

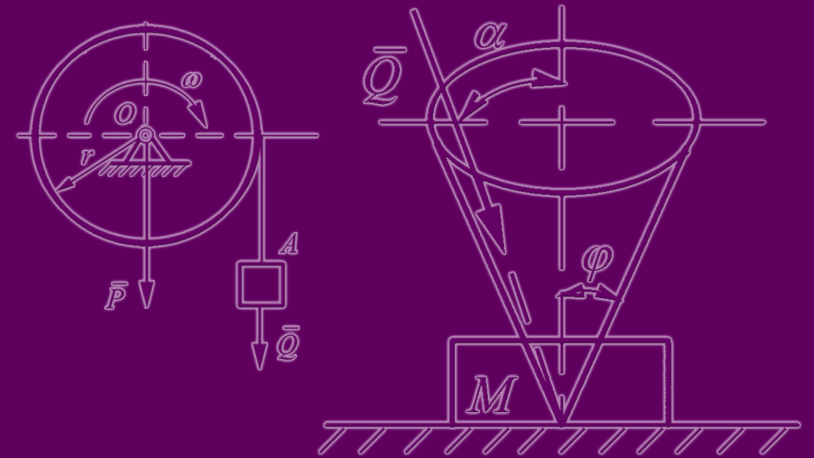
Булгаков В.М., Бурлака В.В., Лукач В.С., Дроннік Ю.М.,  
Кучеренко С.І., Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА. Посібник для практичних занять**

Булгаков В.М., Бурлака В.В.,  
Лукач В.С., Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І.,  
Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.

# ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

**ПОСІБНИК**  
для практичних занять



**В.М.Булгаков, В.В.Бурлака, В.С.Лукач,  
Ю.М.Дроннік, С.І.Кучеренко, Д.І.Мазоренко, Л.М.Тіщенко**

# **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА**

**Посібник для практичних занять**

*За редакцією проф. С.І.Кучеренка*

Схвалено

Міністерством аграрної політики України  
для використання в навчально-виховному  
процесі як навчальний посібник у процесі  
підготовки бакалаврів напряму 6.100102  
«Процеси, машини та обладнання агро-  
промислового виробництва» у вищих на-  
вчальних закладах II-IV рівнів акредитації

**Ніжин  
«МІЛАНІК»  
2009**

УДК 531/534 (075)

ББК 22.21я73

Б 90

Схвалено Міністерством аграрної політики України для використання в навчально-виховному процесі як навчальний посібник у процесі підготовки бакалаврів напряму 6.100102 «Процеси, машини та обладнання агропромислового виробництва» у вищих навчальних закладах II-IV рівнів акредитації (Лист №18-128-13/746 від 08.05.2008 р.)

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф. В.П.Ольшанський,

д-р. техн. наук, проф. Сахаревич В.Д.,

канд. фіз.-мат. наук, доцент М.О.Чегорян

**Б 90 Булгаков В.М., Бурлака В.В., Лукач В.С., Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І., Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М.** Теоретична механіка. Посібник для практичних занять. / За ред. С.І.Кучеренка). – Ніжин: В-во «Міланік», 2009. – 639 с.: іл.

**ISBN 978-966-2213-02-7**

Посібник охоплює основні теми навчальної програми з теоретичної механіки, містить задачі з статички, кінематики, динаміки матеріальної точки та механічної системи. Добір задач різноманітний як за формою, так і за змістом.

Кожна тема містить короткі теоретичні зведення, рекомендації по розв'язуванню задач, самі задачі та їх розв'язування.

Навчальний посібник призначений для студентів технічних вузів усіх форм навчання.

**ISBN 978-966-2213-02-7**

**УДК 531/534 (075)**

**ББК 22.21я73**

© Булгаков В.М., Бурлака В.В., Лукач В.С., Дроннік Ю.М., Кучеренко С.І., Мазоренко Д.І., Тіщенко Л.М., 2009

© В-во «Міланік», 2009

## **ВСТУП**

Навчальний посібник охоплює всі теми розширеної навчальної програми з теоретичної механіки, яку затверджено Міністерством освіти і науки України. Він складається з чотирьох розділів: перший – кінематика і статика; другий – динаміка матеріальної точки; третій – динаміка механічної системи та твердого тіла.

На початку кожної теми розділу приводяться основні теоретичні відомості, формули, рівняння та інші довідкові матеріали в об'ємі, який позбавляє студентів від необхідності звертатися до інших джерел. Зрозуміло, що наявність такого довідкового матеріалу не виключає необхідності глибокого вивчення теорії. У відповідних місцях практикума даються методичні вказівки до розв'язування задач і наводяться детальні розв'язки типових задач.

Посібник призначається для студентів вищих технічних навчальних закладів III та IV рівнів акредитації денної та заочної форм навчання. Він також може бути корисним для викладачів під час підготовки та проведення аудиторних занять.

## РОЗДІЛ ПЕРШИЙ КІНЕМАТИКА

*Кінематикою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух тіл з геометричної точки зору, тобто без урахування їх мас і сил, що на них діють.*

Рух тіл в кінематиці розглядають по відношенню до деякої системи координат, що пов'язана з іншим тілом, наприклад, із Землею.

Основна задача кінематики полягає в тому, що за рівняннями, які визначають закон руху даного тіла, треба знайти всі кінематичні характеристики руху тіла (траєкторії різних точок, їх швидкості та прискорення).

Кінематика ділиться на *кінематику точки* і *кінематику твердого тіла*.

В першому розділі навчального посібника розглядаються *наступні теми кінематики*:

- Кінематика точки.
- Поступальний рух тіла.
- Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.
- Плоский рух тіла.
- Складний рух точки.

На вивчення цих тем відводиться вісім занять.

# Тема 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

## ЗАНЯТТЯ №1

### Координатний спосіб означення руху

#### Зміст

- 1.1. Траєкторія і рівняння руху точки.
- 1.2. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі означення її руху.
- 1.3. Порядок розв'язування задач з кінематики точки.
- 1.4. Контрольні запитання.
- 1.5. Приклади розв'язування задач.

### 1.1. Траєкторія і рівняння руху точки

Означити рух точки – це значить вказати правило, за яким в будь який момент часу  $t$  можна визначити положення точки в просторі.

Розрізняють три способи означення руху точки: *координатний; векторний; природний*.

#### *Координатний спосіб означення руху точки*

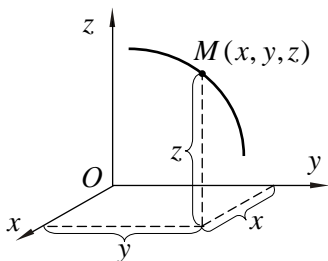


Рис. 1.1

Положення точки  $M$  у просторі при координатному способі означення руху визначається трьома координатами:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис.1.1).

Якщо точка рухається, то ці координати з часом безперервно змінюються.

Таким чином, для означення руху точки достатньо задати функціональні залежності виду:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t), \\ y &= f_2(t), \\ z &= f_3(t). \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

Рівняння (1.1) називаються **рівняннями руху** точки в прямокутних координатах.

Рух точки в **площині**, наприклад  $Oxy$ , визначається двома рівняннями руху:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t). \quad (1.2)$$

Для означення **прямолінійного руху** точки, наприклад, по осі  $Ox$ , достатньо одного рівняння:

$$x = f_1(t). \quad (1.3)$$

### **Визначення траєкторії точки при координатному способі означення її руху**

**Траєкторією** називається та сукупність точок, через які послідовно проходить тіло під час руху в даній системі відліку.

Траєкторія – одна із основних характеристик, яка дає уявлення про рух в цілому. Першою ознакою, за якою виконується розподіл рухів на різні види, є траєкторія.

Визначення траєкторії є однією із важливих частин задач механіки.

В залежності від форми траєкторії рух відносять до **прямолінійного**, або **криволінійного руху**.

Рівняння руху точки (1.1) ÷ (1.3) можна розглядати як рівняння траєкторії в параметричній формі.

Для того, щоб отримати рівняння траєкторії в звичайній формі, треба з рівнянь руху виключити час  $t$ . Так, виключивши  $t$  з рівнянь руху (1.2), дістанемо одне рівняння виду:

$$F(x, y) = 0, \quad (1.4)$$

яке являє собою рівняння лінії на площині  $Oxy$ .

Якщо виключити час  $t$  з рівнянь руху (1.1), то дістанемо рівняння виду:

$$F_1(x, y, z) = 0; \quad F_2(x, y, z) = 0. \quad (1.5)$$

Кожне з рівнянь системи (1.5) є рівнянням деякої поверхні, а разом – рівнянням траєкторії, яка являє собою лінію перетину цих поверхонь.

## 1.2. Визначення швидкості і прискорення точки при координатному способі означення її руху

**Швидкість точки** – векторна величина, яка характеризує зміну положення точки в просторі з часом.

**Прискорення точки** – векторна величина, яка характеризує зміну вектора швидкості з часом.

У випадку *координатного способу* означення руху точки за відомими залежностями для координат точки (1.1) спочатку визначають проєкції вектора швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \frac{dy}{dt}; \quad V_z = \frac{dz}{dt}, \quad (1.6)$$

а потім модуль швидкості точки:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}. \quad (1.7)$$

Напрямок вектора швидкості  $\vec{V}$  визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$\cos(x, \vec{V}) = \frac{V_x}{V}; \quad \cos(y, \vec{V}) = \frac{V_y}{V}; \quad \cos(z, \vec{V}) = \frac{V_z}{V}. \quad (1.8)$$



Проекції вектора прискорення на координатні осі відповідно дорівнюють:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}; \\ a_y &= \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}; \\ a_z &= \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Модуль вектора прискорення визначається за формулою:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.10)$$

Напрямок вектора прискорення  $\bar{a}$  також визначається через напрямні косинуси кутів, які цей вектор утворює з відповідними осями координат:

$$\cos(x, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_x}{a}; \quad \cos(y, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_y}{a}; \quad \cos(z, \hat{\bar{a}}) = \frac{a_z}{a}. \quad (1.11)$$

### 1.3. Порядок розв'язування задач з кінематики точки

Розв'язування задач на визначення закону руху точки та рівняння її траєкторії виконується в такій послідовності:

1. Обирається нерухома система координат, початок якої визначають, виходячи з умов задачі.
2. За умовами задачі в обраній системі координат складають рівняння руху точки, тобто знаходять залежність координат точки від часу.
3. Із складених рівнянь руху точки можна визначити її положення в будь-який момент часу, встановити напрям її руху, знайти траєкторію і т.д.

Якщо за умовою задачі треба визначити швидкість і прискорення точки, то краще дотримуватись такої послідовності:

1. Обрати систему координат.
2. В обраній системі координат скласти рівняння руху (іноді вони задані в умовах задачі).
3. За рівняннями руху точки визначити проекції швидкості на осі системи координат, величину швидкості та її напрям.
4. Визначити проекції прискорення точки на осі системи координат, величину прискорення та його напрям.

#### 1.4. Контрольні запитання

1. Що називається траєкторією?
2. Як за рівняннями руху точки в координатній формі визначити її траєкторію?
3. Що називається швидкістю та прискоренням точки?
4. Як визначити проекції векторів швидкості та прискорення точки на нерухомі осі прямокутної системи координат?
5. Як визначити напрями векторів швидкості та прискорення при координатному способі означення руху?

#### 1.5. Приклади розв'язування задач

##### Задача № 1

Рух точки на площині визначається рівняннями:

$$x = 5 \sin 10t; \quad y = 3 \cos 10t.$$

**Визначити** рівняння траєкторії і напрям руху точки.

**Розв'язок.** Рівняння траєкторії задано в параметричній формі, координати  $x$  і  $y$  залежать від параметра  $t$  (часу).

Щоб отримати рівняння траєкторії в координатній формі, тобто у вигляді залежності  $y = f(x)$ , необхідно виключити з обох рівнянь руху час  $t$ .

Піднесемо до квадрату ліві та праві частини рівнянь руху:

$$x^2 = 5^2 \sin^2 10t; \quad y^2 = 3^2 \cos^2 10t,$$

або

$$\frac{x^2}{5^2} = \sin^2 10t, \quad \frac{y^2}{3^2} = \cos^2 10t.$$

Додамо ці рівняння:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = \sin^2 10t + \cos^2 10t.$$

Оскільки  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , то:

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1.$$

Рівнянням траєкторії точки є еліпс з центром в початку системи координат, велика піввісь якого дорівнює 5-ти одиницям довжини (по осі  $Ox$ ), а мала (по осі  $Oy$ ) – 3-ом одиницям довжини (рис.1.2).

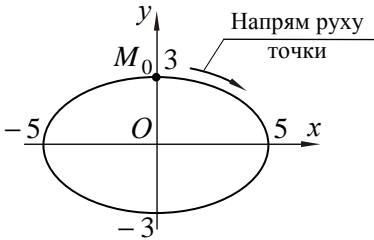


Рис. 1.2

В початковий момент часу  $t = 0$  точка знаходиться в положенні  $M_0$  з координатами:

$$x_0 = 5 \sin(10 \cdot 0) = 0;$$

$$y_0 = 3 \cos(10 \cdot 0) = 3.$$

В початковий момент руху (при зростанні  $t$ ) координата  $x$  почне збільшуватися, а координата  $y$  – зменшуватися. Таким чином, точка буде рухатися за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, точка буде рухатися за ходом годинникової стрілки.

**Відповідь:** а) рівняння траєкторії  $\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$ ; б) точка рухається за ходом годинникової стрілки.

## Задача №2

В механізмі (рис.1.3) тіло  $OA$  (кривошип) обертається навколо нерухомого шарніра  $O$ , а тіло  $B$  (повзун) рухається зворотно-поступально по осі  $Ox$ . Точка  $A$  тіла  $AB$  (шатуна) рухається за траєкторією точки  $A$  кривошипа, а точка  $B$  – за траєкторією повзуна.

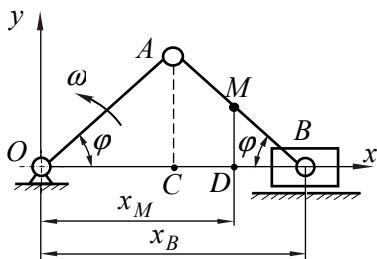


Рис. 1.3

**Визначити** рівняння руху і траєкторію середньої точки  $M$  шатуна та рівняння руху повзуна  $B$ , якщо в початковий момент повзун знаходився в крайньому правому положенні; кривошип  $OA$  обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 10 \text{ c}^{-1}$  і  $OA = AB = 0,8 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Для визначення траєкторії точки  $M$  зобразимо механізм у довільному положенні та складемо рівняння її руху в координатній формі.

З рис. 1.3 видно, що:

$$x_M = OC + CD; \quad y_M = MD.$$

Оскільки трикутник  $OAB$  рівнобедрений ( $OA=AB$ ), то кути  $ABC$  і  $AOC$  рівні між собою і дорівнюють  $\varphi = \omega \cdot t$ .

З трикутника  $OAC$  знайдемо відстань  $OC$ :

$$OC = OA \cos \varphi,$$

а з трикутника  $MBD$  відстані  $CD$  і  $MD$ :

$$CD = DB = MB \cos \varphi = \frac{AB}{2} \cos \varphi;$$

$$MD = MB \sin \varphi = \frac{AB}{2} \sin \varphi.$$

Тоді:

$$x_M = OA \cos \varphi + \frac{AB}{2} \cos \varphi; \quad y_M = \frac{AB}{2} \sin \varphi.$$

Якщо підставити числові дані, то рівняння руху точки  $M$  набудуть вигляду:

$$x_M = 0,8\cos 10t + 0,4\cos 10t = 1,2\cos 10t;$$

$$y_M = 0,4\sin 10t.$$

Для знаходження траєкторії точки  $M$  піднесемо рівняння руху до квадрату і додамо:

$$\frac{x_M}{1,2} = \cos 10t; \quad \frac{y_M}{0,4} = \sin 10t;$$

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = \cos^2 10t + \sin^2 10t.$$

Враховуючи, що  $\cos^2 10t + \sin^2 10t = 1$ , дістанемо вираз для рівняння траєкторії:

$$\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки буде еліпс, одна піввісь якого, по осі  $Ox$ , складає  $1,2\text{ м}$ , а друга, по осі  $Oy$ , –  $0,4\text{ м}$ .

