки рассматриваются в треугольнике?
12. Сформулируйте теорему Пифагора.
13. По какой формуле вычисляется площадь треугольника?
14. Что называют синусом, косинусом, тангенсом, котангенсом угла?
15. Какую фигуру называют четырёхугольником?

16. Назовите разновидности четырёхугольников.
17. По каким формулам вычисляются площади четырёхугольников?
18. Что такое окружность, круг?
19. Что называют радиусом, диаметром окружности?
20. Что такое хорда, дуга, касательная к окружности?
21. Какой угол в окружности называют вписанным, центральным?
22. По какой формуле вычисляется длина окружности, площадь круга?

11. ТРИГОНОМЕТРИЯ

11.1. Радианное измерение углов

Угол в 1 радиан – это центральный угол, который опирается на дугу, длина которой равна радиусу окружности. На рис.55 центральный угол α равен 1 радиану. Если начальный радиус совершает полный оборот, то получится угол 360°, или 2π радиан. Для того чтобы определить, сколько радиан содержится в 1 градусе, нужно равенство 360° = 2/π разделить на 360. В результате получим, что **1° =** $\frac{\pi}{180}$ **рад**

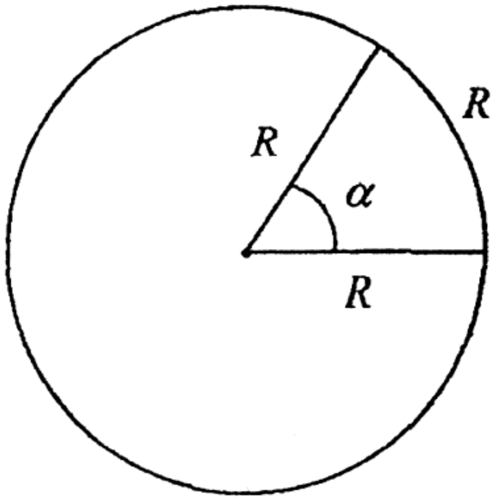


Рис. 55

Если угол содержит A°, то радианная мера равна $\alpha = \frac{\pi}{180}$рад. Для того чтобы определить, сколько градусов содержится в 1 радиане, нужно равенство 360° = 2π разделить на 2 π. В результате получим, что 1 рад = $\frac{180°}{\pi} \approx 57{,}3°$. Если угол содержит B рад, то градусная мера равна $\beta° = \frac{180°}{\pi} B°$.

<u>Пример</u>

1) $30° = \frac{\pi}{180°} \cdot 30 = \frac{\pi}{6}$, $60° = \frac{\pi}{180°} \cdot 60 = \frac{\pi}{3}$, $135° = \frac{\pi}{180°} \cdot 135 = \frac{3\pi}{4}$, $180° = \frac{\pi}{180°} \cdot 180 = \pi$

2) $\frac{\pi}{4} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = 45°$, $\frac{\pi}{2} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 90°$, $\frac{2\pi}{3} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120°$, $\frac{5\pi}{6} = \frac{180°}{\pi} \cdot \frac{5\pi}{6} = 150°$

Задание для самостоятельной работы

1) Записать значения углов в радианах: 15°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°.

2) Записать значения углов в градусах:

$\frac{\pi}{8}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{4}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{6}$.

11.2. Тригонометрические функции произвольного угла

Рассмотрим окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице, R = 1 (рис.56). На окружности отметим точку $P_0(1; 0)$. При повороте начального радиуса около центра *O* на угол α точка P_0 перейдёт в точку *P(x; y).*

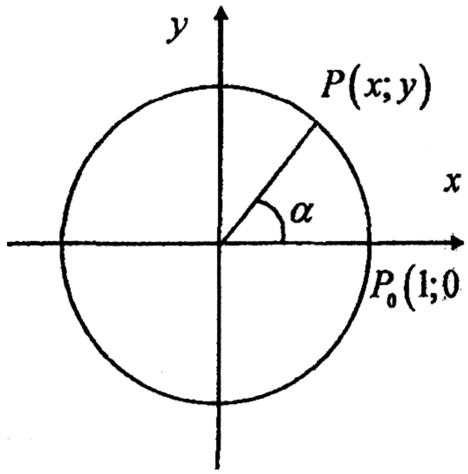


Рис. 56

Синусом угла **α** называется отношение ординаты точки *P* к радиусу: **sin α = *y/R***
Косинусом угла **α** называется отношение абсциссы точки *P* к радиусу: ***cos α = x/R***
Тангенсом угла **α** называется отношение ординаты точки *P* к её абсциссе: ***tg α = y/*x**
Котангенсом угла **α** называется отношение абсциссы точки *P* к её ординате: ***ctg α = x/y***

Знак **sin α** определяется знаком ординаты, а знак **cos α** знаком абсциссы ***x*** точки ***P*** единичной окружности. Например, если $0 < \alpha < \pi/2$, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x > 0$ и $y > 0$ (рис.57). Следовательно, на числовом промежутке $(0; \pi/2)$ $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha > 0$. Если $\pi/2 < \alpha < \pi$, то углу αсоответствует точка окружности *P*, координаты которой $x < 0$ и $y > 0$ (рис.58). Следовательно, на числовом промежутке $(\pi/2; \pi)$ $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$. Если $\pi < a < 3\pi/2$, то углу α соответствует точка окружности *P*, координаты которой $x < 0$ и $y < 0$ (рис.59). Следовательно, на числовом промежутке $(\pi; 3\pi/2)$ $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$.

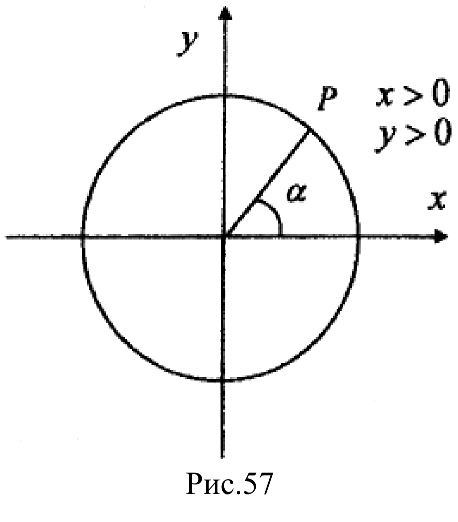


Рис.57

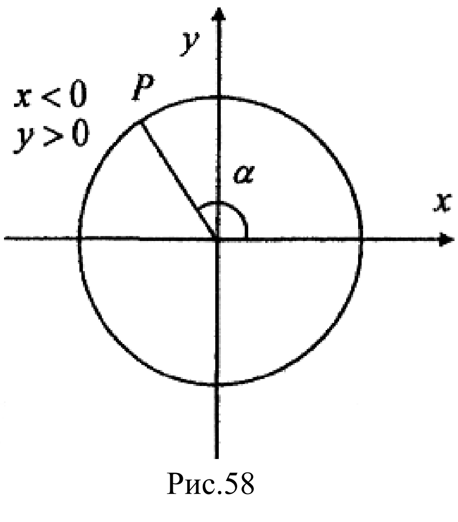


Рис.58

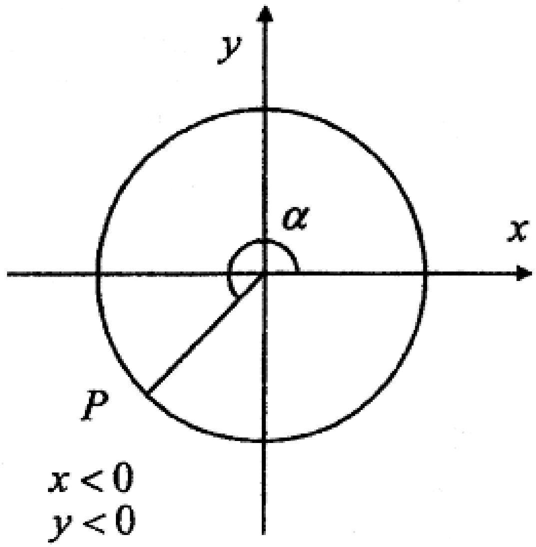


Рис.59

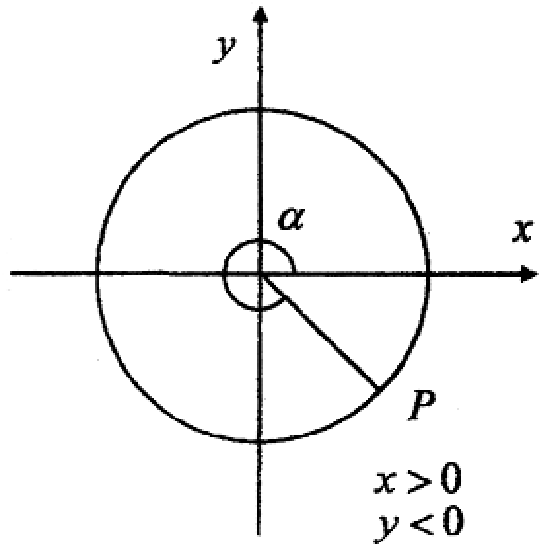


Рис.60

Если 3π/2 < α < 2π, то углу αсоответствует точка окружности *P*, координаты которой x > 0 и y < 0 (рис.60). Следовательно, на числовом промежутке (3π/2; 2π) sin α < 0 и cos α > 0. Схематически знаки sin α изображены на рис. 61, а cos α – на рис. 62.