Визначимо координати точки  $B$ :

$$x_B = OC + CB = OA\cos\varphi + AB\cos\varphi;$$

$$x_B = 0,8\cos 10t + 0,8\cos 10t = 1,6\cos 10t.$$

Таким чином, рівняння руху повзуна  $B$  буде мати вигляд:

$$x_B = 1,6\cos 10t.$$

**Відповідь:**  $\left(\frac{x_M}{1,2}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{0,4}\right)^2 = 1; \quad x_B = 1,6\cos 10t.$

### Задача №3

Рух точки  $M$  задано рівняннями:

$$x = 10\cos 2\pi\frac{t}{5}, \quad y = 10\sin 2\pi\frac{t}{5},$$

де  $x, y$  – в метрах;  $t$  – в секундах.

**Визначити** траєкторію точки, величину і напрям швидкості та величину і напрям прискорення в момент часу  $t = \frac{5}{6}$  с.

**Розв'язок.** Для визначення траєкторії точки  $M$  піднесемо до квадрату ліві і праві частини рівнянь руху та додамо їх:

$$x^2 = 10^2 \cos^2 2\pi \frac{t}{5}; \quad y^2 = 10^2 \sin^2 2\pi \frac{t}{5};$$

$$x^2 + y^2 = 10^2 \left( \cos^2 2\pi \frac{t}{5} + \sin^2 2\pi \frac{t}{5} \right) = 10^2.$$

Таким чином, рівняння траєкторії буде мати вигляд:

$$x^2 + y^2 = 10^2.$$

Траєкторією точки  $M$  буде коло радіусом 10 м з центром в початку системи координат.

Проекції вектора швидкості на осі координат дорівнюють:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 10 \cos 2\pi \frac{t}{5} \right) = -10 \frac{2\pi}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5} = -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5},$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 10 \sin 2\pi \frac{t}{5} \right) = 10 \frac{2\pi}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5} = 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5}.$$

Модуль вектора швидкості:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\left( -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5} \right)^2 + \left( 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5} \right)^2} = 4\pi \frac{m}{c}.$$

Проекції вектора прискорення на осі координат дорівнюють:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -4\pi \sin 2\pi \frac{t}{5} \right) = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5};$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 4\pi \cos 2\pi \frac{t}{5} \right) = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}.$$

Модуль вектора прискорення:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(-8 \frac{\pi^2}{5} \cos 2\pi \frac{t}{5}\right)^2 + \left(-8 \frac{\pi^2}{5} \sin 2\pi \frac{t}{5}\right)^2} = 1,6\pi^2 \frac{M}{c^2}.$$

З отриманих залежностей випливає, що модулі швидкості та прискорення не залежать від часу, а їх проекції на осі є функціями часу.

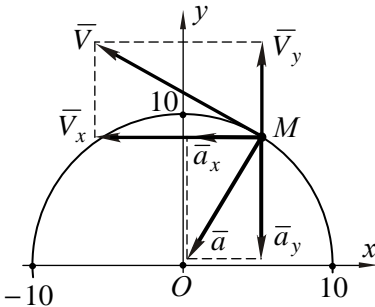


Рис. 1.4

Визначимо для моменту часу  $t = \frac{5}{6} c$  положення точки на траєкторії та величини проекцій швидкості і прискорення.

При  $t = \frac{5}{6} c$ , кут під знаком косинуса і синуса в рівняннях проекцій дорівнює:

$$2\pi \frac{t}{5} = \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1}{3}\pi = 60^\circ.$$

З урахуванням знайденого кута дістанемо:

$$x = 10 \cos 60^\circ = 5 \text{ м};$$

$$y = 10 \sin 60^\circ = 8,66 \text{ м};$$

$$V_x = -4\pi \sin 60^\circ = -10,9 \frac{M}{c};$$

$$V_y = 4\pi \cos 60^\circ = 6,28 \frac{M}{c};$$

$$a_x = -\frac{8\pi^2}{5} \cos 60^\circ = -7,9 \frac{M}{c^2};$$

$$a_y = -\frac{8\pi^2}{5} \sin 60^\circ = -13,7 \frac{M}{c^2}.$$

На рис.1.4 показано траєкторію точки, положення точки в момент часу  $t = 5/6 c$  та складові векторів швидкості і прискорення.

Складові вектори  $\vec{V}_x$ ,  $\vec{V}_y$ ,  $\vec{a}_x$  та  $\vec{a}_y$  напрямлені проти напрямку відповідних осей, оскільки їх проекції на ці осі від'ємні.

**Відповідь:**  $x^2 + y^2 = 10^2$ ;  $V = 4\pi \text{ м/с}$ ;  $a = 1,6\pi^2 \text{ м/с}^2$ .

**Задача №4**

Рух точки задано рівняннями:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}); \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

де  $a$  і  $k$  - сталі величини.

**Визначити** рівняння траєкторії, швидкість та прискорення точки, як функцію радіуса-вектора  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Розв'язок.** Рівняння траєкторії в координатній формі знайдемо, виключивши час з рівнянь руху точки.

Спочатку рівняння руху перетворимо до вигляду:

$$\frac{x}{a} = e^{kt} + e^{-kt}; \quad \frac{y}{a} = e^{kt} - e^{-kt}.$$

Піднесемо записані рівняння до квадрату і віднімемо від першого друге:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = e^{2kt} + 2e^{kt} \cdot e^{-kt} + e^{2kt} = 2e^{2kt} + 2;$$

$$\left(\frac{y}{a}\right)^2 = e^{2kt} - 2e^{kt} \cdot e^{-kt} + e^{2kt} = 2e^{2kt} - 2;$$

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 2e^{2kt} + 2 - 2e^{2kt} + 2 = 4.$$

Таким чином, рівняння траєкторії точки буде мати вигляд:

$$x^2 - y^2 = 4a^2.$$

Визначимо проекції вектора швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ a(e^{kt} + e^{-kt}) \right] = a(ke^{kt} - ke^{-kt}) = ka(e^{kt} - e^{-kt});$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[ a(e^{kt} - e^{-kt}) \right] = a(ke^{kt} + ke^{-kt}) = ka(e^{kt} + e^{-kt}).$$



Оскільки за умовою задачі:

$$x = a(e^{kt} + e^{-kt}); \quad y = a(e^{kt} - e^{-kt}),$$

то:

$$V_x = ky; \quad V_y = kx.$$

Тоді:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{k^2 y^2 + k^2 x^2} = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Визначимо проекції вектора прискорення на координатні осі:

$$a_x = Vx = ka(e^{kt} - e^{-kt})' = k^2 a(e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 x;$$

$$a_y = Vy = ka(e^{kt} - e^{-kt})' = k^2 a(e^{kt} + e^{-kt}) = k^2 y;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{k^4 x^2 + k^4 y^2} = k^2 \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Враховуючи, що  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , то:

$$V = k \cdot r; \quad a = k^2 \cdot r.$$

**Відповідь:**  $x^2 - y^2 = 4a^2$ ;  $V = k \cdot r$ ;  $a = k^2 \cdot r$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 11.2; 11.5; 12.13 [2].

## Тема 1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ (продовження)

### ЗАНЯТТЯ №2

#### Природний спосіб означення руху точки

##### Зміст

- 1.6. Природний спосіб означення руху точки .
- 1.7. Визначення швидкості і прискорення точки при природному способі означення її руху.
- 1.8. Контрольні запитання.
- 1.9. Приклади розв'язування задач.

#### 1.6. Природний спосіб означення руху точки

Природний спосіб означення руху точки полягає в наступному.

1. Будь яким способом (рівнянням, графічно, вказівкою) задається траєкторія точки  $M_0B$  (рис.1.5) .

2. На траєкторії обирається деяка точка  $M_0$  як початок відліку дуги і додатний напрям уздовж траєкторії (на рис. 1.5 зліва направо).

3. Положення точки  $M$  на траєкторії однозначно визначається довжиною дуги  $S = M_0M$  , яку беруть з відповідним знаком. При русі точки по траєкторії кожному моменту часу  $t$  відповідає певне значення  $S$ .

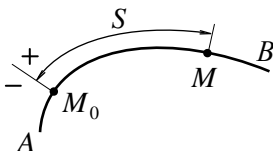


Рис. 1.5

Таким чином, для визначення положення точки на траєкторії досить задати залежність:

$$S = f(t), \quad (1.12)$$

яка називається **природним рівнянням руху**.

Природним способом означення руху точки зручно користуватися в тому випадку, коли відома траєкторія точки.

### 1.7. Визначення швидкості і прискорення точки при природному способі означення її руху

У випадку *природного способу* означення руху точки за відомим рівнянням руху (1.12) модуль вектора швидкості визначають за формулою:

$$V = \frac{dS}{dt}. \quad (1.13)$$

Направлений вектор швидкості за дотичною до траєкторії точки в бік відліку координати  $S$  (рис.1.6), якщо  $dS/dt > 0$ , і в протилежний бік, якщо  $dS/dt < 0$ .

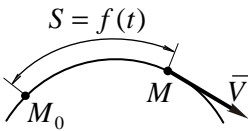


Рис. 1.6

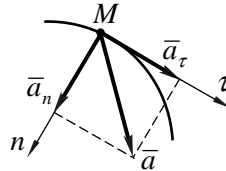


Рис. 1.7

При визначенні прискорення з точкою  $M$  пов'язують рухому систему координат  $Mtn$  (рис.1.7): тангенціальну вісь  $Mt$  направляють за дотичною до траєкторії в бік швидкості точки; нормальну вісь  $Mn$  - за внутрішньою нормаллю до траєкторії (тобто, в бік центра її кривизни).

Прискорення  $\bar{a}$  розкладають на складові  $\bar{a}_\tau$  і  $\bar{a}_n$  за осями обраної системи координат, які відповідно називають *дотичною* (тангенціальною) і *нормальною* (доцентровою) складовими прискорення.

За модулем ці прискорення, відповідно, дорівнюють:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.14)$$

де  $\rho$  - радіус кривизни траєкторії.

Нормальне прискорення завжди направлене до центра кривизни (за напрямом осі  $Mn$ ), а дотичне прискорення – за віссю  $M\tau$ , якщо  $a_\tau > 0$  і в протилежний бік, якщо  $a_\tau < 0$ .

**Нормальне прискорення характеризує зміну напрямку швидкості з плином часу.**

Якщо траєкторією точки є пряма лінія, тобто  $\rho = \infty$ , то  $a_n = 0$  і вектор швидкості не буде змінювати свого напрямку.

**Дотичне прискорення характеризує зміну швидкості за величиною з плином часу.**

Якщо точка рухається рівномірно ( $V = V_0 = const$ ), то  $a_\tau = 0$ , а шлях, що пройдено точкою, визначають за формулою:

$$S = S_0 + V_0 t.$$

У випадку рівномірно прискореного руху точки ( $a_\tau = const$ ) швидкість точки і шлях, який пройдено нею, визначають за формулами:

$$V = V_0 + a_\tau t; \quad S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a_\tau t^2.$$

В наведених формулах  $V_0$  і  $S_0$  - відповідно, початкові значення швидкості і пройденого шляху, а самі формули можна отримати шляхом інтегрування залежності для  $a_\tau$  (1.14).

## 1.8. Контрольні запитання

1. В чому полягає природний спосіб означення руху точки?
2. Як визначити швидкість точки за модулем і за напрямом?
3. Що характеризують дотичне і нормальне прискорення точки?
4. Як визначити величину і напрям дотичного прискорення?
5. Як визначити величину і напрям нормального прискорення?
6. При якому русі точки дорівнює нулю дотичне прискорення і при якому – нормальне прискорення?

## 1.9. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Точка рухається по колу радіусом  $R = 0,2 \text{ м}$ . Закон її руху по траєкторії:

$$S = 0,2 \sin \pi t,$$

де  $t$  - в секундах;  $S$  - в метрах.

**Визначити** величину та напрям швидкості, дотичне і нормальне прискорення точки в момент часу  $t_1 = 5 \text{ с}$ .

**Розв'язок.** Для визначення модуля швидкості знайдемо похідну від  $S$  за часом:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2 \sin \pi t) = 0,2\pi \cos \pi t.$$

В момент часу  $t = t_1$ :

$$V_1 = 0,2\pi \cos \pi t_1 = 0,2\pi \cos 5\pi = -0,2\pi \text{ м/с}.$$

Швидкість точки направлена за дотичною до кола в бік, який протилежний додатному напрямку відліку дуги  $S$ .

Визначимо величину дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2\pi \cos \pi t) = -0,2\pi^2 \sin \pi t.$$

В момент часу  $t = t_1$ :

$$a_{\tau_1} = -0,2\pi^2 \cos \pi t_1 = -0,2\pi^2 \sin 5\pi = 0.$$

Обчислимо величину нормального прискорення в момент часу  $t = t_1$ :

$$a_{n_1} = \frac{V_1^2}{\rho} = \frac{V_1^2}{R} = \frac{(-0,2\pi)^2}{0,2} = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $V_1 = -0,2\pi \text{ м/с}$ ;  $a_1 = a_{n_1} = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2$ .

## Задача №2

Точка рухається по колу радіусом  $R = 4$  м. Шлях в метрах, який проходить точка по траєкторії, в будь який момент часу визначається рівнянням:

$$S = 4,5t^3.$$

**Визначити** величину прискорення точки і кут  $\alpha$ , який утворюють між собою вектори швидкості і прискорення в момент часу, коли величина швидкості дорівнює  $6$  м/с.

**Розв'язок.** Зобразимо траєкторію з точкою  $M$  у довільному

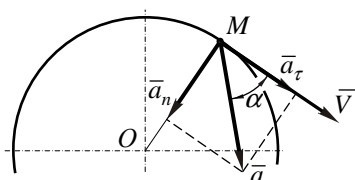


Рис. 1.8

положенні (рис.1.8). Швидкість  $\vec{V}$  направимо за дотичною до кола, нормальне прискорення  $\vec{a}_n$  - до центра кола, а дотичне  $\vec{a}_\tau$  - за швидкістю, приймаючи, що воно додатне.

Кут  $\alpha$  між векторами швидкості  $\vec{V}$  і повного прискорення  $\vec{a}$  буде дорівнювати:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_n}{a_\tau}.$$

Знайдемо величину нормального прискорення:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{6^2}{4} = 9 \text{ м/с}^2.$$

Функціональні залежності для швидкості та дотичного прискорення знайдемо за рівнянням руху точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(4,5t^3) = 13,5t^2;$$

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(13,5t^2) = 27t.$$

Оскільки для обчислення дотичного прискорення треба знати час, коли швидкість буде дорівнювати  $6 \text{ м/с}$ , то з першого рівняння отримуємо:

$$t = \sqrt{\frac{V}{13,5}} = \sqrt{\frac{6}{13,5}} = \frac{2}{3} \text{ с.}$$

Величина дотичного прискорення:

$$a_\tau = 27t = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18 \text{ м/с}^2.$$

Тоді:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{9}{18} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(0,5) = 26^\circ 30'.$$

Повне прискорення точки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{9^2 + 18^2} = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $a = 9\sqrt{5} \text{ м/с}^2$ ;  $\alpha = 26^\circ 30'$ .

### Задача №3

Рівняння руху пальця шарніра  $A$  кривошипно-повзунного механізму (рис.1.9) під час його пуску мають вигляд:

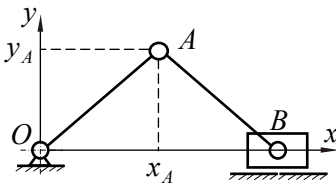


Рис. 1.9

$$\begin{aligned} x_A &= 0,75 \cos 4t^2; \\ y_A &= 0,75 \sin 4t^2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $x_A, y_A$  - в метрах;  
 $t$  - в секундах.

**Визначити** швидкість, дотичне і нормальне прискорення пальця.

**Розв'язок.** Рівняння для визначення дотичного і нормального прискорення мають вигляд:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}.$$

Таким чином, для визначення  $a_\tau$  і  $a_n$  необхідно знати радіус кривизни траєкторії  $\rho$  і залежність швидкості  $V$  від часу  $t$ .