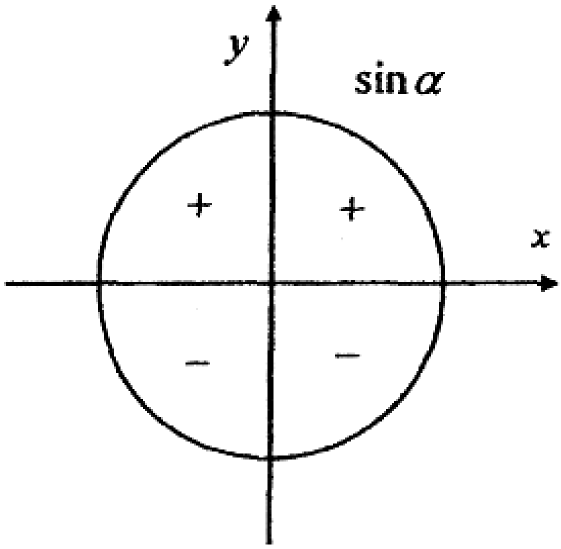


Рис.61

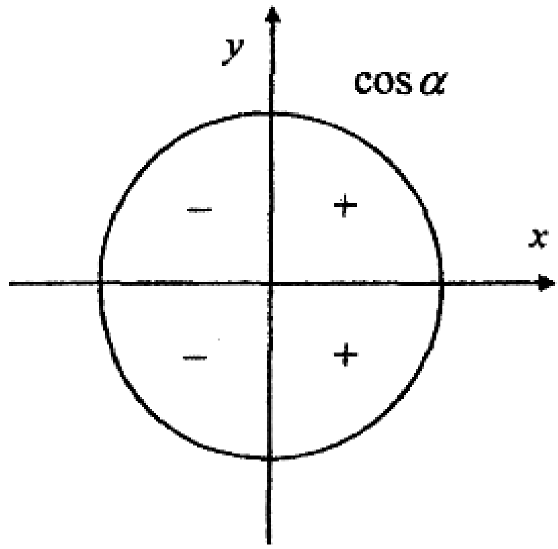


Рис.62

Знаки значений функций tg α и ctg α определяются знаками ординаты и абсциссы точки *P*. Так как в I и III четвертях знаки ординаты и абсциссы одинаковые (в первой четверти x > 0, y > 0, а в третьей x < 0, y < 0), то в этих четвертях tg α > 0 и ctg α > 0. Так как во II и IV четвертях знаки ординаты и абсциссы разные (во второй четверти x < 0, y > 0, а в четвёртой x > 0, y < 0), то в этих четвертях tg α < 0 и ctg α < 0. Знаки значений tg α и ctg α можно также определить по знакам sin α и cos α, так как tg α = sin α/cos α, а ctg α = cos α/sin α. Схематически знаки tg α и ctg α изображены на рис.63.

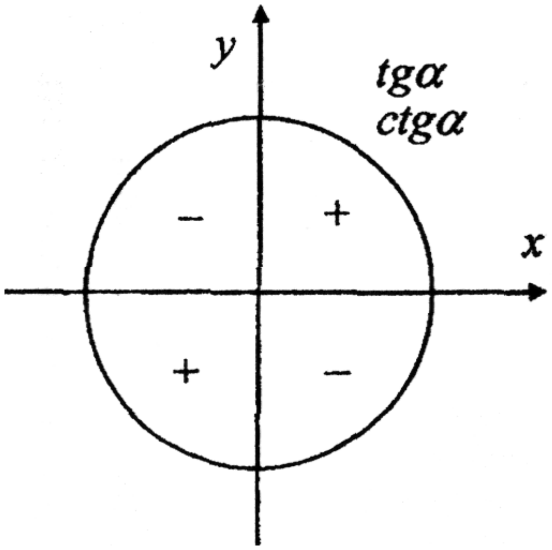


Рис.63

11.3. Формулы приведения

Формулами приведения называют формулы, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, π±α, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, 2π±α выражаются через значения sin α, cos α, tg α, ctg α.

Правила перехода

1) При переходе от функций углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ и $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ к функциям угла α, название функции изменяется: sin → cos, cos → sin, tg → ctg, ctg → tg. При переходе от функций углов π ± α и 2π ± α к функциям угла α, название функции не изменяется.

2) Считая угол α острым (0 < α < π/2), перед функцией угла α ставят такой знак, какой имеет функция углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, π±α, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, 2π ± α.

Пример.

1) Преобразуем тригонометрические функции с помощью формул приведения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\ tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=ctg\ \alpha,\ ctg(\pi+\alpha)=ctg\ \alpha.$$

2) Вычислим значения тригонометрических функций с помощью формул приведения:

$$\sin\frac{7\pi}{6}=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ tg\frac{2\pi}{3}=tg\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$ctg\frac{5\pi}{6}=ctg\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=ctg\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}.$$

Задания для самостоятельной работы:

1) преобразовать тригонометрические функции с помощью формул приведения:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right),\quad tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right),\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\quad ctg(\pi-\alpha),\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\quad tg(\pi+\alpha),\quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),$$

$$\sin(\pi-\alpha),\quad tg\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right),\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right),\quad ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right),\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right),\quad ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

2) вычислить значения тригонометрических функций:

$$tg\frac{5\pi}{4},\cos\frac{3\pi}{4},ctg\frac{7\pi}{6},\sin\frac{5\pi}{3},tg\frac{3\pi}{2},\cos\frac{2\pi}{3},ctg\frac{4\pi}{3},\sin\frac{11\pi}{6},tg\frac{4\pi}{3},ctg\frac{3\pi}{4},\sin\frac{3\pi}{2},tg\frac{11\pi}{6},\cos\frac{4\pi}{3},$$

$$tg\frac{5\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{4},ctg\frac{5\pi}{3},\sin\frac{3\pi}{4},tg\frac{7\pi}{6},\cos\frac{5\pi}{3},ctg\frac{2\pi}{3},\sin\frac{5\pi}{4},tg\frac{5\pi}{3},\cos\frac{7\pi}{6},ctg\frac{11\pi}{6},\sin\frac{2\pi}{3}$$

11.4. Периодичность тригонометрических функций

Из формул приведения следует, что прибавление к значению угла величин, равных 2πk для sin α и cos α, а также πk для tg α и ctg α (где k – целое число) не изменяет значений тригонометрических функций, то есть sin(α + 2πk) = sin α, cos(α + 2πk) = cos α, tg(α + πk) = tg α, ctg(α + πk) = ctg α. В этом случае говорят, что функции sin α, cos α, tg α и ctg α – периодические функции, а величины 2πk и πk – периоды этих функций.

Функция y = *f(x)* называется ***периодической функцией***, если существует такое число T ≠ 0, что при любом *x* из области определения функции числа *x – T* и *x + T* также принадлежат этой области и выполняется равенство *f(x) = f(x + T) = f(x – T).* Число *T* называется *периодом* функции *y = f(x).* Если *T* – период функции, то число *Tk* также является периодом этой функции. Следовательно, всякая периодическая функция имеет бесконечное множество периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период *T*, который называют *основным периодом функции*.

Основной период функций sin α и cos α равен 2π. Для функций tg α и ctg α основной период равен π. Периодичность тригонометрических функций используют при вычислениях.

Пример.

sin750° = sin(720° + 30°) = sin(2·360° + 30°) = sin30° = 1/2

tg585° = tg(540° + 45°) = tg(3·180° + 45°) = tg45° = 1

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла α, если:

1. α = 450°
2. α = 750°
3. α= 810°
4. α = 960°
5. α = 1260°

11.5. Формулы тригонометрии

Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
2. $\sin \alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
3. $\cos \alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$
4. $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
5. $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
6. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
7. $tg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
8. $ctg^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Основные тригонометрические тождества используют при упрощении тригонометрических выражений.

Пример. Упростить выражение: $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$

$\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha\cdot\cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2\alpha\cdot(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

Задание для самостоятельной работы.

Упростить тригонометрические выражения:

1. $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 + (\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$
2. $\dfrac{\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} + \sin\alpha\cdot\cos\alpha$
3. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha - \sin^6\alpha - \cos^6\alpha$
4. $tg\,\dfrac{tg\alpha + tg\beta}{ctg\alpha + ctg\beta}$
5. $\dfrac{1+tg^4\alpha}{tg^2\alpha + ctg^2\alpha}$
6. $\dfrac{\sin^2\alpha - tg^2\alpha}{\cos^2\alpha - ctg^2\alpha}$

Формулы сложения

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta$$
$$tg(\alpha\pm\beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1\pm tg\alpha\cdot tg\beta}$$
$$ctg(\alpha\pm\beta) = \frac{1\pm tg\alpha\cdot tg\beta}{tg\alpha \pm tg\beta}$$

Пример.

Вычислить без таблиц:

1) cos105°

2) sin137° cos47° – sin47° cos137°

Решение.

1) Представим 105° в виде суммы 105° = 60° + 45°.