Для обчислення  $V$  знайдемо проекції швидкості на координатні осі:

$$V_x = \frac{dx_A}{dt} = \frac{d}{dt}(0,75 \cos 4t^2) = -4 \cdot 2 \cdot 0,75t \sin 4t^2 = -6t \sin 4t^2;$$

$$V_y = \frac{dy_A}{dt} = \frac{d}{dt}(0,75 \sin 4t^2) = 4 \cdot 2 \cdot 0,75t \cos 4t^2 = 6t \cos 4t^2.$$

Швидкість пальця кривошипа буде дорівнювати:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-6t \sin 4t^2)^2 + (6t \cos 4t^2)^2} = 6t.$$

Обчислимо величину дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(6t) = 6 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення радіуса кривизни траєкторії знайдемо її рівняння. Щоб виключити параметр  $t$  з рівнянь руху (1), піднесемо до квадрату праві і ліві частини рівнянь, а потім їх додамо:

$$x_A^2 = 0,75^2 \cos^2 4t^2; \quad y_A^2 = 0,75^2 \sin^2 4t^2;$$

$$x_A^2 + y_A^2 = 0,75^2 (\cos^2 4t^2 + \sin^2 4t^2);$$

$$x_A^2 + y_A^2 = 0,75^2.$$

Таким чином, траєкторією пальця буде коло радіусом  $\rho = 0,75 \text{ м}$ .

Величина нормального прискорення  $a_n$  буде дорівнювати :



$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{(6t)^2}{0,75} = 48t^2.$$

**Відповідь:**  $V = 6t$ ;  $a_\tau = 6 \text{ м/с}^2$ ;  $a_n = 48t^2$ .

#### Задача №4

Рівняння руху матеріальної точки мають вигляд:

$$x = \alpha t; \quad y = \beta t - \frac{gt^2}{2},$$

де  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $g$  - сталі величини.

**Визначити** дотичне і нормальне прискорення точки.

**Розв'язок.** Дотичне прискорення точки визначається за формулою:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

При координатному способі означення руху швидкість точки через проекції дорівнює:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}.$$

Підставимо вираз для  $V$  в рівняння для  $a_\tau$ :

$$a_\tau = \frac{d}{dt} \left( \sqrt{V_x^2 + V_y^2} \right) = \frac{2V_x \frac{dV_x}{dt} + 2V_y \frac{dV_y}{dt}}{2\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V},$$

де  $V_x, V_y$  - проекції швидкості на координатні осі;

$a_x, a_y$  - проекції прискорення на координатні осі.

Проекції швидкості та прискорення на координатні осі визначимо за формулами для координатного способу означення руху:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha t) = \alpha;$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta t - g \frac{t^2}{2}) = \beta - gt ;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2} ;$$

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha) = 0 ;$$

$$a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}(\beta - gt) = -g ;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = g .$$

Тоді дотичне прискорення точки буде дорівнювати:

$$a_\tau = \frac{\alpha \cdot 0 + (\beta - gt) \cdot (-g)}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2}} = \frac{-g(\beta - gt)}{V} .$$

Для визначення нормального прискорення скористаємося повним прискоренням точки, яке вже було знайдене, виходячи з формул координатного способу означення руху.

Оскільки:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = g ,$$

то:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = \sqrt{g^2 - \frac{g^2(\beta - gt)^2}{V^2}} = \frac{g}{V} \sqrt{V^2 - (\beta - gt)^2} .$$

Підставивши під корінь вираз для  $V$ , отримаємо:

$$a_n = \frac{g}{V} \sqrt{\alpha^2 + (\beta - gt)^2 - (\beta - gt)^2} = \frac{g\alpha}{V} .$$

**Відповідь:**  $a_\tau = -\frac{g(\beta - gt)}{V}$ ,  $a_n = \frac{g\alpha}{V}$ .

## Задача №5

Точка  $M$  рухається по колу радіусом  $R = 1/3$  м таким чином, що повне прискорення весь час пропорційне квадрату швидкості і направлене під тупим кутом до неї. Рух починається з початковою швидкістю  $V_0 = 2$  м/с і початковим прискоренням  $a_0 = 20$  м/с<sup>2</sup>.

**Визначити**, за який час швидкість точки зменшиться вдвічі, і який шлях при цьому вона пройде.

**Розв'язок.** Зобразимо траєкторію з точкою  $M$  в довільному положенні (рис.1.10).

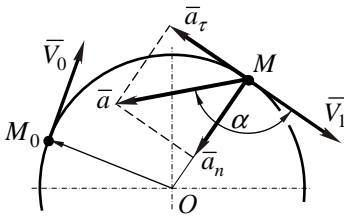


Рис. 1.10

Швидкість  $\vec{V}$  спрямуємо за дотичною до траєкторії, а повне прискорення  $\vec{a}$  під кутом  $\alpha > 90^\circ$  до швидкості.

Повне прискорення  $\vec{a}$  розкладемо на нормальне  $\vec{a}_n$  і дотичне  $\vec{a}_\tau$  за правилом паралелограма.

За умовою задачі:

$$a = kV^2,$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності.

Оскільки ця рівність повинна виконуватися і в початковий момент часу  $t_0 = 0$ , то:

$$a_0 = kV_0^2.$$

Звідки:

$$k = \frac{a_0}{V_0^2} = \frac{20}{2^2} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином, закон зміни повного прискорення точки під час руху буде мати вигляд:

$$a = 5V^2.$$

Визначимо функціональні залежності від швидкості для нормального і дотичного прискорень точки:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{V^2}{1/3} = 3V^2;$$

$$a_\tau = \sqrt{a - a_n^2} = \sqrt{(5V^2)^2 - (3V^2)^2} = -4V^2.$$

В рівнянні для  $a_\tau$  було взяте від'ємне значення кореня, оскільки повне прискорення утворює тупий кут з напрямом швидкості (рис.1.10), тобто дотичне прискорення буде направлене протилежно швидкості і рух точки буде сповільнений.

Для визначення часу руху та пройденого точкою шляху скористаємося залежністю для дотичного прискорення:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = -4V^2.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо цей вираз:

$$-\int \frac{dV}{V^2} = \int 4dt; \quad \frac{1}{V} = 4t + C_1,$$

де  $C_1$  - стала інтегрування.

Сталу інтегрування  $C_1$  знайдемо з початкових умов, коли  $t_0 = 0$ ,  $V = V_0 = 2$  м/с.

Звідки:

$$\frac{1}{V_0} = 4 \cdot 0 + C_1; \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}.$$

Функціональна залежність для швидкості буде мати вигляд:

$$\frac{1}{V} = 4t + \frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad V = \frac{2}{1 + 8t}.$$

За умовою задачі в кінцевий момент часу  $t = t_1$  швидкість точки зменшиться вдвічі, тобто:

$$V = V_1 = 0,5V_0 = 1 \text{ м/с}.$$

Тоді час руху точки буде дорівнювати:

$$V_1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow 1 = \frac{2}{1+8t_1}; \Rightarrow t_1 = \frac{1}{8} \text{ с.}$$

Для визначення пройденого точкою шляху скористаємося рівняннями:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{2}{1+8t}.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\int dS = \int \frac{2}{1+8t} dt \Rightarrow S = \frac{1}{4} \ln(1+8t) + C_2,$$

де  $C_2$  - стала інтегрування.

Оскільки в початковий момент  $t_0 = 0$ ,  $S = 0$ , то:

$$0 = \frac{1}{4} \ln(1+8 \cdot 0) + C_2; \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, для шляху  $S$  отримаємо наступну залежність:

$$S = \frac{1}{4} \ln(1+8t).$$

За проміжок часу  $t_1 = 1/8 \text{ с}$  шлях, пройдений точкою, буде складати:

$$S_1 = \frac{1}{4} \ln(1+8t_1) = \frac{1}{4} \ln(1+8 \cdot \frac{1}{8}) = \frac{1}{4} \ln 2 = 0,16 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $t_1 = 1/8 \text{ с}$ ;  $S = 0,16 \text{ м}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 12.17; 12.19; 12.20 [2].

## Тема 2. ПОСТУПАЛЬНИЙ ТА ОБЕРТАЛЬНИЙ ВИДИ РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

### ЗАНЯТТЯ №3

#### Зміст

- 2.1. Поступальний рух твердого тіла.
- 2.2. Обертальний рух твердого тіла.
- 2.3. Рівномірний та рівнозмінний обертальний рух тіла.
- 2.4. Швидкість та прискорення точок тіла, що обертається.
- 2.5. Контрольні запитання.
- 2.6. Приклади розв'язування задач.

#### 2.1. Поступальний рух твердого тіла

*Поступальним називається такий рух твердого тіла, при якому довільна пряма, що незмінно пов'язана з тілом, увесь час залишається паралельною своєму початковому положенню.*

Для твердого тіла (рис.2.1) пряма  $AB$ , що з'єднує дві довільні його точки, під час поступального руху не змінюється ні за довжиною, ні за напрямом. Це означає, що при поступальному русі точки  $A$  та  $B$  тіла мають однакові траєкторії (при накладанні збігаються) і в кожному момент часу однаковими будуть їх швидкості і прискорення, тобто:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Таким чином, поступальний рух твердого тіла повністю визначається рухом будь-якої точки цього тіла, тобто задача визначення кінематичних характеристик поступального руху твердого тіла зводиться до задачі кінематики точки.

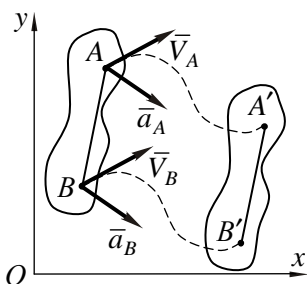


Рис. 2.1

## 2.2. Обертальний рух твердого тіла

**Обертальним рухом** називається такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки тіла залишаються нерухожими.

Якщо закріпити дві точки тіла  $O_1$  і  $O_2$  (рис.2.2), то будуть нерухожими всі точки прямої  $O_1O_2$ , яка називається **віссю обертання**.

Траєкторіями усіх інших точок тіла, наприклад  $M$ , будуть кола з центрами на осі обертання.

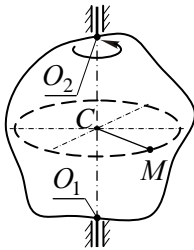


Рис. 2.2

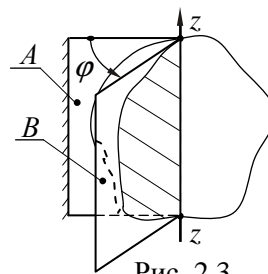


Рис. 2.3

Проведемо через вісь обертання  $zz$  (рис.2.3) дві площини: одну нерухомих -  $A$ , а другу, площину  $B$ , жорстко пов'яжемо з тілом, що обертається. Двогранний кут  $\varphi$  між цими двома площинами однозначно визначає положення тіла, що обертається.

Для визначення знака кута  $\varphi$  на осі обертання  $zz$  обирають додатний напрям (на рис.2.3 – вгору). Кут вважається **додатним**, якщо з додатного напрямку осі обертання кут відносно нерухомої площини відкладений проти ходу годинникової стрілки і **від'ємний**, якщо за ходом.

Коли тіло обертається, кут  $\varphi$  безперервно змінюється з часом. Таким чином, для повної характеристики обертального руху треба задати рівняння виду:

$$\varphi = f(t). \quad (2.1)$$

Рівняння (2.1) називається **рівнянням обертального руху тіла**.

Зміну кута повороту тіла з плином часу характеризує **кутова швидкість**  $\omega$ .

Миттєва кутова швидкість  $\omega$  є першою похідною від кута повороту за часом:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.2)$$

Одиницею вимірювання кутової швидкості є радіан поділений на секунду і позначається як  $\text{рад}/\text{с}$ , або  $\text{с}^{-1}$ , або  $1/\text{с}$ .

Направлена кутова швидкість в бік миттєвого обертання тіла та  $\omega > 0$ , якщо збігається з напрямом відліку кута  $\varphi$ , і  $\omega < 0$ , якщо протилежна напрямку відліку  $\varphi$ .

В техніці кут повороту пропорційний кількості обертів  $N$ , що зробило тіло за деякий проміжок часу. В цьому випадку кут повороту тіла  $\varphi$  в радіанах можна знайти за залежністю:

$$\varphi = 2\pi N. \quad (2.3)$$

Куту швидкість обертання тіла часто задають числом обертів за одну хвилину  $n$  ( $\text{об}/\text{хв}$ ).

Куту швидкість  $\omega$  в цьому випадку визначають за формулою:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \text{рад}/\text{с} \quad (2.4)$$

де  $n$  - підставляють в  $\text{об}/\text{хв}$ .

Зміну кутової швидкості з плином часу характеризує **кутове прискорення**  $\varepsilon$ .

Миттєве кутове прискорення  $\varepsilon$  визначається як перша похідна від кутової швидкості за часом, або друга похідна від кута повороту тіла:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (2.5)$$



Одиницею вимірювання кутового прискорення є радіан, поділений на секунду в квадраті, і позначається  $\text{рад}/\text{с}^2$ , або  $1/\text{с}^2$ , або  $\text{с}^{-2}$ .

Направлене кутове прискорення за напрямом кутової швидкості, якщо знаки  $\omega$  та  $\varepsilon$  збігаються, і проти напрямку кутової швидкості, якщо знаки  $\omega$  та  $\varepsilon$  різні.

### 2.3. Рівномірний та рівнозмінний обертальний рух тіла

У випадку *рівномірного* обертального руху тіла його кутова швидкість буде сталою ( $\omega = \text{const}$ ), а кутове прискорення дорівнює нулю ( $\varepsilon = 0$ ).

Кут повороту тіла в цьому випадку обчислюється за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \quad (2.6)$$

де  $\varphi_0$  - початковий кут повороту тіла при  $t = 0$ .

У випадку *рівномірно змінного* обертального руху тіла його кутове прискорення буде сталим ( $\varepsilon = \text{const}$ ).

Кутова швидкість і кут повороту тіла в цьому випадку обчислюються за формулами:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t; \quad (2.7)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \quad (2.8)$$

де  $\varphi_0$ ,  $\omega_0$  - відповідно кут повороту тіла і кутова швидкість в момент часу  $t = 0$ .

### 2.4. Швидкість та прискорення точок тіла, що обертається

Якщо для тіла, що обертається, відомі кутова швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$ , то можна знайти швидкість  $\vec{V}$  і прискорення  $\vec{a}$  будь якої його точки.

Швидкість точки тіла, що обертається, дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань від точки до осі обертання:

$$V = \omega \cdot R. \quad (2.9)$$

Вектор швидкості точки  $\vec{V}$  направлений під прямим кутом до радіуса обертання  $OM$  (рис.2.4) в бік обертання тіла (в бік кутової швидкості  $\omega$ ).

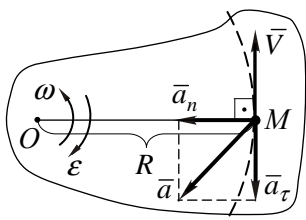


Рис. 2.4

Оскільки точка тіла, що обертається, рухається по криволінійній траєкторії (колу з радіусом кривизни  $R$ ), то прискорення точки  $\vec{a}$  можна розкласти на дві складові: тангенціальну (дотичну)  $\vec{a}_\tau$  і нормальну (доцентрову)  $\vec{a}_n$  (рис.2.4).

Підставивши в формули для  $\vec{a}_\tau$  і  $\vec{a}_n$  (1.14) вираз для  $\vec{V}$  (2.9) отримаємо:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon R; \quad (2.10)$$

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R. \quad (2.11)$$

Нормальне прискорення  $\vec{a}_n$  направлене від точки вздовж радіуса до центра обертання. Дотичне прискорення  $\vec{a}_\tau$  спрямоване перпендикулярно до радіуса в бік кутового прискорення  $\varepsilon$ .

Повне ж прискорення точки відповідно дорівнює:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\omega^2 R)^2 + (\varepsilon R)^2} = R \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2.12)$$

## 2.5. Контрольні запитання

1. Який рух твердого тіла називається поступальним?
2. Який рух твердого тіла називається обертальним навколо нерухомої осі?

3. За якими формулами визначаються модулі кутової швидкості і кутового прискорення?
4. Як спрямований вектор швидкості тіла, що обертається?
5. Як визначити величину та напрям дотичного і нормального прискорення точки тіла, що обертається?

## 2.6. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Вал починає обертатися зі сталим прискоренням із стану спокою. За перші 5 секунд вал робить 12,5 оберти.

**Визначити** кутову швидкість вала в кінці проміжку часу, що розглядається.

**Розв'язок.** При рівноприскореному обертанні тіла кутова швидкість  $\omega$  змінюється за законом:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки за умовою задачі  $\omega_0 = 0$ , то

$$\omega = \varepsilon t.$$

Таким чином, для визначення кутової швидкості вала треба знайти його кутове прискорення  $\varepsilon$ .