Тогда cos105° = cos(60° + 45°) = cos60° cos45° – sin60 °sin45° = $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

2) sin137° cos47° – sin47° cos 137° = sin(137° – 47°) = sin90° = 1

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. cos75°
2. tg15°
3. cos29° cos119° + sin29° sin119°
4. $\frac{tg80°+tg55°}{1-tg80°tg55°}$
5. $\sin\frac{3\pi}{4}\cos\frac{\pi}{14}+\cos\frac{3\pi}{4}\sin\frac{\pi}{14}$
6. $\cos\frac{\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{18}\sin\frac{4\pi}{9}$

Формулы двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

Пример.

1) Вычислить без таблиц и калькулятора sin75° sin15°

sin75° sin15° = sin(90°–15°) sin15° = cos15° sin15° = ½ sin30° =1/4

2)Упростить выражение $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$: $\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha}=2\sin\alpha.$

Задания для самостоятельной работы.

1) Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. $\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$
2. $\cos 15°\cos 75°$
3. $\frac{\sin 40°\sin 50°}{\cos 10°}$
4. $\frac{\sin 80°\sin 10°}{\cos 20°}$
5. $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}$

2) Упростить выражения:

1. $\cos 2\alpha+\sin^2\alpha$
2. $\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$
3. $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1-\sin 2\alpha}$
4. $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = 0{,}5[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = 0{,}5[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = 0{,}5[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$tg\alpha\cdot tg\beta = \frac{tg\alpha+tg\beta}{ctg\alpha+ctg\beta};\quad ctg\alpha\cdot ctg\beta = \frac{ctg\alpha+ctg\beta}{tg\alpha+tg\beta}$$

Пример.

Вычислить без помощи таблиц и калькулятора cos10° cos20° – sin55° sin65°

cos10° cos20° – sin55° sin65° = 0,5(cos30° + cos10°) – 0,5(cos10° – cos120°) =

= 0,5 cos30° + 0,5 cos120° = $\frac{1}{4}(\sqrt{3}+1)$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. 2 cos20° cos60° – cos20°
2. sin17° sin43° + cos88° cos62°
3. cos5° cos55° cos65°
4. sin10° cos50° + sin65° cos25°
5. sin4° sin86° – cos2° sin6° + 0,5 sin4°

Формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций

$$\sin\alpha\pm\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$tg\alpha\pm tg\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};\quad ctg\alpha\pm ctg\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Пример.

Вычислить без таблиц и калькулятора cos105° + cos75°

cos105° + cos75°= $2\cos\frac{105°+75°}{2}\cos\frac{105°-75°}{2} = 2\cos 90°\cos 15° = 0$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. sin70° sin50° sin10°
2. sin78° – sin18° + $\cos^2$78° + $\cos^2$12° + cos132°
3. $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$
4. (sin61° – sin59°) – (sin93° – sin87°) – sin179°

Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

<u>Пример.</u>

Вычислить без таблиц и калькулятора $\sin 15°$

$$\sin 15°=\sqrt{\frac{1-\cos 30°}{2}}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{3/2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить без таблиц и калькулятора:

1. $\cos 75°$
2. $tg 67°30'$
3. $\sin 105°$
4. $\sin^4\frac{\pi}{16}+\sin^4\frac{3\pi}{16}+\sin^4\frac{5\pi}{16}+\sin^4\frac{7\pi}{16}$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

Пример.

Вычислить sin 4α + cos 4α – ctg 2α, если tg 2α = 4

$$\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \mathrm{ctg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg} 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha} + \frac{1-\mathrm{tg}^2 2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2 2\alpha} \cdot \frac{1}{\mathrm{tg}^2 \alpha} = \frac{1}{4}$$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. sin 4α и cos 4α, если tg 2α=3
2. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = 0{,}5$

11.6. Тригонометрические функции

1. Свойства и график функции *y = sin x*

1) Область определения – множество всех действительных чисел.
2) Множество значений – отрезок [-1; 1].
3) Функция нечётная, то есть $\sin(-x) = -\sin x$.
4) Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.
5) $\sin x = 0$ при $x = \pi k,\ k \in Z$.
6) Функция принимает наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
7) Функция принимает наименьшее значение, равное -1, при $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

График функции *y = sin x* показан на рис.64.

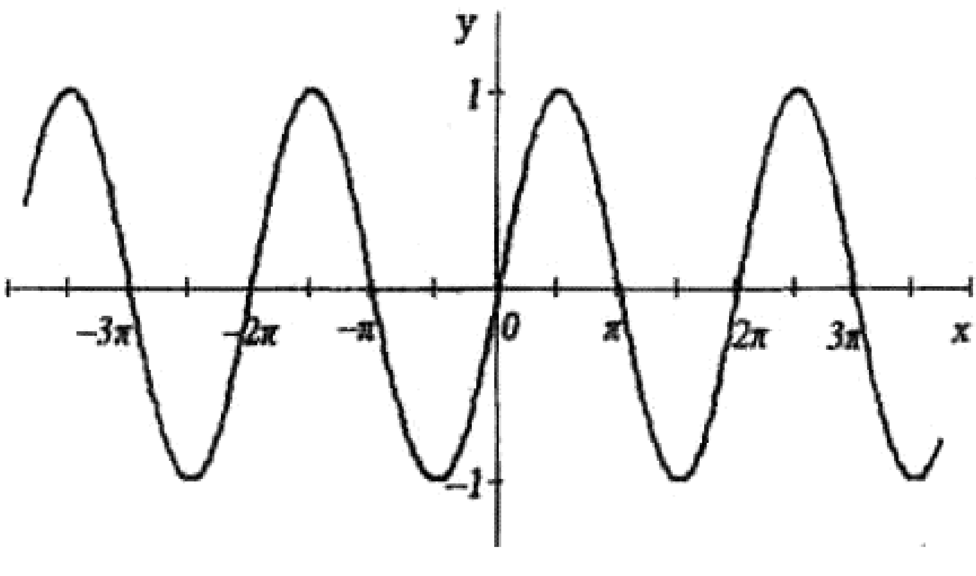


Рис.64

2. Свойства и график функции $y = \cos x$

1) Область определения – множество всех действительных чисел.

2) Множество значений – отрезок [-1; 1].

3) Функция чётная, то есть $\cos(-x) = \cos x$.

4) Функция периодическая с основным периодом $T = 2\pi$.

5) $\cos x = 0$ при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

6) Функция принимает наибольшее значение, равное 1, при $x = 2\pi k$, $k \in Z$.

7) Функция принимает наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$.

График функции $y = \cos x$ показан на рис.65.

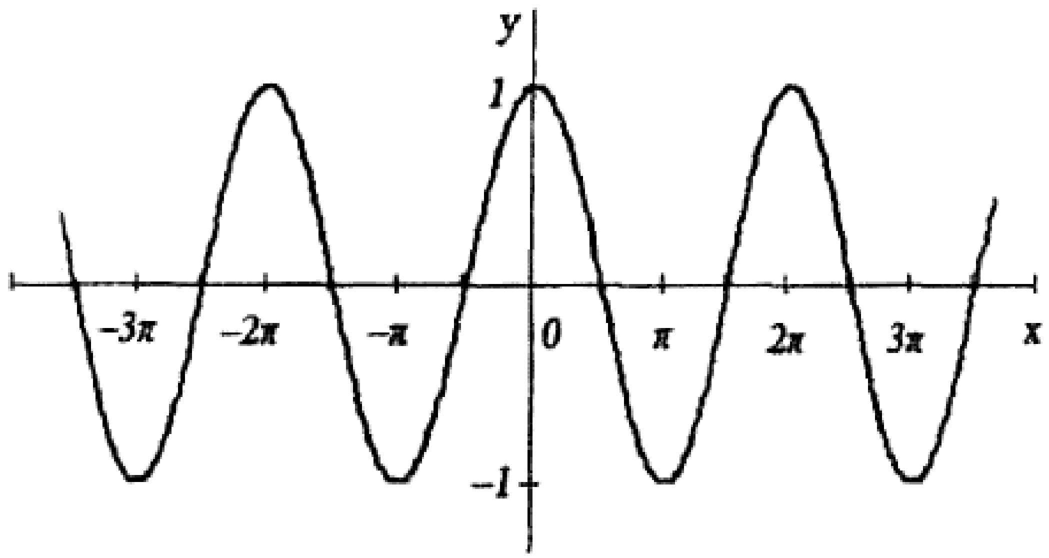


Рис.65

3. Свойства и график функции $y = tg\, x$

1) Область определения – множество всех действительных чисел, кроме значений $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

2) Множество значений – вся числовая прямая.

3) Функция нечётная, то есть $tg(-x) = -tg\, x$.

4) Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5) $tg\, x = 0$ при $x = \pi k$, $k \in Z$.

График функции $y = tg\, x$ показан на рис.66.