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні визначається за формулою:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки  $\varphi_0 = 0$  і  $\omega_0 = 0$ , то

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Кут повороту вала за число обертів  $N$  дорівнює:

$$\varphi = 2\pi N.$$

Тоді: 
$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{t^2}.$$

Підставивши вираз для  $\varepsilon$  в формулу для  $\omega$  отримаємо:

$$\omega = \varepsilon t = \frac{4\pi N}{t^2} t = \frac{4\pi N}{t}.$$

З урахуванням числових даних:

$$\omega = \frac{4\pi \cdot 12,5}{5} = 10\pi \text{ рад/с}.$$

**Відповідь:**  $\omega = 10\pi \text{ рад/с}.$

### Задача № 2

Шків пасової передачі починає обертатися із стану спокою з сталим кутовим прискоренням і через 10 хвилин від початку руху має кутову швидкість, яка відповідає 120 об/хв.

**Визначити** число обертів  $N$ , які зробив шків за 10 хвилин.

**Розв'язок.** Число обертів  $N$  можна визначити, якщо відомий кут  $\varphi$ , на який повернувся шків за 10 хвилин.

Оскільки  $\varphi = 2\pi N$ , то  $N = \frac{\varphi}{2\pi}$ .

Кут повороту тіла при рівноприскореному обертанні дорівнює:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

Оскільки  $\varphi_0 = 0$  і  $\omega_0 = 0$ , то  $\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2}$ .

Таким чином:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi}.$$

Для визначення кутового прискорення  $\varepsilon$  скористаємося формулою для кутової швидкості при рівноприскореному обертанні тіла:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Оскільки  $\omega_0 = 0$ , то  $\varepsilon = \frac{\omega}{t}$ .

З іншого боку, через число обертів за хвилину

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi n}{30t}.$$

Якщо підставити  $\varepsilon$  в формулу для  $N$ , отримаємо:

$$N = \frac{\varepsilon t^2}{4\pi} = \frac{\pi n t^2}{30t \cdot 4\pi} = \frac{nt}{120}.$$

При  $n = 120$  об/хв і  $t = 600$  с, знайдемо:

$$N = \frac{120 \cdot 600}{120} = 600 \text{ об}.$$

**Відповідь:**  $N = 600$  об.

### Задача №3

Колесо радіусом  $R = 0,2$  м починає обертатися із стану спокою зі сталим прискоренням. Через  $t = 10$  с від початку руху точка, що лежить на ободі колеса, має лінійну швидкість  $V = 10$  м/с.

**Визначити** швидкість, нормальне і дотичне прискорення точок обода колеса в момент часу  $t_1 = 15$  с від початку руху.

**Розв'язок.** Для визначення  $V_1$ ,  $a_{n_1}$  і  $a_{\tau_1}$  скористаємося залежностями обертового руху:

$$V_1 = \omega_1 R; \quad a_{n_1} = \omega_1^2 R; \quad a_{\tau_1} = \varepsilon R.$$

Таким чином, для визначення  $V_1$ ,  $a_{n_1}$  і  $a_{\tau_1}$  треба знайти кутову швидкість і кутове прискорення колеса в момент часу  $t_1 = 15$  с.

Визначимо кутову швидкість в момент часу  $t = 10 \text{ с}$ . Оскільки при  $t = 10 \text{ с}$  швидкість точки обода колеса  $V = 10 \text{ м/с}$ , то:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ рад/с}.$$

При рівноприскореному обертанні тіла ( $\varepsilon = \text{const}$ ) кутова швидкість змінюється за законом:  $\omega = \omega_0 + \varepsilon t$ .

Оскільки  $\omega_0 = 0$ , то

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{50}{10} = 5 \text{ рад/с}^2.$$

В момент часу  $t_1 = 15 \text{ с}$  кутова швидкість тіла відповідно буде дорівнювати:

$$\omega_1 = \varepsilon t_1 = 5 \cdot 15 = 75 \text{ рад/с}.$$

Тоді:

$$V_1 = \omega_1 R = 75 \cdot 0,2 = 15 \text{ м/с};$$

$$a_{n_1} = \omega_1^2 R = 75^2 \cdot 0,2 = 1125 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{\tau_1} = \varepsilon R = 5 \cdot 0,2 = 1 \text{ м/с}^2.$$

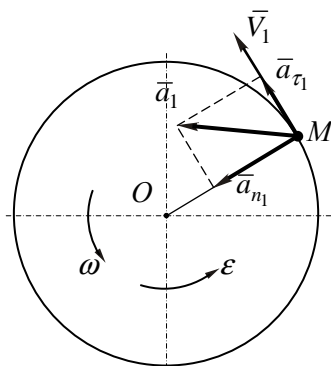


Рис. 2.5

На рис. 2.5. показані напрями визначених векторів.

Оскільки  $\omega > 0$  і  $\varepsilon > 0$ , то напрями  $\vec{V}_1$  і  $\vec{a}_{\tau_1}$  збігаються. Нормальне ж прискорення  $\vec{a}_{n_1}$  направлене до центра обертання шківa.

**Відповідь:**  $V_1 = 15 \text{ м/с}$ ;

$a_{n_1} = 1125 \text{ м/с}^2$ ;  $a_{\tau_1} = 1 \text{ м/с}^2$ .

## Задача №4

Обертальний рух вала радіусом  $R = 0,1$  м викликається вантажем  $P$ , що підвішений до нитки, яка намотана на вал (рис.2.6). Вантаж  $P$  рухається вертикально за законом  $x = t^2$ , де  $x$  - відстань від тіла до точки збігу нитки з поверхні вала в метрах,  $t$  - час в секундах.

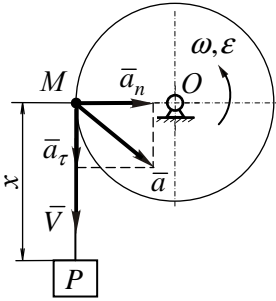


Рис. 2.6

**Визначити** кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  вала та повне прискорення  $\bar{a}$  точки на поверхні вала в довільний момент часу  $t$ .

**Розв'язок.** Величина швидкості  $\bar{V}$  точки  $M$  обода вала дорівнює швидкості нитки, що змотується з поверхні вала при опусканні вантажу  $P$ , а також швидкості вантажу  $P$ . Швидкість же вантажу  $P$  визначимо шляхом диференціювання його закону руху:

$$V = V_P = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$$

Дотичне прискорення  $\bar{a}_\tau$  точки  $M$  дорівнює прискоренню вантажу  $P$ , оскільки з цим прискоренням збігає нитка з поверхні вала:

$$a_\tau = a_P = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(2t) = 2 \text{ м/с}^2.$$

За відомими лінійною швидкістю і дотичним прискоренням точки  $M$  поверхні вала можна визначити кутову швидкість  $\omega$  і кутове прискорення  $\varepsilon$  вала :

$$V = \omega \cdot R \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{V}{R} = \frac{2t}{0,1} = 20t;$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{a_\tau}{R} = \frac{2}{0,1} = 20 \text{ рад/с}^2.$$

Тоді, нормальне прискорення точки  $M$  буде дорівнювати:

$$a_n = \omega^2 R = (20t)^2 \cdot 0,1 = 40t^2 .$$

Для повного прискорення точки  $M$ , що лежить на поверхні вала, отримаємо:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{(2)^2 + (40t^2)^2} = 2\sqrt{1 + 400t^4} .$$

**Відповідь:**  $\omega = 20t$ ;  $\varepsilon = 20 \text{ рад/с}^2$ ;  $a = 2\sqrt{1 + 400t^4}$ .

### Задача №5

Передача складається з трьох шківів: 1, 2 і 3 (рис.2.7). Передача обертального руху від першого шківів на другий відбувається за рахунок сил тертя в точці  $A$  дотику шківів. Причому, обертання відбувається без проковзування одного шківів відносно другого. Другий і третій шківів жорстко насажені на один вал (вісь вала  $O_2$ ). Кут повороту першого шківів змінюється за законом:

$\varphi = t^2 - 10t$ .

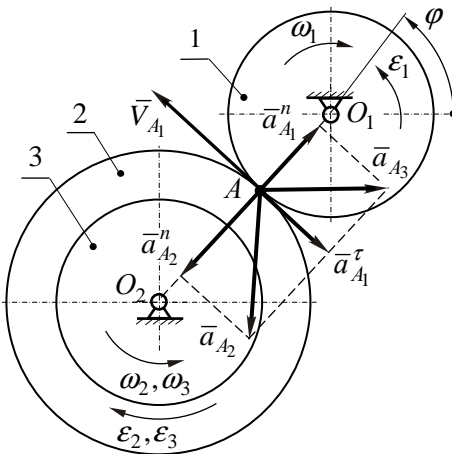


Рис. 2.7.

**Визначити** кутові швидкості і кутові прискорення шківів передачі та швидкості і прискорення точок дотикування шківів в момент часу  $t = 3 \text{ с}$ , якщо радіуси шківів:

$$r_1 = r_3 = 0,2 \text{ м}; r_2 = 0,4 \text{ м} .$$

**Розв'язок.** Визначимо кутову швидкість і кутове прискорення шківів 1:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 10t) = 2t - 10 ;$$



$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 10) = 2 \text{ рад}/c^2.$$

В момент часу  $t = 3 \text{ c}$ :

$$\omega_1 = 2 \cdot 3 - 10 = -4 \text{ рад}/c; \quad \varepsilon_1 = 2 \text{ рад}/c^2.$$

Знак мінус при значенні  $\omega_1$  вказує на те, що напрям кутової швидкості в момент часу  $t = 3 \text{ c}$  в протилежний бік від додатного напрямку відліку кута  $\varphi$ . Оскільки знаки  $\omega_1$  і  $\varepsilon_1$  різні, то кутове прискорення спрямоване в протилежний бік від кутової швидкості.

На рис. 2.7 додатний напрям відліку кута  $\varphi$  обрано проти ходу годинникової стрілки. Тоді напрям  $\omega_1$  буде за ходом годинникової стрілки, а  $\varepsilon_1$  проти ходу годинникової стрілки. За модулем же  $\omega_1$  і  $\varepsilon_1$  відповідно дорівнюють:  $\omega_1 = 4 \text{ рад}/c$ ;  $\varepsilon_1 = 2 \text{ рад}/c^2$ .

Швидкість та прискорення точки  $A$  дотику першого шківа визначимо за формулами:

$$V_{A_1} = \omega_1 r_1 = 4 \cdot 0,2 = 0,8 \text{ м}/c;$$

$$a_{A_1}^{\tau} = \varepsilon_1 r_1 = 2 \cdot 0,2 = 0,4 \text{ м}/c^2;$$

$$a_{A_1}^n = \omega_1^2 r_1 = 0,2 \cdot 4^2 = 3,2 \text{ м}/c^2.$$

Швидкість  $\vec{V}_{A_1}$  направлена (рис. 3.7) перпендикулярно до радіуса  $AO_1$  за напрямом кутової швидкості  $\omega_1$ . Дотичне прискорення  $\vec{a}_{A_1}^{\tau}$  направлене теж перпендикулярно до  $AO_1$ , але за напрямом  $\varepsilon_1$ . Нормальне прискорення  $\vec{a}_{A_1}^n$  направлене вздовж радіуса  $AO_1$  до центра обертання  $O_1$ .

Оскільки шківів 1 та 2 обертаються без проковзування в точці дотику, то швидкість і дотичне прискорення точки  $A$  другого шківа будуть дорівнювати швидкості і дотичному прискоренню точки  $A$  першого шківа, тобто:

$$\bar{V}_{A_1} = \bar{V}_{A_2}; \quad \bar{a}_{A_1}^\tau = \bar{a}_{A_2}^\tau.$$

Тоді:

$$\omega_2 = \frac{V_{A_2}}{r_2} = \frac{V_{A_1}}{r_2} = \frac{0,8}{0,4} = 2 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{A_2}^\tau}{r_2} = \frac{a_{A_1}^\tau}{r_2} = \frac{0,4}{0,4} = 1 \text{ рад/с}^2.$$

Обчислимо нормальне прискорення точки  $A$  другого шківа:

$$a_{A_2}^n = \omega_2^2 r_2 = 2^2 \cdot 0,4 = 1,6 \text{ м/с}^2.$$

Спрямоване нормальне прискорення точки  $A$  другого шківа вздовж радіуса  $AO_2$  до центра обертання  $O_2$ .

Напрямок кутової швидкості другого шківа визначається напрямом швидкості точки  $A$ , тобто буде проти ходу годинникової стрілки. Напрямок же кутового прискорення визначається напрямом дотичного прискорення, тобто буде за ходом годинникової стрілки.

Повні прискорення точок дотику шківів:

$$a_{A_1} = \sqrt{a_{A_1}^{\tau 2} + a_{A_1}^{n 2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (3,2)^2} = 3,225 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{A_2} = \sqrt{a_{A_2}^{\tau 2} + a_{A_2}^{n 2}} = \sqrt{(0,4)^2 + (1,6)^2} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки шківи 2 та 3 жорстко насажені на один вал, то їх кутові швидкості і кутові прискорення будуть однаковими, тобто:

$$\omega_3 = \omega_2 = 2 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 1 \text{ рад/с}^2.$$

**Відповідь:**  $\omega_1 = 4 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_2 = \omega_3 = 2 \text{ рад/с}$ ;  $V_A = 0,8 \text{ м/с}$ ;

$$a_{A_1} = 3,225 \text{ м/с}^2; \quad a_{A_2} = 1,65 \text{ м/с}^2.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 13.11; 13.16; 13.19 [2]

## Тема 3. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

### Заняття № 4

#### Зміст

- 3.1. Відносний, переносний і абсолютний рух точки.
- 3.2. Відносні, переносні та абсолютні швидкості і прискорення.
- 3.3. Додавання швидкостей та прискорень при складному русі точки.
- 3.4. Прискорення Коріоліса.
- 3.5. Контрольні запитання.
- 3.6. Приклади розв'язування задач.

#### 3.1. Відносний, переносний і абсолютний рух точки

При дослідженні руху точки обирають деяку систему відліку (теми 1 і 2), відносно якої розглядають рух точки.

В деяких випадках доводиться розглядати рух точки відносно двох різних систем відліку. Наприклад, рух пасажира в потязі можна розглядати як по відношенню до потяга, так і по відношенню до Землі.

При цьому рух однієї і тієї ж точки відносно двох різних систем відліку буде різним. Наприклад, точка ободу колеса залізничного вагона, що рухається, відносно Землі пише циклоїду, а відносно вагона – коло.

При розгляді руху точки по відношенню до двох систем відліку та система, яка в даній задачі умовно прийнята за нерухому, називається *основною системою відліку (нерухомою)*, а система, яка рухається відносно основної, називається *рухомою системою відліку*.

Рух точки відносно основної системи відліку називається *абсолютним рухом*, а її рух відносно рухомої системи відліку – *відносним рухом*.

Рух точки відносно основної системи відліку називається **абсолютним рухом**, а її рух відносно рухомої системи відліку – **відносним рухом**.

Нехай є дві системи координат  $Oxyz$  і  $O'x'y'z'$  та деяка рухома точка  $M$  (рис.3.1).

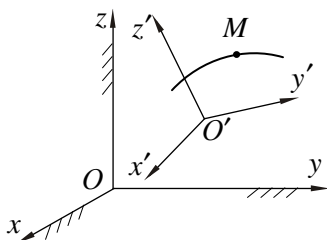


Рис. 3.1

Оберемо систему координат  $Oxyz$  за основну. Тоді рух системи  $O'x'y'z'$  відносно системи  $Oxyz$  буде **переносним**. Рух точки  $M$  відносно системи  $O'x'y'z'$  буде **відносним**, а рух точки  $M$  відносно системи  $Oxyz$  буде **абсолютним**.

Треба зауважити, що переносним рухом є рух не самої точки  $M$ , а того тіла, з яким пов'язана рухома система координат  $O'x'y'z'$ , тоді як відносний і абсолютний рух є рухом самої точки  $M$ , який розглядається відповідно відносно рухомої і основної систем відліку. В переносному русі рухома система координат може мати будь-який вид руху.

Основна задача цього розділу полягає в тому, щоб за відомими відносним і переносним рухами визначити абсолютний рух точки (рух точки  $M$  відносно системи відліку  $Oxyz$ ).

Вибір основної та рухомої систем відліку, а відповідно, і поділ руху точки на абсолютний та відносний залежить від постановки конкретної задачі. У більшості випадків за основну систему відліку приймають систему, яку пов'язано з Землею.

### 3.2. Відносні, переносні і абсолютні швидкості та прискорення

**Відносною швидкістю**  $\vec{V}_{\text{від}}$  точки називається її швидкість у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

**Абсолютною швидкістю**  $\bar{V}_{абс}$  **точки** називається її швидкість в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

**Переносною швидкістю**  $\bar{V}_{пер}$  називається швидкість відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Аналогічно введемо поняття **відносного, абсолютного та переносного прискорення точки**.

**Відносним прискоренням**  $\bar{a}_{від}$  **точки** називається її прискорення у відносному русі, тобто по відношенню до рухомої системи відліку.

**Абсолютним прискоренням**  $\bar{a}_{абс}$  **точки** називається її прискорення в абсолютному русі, тобто по відношенню до основної системи відліку.

**Переносним прискоренням**  $\bar{a}_{пер}$  називається прискорення відносно основної системи відліку тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Звернемо увагу на те, що переносний рух – це рух усієї рухомої системи відліку, тобто деякого тіла, з яким пов'язана рухома система координат, а переносна швидкість і переносне прискорення – це швидкість і прискорення конкретної точки цього тіла.

### 3.3. Додавання швидкостей та прискорень при складному русі точки

Залежність між абсолютною, переносною та відносною швидкостями точки визначається **теоремою додавання швидкостей**, згідно якій абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі переносної та відносної швидкостей:

$$\bar{V}_{abc} = \bar{V}_{від} + \bar{V}_{пер}, \quad (3.1)$$

де  $\bar{V}_{abc}$  – абсолютна швидкість точки;  
 $\bar{V}_{від}$  – відносна швидкість точки;  
 $\bar{V}_{пер}$  – переносна швидкість.

Для визначення відносної швидкості точки достатньо подумки зупинити переносний рух і знайти за правилами кінематики швидкість точки відносно системи відліку, яка була рухомою.

Для визначення переносної швидкості – достатньо подумки зупинити відносний рух і знайти переносну швидкість як швидкість тієї точки рухомої системи відліку, з якою в даний момент часу збігається точка, що рухається.

Залежність між абсолютним, відносним і переносним прискоренням точки при **поступальному русі** рухомої системи відліку виражається векторним рівнянням:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер}, \quad (3.2)$$

де  $\bar{a}_{abc}$  – абсолютне прискорення точки;  
 $\bar{a}_{від}$  – відносне прискорення точки;  
 $\bar{a}_{пер}$  – переносне прискорення точки.

Якщо переносним рухом є **обертальний**, або складний, то теорема про додавання прискорень набуває вигляду:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_K, \quad (3.3)$$

де  $\bar{a}_K$  – прискорення Коріоліса (поворотне прискорення точки).

### 3.4. Прискорення Коріоліса

Вектор коріолісового прискорення визначається як подвійний векторний добуток кутової швидкості  $\bar{\omega}$  переносного обертання на відносну швидкість  $\bar{V}_{від}$  точки:

$$\bar{a}_K = 2 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{від}}). \quad (3.4)$$

Модуль коріолісового прискорення дорівнює:

$$a_K = 2 \cdot \omega \cdot V_{\text{від}} \cdot \sin(\hat{\bar{\omega}, \bar{V}_{\text{від}}}),$$

де  $\hat{\bar{\omega}, \bar{V}_{\text{від}}}$  – кут між векторами  $\bar{\omega}$  і  $\bar{V}_{\text{від}}$ .

**Прискорення Коріоліса характеризує:**

- зміну модуля і напрямку переносної швидкості точки внаслідок її відносного руху;
- зміну напрямку відносної швидкості точки внаслідок обертального переносного руху.

Прискорення Коріоліса дорівнює нулю в трьох випадках:

- якщо  $\omega = 0$ , тобто у випадку поступального переносного руху або в момент, коли кутова швидкість не поступального переносного руху набуває значення нуля;
- якщо  $V_{\text{від}} = 0$ , тобто у випадку, коли точка знаходиться в стані спокою по відношенню до рухомої системи відліку;
- якщо  $\sin(\hat{\bar{\omega}, \bar{V}_{\text{від}}}) = 0$ , тобто у випадку, коли відносна швидкість точки паралельна осі переносного обертання.

Напрямок прискорення Коріоліса визначається як напрям вектора векторного добутку  $(\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{від}})$ .

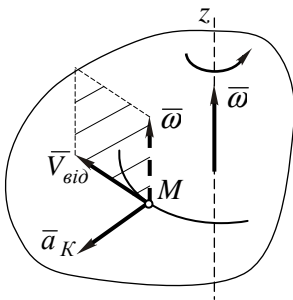


Рис. 3.2

Нехай точка  $M$  (рис.3.2) рухається з швидкістю  $\bar{V}_{\text{від}}$  відносно тіла, яке обертається навколо осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\bar{\omega}$ . Якщо побудувати в точці  $M$  крім  $\bar{V}_{\text{від}}$  вектор  $\bar{\omega}$ , то вектор векторного добутку  $(\bar{\omega} \times \bar{V}_{\text{від}})$ , тобто вектор коріолісового прискорення  $\bar{a}_K$ , буде напра-

влений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}_{від}$  в той бік, звідки поворот вектора  $\vec{\omega}$  до вектора відносної швидкості  $\vec{V}_{від}$  на найменший кут видно проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення напрямку коріолісового прискорення зручно користуватися **правилом Жуковського**: щоб знайти напрям коріолісового прискорення треба спроектувати відносно швидкість точки  $\vec{V}_{від}$  на площину, що перпендикулярна до осі переносного обертання, і повернути в цій площині отриману проекцію на  $90^\circ$  в бік переносного обертання (рис.3.3).

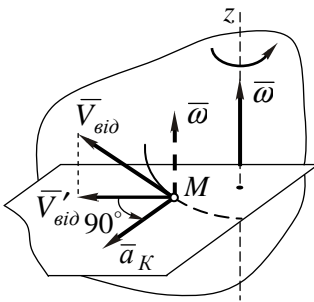


Рис. 3.3

Дійсно, отриманий напрям  $\vec{a}_K$  (рис.3.3) перпендикулярний до площини трикутника, який утворений відносною швидкістю  $\vec{V}_{від}$  і її проекцією  $\vec{V}'_{від}$ , а ця площина збігається з площиною векторів  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}_{від}$ , до якої повинен бути перпендикулярним вектор коріолісового прискорення.

Якщо вектор  $\vec{\omega}$  перпендикулярний до  $\vec{V}_{від}$ , тобто  $\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{від} = 90^\circ$  і відповідно  $\sin(\vec{\omega}, \vec{V}_{від}) = 1$ , то величина коріолісового прискорення буде дорівнювати:

$$a_K = 2\omega V_{від}. \quad (3.5)$$

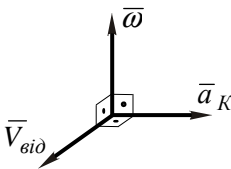


Рис. 3.4

Такий випадок можливий, якщо відносний рух точки відбувається в площині перпендикулярній до осі переносного обертання. В цьому випадку вектори  $\vec{V}_{від}$ ,  $\vec{\omega}$  і  $\vec{a}_K$  взаємно перпендикулярні (рис. 3.4).



Розглянемо два приклади визначення модуля і напрямку коріолісового прискорення.

**Приклад 1.** Диск обертається навколо осі, яка перпендикулярна до його площини, проти ходу годинникової стрілки з кутовою швидкістю  $\omega = 20 \text{ p/c}$ . По хорді диска від точки  $K$  до  $L$  рухається точка  $M$ .

**Визначити** модуль і напрямку коріолісового прискорення точки  $M$  в зображеному на рис. 3.5 положенні, якщо відносна швидкість  $V_{\text{від}} = 5 \text{ м/с}$ .

Точка  $M$  рухається в площині диска яка перпендикулярна до осі обертання, тобто кут між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}_{\text{від}}$  складає  $90^\circ$ . Враховуючи, що  $\sin(\vec{\omega}, \vec{V}_{\text{від}}) = 1$ , модуль прискорення Коріоліса дорівнює:

$$a_K = 2\omega \cdot V_{\text{від}} = 2 \cdot 20 \cdot 5 = 200 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки вектор відносної швидкості лежить в площині перпендикулярній до осі обертання, то для визначення напрямку прискорення Коріоліса згідно правила Жуковського треба повернути вектор  $\vec{V}_{\text{від}}$  за напрямком кутової швидкості  $\omega$  переносного руху на кут  $90^\circ$  (рис.3.5).

**Приклад 2.** Визначити модуль і напрямку коріолісового прискорення точки  $M$ , яка рухається по твірній  $BN$  кругового конуса від вершини  $B$  до точки  $N$ . Конус обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю  $\omega = 10 \text{ p/c}$  в напрямі, показано-

му на рис.3.6, кут нахилу твірної до осі конуса  $\angle ABN = \alpha = 30^\circ$ , відносна швидкість точки  $V_{\text{від}} = 5 \text{ м/с}$ .

Відкладемо вектор кутової швидкості  $\vec{\omega}$  переносного обертального руху по осі обертання в бік, з якого обертання видно проти ходу годинникової стрілки. Відносну швидкість  $\vec{V}_{\text{від}}$  спрямуємо від точки

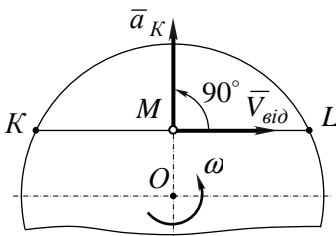


Рис. 3.5

$M$  до точки  $N$ . Тоді кут між векторами  $\vec{\omega}$  і  $\vec{V}_{від}$  (рис.3.6) складе:

$$(\vec{\omega}, \vec{V}_{від}) = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Модуль прискорення Коріоліса точки  $M$  дорівнює:

$$\begin{aligned} a_K &= 2\omega \cdot V_{від} \cdot \sin(\vec{\omega}, \vec{V}_{від}) = 2\omega \cdot V_{від} \cdot \sin(180 - \alpha) = \\ &= 2\omega \cdot V_{від} \cdot \sin \alpha = 2 \cdot 10 \cdot 5 \cdot \sin 30^\circ = 50 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

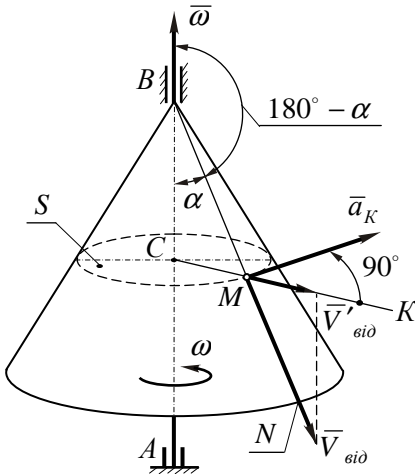


Рис. 3.6

Щоб знайти напрям прискорення Коріоліса (рис.3.6), спроектуємо вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{від}$  на площину  $S$ , яка перпендикулярна до осі обертання конуса.

Проекція відносної швидкості  $\vec{V}'_{від}$  направлена по прямій  $MK$ , яка є продовженням радіуса  $CM$ .

Якщо повернути проекцію  $\vec{V}'_{від}$  в напрямі обертання конуса на кут  $90^\circ$ , встановлюємо, що вектор  $\vec{a}_K$  коріолісового прискорення направлений за дотичною до кола радіусом  $CM$  в бік обертання конуса.

### 3.5. Контрольні запитання

1. Що називається відносним і абсолютним рухом точки?
2. Що називається переносним рухом?
3. Які швидкості точки називаються відотною і абсолютною?

4. Як визначити абсолютну швидкість точки при складному русі?
5. Як визначити абсолютне прискорення точки при складному русі?
6. Яка причина виникнення коріолісового прискорення?
7. Як знайти модуль і напрям коріолісового прискорення?
8. В яких випадках коріолісове прискорення точки дорівнює нулю?

### 3.6. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

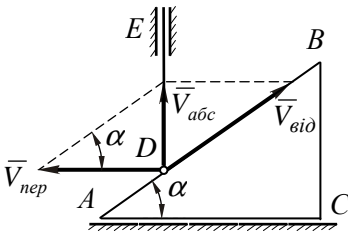


Рис. 3.7

Клин  $ABC$  (рис.3.7) з кутом нахилу робочої поверхні  $\alpha$ , який рухається поступально по горизонтальній поверхні з швидкістю  $\bar{u}$ , піднімає стержень  $DE$ , який рухається в вертикальному напрямі.

*Знайти* абсолютну швидкість стержня  $DE$ .

**Розв'язок.** Враховуючи, що стержень  $DE$  у вертикальному напрямі буде рухатися прямолінійно поступально, то достатньо визначити швидкість будь якої його точки.

Розглянемо рух точки  $D$  стержня.

Оскільки точка  $D$  стержня повинна увесь час торкатися клина  $ABC$ , то розглянемо її рух як складний - відносним буде рух точки  $D$  по відношенню до клина, а переносним - рух точки  $D$  разом з клином.

По відношенню до клина точка  $D$  стержня може рухатися тільки вздовж робочої поверхні  $AB$ . Таким чином, відносна швидкість  $\bar{V}_{від}$  буде напрямлена вздовж  $AB$ .

Клин  $ABC$  рухається поступально горизонтальною поверхнею, тобто швидкості всіх його точок однакові. Таким чином,

переносна швидкість  $\vec{V}_{nep}$  точки  $D$  стержня, яка збігається з точкою  $D$  клина, буде дорівнювати  $\vec{u}$ .

Абсолютну швидкість точки  $D$  стержня визначимо з векторного рівняння:

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{vid} + \vec{V}_{nep} \quad (1)$$

Для розв'язання векторного рівняння (1) побудуємо паралелограм на векторах  $\vec{V}_{nep}$  і  $\vec{V}_{vid}$  (рис.3.7). При побудові треба врахувати, що  $\vec{V}_{abc}$ , як діагональ паралелограма, повинна бути направлена вертикально.

Оскільки кут між векторами  $\vec{V}_{nep}$  і  $\vec{V}_{abc}$  прямий, то отримаємо:

$$V_{abc} = V_{nep} \cdot \operatorname{tg} \alpha = u \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

**Відповідь:**  $V_{abc} = u \cdot \operatorname{tg} \alpha$ .

### Задача № 2

Круг радіусом  $r$  (рис.3.8) рівномірно обертається в своїй площині навколо центра  $O$  за ходом годинникової стрілки і робить  $n_1$  обертів за хвилину. По кругу рівномірно в протилежному напрямі рухається точка  $M$  і робить  $n_2$  обертів за хвилину.

**Знайти** абсолютне прискорення точки  $M$ .

**Розв'язок.** Рух точки  $M$  розглянемо як складний. Переносним рухом буде обертання круга разом з точкою  $M$  навколо центра  $O$ , а відносним – рух точки  $M$  по кругу.

Абсолютне прискорення точки  $M$ , враховуючи, що переносним буде обертальний рух, дорівнює:

$$\vec{a}_{abc} = \vec{a}_{vid} + \vec{a}_{nep} + \vec{a}_K.$$

Оскільки переносний рух обертальний, то переносне прискорення

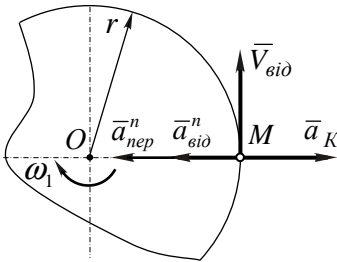


Рис. 3.8

рення точки круга, з якою збігається точка  $M$ , буде мати нормальну  $\bar{a}_{пер}^n$  і тангенціальну  $\bar{a}_{пер}^τ$  складову.

Враховуючи, що при рівномірному обертанні кутове прискорення  $\varepsilon = 0$ , тангенціальна складова переносного прискорення

$$a_{пер}^τ = \varepsilon \cdot r = 0.$$

Величина переносного нормального прискорення  $a_{пер}^n$  визначимо з формули:

$$a_{пер}^n = \omega_1^2 r,$$

де  $\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30}$  – кутова швидкість круга.

Направлене це прискорення вздовж радіуса від точки  $M$  до точки  $O$  (рис.3.8).

Враховуючи те, що точка  $M$  по кругу радіуса  $r$  рухається рівномірно, модуль відносного прискорення буде мати теж тільки одну нормальну складову  $a_{від}^n$ :

$$a_{від}^n = \omega_2^2 \cdot r,$$

де  $\omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}$  – кутова швидкість обертання точки  $M$  по кругу.

Направлене це прискорення від точки  $M$  до точки  $O$  (рис.3.8).