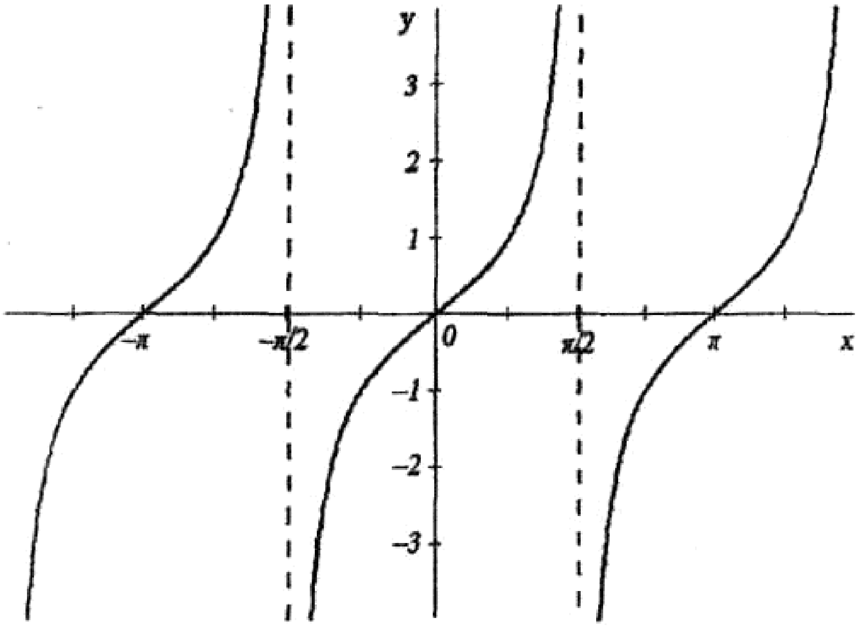


Рис.66

4. Свойства и график функции $y = ctg\ x$

1) Область определения – множество всех действительных чисел, кроме значений $x = \pi k,\ k \in Z$.

2) Множество значений – вся числовая прямая.

3) Функция нечётная, то есть $ctg(-x) = -ctg\ x$.

4) Функция периодическая с основным периодом $T = \pi$.

5) $ctg\ x = 0$ при $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$.

График функции $y = ctg\ x$ показан на рис.67.

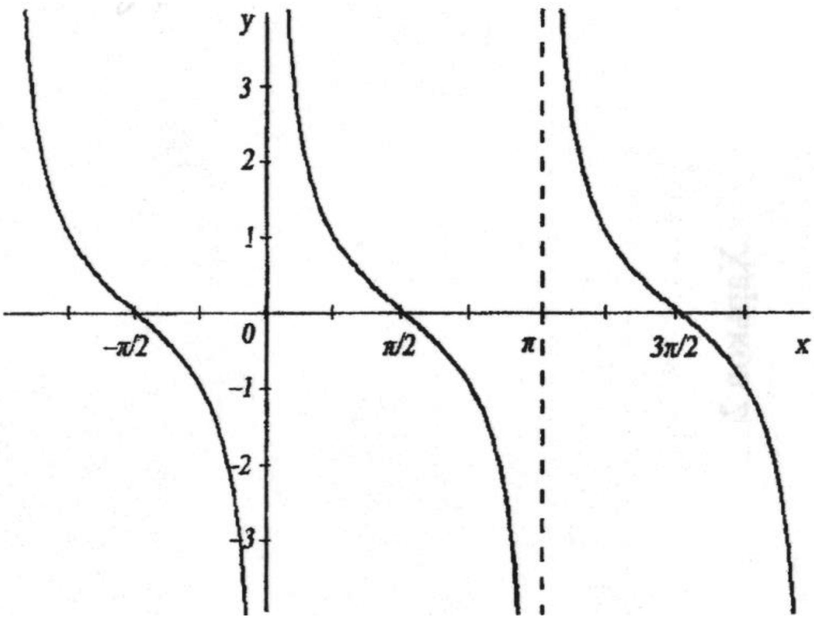


Рис.67

11.7. Обратные тригонометрические функции

1. Арксинус (*y = arcsin x)*

Арксинусом числа *x* называют такое число *y*, из промежутка [-π/2; π/2], синус которого равен *x*, то есть, если $y = \arcsin x$, то $\sin y = x$. Функция $y = \arcsin x$ является обратной по отношению к функции $y = \sin x$.

Пример.

1) $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

2) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Свойства функции y = arcsin x

1) Область определения – отрезок [-1; 1].
2) Множество значений – отрезок [-π/2; π/2].
3) Функция нечётная, то есть $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
4) Функция *y=arcsin x* непериодическая.

График функции *y=arcsin x* показан на рис.68.

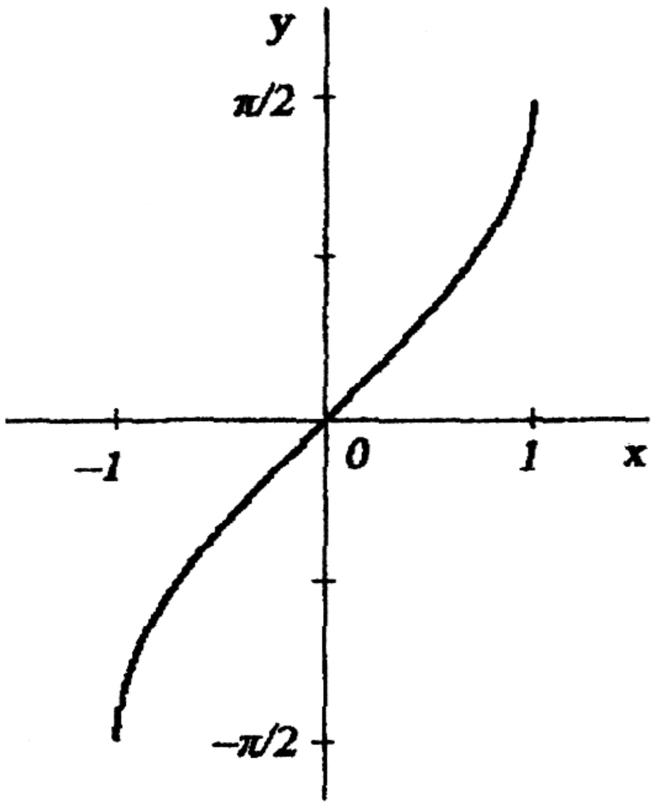


Рис.68

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. $\arcsin 1$
2. $\arcsin(-1)$
3. $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5. $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

2. Арккосинус (*y = arccos x*)

Арккосинусом числа x называют такое число y, из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен x, то есть, если $y = arccos\, x$, то $cos\, y = x$. Функция $y = arccos\, x$ является обратной по отношению к функции $y = cos\, x$.

Пример.

1) $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

2) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Свойства функции *y = arccos x*

1) Область определения – отрезок [-1; 1].

2) Множество значений – отрезок $[0; \pi]$.

3) Функция ни чётная, ни нечётная, для неё выполняется тождество $arccos(-x) = \pi - arccos\, x$.

4) Функция $y = arccos\, x$ непериодическая.

График функции $y = arccos\, x$ показан на рис.69.

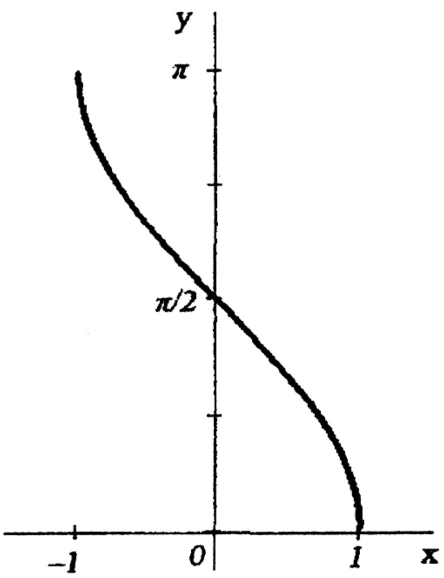


Рис.69

Задание для самостоятельной работы

Вычислить:

1. $\arccos 1$
2. $\arccos(-1)$
3. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
4. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$
5. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. Арктангенс ($y = arctg\ x$)

Арктангенсом числа x называют такое число y, из промежутка $[-\pi/2; \pi/2]$, тангенс которого равен x, то есть, если $y = arctg\ x$, то $tg\ y = x$. Функция $y = arctg\ x$ является обратной по отношению к функции $y = tg\ x$.

Пример.

1) $arctg 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $tg\frac{\pi}{4} = 1$

2) $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $tg\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

Свойства функции $y = arctg\ x$

1) Область определения – вся числовая ось.

2) Множество значений – отрезок $[-\pi/2; \pi/2]$.

3) Функция $y = arctg\ x$ нечетная, то есть $arctg(-x) = -arctg\ x$.

4) Функция $y = arctg\ x$ непериодическая.

График функции $y = arctg\ x$ показан на рис.70.

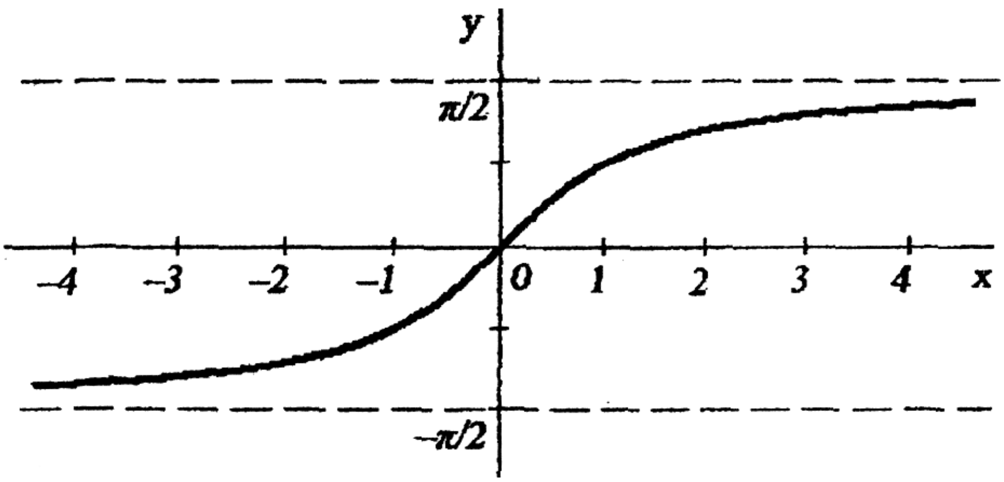


Рис.70

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. arctg(-1)
2. arctg (- $\sqrt{3}$)
3. arctg$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4. Арккотангенс (*y = arcctg x*)

Арккотангенсом числа *x* называют такое число *y*, из промежутка [0; π], котангенс которого равен *x*, то есть, если *y = arcctg x*, то *ctg y = x*. Функция *y = arcctg x* является обратной по отношению к функции *y = ctg x*.

Пример.

1) $arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$, так как $ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

2) $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, так как $ctg\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Свойства функции *y = arcctg x*

1) Область определения – вся числовая ось.

2) Множество значений – отрезок [0; π].

3) Функция *y = arcctg x* ни чётная, ни нечётная, для неё выполняется тождество *arcctg(-x) = π – arcctg x.*

4) Функция *y = arcctg x* непериодическая.

График функции *y = arcctg x* показан на рис.71.

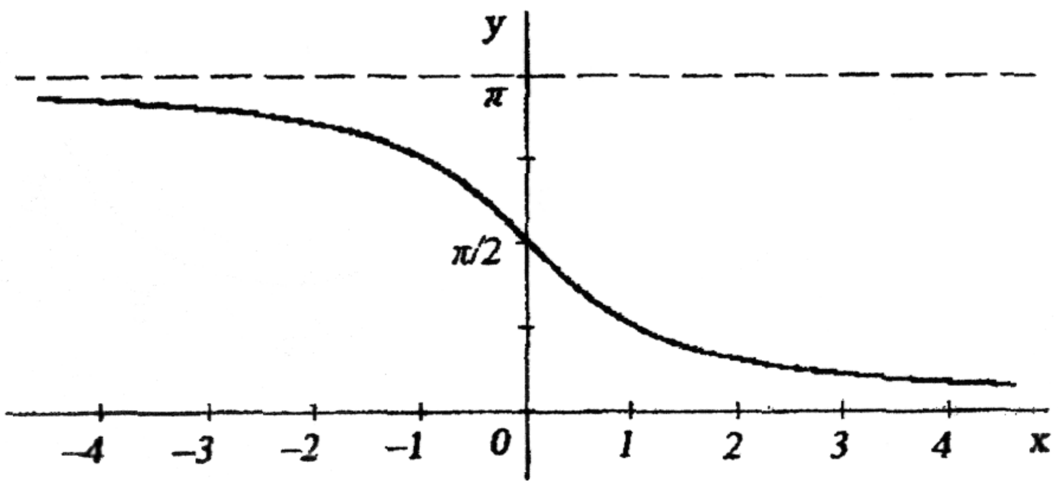


Рис.71

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. arcctg(-1)
2. arcctg(- $\sqrt{3}$)
3. arcctg $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
4. arcctg 0.

5. Основные тождества с обратными тригонометрическими функциями

При всех допустимых значениях аргумента х справедливы тождества:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Например, $\arcsin\frac{1}{2} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

2) $\sin(\arcsin x) = x, \textit{если } -1 \le x \le 1$. Например, $\sin(\arcsin\frac{1}{2}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

3) $\cos(\arccos x) = x, \textit{если } -1 \le x \le 1$. Например, $\cos(\arccos\frac{1}{2}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

4) $\arcsin(\sin x) = x, \textit{если } -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Например, $\arcsin(\sin\frac{\pi}{6}) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

5) $\arccos(\cos x) = x, \textit{если } 0 \le x \le \pi$. Например, $\arccos(\cos\frac{2\pi}{3}) = \arccos(-\frac{1}{2})$

6) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \textit{если } -1 \le x \le 1$. Например, $\cos(\arcsin\frac{1}{2}) = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \textit{если } -1 \le x \le 1$. Например, $\sin(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}) = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$

8) $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$. Например, $arctg\sqrt{3} + arcctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

9) $tg(arctgx) = x$ для любого действительного *x*. Например, $tg(arctg\sqrt{3}) = \sqrt{3}$.

10) *ctg (arcctg x) = x* для любого действительного *x*. Например, *ctg(arcctg 1) =1*

11) *arctg(tg x) = x*, если $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ Например, $arctg\left(tg\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$

12) *arcctg(ctg x) = x*, если *0<x<π*. Например, $arcctg\left(ctg\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$

13) *tg(arcctg x) = ctg(arctg x)= 1/x* при *x ≠ 0*. Например, $tg(arcctg\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить:

1. $\sin\left(\arccos\frac{1}{2}\right)$
2. $\cos\left(arcctg(-\sqrt{3})\right)$
3. $tg\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$
4. $ctg\left(arctg(-\sqrt{3})\right)$
5. $tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$
6. $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$
7. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$
8. $tg\left(\arcsin\left(-\frac{1}{6}\right)\right)$
9. $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{6}\right)$
10. $\arccos\left(\sin\frac{7\pi}{4}\right)$
11. $arcctg\left(tg\frac{7\pi}{6}\right)$
12. $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right)$
13. $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}-\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$
14. $tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-arcctg\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

11.8. Тригонометрические уравнения

1. Уравнение *sin x = a*

Формула для корней уравнения *sin x = α*, где $-1 \le \alpha \le 1$ имеет вид:

$$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in Z$$

Частные случаи:

$$1)\ \sin x=0,\quad x=\pi k,\quad k\in Z$$

$$2)\ \sin x=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$$

$$3)\ \sin x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$$

<u>Пример</u>. Решить уравнения:

1) $\sin 2x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, то $2x=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k$

Тогда получим, что $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$

2) $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

Данное уравнение представляет собой частный случай, его решение имеет вид: $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, отсюда получим, что $x=-\frac{\pi}{3}+4\pi k, k\in Z.$

2. Уравнение *cos x = α*

Формула для корней уравнения $\cos x = \alpha$, где $-1 \le \alpha \le 1$ имеет вид:
$x = \pm\arccos\alpha + 2\pi k,\ k\in Z$

Частные случаи:

1) $\cos x = 1,\ x = 2\pi k,\ k\in Z$

2) $\cos x = 0,\ x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z;$

3) $\cos x = -1,\ x = \pi + 2\pi k,\ k\in Z$

Пример. Решить уравнения:

1) $\cos\frac{x}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Так как $\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}$, то $\frac{x}{3}=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$. Тогда получим, что $x=\pm\frac{5\pi}{2}+6\pi k, k\in Z.$

2) $\cos^2 x + \cos x = 2$

Выполним подстановку $\cos x = y$ и получим уравнение относительно y: $y^2 + y - 2 = 0.$ Его корни: $y_1 = 1,\ y_2 = 2.$ Из них требованию $1 \le \alpha \le 1$ удовлетворяет только первый корень. Решаем далее уравнение $\cos x = 1$. Данное уравнение представляет собой частный случай, его решение имеет вид $x = 2\pi k,\ k\in Z.$

3. Уравнение *tg x = α*

Формула для корней уравнения $tg\, x = \alpha$ имеет вид: $x = arctg\,\alpha + \pi k,\ k\in Z.$
Частные случаи:

1) $tgx=0,\quad x=\pi k,\quad k\in Z$

2) $\sin x=1,\quad x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$

3) $\sin x=-1,\quad x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z$

Пример.
Решить уравнения:

1) $tg3x=-\sqrt{3}$

Так как $arctg(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$, то $3x=\frac{\pi}{3}+\pi k.$ Тогда получим, что $x=-\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$.

2) $tg^2x = 3tg\,x$

Переносим $3tg\,x$ в левую часть уравнения и получим:

$tg^2x - 3tg\,x = 0 \Leftrightarrow tg\,x(tg\,x - 3) = 0$. Последнее уравнение разбивается на два уравнения $tg\,x = 0$ и $tg\,x - 3 = 0$. Первое из них имеет решение $x = \pi k,\ k \in Z$, а второе $x = arctg2 + \pi k,\ k \in Z$.

4. Уравнение $ctg\,x = \alpha$

Формула для корней уравнения $ctg\,x = \alpha$ имеет вид: $x = arcctg\,\alpha + \pi k,\ k \in Z$.

Частные случаи:

$$1)\ ctgx = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$2)\ ctgx = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

$$3)\ ctgx = -1, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in Z$$

Пример. Решить уравнение: $ctg^2x - 4ctg\,x - 5 = 0$.