Оскільки точка  $M$  рухається в площині, перпендикулярній до осі обертання, то прискорення Коріоліса визначається за формулою:

$$a_K = 2\omega_1 \cdot V_{від}.$$

Враховуючи, що  $V_{від} = \omega_2 \cdot r$ , дістанемо:

$$a_K = 2\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot r.$$

Для визначення напрямку коріолісового прискорення повернемо вектор відносної швидкості  $\bar{V}_{від}$ , який направлений за

дотичною до круга, в напрямі переносної кутової  $\omega_1$  на  $90^\circ$  (рис.3.8). Таким чином, це прискорення спрямоване вздовж радіуса від центра обертання  $O$ .

Оскільки всі прискорення направлені вздовж однієї прямої, то їх можна додати алгебраїчно:

$$a_{a\bar{b}c} = a_{nep}^n + a_{вид}^n - a_K,$$

або з урахуванням виразів для  $a_{nep}^n$ ,  $a_{вид}^n$  та  $a_K$ :

$$a_{a\bar{b}c} = \omega_1^2 r + \omega_2^2 r - 2\omega_1\omega_2 r = r(\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 + \omega_2^2) = r(\omega_1 - \omega_2)^2.$$

Підставивши залежності для кутових швидкостей  $\omega_1$  і  $\omega_2$ , отримаємо:

$$a_{a\bar{b}c} = r \left( \frac{\pi n_1}{30} - \frac{\pi n_2}{30} \right)^2 = \frac{\pi^2}{900} r (n_1 - n_2)^2.$$

**Відповідь:**  $a_{a\bar{b}c} = \frac{\pi^2}{900} r (n_1 - n_2)^2.$

### Задача №3

По хорді  $AB$  диска, що обертається, від точки  $A$  до точки  $B$  рухається точка  $M$ , згідно рівнянню  $S = 4t^2$ , кут повороту диска змінюється за законом  $\varphi = 8t$ .

**Визначити** абсолютні швидкості та прискорення точки  $M$  в момент часу, коли вона знаходиться на відстані  $h = 0,2$  м від осі обертання диска (рис.3.9).

**Розв'язок.** У даній задачі переносним рухом буде обертання диска за законом  $\varphi = 8t$ , а відносним – рух точки по хорді  $AB$  за законом  $S = 4t^2$ .

Запишемо рівняння для визначення абсолютної швидкості точки  $M$ :

$$\vec{V}_{abc} = \vec{V}_{vid} + \vec{V}_{nep}.$$

Для визначення відносної швидкості зупинимо переносне обертання диска і будемо розглядати рух точки по відношенню до нерухомого диска. Оскільки закон відносного руху  $S = 4t^2$ , то величина відносної швидкості визначається як перша похідна від шляху за часом:

$$V_{vid} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(4t^2) = 8t.$$

Вектор відносної швидкості направлений по хорді  $AB$  (рис. 3.9) від точки  $A$  до точки  $B$ .

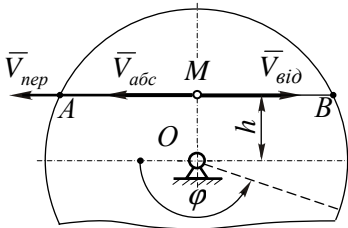


Рис. 3.9

Переносною швидкістю  $\vec{V}_{nep}$  точки  $M$  буде швидкість тієї точки диска, з якою в даний момент збігається точка  $M$ .

З умови задачі витікає, що точка  $M$  в даний момент часу знаходиться посередині хорди  $AB$  на відстані  $h$  від осі обертання диска.

Переносна швидкість обертального руху визначається за формулою:

$$V_{nep} = \omega \cdot h,$$

де  $\omega$  – кутова швидкість переносного обертального руху.

Кутову швидкість переносного обертального руху знайдемо як першу похідну від кута повороту  $\varphi$  за часом:

$$\omega_{nep} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ рад/с.}$$

Таким чином, переносна швидкість обертального руху дорівнює:

$$V_{nep} = 8 \cdot 0,2 = 1,6 \text{ м/с.}$$

Вектор переносної швидкості направлений перпендикулярно радіусу  $OM$  в бік обертання диска.

Оскільки вектори  $\vec{V}_{від}$  і  $\vec{V}_{пер}$  направлені вздовж однієї прямої в різні боки (рис. 3.9), то для визначення абсолютної швидкості від операції векторного додавання швидкостей можна перейти до їх алгебраїчного додавання.

Тоді:

$$V_{абс} = V_{пер} - V_{від} = 1,6 - 8t.$$

В залежності від абсолютних значень швидкостей  $\vec{V}_{пер}$  і  $\vec{V}_{від}$ , вектор  $\vec{V}_{абс}$  буде направлений або в бік  $\vec{V}_{пер}$ , або в бік  $\vec{V}_{від}$ .

Визначимо абсолютне прискорення точки  $M$ . Оскільки переносний рух є обертальним, то абсолютне прискорення точки дорівнює:

$$\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{омн} + \vec{a}_{від} + \vec{a}_K.$$

Модуль відносного прискорення визначимо як похідну від відносної швидкості за часом:

$$a_{від} = \frac{dV_{від}}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ м/с}^2.$$

Спрямований вектор  $\vec{a}_{від}$  вздовж хорди  $AB$  від точки  $A$  до точки  $B$  (рис.3.10).

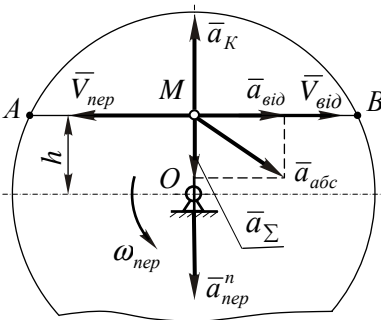


Рис. 3.10

Переносне прискорення  $\vec{a}_{пер}$  точки диска, яка збігається з точкою  $M$ , враховуючи, що вона рухається по колу радіусом  $h$ , складатиметься із переносного тангенціального (дотичного) прискорення  $\vec{a}_{пер}^{\tau}$  і переносного нормального прискорення  $\vec{a}_{пер}^n$ :



$$\bar{a}_{nep} = \bar{a}_{nep}^{\tau} + \bar{a}_{nep}^n.$$

Обчислимо модулі нормального  $\bar{a}_{nep}^n$  і тангенціального  $\bar{a}_{nep}^{\tau}$  прискорень:

$$a_{nep}^n = \omega^2 \cdot h = 8^2 \cdot 0,2 = 12,8 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{nep}^{\tau} = \varepsilon \cdot h = 0,$$

де  $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}(8) = 0$  – кутове прискорення переносного обертального руху.

Переносне нормальне прискорення направлено вздовж радіуса до центра обертання  $O$  (рис.3.10).

Оскільки рух точки  $M$  відбувається в площині, перпендикулярній до осі обертання, то прискорення Кориоліса визначається з формули:

$$a_K = 2\omega_{nep} \cdot V_{vid} = 2 \cdot 8 \cdot 8t = 128t.$$

Для визначення напрямку прискорення Кориоліса (рис.3.10) необхідно вектор відносної швидкості  $\bar{V}_{vid}$  повернути на  $90^\circ$  в бік кутової швидкості  $\omega_{nep}$  переносного обертального руху, тобто проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення величини і напрямку абсолютного прискорення  $\bar{a}_{abc}$  спочатку додамо вектори  $\bar{a}_{nep}^n$  і  $\bar{a}_K$ , які направлені вздовж однієї прямої в протилежні боки. Знайдена векторна сума  $\bar{a}_\Sigma = \bar{a}_{nep}^n + \bar{a}_K$  направлена перпендикулярно до вектора  $\bar{a}_{vid}$  і за модулем дорівнює  $a_\Sigma = 12,8 - 128t$ .

Таким чином, абсолютне прискорення точки  $M$  дорівнює сумі векторів:

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_\Sigma + \bar{a}_{vid}.$$

Оскільки вектор  $\vec{a}_{від}$  перпендикулярний до вектора  $\vec{a}_\Sigma$ , то вектор  $\vec{a}_{abc}$  буде зображатися діагоналлю прямокутника з сторонами  $\vec{a}_{від}$  і  $\vec{a}_\Sigma$  (рис.3.10).

Модуль абсолютного прискорення буде дорівнювати:

$$a_{abc} = \sqrt{a_{від}^2 + a_\Sigma^2} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}.$$

**Відповідь:**  $V_{abc} = 1,6 - 8t$ ;  $a_{abc} = \sqrt{64 + (12,8 - 128t)^2}$ .

#### Задача №4

До складу механізму Вітворта (рис.3.11) входить: кривошип 1, повзун 2 і куліса 3. Кривошип  $OB = 0,2$  м механізму обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega_1 = 10$  рад/с.

**Визначити** швидкість і прискорення точки  $B$  та кутову швидкість і кутове прискорення куліси 3 механізму в положенні,

коли:  $\alpha = 90^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ .

**Розв'язок.** Особливість цього механізму полягає в тому, що в точці

$B$  між собою з'єднуються кривошип 1, повзун 2 і куліса 3 (рис.3.12).

Кривошип 1 і повзун 2 між собою з'єднані циліндричним шарніром, що дозволяє повзуну відносно кривошипа повертатися, а на кулісі 3 паралельно її осі зроблені напрямні, по яким повзун 2 може рухатися поступально.

При повороті кривошипа 1 повзун 2 ковзає по кулісі 3 і примушує її повертатися навколо точки  $O_1$ . Відстань від точки  $O_1$  до точки  $B$  на кулісі 3 з поворотом кривошипа 1 змінюється.

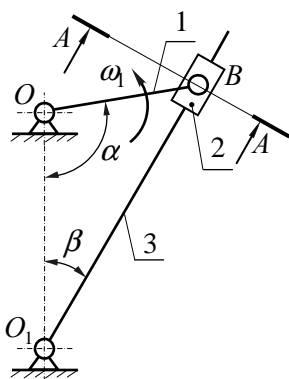


Рис. 3.11

Такий механізм дозволяє перетворити обертальний рух кривошипа в коливальний рух куліси, якщо  $OO_1 > O_1B$ , або в обертальний, з іншим законом зміни кутової швидкості ніж у кривошипа, рух куліси, якщо  $OO_1 < O_1B$ .

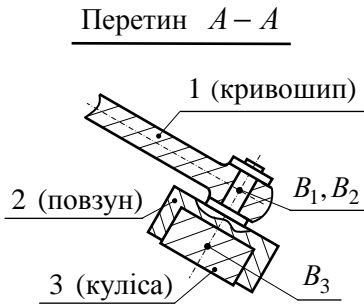


Рис. 3.12

Таким чином, в точці  $B$  механізму (рис.3.12) будемо розглядати три різні точки:  $B_1$ , що належить кривошипу 1;  $B_2$  — повзуну 2 та  $B_3$  — кулісі 3. Усі ці точки лежать одна під другою на рис.3.11.

Перед розв'язуванням задачі в довільному масштабі побудуємо схему механізму (рис.3.13,а) для заданого положення кривошипа.

Першою визначимо швидкість точки  $B_1$ , що належить кривошипу 1, який обертається навколо точки  $O$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ :

$$V_{B_1} = \omega_1 \cdot (OB) = 10 \cdot 0,2 = 2 \text{ м/с}.$$

Направлена швидкість  $\vec{V}_{B_1}$  перпендикулярно до  $OB$  в бік обертання кривошипа 1 (рис.3.13,а).

Швидкість точки  $B_2$ , що належить повзуну 2, який з'єднаний з кривошипом 1 шарніром, дорівнює швидкості точки  $B_1$ :

$$\vec{V}_{B_2} = \vec{V}_{B_1}.$$

Для визначення швидкості точки  $B_3$  куліси 3, приймемо рух повзуна 2 за переносний. Тоді куліса 3 відносно повзуна 2 може рухатися поступально і швидкість точки  $B_3$  куліси 3 відносно точки  $B_2$  повзуна 2 буде направлена вздовж напрямних, тобто вздовж  $BO_1$ .

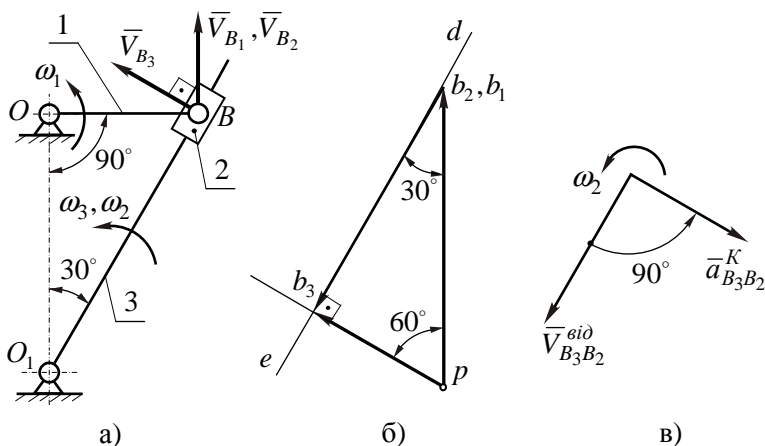


Рис. 3.13

Запишемо рівняння для швидкостей при складному русі точки  $B_3$  відносно  $B_2$ :

$$\vec{V}_{B_3} = \vec{V}_{B_2} + \vec{V}_{B_3 B_2}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}_{B_2}$  – переносна швидкість точки  $B_2$  повзуна, яка в даний момент часу збігається з точкою  $B_3$  куліси. Ця швидкість уже визначена;

$\vec{V}_{B_3 B_2}$  – відносна швидкість точки  $B_3$  відносно  $B_2$ . Направлена ця швидкість вздовж  $BO_1$ ;

$\vec{V}_{B_3}$  – абсолютна швидкість точки  $B_3$  куліси 3. Враховуючи, що куліса 3 обертається навколо нерухомої точки  $O_1$ , то ця швидкість буде направлена перпендикулярно до  $BO_1$ .

Векторне рівняння (1) розв'яжемо шляхом побудови плану швидкостей.

Оскільки напрями швидкості в правій і в лівій частині рівняння (1) відомі, то з полюса плану швидкостей спочатку побудуємо праву частину рівняння, а потім ліву.

Згідно правій частині рівняння (1) з полюса  $p$  (рис.3.13,б) відкладемо вектор  $(\overline{pb_2})$  за напрямом  $\overline{V_{B_2}}$  (рис.3.13,а), який в масштабі буде зображати цю швидкість. (Оскільки  $\overline{V_{B_2}} = \overline{V_{B_1}}$ , то швидкості цих точок на плані будуть зображатися одним вектором, тобто на плані швидкостей точки  $b_2$  і  $b_1$  збігаються). Через точку  $b_2$  проведемо лінію  $ed$  паралельно  $O_1B$ , вздовж якої від точки  $b_2$  буде направлений вектор, що буде зображати відносну швидкість  $\overline{V_{B_3B_2}}$  (величина і напрям цієї швидкості невідомі).

Тепер побудуємо ліву частину рівняння (1). Оскільки абсолютна швидкість  $\overline{V_{B_3}}$  направлена перпендикулярно до  $BO_1$ , то з полюса  $p$  за цим напрямом проводимо лінію до перетину в точці  $b_3$  з лінією  $ed$ . Точка перетину  $b_3$  буде розв'язком векторного рівняння (1).

Вектор  $(\overline{pb_3})$  на плані швидкостей в масштабі зображає абсолютну швидкість  $\overline{V_{B_3}}$ , а вектор  $(\overline{b_2b_3})$  – відносну швидкість  $\overline{V_{B_3B_2}}$ .

Оскільки на плані швидкостей вектор  $(\overline{pb_2})$  перпендикулярний до  $OB$ , а  $(\overline{pb_3})$  перпендикулярний до  $O_1B$ , то кут між цими векторами дорівнює куту між  $OB$  і  $O_1B$  на схемі механізму, тобто  $60^\circ$ .

Кут при вершині  $b_3$  плану швидкостей буде прямим, оскільки лінія  $pb_3$  перпендикулярна до  $O_1B$ , а лінія  $ed$  паралельна  $O_1B$ .

Таким чином трикутник  $pb_2b_3$  на плані швидкостей прямокутний, з кутами при вершинах:  $\angle p = 60^\circ$  і  $\angle b_2 = 30^\circ$ .