Выполнив подстановку $ctg\,x = y$, получим уравнение $y^2 - 4y - 5 = 0$. Его корни $y_1 = 5$, $y_2 = -1$. Решаем далее уравнения $ctg\,x = 5$ и $ctg\,x = -1$. Решениями этих уравнений являются $x = arcctg5 + \pi k,\ k \in Z$ и $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. $\cos 2x = -\frac{1}{2}$
2. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1$
3. $ctg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $0{,}5\sin 2x + \cos^2 x = 0$
5. $0{,}5\sin 2x + \cos^2 x = 0$
6. $tgx + tg^3x = tg4x$
7. $\sin^2 x + 14\sin x\cos x = 15\cos^2 x$
8. $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$
9. $\sin 2x = \sin 6x - \sin 4x$
10. $\sin x + \cos x = 1$
11. $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x} = 0$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение угла в 1 радиан.
2. По каким формулам выполняют переход от градусной меры к радианной и от радианной к градусной?
3. Дайте определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла.
4. В каких числовых промежутках синус положительный, а в каких отрицательный?

5. В каких числовых промежутках косинус положительный, а в каких отрицательный?

6. В каких числовых промежутках тангенс положительный, а в какихотрицательный?

7. В каких числовых промежутках котангенс положительный, а в каких отрицательный?

8. Какие формулы называют формулами приведения?

9. Сформулируйте правила перехода от функций углов $\pi/2 \pm \alpha$и $3\pi/2 \pm \alpha$к функциям угла α.

10. Назовите основные тригонометрические тождества.

11. Назовите формулы сложения тригонометрических функций.

12. Назовите формулы двойного угла, половинного угла.

13. Назовите формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму.

14. Назовите формулы суммы и разности одноименных тригонометрических функций.

15. Дайте определение периодической функции.

16. Какой период называют основным периодом функции?

17. Чему равен основной период синуса, косинуса, тангенса, котангенса?

18. Назовите свойства функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$.

19. Какой вид имеют графики функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$?

20. Дайте определение функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

21. Назовите свойства функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

22. Какой вид имеют графики функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$?

23. Назовите основные тождества с обратными тригонометрическими функциями.

24. Назовите формулы для корней уравнений: $\sin x = \alpha$, $\cos x = \alpha$, $tg\, x = \alpha$, $ctg\, x = \alpha$.

12. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

12.1. Свойства и график показательной функции

Функция, заданная формулой вида $y = a^x$, где a – некоторое положительное число, не равное единице, называется ***показательной***.

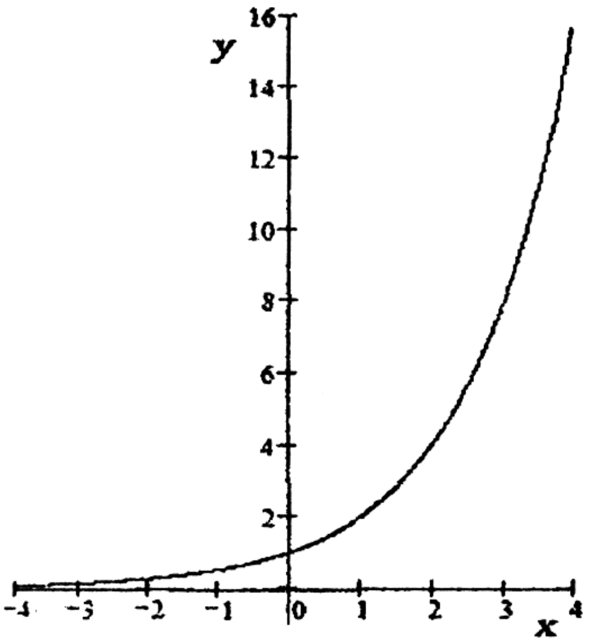


Рис.72

Функция $y = a^x$ при $a > 1$ обладает следующими свойствами:

1) область определения – множество всех действительных чисел;

2) множество значений – множество всех положительных чисел;

3) функция возрастает;

4) при $x = 0$ значение функции равно единице;

5) если $x > 0$, то $a^x > 1$,если $x < 0$, то $a^x < 1$. На рис.72 показан график функции $y = 2^x$.

Функция $y = a^x$ при $0 < a < 1$ обладает следующими свойствами:

1) область определения – множество всех действительных чисел;

2) множество значений – множество всех положительных чисел;

3) функция убывает;

4) при $x = 0$ значение функции равно единице;

5) если $x > 0$, то $a^x < 1$, если $x < 0$, то $a^x > 1$.

На рис.73 показан график функции $y = (1/2)^x$.

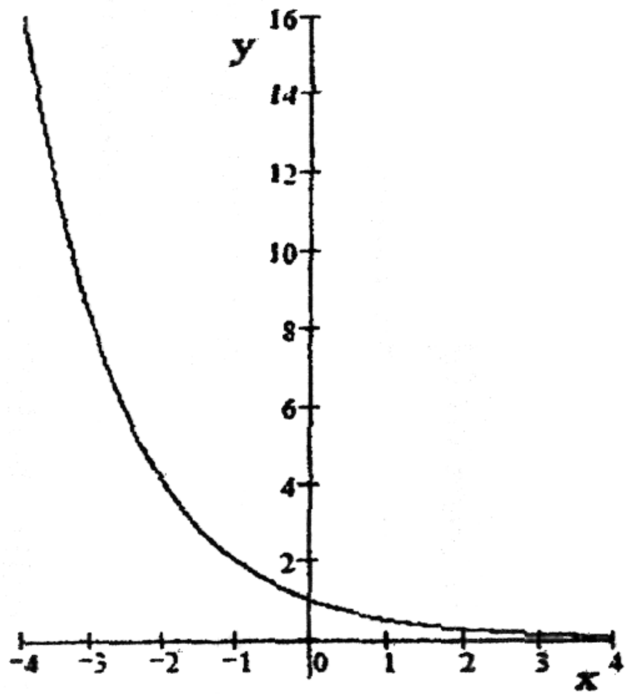


Рис.73

12.2. Показательные уравнения

Уравнение, которое содержит переменную в показателе степени, называется показательным. При решении показательных уравнений часто используют такое свойство степеней: если степени с одним и тем же основанием равны между собой, то показатели степени равны, то есть, если $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, то $f(x) = g(x)$.

Пример. Решить уравнения:

1) $\sqrt{3^x} = 9$

Левую и правую части уравнения приведём к одному основанию, в результате получим эквивалентное уравнение: $3^{x/2}=3$. Отсюда следует, что $x/2 =2$, и окончательно $x = 4$.

2) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{x+4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-3x}$

Левую и правую части уравнения приведём к одному основанию, в результате получим эквивалентное уравнение: $(3/2)^{x+4} = (3/2)^{3x-1}$.

Отсюда следует, что $x + 4 = 3x - 1$, и окончательно $x = 2{,}5$.

3) $4^{x+1}+7\cdot 2^x-2 = 0$

В уравнении выполним подстановку $2^x = y$. Тогда $4^{x+1}=4\cdot(2^x)^2 = 4y^2$. В результате уравнение примет вид $4y^2 + 7y - 2 = 0$. Корнями этого уравнения являются $y_1 = -2$, $y_2 = 1/4$. Так как $y = 2^x$ не может иметь отрицательных значений, то имеет смысл только решение $y_2 = 1/4$. Из уравнения $2^x = 1/4$ находим корень уравнения $x = -2$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1.	$\sqrt[3]{5^{2x}} = 125$	7.	$4 \cdot 3^{x-1} + 3^{x+1} = 117$
2.	$\sqrt{2^x} = 8^{-2/3}$	8.	$(1/9)^{2x-5} = 3^{5x+10}$
3.	$(1/\sqrt[3]{3})^{x^3-8} = 1$	9.	$3^x - 3^{1-x} = 2$
4.	$\sqrt{2^x} \cdot \sqrt{3^x} = 36$	10.	$36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0$
5.	$3^{x+2} - 3^x = 72$	11.	$(0{,}4)^{3-x} = (2{,}5)^{1-3/x}$
6.	$(2/3)^x \cdot (9/8)^x = 27/64$	12.	$4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} = 0$

12.3. Показательные неравенства

Неравенство, которое содержит переменную в показателе степени, называется показательным. Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ (где $a > 0,\ a \neq 1$) основано на следующих утверждениях:

1) если $a > 1$, то неравенства $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) < g(x)$ равносильны;

2) если $a < 1$, то неравенства $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ и $f(x) > g(x)$ равносильны.

Пример. Решить неравенства:

1) $\left(\sqrt{3}\right)^x \leq 1/3$

Используя свойства степеней, получим эквивалентное неравенство: $3^{x/2} \leq 3^{-1}$. Так как основание больше единицы, то получим, что решением является интервал (-∞; -2).

2) $0{,}5^{2x-1} < 0{,}25$

Данное неравенство эквивалентно неравенству $0{,}5^{2x-1} < (0{,}5)^2$. Так как основание меньше единицы, то последнее неравенство эквивалентно неравенству $2x - 1 > 2$, решением которого является интервал (3/2; -∞).

3) $4^x - 6 \cdot 2^{x-1} + 8 < 0$

Положим $2^x = y$, тогда $4^x = (2^x)^2 = y^2$ и данное неравенство примет вид $y^2 - 6y + 8 < 0$. Решая это неравенство, получим $2 < y < 4$. Возвращаясь к переменной x, получаем $2 < 2^x < 4$. Решением последнего неравенства является интервал (1; 2).

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1.	$4^{2-x} < 64$	5.	$(0{,}4)^{\frac{3x-1}{x+1}} \geq (2{,}5)^{x+1}$
2.	$0{,}3^{3x-1} < 0{,}09$	6.	$(0{,}5)^{x-3} \geq 4^{1-\frac{1}{x}}$
3.	$(1/3)^{x^2-4x+3} \geq 3^{1-x}$	7.	$9^x - 3^x \leq 6$
4.	$(1/2)^{x^2+x-2} \geq 4^{x-1}$	8.	$5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x - 1 \geq 0$

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется показательной?
2. Назовите свойства показательной функции.
3. Как выглядит график показательной функции?
4. Какое уравнение называют показательным?
5. Какое неравенство называют показательным?

13. ЛОГАРИФМЫ

13.1. Понятие логарифма

Логарифмом *положительного числа b по основанию a* (где $a > 0,\ a \neq 1$) называется показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*. Логарифм числа *b* по основанию *a* обозначается символом $log_a b$.

Пример.

1) $\log_2 8 = 3$, так как $2^3 = 8$

2) $\log_5 25 = 2$, так как $5^2 = 25$

Если $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$, то $log_a b$ по определению – показатель степени, в которую нужно возвести число *a*, чтобы получить число *b*. Поэтому равенство $a^{\log_a b} = b$ есть тождество, которое называют основным логарифмическим тождеством.

Пример.

1) $3^{\log_3 7} = 7$

2) $7^{\log_7 15} = 15$

3) $11^{\log_{11} 2} = 2$

Для обозначения логарифмов, основанием которых является число 10 (десятичных логарифмов) принята специальная запись: вместо $log_{10}b$ пишут lgb. Логарифм, основание которого является число e $(e = 2{,}718...)$, называется ***натуральным логарифмом***. Натуральные логарифмы обозначают lnb.

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить логарифмы:

1. $\log_2 1$
2. $\log_2 16$
3. $\log_3 27$
4. $\log_4 16$
5. $\log_2 \frac{1}{4}$
6. $\log_3 \frac{1}{3}$
7. $\log_8 8$
8. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$
9. $\log_{\frac{1}{3}} 27$
10. $3\log_2 4 + 2\log_3 27 + 5\log_4 \frac{1}{16}$
11. $\log_2 16 + \log_4 64 \cdot \left(\log_5 5 - 3\log_5 \frac{1}{25}\right)$
12. $\log_3(\log_3(\log_3 27))$
13. $\log_2(\log_{25}(\log_2 32))$
14. $\log_2(\log_4(\log_6 36))$

13.2. Свойства логарифмов

1) Если основание логарифма $a > 1$, то $log_a b > 0$, если $b > l$ и $log_a b < 0$, если $b < 1$

Пример.

1)$\log_2 3 > 0$

2)$\log_3 0,5 < 0$

2) Если основание логарифма $0 < a < 1$, то $log_a b < 0$, если $b > 1$ и $log_o b > 0$, если $b < 1$

Пример.

1) $\log_{0,5} 5 < 0$

2) $\log_{0,3} 0,7 > 0$

3) Равным положительным числам соответствуют и равные логарифмы, то есть, если $b_1 = b_2$, то $log_a b_1 = log_a b_2$

4) Если основание логарифма $a > 1$, то большему числу соответствует и больший логарифм, то есть, если $b_1 > b_2$, то $log_a b_1 > log_a b_2$

Пример.

$\log_2 7 > \log_2 5$

5) Если основание логарифма $0 < a < 1$, то большему числу соответствует меньший логарифм, то есть, если $b_1 > b_2$, то $log_a b_1 < log_a b_2$

Пример.

$\log_{0,6} 11 < \log_{0,6} 7$

6) Логарифм 1 по любому основанию ($a > 0$, $a \neq 1$) равен нулю, то есть $\log_a 1 = 0$

7) Логарифм самого основания равен единице, то есть $log_a a = 1$

8) Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел, то есть $log_a b \cdot c = log_a b + log_a c$

Пример.

$\log_3 15 = \log_3 3 \cdot 5 = \log_3 3 + \log_3 5 = 1 + \log_3 5$

9) Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел, то есть $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

Пример.

$\log_3 \frac{5}{9} = \log_3 5 - \log_3 9 = \log_3 5 - 2$

10) Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм её основания, то есть $log_a b^c = c \cdot log_a b$. Замечание: если $b < 0$, а c – чётное число, то справедлива формула $log_a b^c = c \cdot log_a |b|$

Пример.

$\log_3 125 = \log_3 5^3 = 3 \cdot \log_3 5$

11) Формула перехода от основания *a* к основанию *c* имеет вид $log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Замечание: если $c = b$, то ***формула перехода*** имеет вид $\boldsymbol{log_a b} = \dfrac{1}{\log_b a}$

Пример.

$$\log_2 5 = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \frac{\lg 5}{\lg 2} = \frac{1}{\log_5 2}$$

12) Если основание логарифма и число, стоящее под знаком логарифма, возвести в одну и ту же степень, отличную от нуля, то значение логарифма не изменится, то есть $\log_a b = \log_{a^c} b^c$

Пример.

$\log_4 25 = \log_{2^2} 5^2 = \log_2 5$

Задание для самостоятельной работы.

Вычислить, используя свойства логарифмов:

1. $\log_2 5 + \log_2 1{,}6$	6. $2^{\frac{1}{\log_6 2}}$
2. $\log_4 5 + \log_4 12{,}8$	7. $25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 7^{\frac{1}{\log_6 7}}$
3. $\log_6 72 - \log_6 2$	8. $4^{\frac{1}{2\log_5 2}} + 5^{\frac{1}{\log_7 5}}$
4. $9^{3\log_3 2}$	9. $\log_6 16$ если $\log_{12} 27 = a$
5. $9^{\log_{81} 4}$	10. $\lg 64$ если $\log_4 125 = a$

13.3. Логарифмическая функция

Функция $\boldsymbol{y = log_a x}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) называется ***логарифмической функцией***. Логарифмическая функция является обратной по отношению к показательной функции $y = a^x$. Свойства функции $y = log_a x$ при $a > 1$:

1) Область определения – множество всех положительных чисел.

2) Множество значений – все действительные числа.

3) Функция возрастающая.

4) Если $x = 1$, то $\log_a x = 0$.

5) Если $0 < x < 1$,то $\log_a x < 0$.

6) Если $x > 1$, то $\log_a x > 0$.

График функции $y = \log_2 x$ показан на рис.74.

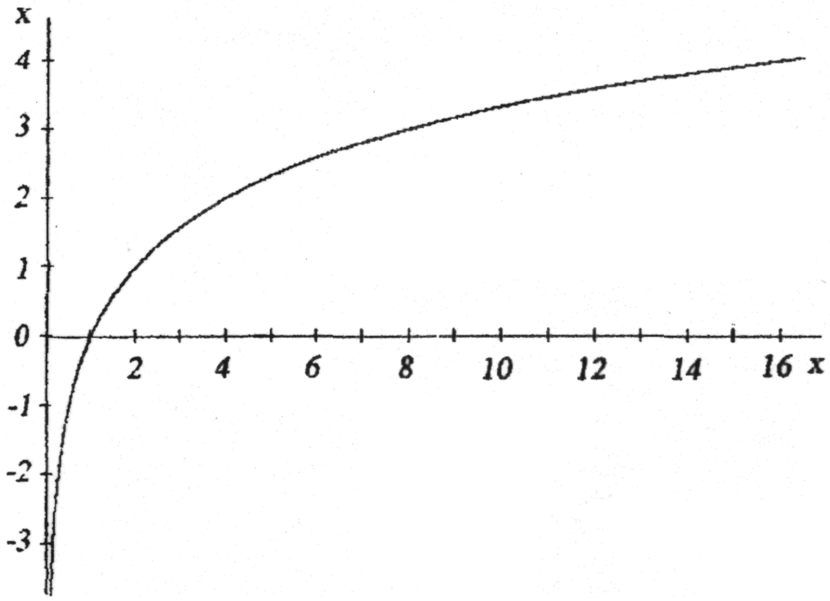


Рис.74

Свойства функции $y = log_a x$ при а < 1.

1) Область определения – множество всех положительных чисел.
2) Множество значений – все действительные числа.
3) Функция убывающая.
4) Если $x = 1$,то $1og_a x = 0$.
5) Если $0 < x < 1$, то $log_a x > 0$.
6) Если $x > 1$, то $log_a x < 0$.

График функции $y = log_{0,5}x$ показан на рис. 75.