З плану швидкостей визначаємо:

$$(\overline{pb_3}) = (\overline{pb_2}) \sin 30^\circ, \text{ або } V_{B_3} = V_{B_2} \sin 30^\circ = 2 \cdot 0.5 = 1 \text{ м/с};$$

$$(b_2 b_3) = (p b_2) \sin 60^\circ ; \text{ або } V_{B_3 B_2} = V_{B_2} \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,886 = 1,72 \text{ м/с} .$$

Враховуючи те, що куліса 3 обертається навколо точки  $O_1$ , то для кутової швидкості куліси  $\omega_3$  отримаємо:

$$\omega_3 = \frac{V_{B_3}}{(O_1 B)} = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ рад/с} ,$$

де  $(O_1 B)$  – довжина куліси для цього положення механізму. З

$$\triangle O B O_1 \text{ (рис.3.13,а): } (O_1 B) = \frac{(OB)}{\sin 30^\circ} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4 \text{ м} .$$

Оскільки повзун 2 відносно куліси 3 рухається поступально, то  $\omega_2 = \omega_3$ .

Для визначення напрямку кутової швидкості  $\omega_3$  попередньо перенесемо вектор  $\vec{V}_{B_3}$  в точку  $B$  механізму (рис.3.13,а). Кутова швидкість  $\omega_3$  направлена проти ходу годинникової стрілки.

Визначимо прискорення точок механізму.

Оскільки кривошип 1 обертається навколо центра  $O$  з сталою кутовою швидкістю  $\omega_1$  ( $\varepsilon_1 = 0$ ), то прискорення точки  $B_1$  має тільки нормальну складову:

$$a_{B_1} = a_{B_1}^n = \omega_1^2 (OA) = 10^2 \cdot 0,2 = 20 \text{ м/с}^2 .$$

Спрямоване прискорення точки  $B_1$  вздовж кривошипа до центра обертання  $O$  (рис.3.14,а).

Прискорення точки  $B_2$  повзуна 2, враховуючи, що кривошип і повзун з'єднані шарніром, дорівнює прискоренню точки  $B_1$ :

$$\vec{a}_{B_2} = \vec{a}_{B_1} .$$

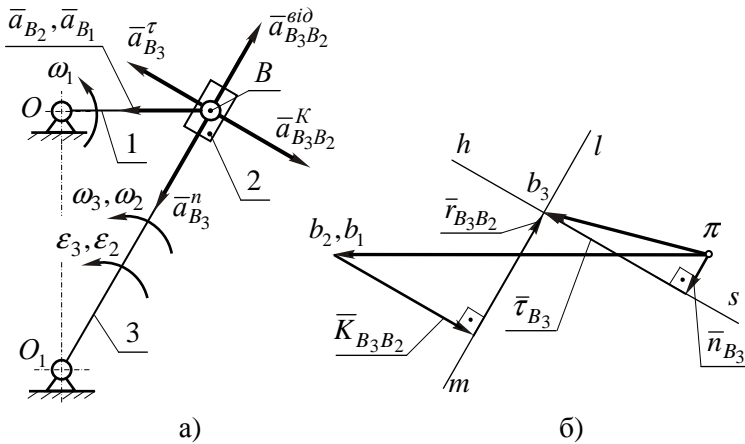


Рис. 3.14

Для прискорення точки  $B_3$  куліси 3 запишемо векторне рівняння для складного руху точки, врахувавши при цьому, що рух повзуна 2 прийнято за переносний:

$$\bar{a}_{B_3} = \bar{a}_{B_2} + \bar{a}_{B_3B_2}^{ei\delta} + \bar{a}_{B_3B_2}^K, \quad (2)$$

де  $\bar{a}_{B_3}$  – абсолютне прискорення точки  $B_3$ ;

$\bar{a}_{B_2}$  – переносне прискорення точки  $B_2$  повзуна, яка в даний момент часу збігається з точкою  $B_3$  куліси;

$\bar{a}_{B_3B_2}^{ei\delta}$  – прискорення точки  $B_3$  відносно  $B_2$ , направлене по осі куліси  $O_1C$ ;

$\bar{a}_{B_3B_2}^K$  – коріолісове прискорення точки  $B_3$ .

Оскільки відносний рух відбувається в площині, перпендикулярній до осі обертання повзуна 2, то коріолісове прискорення визначимо з формули:

$$a_{B_3B_2}^K = 2 \cdot \omega_2 \cdot V_{B_3B_2} = 2 \cdot 2,5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с}^2.$$

де  $\omega_2$  – кутова швидкість обертального переносного руху повзуна 2,  $\omega_2 = \omega_3 = 2,5 \text{ рад/с}$ ;

$V_{B_3B_2}$  – відносна швидкість точки  $B_3$  відносно  $B_2$ ,

$$V_{B_3B_2} = 1,73 \text{ м/с}.$$

Для визначення напрямку коріолісового прискорення необхідно вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{B_3B_2}$  повернути на  $90^\circ$  в бік переносного обертального руху, тобто в напрямі кутової швидкості  $\omega_2$ . Напрямок повернутого вектора (рис.3.13,в), який буде перпендикулярний до осі куліси  $O_1B$ , відповідає напрямку коріолісового прискорення.

З іншого боку, точка  $B_3$  належить кулісі 3, яка обертається навколо центра  $O_1$ . Таким чином, прискорення  $\vec{a}_{B_3}$  буде мати дві складові:

$$\vec{a}_{B_3} = \vec{a}_{B_3}^n + \vec{a}_{B_3}^\tau, \quad (3)$$

де  $\vec{a}_{B_3}^n$  – нормальне прискорення точки  $B_3$  при її обертанні навколо точки  $O_1$ , направлене по осі куліси від точки  $B$  до точки  $O_1$  (рис.3.14,а) і за модулем дорівнює:

$$a_{B_3}^n = \omega_3^2 (O_1B) = 2,5^2 \cdot 0,4 = 2,5 \text{ м/с}^2;$$

$\vec{a}_{B_3}^\tau$  – тангенціальне прискорення точки  $B_3$  при її обертанні навколо точки  $O_1$ , направлене перпендикулярно до осі куліси  $O_1B$  і за модулем дорівнює:

$$a_{B_3}^\tau = \varepsilon_3 (O_1B).$$

Розв'яжемо систему векторних рівнянь (2, 3) графічно, шляхом побудови плану прискорень.

Першим побудуємо векторне рівняння (2). З довільного полюса  $\pi$  (рис.3.14,б) відкладемо напрямлений відрізок  $(\overline{\pi b_2})$ ,



який зображає прискорення  $\bar{a}_{B_2} = \bar{a}_{B_1}$  і спрямований паралельно лінії  $BO$  від точки  $B$  до точки  $O$ .

Довжину відрізка  $(\pi b_2)$  оберемо  $50 \text{ мм}$ . Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень буде рівний:

$$\mu_a = \frac{a_{B_2}}{(\pi b_2)} = \frac{20}{50} = 0,4 \frac{\text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}}.$$

Від точки  $b_2$  відкладемо вектор  $\bar{K}_{B_3B_2}$ , який зображає коріолісове прискорення  $\bar{a}_{B_3B_2}^K$ . Спрямований цей вектор перпендикулярно до осі куліси  $BO_1$  за визначеним раніш напрямом (рис.3.13,в).

Довжина вектора  $\bar{K}_{B_3B_2}$  дорівнює:

$$K_{B_3B_2} = \frac{a_{B_3B_2}^K}{\mu_a} = \frac{8,65}{0,4} = 21,62 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\bar{K}_{B_3B_2}$  проводимо лінію  $ml$ , вздовж якої буде направлений вектор  $\bar{r}_{B_3B_2}$ , який буде зображати відносне прискорення  $\bar{a}_{B_3B_2}^{\text{від}}$ . Напрямок і довжина цього вектора невідомі.

Наступним побудуємо векторне рівняння (3). З полюса  $\pi$  відкладемо вектор  $\bar{n}_{B_3}$ , який зображає нормальне прискорення  $\bar{a}_{B_3}^n$ . Спрямований цей вектор паралельно осі куліси  $BO_1$  від точки  $B$  до точки  $O_1$  і має довжину:

$$n_{B_3} = \frac{a_{B_3}^n}{\mu_a} = \frac{2,5}{0,4} = 6,2 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\bar{n}_{B_3}$  проводимо лінію  $sh$ , вздовж якої буде спрямований вектор  $\bar{t}_{B_3}$ , який буде зображати тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{B_3}^t$ .

Розв'язком системи (2, 3) буде точка перетину ліній  $ml$  і  $sh$ , а вектор  $(\overline{\pi b_3})$  буде зображати прискорення  $\overline{a_{B_3}}$ .

З плану прискорень визначаємо:

$$a_{B_3} = (\pi b_3) \mu_a = 22,4 \cdot 0,4 = 8,9 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B_3}^\tau = \tau_{B_3} \cdot \mu_a = 21,6 \cdot 0,4 = 8,6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{B_3 B_2}^{eio} = r_{B_3 B_2} \cdot \mu_a = 19 \cdot 0,4 = 7,6 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення куліси 3 і повзуна 2 визначимо через відоме тангенціальне прискорення  $\overline{a_{B_3}^\tau}$ :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \frac{a_{B_3}^\tau}{(O_1 B)} = \frac{8,6}{0,4} = 21,6 \text{ рад/с}^2.$$

Для визначення напрямку кутового прискорення  $\varepsilon_3$  треба перенести в точку  $B$  механізму тангенціальне прискорення  $\overline{a_{B_3}^\tau}$  (рис.3.14,а). Кутове прискорення  $\varepsilon_3$  спрямоване проти ходу годинникової стрілки.

**Відповідь:**  $V_{B_3} = 1 \text{ м/с}; \quad \omega_3 = 2,5 \text{ рад/с};$

$$a_{B_3} = 8,9 \text{ м/с}^2; \quad \varepsilon_3 = 21,6 \text{ рад/с}^2.$$

## Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА

### ЗАНЯТТЯ № 5

#### Визначення швидкостей точок тіла

#### Зміст

- 4.1. Рівняння плоского руху.
- 4.2. Швидкості точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей.
- 4.3. Порядок розв'язування задач.
- 4.4. Контрольні запитання.
- 4.5. Приклади розв'язування задач.

#### 4.1. Рівняння плоского руху

*Плоским називається такий рух тіла, при якому траєкторії усіх його точок лежать в площинах, що паралельні до даної нерухомої площини.*

При такому русі усі точки твердого тіла, що лежать на перпендикулярі до цієї площини, мають однакові траєкторії, швидкості і прискорення.

Плоский рух фігури можна розглядати як складний (тобто, абсолютний) рух, який включає поступальний рух разом з довільно обраною точкою  $A$ , що називається **полюсом** (переносний рух), і на обертальний рух фігури навколо цієї точки (відносний рух).

На рис.4.1 з тілом  $Q$  пов'язана рухома система координат  $Ax_1y_1$ . При русі тіла початок координат  $x_A$ ,  $y_A$  і кут повороту  $\varphi$  рухомих системи координат відносно нерухомої системи  $Oxy$  з часом змінюються. Таким чином, щоб однозначно задати положення тіла при плоскому русі потрібно задати закон руху початку рухомих системи координат (полюса  $A$ ) і кут повороту рухомих системи відносно нерухомої системи координат, тобто:

$$x_A = f_1(t); \quad y_A = f_2(t); \quad \varphi = f_3(t). \quad (4.1)$$

Рівняння (4.1) називаються **рівняннями плоского руху твердого тіла**.

При цьому, поступальна частина плоского руху описується двома рівняннями:

$$\begin{aligned} x_A &= f_1(t); \\ y_A &= f_2(t), \end{aligned}$$

а відносна обертальна навколо полюса – третім рівнянням:

$$\varphi = f_3(t).$$

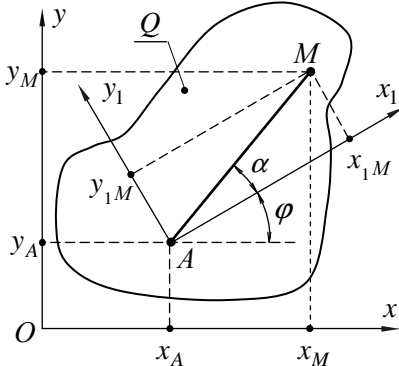


Рис. 4.1

Координати будь якої точки  $M$  плоскої фігури  $Q$  (рис.4.1), якщо за полюс обрана точка  $A$  і заданий кут  $\alpha$ , визначаються за рівняннями:

$$\begin{aligned} x_M &= x_A + (AM) \cos(\varphi + \alpha); \\ y_M &= y_A + (AM) \sin(\varphi + \alpha). \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 4.2. Швидкості точок фігури. Миттєвий центр швидкостей

Оскільки плоский рух тіла складається з поступального руху з полюсом і обертального навколо нього, то швидкість будь якої точки тіла  $M$  (рис.4.2) геометрично складається з абсолютної швидкості  $\vec{V}_A$  точки  $A$ , яку прийнято за полюс, і відносної швидкості  $\vec{V}_{MA}$  у відносному обертальному русі точки  $M$  разом з тілом навколо полюса  $A$ :

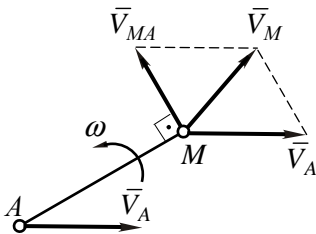


Рис. 4.2

$$\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}. \quad (4.3)$$

Вектор відносної швидкості  $\bar{V}_{MA}$  точки  $M$  у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $A$  направлений перпендикулярно до  $AM$  у бік кутової швидкості.

Модуль і напрям абсолютної швидкості  $\bar{V}_M$  знаходиться побудовою відповідного паралелограма на векторах  $\bar{V}_A$  і  $\bar{V}_{MA}$  (рис.4.2). Такий шлях розв'язування векторного рівняння, коли за записаним рівнянням будують векторну фігуру, називається **графоаналітичним**.

Відносна швидкість  $\bar{V}_{MA}$  у відносному обертальному русі точки  $M$  разом з тілом навколо полюса  $A$  за модулем дорівнює:

$$V_{MA} = \omega \cdot MA, \quad (4.4)$$

де  $\omega$  - кутова швидкість обертання тіла навколо полюса.

Знайти швидкість будь-якої точки тіла можна також на основі теореми, яка свідчить:

*Проекції швидкостей двох точок фігури на пряму, що з'єднує ці точки, рівні між собою.*

Згідно з цією теоремою (рис.4.3) :

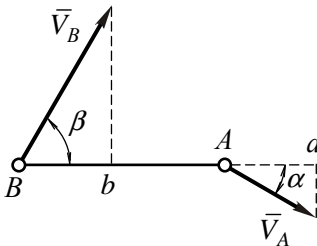


Рис. 4.3

$$Aa = Bb,$$

або

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta.$$

Якщо відома швидкість  $\bar{V}_A$  точки  $A$  тіла, то :

$$V_B = V_A \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \quad (4.5)$$

При плоскому русі тіла в кожен момент часу існує точка тіла, швидкість якої дорівнює нулю. Ця точка називається **миттєвим центром швидкостей** і, як правило, позначається літерою  $P$ .

Якщо миттєвий центр швидкостей відомий, то легко можна знайти миттєве розподілення швидкостей усіх точок тіла (рис.4.4).

Оберемо за полюс поступального руху миттєвий центр швидкостей  $P$ . Тоді для точок  $A$  і  $B$  тіла можна записати векторні рівняння (4.3):

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP};$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_P + \vec{V}_{BP},$$

де  $\vec{V}_P$  - вектор абсолютної швидкості полюса  $P$ ;

$\vec{V}_{AP}$  - вектор відносної швидкості точки  $A$  у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $P$ , направлений перпендикулярно до  $AP$ ;

$\vec{V}_{BP}$  - вектор відносної швидкості точки  $B$  у відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $P$ , направлений перпендикулярно до  $BP$ .

Оскільки швидкість обраного полюса  $P$  дорівнює нулю ( $\vec{V}_P = 0$ ), то:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{AP}; \quad \vec{V}_B = \vec{V}_{BP}.$$

За модулем швидкості обертання точок  $A$  і  $B$  навколо полюса  $P$  дорівнюють:

$$V_A = V_{AP} = \omega \cdot (PA); \quad V_B = V_{BP} = \omega \cdot (PB).$$

Поділивши  $V_B$  на  $V_A$  дістанемо:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{\omega \cdot (PB)}{\omega \cdot (PA)} = \frac{PB}{PA}. \quad (4.6)$$

Таким чином, *миттєвий розподіл швидкостей точок тіла при його плоскому русі, такий же, який був би при його обертальному русі навколо миттєвого центра швидкостей.*

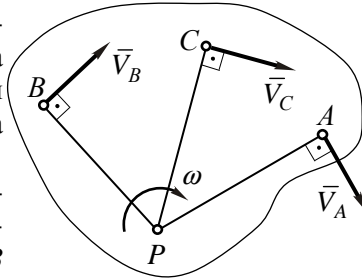


Рис. 4.4

### Визначення положення миттєвого центра швидкостей

Існує декілька способів знаходження положення миттєвого центра швидкостей.