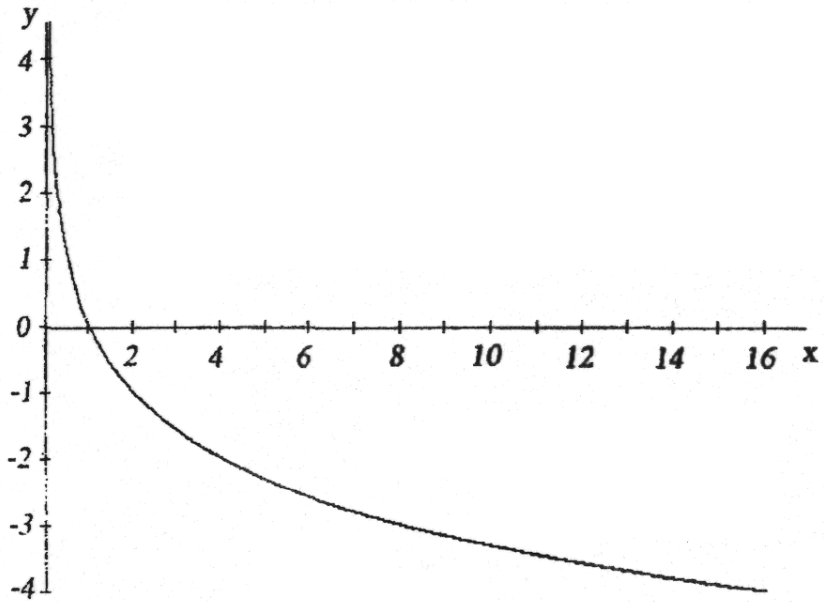


Рис.75

13.4. Логарифмические уравнения

Уравнение, которое содержит переменную под знаком логарифма, называется ***логарифмическим***. Простейшим примером логарифмического уравнения является уравнение $log_a x = b$ (где $a > 0,\ a \neq 1$).

Пример.

Решить уравнение $\log_2 x = 5$

Используя основное логарифмическое тождество, получим $x = 2^5 = 32$.

Решение логарифмического уравнения вида $log_a f(x) = log_a g(x)$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Однако переход от уравнения $log_a f(x) = log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может приводить к появлению посторонних корней. Такие корни можно определить или с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, или с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область определения задается неравенствами $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$.

Пример.

Решить уравнения:

1) $\log_2(x + 2) = \log_2(2x + l)$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x + 2 = 2x + 1$ при условии положительности выражений под знаком логарифма: $x + 2 > 0,\ 2x + 1 > 0$. Корень данного уравнения есть $x = 1$. Проверка показывает, что данное значение x удовлетворяет требованию положительности выражений под знаком логарифма: $1 + 2 > 0,\ 2 + 1 > 0$, следовательно, значение $x = 1$ является корнем исходного логарифмического уравнения.

2) $\log_2(x – 3) = \log_2(2x + 5)$

Данное уравнение эквивалентно уравнению $x – 3 = 2x + 5$ при условии положительности выражений под знаком логарифма: $x – 3 > 0,\ 2x + 5 > 0$. Корень данного уравнения: $x = -8$. Проверка показывает, что данное значение x не удовлетворяет требованию положительности выражений под знаком логарифма: $-8 – 3 < 0,\ -16 + 5 < 0$, следовательно, исходное логарифмическое уравнение не имеет корней.

При решении логарифмических уравнений иногда применяют ***метод замены переменной.***

Пример.

Решить уравнение: $\log_2^2 x – 3\log_2 x + 2 = 0$.

Выполним замену переменной $y = \log_2 x$. В результате получим уравнение $y^2 – 3y + 2 = 0$, решением которого являются значения $y_1 = 1$ и $y_2 = 2$. Решаем далее уравнения $\log_2 x = 1$ и $\log_2 x = 2$. Решениями данных уравнений являются значения $x_1 = 2$ и $x_2 = 4$.

При решении логарифмических уравнений также используют ***свойства логарифмов.***

Пример.

Решить уравнение: 0,5 $\log_3(x-3) + \log_9(x+1) = 1 - \log_{27} 8$

Используя формулу перехода к новому основанию (свойство 11) для второго слагаемого в левой части уравнения получим:

$$\log_6(x+1) = \frac{\log_3(x+1)}{\log_3 9} = 0{,}5\log_3(x+1)$$

Используя свойство 12, для второго слагаемого в правой части уравнения получим: $\log_{27}8 = \log_{3^3} 2^3 = \log_3 2$.

Уравнение примет вид: $0{,}5\log_3(x-3) + 0{,}51\text{og}_3(x+1) = 1 - \log_3 2$. Умножим уравнение на 2: $\log_3(x-3) + \log_3(x+1) = 2 - 2\log_3 2$. Используя свойства логарифмов преобразуем данное уравнение к виду: $\log_3(x-3)(x+1) = \log_3(9/4)$. Данное уравнение эквивалентно уравнению $4x^2 - 8x - 21 = 0$ при условиях $x - 3 > 0$ и $x + 1 > 0$. Данное уравнение имеет корни $x_1 = 3{,}5$ и $x_2 = -1{,}5$. Из данных значений условиям удовлетворяет только первое решение.

Таким образом, корнем исходного логарифмического уравнения является единственное значение $x = 3{,}5$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить уравнения:

1. $\log_{1/3}(2x - l) = -2$
2. $\log_{0,2}(3x + 5) = l$
3. $\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3$
4. $\lg(3x - 17) - \lg(x + l) = 0$
5. $\log_2(4x - 5) - \log_2(5x + 2) = 0$
6. $2\lg(-x) = \lg(x + 6)$
7. $\log_2(x + l)\log_2(x - 1)\log_2(x + 2) = 0$
8. $\log_3(x^2 - 4x - 5) - \log_3(7 - 3x) = 0$
9. $\log_5^2 x - \log_5 x = 2$
10. $\log_2 x + 3\log_2 x - 4 = 0$
11. $\log_2(x - 4) + 2\log_4(2x + 3) = 1 + \log_8 27$
12. $0{,}5\log_3(x - 3) + \log_9(x + 1) = 1 - \log_{27}8$

13.5. Логарифмические неравенства

Неравенство, которое содержит переменную только под знаком логарифма, называется *логарифмическим*. Например, неравенства вида $\log_a f(x) > b$, $\log_a f(x) < b$, $\log_a f(x) > \log_a g(x)$, $\log_a f(x) < \log_a g(x)$ при $a > 0$, $a \neq 1$ являются логарифмическими. При решении логарифмических неравенств необходимо учитывать общие свойства неравенств, свойство монотонности логарифмической функции, а также область её определения. Например, неравенство $\log_a f(x) > b$ при $a > 1$ равносильно неравенству $f(x) > a$, а при $0 < a < 1$ − двойному неравенству $0 < f(x) < a^b$. Неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно двойному неравенству $f(x) > g(x) > 0$, а при $0 < a < 1$ − двойному неравенству $0 < f(x) < g(x)$.

Пример.

Решить неравенства:

1) $\log_2(x-4) < 2$

Так как основание логарифма больше единицы, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 < (x-4) < 2^2 = 4$.

Данное двойное неравенство имеет решение: $4 < x < 8$.

2) $\log_{0,1}(x+l) > \log_{0,1}(5-x)$

Так как основание логарифма меньше единицы, данное неравенство эквивалентно двойному неравенству $0 < x + 1 < 5 - x$.

Данное двойное неравенство имеет решение $-1 < x < 2$.

Задание для самостоятельной работы.

Решить неравенства:

1. $\log_3(x+2) < 1$
2. $\log_{0,2}(4x-l) < -2$
3. $\log_{0,5}(2x-3) > -l$
4. $\log_3\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \le 1$
5. $\log_{0,5}\left(\frac{2x-1}{3x+1}\right) \ge 1$
6. $\log_{0,2}\left(x^2+4x\right) \ge -1$
7. $\log_5(x^2+2x-3) \le 1$
8. $\log_{0,5}(2x-4) < \log_{0,5}(x+1)$
9. $\log_2(x^2+x-2) \le \log_2(10+2x)$
10. $\log_{0,3}(2x^2-9x+4) \ge 2\log_{0,3}(x+2)$
11. $\log_{0,5}x + \log_{0,5}(x+1) \ge 1$

Контрольные вопросы

1. Что называется логарифмом положительного числа b по основанию a?
2. Какое равенство называется основным логарифмическим тождеством?
3. Назовите свойства логарифмов.
4. Какая функция называется логарифмической?
5. Назовите свойства логарифмической функции.
6. Какой вид имеет график логарифмической функции?
7. Какое уравнение называется логарифмическим?
8. Какое неравенство называется логарифмическим?

ЛИТЕРАТУРА

1. Сканави М. И. Элементарная математика.–М.: Просвещение, 1997 – 591 с.

2. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика.– М., Просвещение, 1998, – 416 с.

3. Крамор В. С. Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа, М.: Просвещение, 2000, – 416 с.

4. Погорелов А. В. Геометрия.– М.: Просвещение, 1998, – 304 с.

Навчальне видання

ФОЩАН Андрій Леонтійович
БОРИСОВА Аліна Олексіївна
БОРИСОВ Олексій Олександрович

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ІНОЗЕМНИХ СТУДЕНТІВ ПІДГОТОВЧОГО ВІДДІЛЕННЯ

Навчально-методичний посібник
Російською мовою

Відповідальний за випуск зав. кафедри іноземних мов Борисова А.О.

Техн. редактор Щегельська О.В.

План 2016 р., поз. 119 /

Підп. до друку 01.03.16 р. Формат 60x84 1/16. Папір офсет. Друк офсет.
Ум. друк. арк. 7,4. Тираж 30 экз.

Видавець і виготівник
Харківський державний університет харчування та торгівлі
вул. Клочківська, 333, Харків, 61051.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 4417 від 10.10.2012 р.