**Випадок 1.** Відома швидкість  $\vec{V}_A$  однієї точки  $A$  тіла і кутова швидкість його обертання  $\omega$  (рис.4.5).

Миттєвий центр швидкостей  $P$  лежить на перпендикулярі до швидкості  $\vec{V}_A$  точки  $A$ , на відстані:

$$AP = \frac{V_A}{\omega}. \quad (4.7)$$

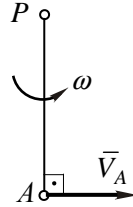


Рис. 4.5

Для знаходження напрямку перпендикуляру треба повернути вектор  $\vec{V}_A$  відносно точки  $A$  на кут  $90^\circ$  в бік кутової швидкості.

**Випадок 2.** Відомі напрями швидкостей  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$  двох точок  $A$  і  $B$  тіла (рис.4.6).

Миттєвий центр швидкостей повинен лежати як на перпендикулярі до вектора  $\vec{V}_A$ , так і на перпендикулярі до вектора  $\vec{V}_B$ , тобто миттєвий центр швидкостей  $P$  лежить в точці перетину цих перпендикулярів.

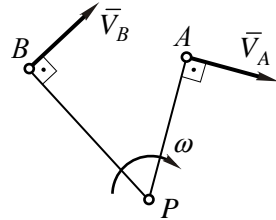


Рис. 4.6

**Випадок 3.** Швидкості двох точок  $A$  і  $B$  тіла паралельні між собою, а перпендикуляри до них не співпадають (рис.4.7).

Говорять, що в цьому випадку миттєвий центр швидкостей лежить на нескінченності. Кутова швидкість обертання дорівнює нулю, а швидкості

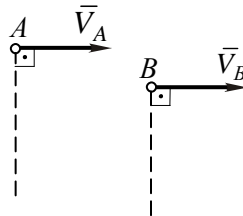


Рис. 4.7

усіх точок тіла геометрично рівні, тобто в даний момент часу тіло виконує поступальний рух.

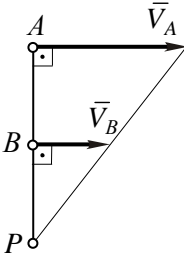


Рис. 4.8

**Випадок 4.** Швидкості двох точок  $A$  і  $B$  паралельні, направлені в один бік і не рівні за модулем. Крім того,  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$  перпендикулярні до відрізка  $AB$  (рис.4.8).

Миттєвий центр швидкостей знаходиться на продовженні відрізка  $AB$  тієї точки, швидкість якої менша. Відстань від точки до миттєвого центра швидкостей можна знайти з пропорції (4.6):

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{PB}{PA} = \frac{PB}{PB + BA}.$$

Розв'язавши це рівняння відносно  $PB$ , отримаємо:

$$PB = \frac{V_B(BA)}{V_A - V_B}. \quad (4.8)$$

Таким чином, для визначення положення миттєвого центра швидкостей треба знати не тільки напрями швидкостей, а і їх величину.

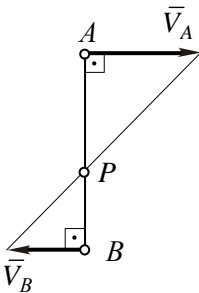


Рис. 4.9

**Випадок 5.** Швидкості двох точок  $A$  і  $B$  тіла паралельні одна одній, перпендикулярні до відрізка  $AB$ , але направлені в різні боки (рис.4.9).

Миттєвий центр швидкостей лежить на відріжку  $AB$  і ділить його на частини пропорційні швидкостям. Оскільки  $BP = AB - AP$ , то за формулою (4.6) можна записати:

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{AP}{BP} = \frac{AB}{AB + AP}.$$



Розв'язавши рівняння відносно  $AP$ , отримаємо:

$$AP = \frac{V_A(AB)}{V_A + V_B}. \quad (4.9)$$

Таким чином, для знаходження положення миттєвого центра швидкостей треба знати величини і напрями швидкостей обох точок.

**Випадок 6.** Тіло котиться без проковзування по нерухомій поверхні (рис.4.10).

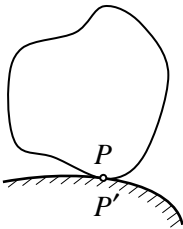


Рис. 4.10

В цьому випадку миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці  $P$  дотику тіла до поверхні. Дійсно, якщо відсутнє ковзання тіла відносно поверхні, то швидкості точок дотику тіла і поверхні повинні бути однаковими. Але швидкості точки  $P'$ , що належить нерухомій поверхні, дорівнює нулю.

Тоді і швидкість точки  $P$ , якою в даний момент часу рухоме тіло дотикається до нерухомої поверхні, теж дорівнює нулю.

### 4.3. Порядок розв'язування задач

а) *розв'язування графоаналітичним методом:*

- обрати за полюс ту точку тіла, швидкість якої відома за величиною і напрямом або легко визначається з умов задачі;
- знайти точку тіла, напрям швидкості якої відомий;
- користуючись формулами плоского руху знайти швидкість цієї точки;
- визначити кутову швидкість тіла в даний момент часу;
- за відомою кутовою швидкістю і швидкістю полюса, користуючись формулами плоского руху знайти швидкості інших точок тіла.

б) розв'язання за допомогою миттєвого центра швидкостей:

- визначити положення миттєвого центра швидкостей одним з відомих способів;
- визначити значення миттєвого радіуса тієї точки тіла, швидкість якої відома, та знайти кутову швидкість тіла;
- знайти швидкості інших точок тіла.

#### 4.4. Контрольні запитання

1. Який рух тіла називають плоским?
2. Як визначити швидкість будь якої точки тіла при поступальному русі?
3. Яка точка називається миттєвим центром швидкостей?
4. Яким способом можна знайти положення миттєвого центра швидкостей ?

#### 4.5. Приклади розв'язування задач

##### Задача №1

Стержень  $AB$  (рис.4.11) довжиною  $2\text{ м}$  виконує плоский рух. Вектор швидкості точки  $A$  утворює кут  $30^\circ$  з віссю стержня і в даний момент часу дорівнює  $5\text{ м/с}$ . Вектор швидкості точки  $B$  у цей же момент часу утворює кут  $60^\circ$  з віссю стержня.

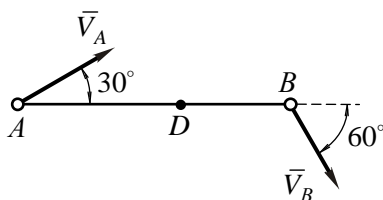


Рис. 4.11

**Визначити** величину швидкості точки  $B$ , положення миттєвого центра швидкостей, кутову швидкість стержня та швидкість точки  $D$ , яка лежить на середині стержня.

**Розв'язок задачі графоаналітичним способом.**

1. За полюс оберемо точку  $A$  (рис.4.11), оскільки відомі напрям і величина швидкості цієї точки.

2. Використовуючи формулу розподілу швидкостей при плоскому русі, запишемо векторне рівняння для визначення швидкості точки  $B$ :

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}_A$  - швидкість полюса точки  $A$ ;

$\vec{V}_{BA}$  - відносна швидкість точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $A$ .

Дане векторне рівняння можна розв'язати побудовою векторного трикутника швидкостей (рис.4.12). Для цього з довільної точки площини  $O$  треба побудувати праву і ліву частину векторного рівняння (1).

При побудові правої частини рівняння (1) з точки  $O$  в довільному масштабі відкладемо вектор швидкості  $\vec{V}_A$ , який є ві-

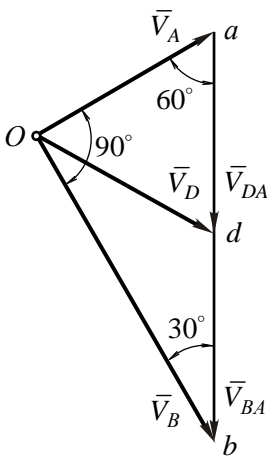


Рис. 4.12

домим і за величиною і за напрямом. До вектора  $\vec{V}_A$  треба додати вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{BA}$ , напрям якого є відомим, оскільки швидкість точки  $B$  у її відносному обертальному русі навколо полюса  $A$  перпендикулярна до радіуса обертання, в даному випадку радіус обертання – відрізок  $AB$ . Величина вектора  $\vec{V}_{BA}$  невідома і тому через точку "a" проводиться тільки його напрям (пряма  $ab$  рис.4.12).

Тепер з точки  $O$  побудуємо ліву частину рівняння (1). Напрямок швидкості точки  $B$  є відомим (за умовою задачі), але невідома її величина, і тому, з точки  $O$  проводимо лінію паралельну до  $\vec{V}_B$ .

Точка "b" перетину прямих, паралельних до  $\vec{V}_{BA}$  та  $\vec{V}_B$ , і буде рішенням даного векторного рівняння.

В результаті побудови отримали замкнутий трикутник швидкостей, сторони якого в обраному масштабі визначають шукану швидкість точки  $B$  і відносну швидкість цієї ж точки при її обертанні разом з тілом навколо полюса  $A$ .

В цьому трикутнику відомі всі кути і одна сторона  $\vec{V}_A$ . З трикутника  $Oab$  знаходимо:

$$V_{BA} = \frac{V_A}{\sin 30^\circ} = \frac{5}{0,5} = 10 \text{ м/с};$$

$$V_B = V_A \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 5\sqrt{3} = 8,65 \text{ м/с}.$$

3. Визначимо кутову швидкість обертання стержня  $AB$ . Оскільки  $V_{BA} = \omega \cdot (AB)$ , то :

$$\omega = \frac{V_{BA}}{(AB)} = \frac{10}{2} = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Знайдемо швидкість точки  $D$ , що лежить посередині відрізка  $AB$ . Для цього запишемо формулу для швидкості точки  $D$  відносно того ж самого полюса точки  $A$ :

$$\vec{V}_D = \vec{V}_A + \vec{V}_{DA}, \quad (2)$$

де  $\vec{V}_A$  - швидкість полюса точки  $A$ ;

$\vec{V}_{DA}$  - відносна швидкість точки  $D$  у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $A$ .

Швидкість  $\vec{V}_{DA}$  має той же напрям, що і  $\vec{V}_{BA}$ , а за модулем дорівнює:

$$V_{DA} = \omega(AD) = \omega \frac{(AB)}{2} = \frac{1}{2} V_{BA} = 5 \text{ м/с}.$$

Відклавши від точки "a" (рис.4.12) вектор  $\vec{V}_{DA}$ , рівний половині вектора  $\vec{V}_{BA}$ , отримаємо точку "d". Вектор, що проведений з точки початку побудови (точки  $O$ ) в точку "d" зображає швидкість  $\vec{V}_D$  точки  $D$ .

Оскільки сторони  $Oa$  та  $ad$  трикутника  $Oad$  рівні між собою ( $V_A = V_{DA} = 5 \text{ м/с}$ ) і кут між ними  $60^\circ$ , то трикутник рівносторонній. Таким чином:  $V_D = 5 \text{ м/с}$ .

**Розв'язання задачі за допомогою миттєвого центра швидкостей**

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Для цього з точок  $A$  і  $B$  (рис.4.13) проведемо перпендикуляри до швидкостей  $\vec{V}_A$  і  $\vec{V}_B$ . Перетин цих перпендикулярів (точка  $P$ ) буде миттєвим центром швидкостей.

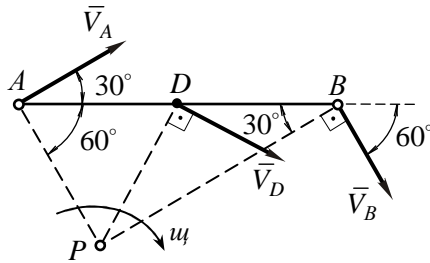


Рис. 4.13

2. Визначимо миттєві радіуси. Оскільки трикутник  $ABP$  прямокутний, то:

$$AP = (AB) \cdot \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м};$$

$$BP = (AB) \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ м}.$$

3. Обчислимо кутову швидкість обертання фігури навколо миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{V_A}{(AP)} = \frac{5}{1} = 5 \text{ рад/с}.$$

4. Знайдемо швидкості точок  $B$  і  $D$ :

$$V_B = \omega \cdot (BP) = 5 \cdot 1,73 = 8,65 \text{ м/с};$$

$$V_D = \omega(DP) = 5 \cdot 1 = 5 \text{ м/с},$$

де  $DP$  - миттєвий радіус точки  $B$ , оскільки трикутник  $ABP$  рівносторонній ( $AD = AP$  і кут між ними  $60^\circ$ ), то  $DP = 1 \text{ м}$ .

Якщо треба було б визначити тільки величину швидкості  $\bar{V}_B$ , то можна було б скористатися теоремою про рівність проєкцій двох точок плоскої фігури на пряму, що з'єднує ці точки:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ.$$

Тоді:

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} = 5 \frac{0,865}{0,5} = 8,65 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_B = 8,65 \text{ м/с}$ ;  $V_D = 5 \text{ м/с}$ ;  $\omega = 5 \text{ рад/с}$ .

### Задача №2

Колесо радіусом  $R = 2 \text{ м}$  котиться по горизонтальній поверхні. В момент часу, що розглядається, швидкість центра  $V_0 = 3 \text{ м/с}$  і кутова швидкість колеса  $\omega = 2 \text{ рад/с}$  (рис.4.14).

Визначити: *швидкості точок M, P і N, які лежать на кінцях вертикального і горизонтального діаметрів.*

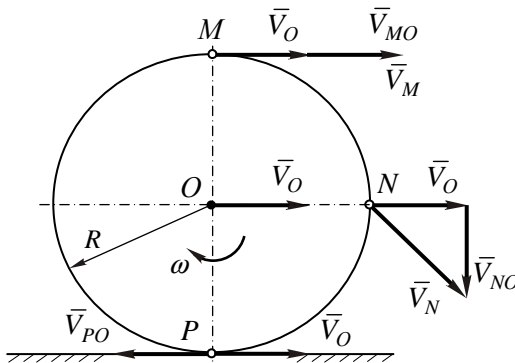


Рис. 4.14

**Розв'язок.**

1. В якості полюса оберемо точку  $O$ , напрям і величина швидкості якої відомі.

2. Використовуючи формулу розподілу швидкостей точок тіла при плоскому русі визначаємо швидкості інших точок колеса.

Для точки  $M$  колеса:

$$\vec{V}_M = \vec{V}_O + \vec{V}_{MO}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}_{MO}$  - відносна швидкість точки  $M$  у її відносному обертальному русі навколо полюса  $O$ .

За модулем  $V_{MO}$  дорівнює:

$$V_{MO} = \omega(OM) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість  $\vec{V}_{MO}$  направлена перпендикулярно до  $MO$  в бік кутової швидкості, тобто за напрямом  $\vec{V}_{MO}$  і  $\vec{V}_O$  будуть збігатися.

З точки  $M$  (рис.4.14) будемо рівняння (1): відкладаємо вектор  $\vec{V}_O$ , а з його кінця за тим же напрямом  $\vec{V}_{MO}$ .

Тоді:

$$V_M = V_O + V_{MO} = 3 + 4 = 7 \text{ м/с}.$$

Векторне рівняння для визначення швидкості точки  $P$ , буде мати вигляд:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{V}_{PO}, \quad (2)$$

де  $\vec{V}_{PO}$  - швидкість точки  $P$  у її обертальному русі навколо полюса  $O$ .

Ця швидкість паралельна швидкості  $\vec{V}_O$ , але буде направлена в протилежний бік, і за модулем дорівнює:

$$V_{PO} = \omega \cdot (OP) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

З точки  $P$  (рис.4.14) будемо векторне рівняння (2): відкладаємо вектор  $\vec{V}_O$ , а з його кінця в протилежний бік  $\vec{V}_{PO}$ .

Оскільки вектори колінеарні, то:

$$V_P = 3 - 4 = -1 \text{ м/с}.$$

Таким чином, швидкість точки  $P$  дорівнює  $1 \text{ м/с}$  і направлена в протилежний бік від  $\vec{V}_O$ . Колесо котиться з ковзанням по поверхні.

Складаємо векторне рівняння для визначення швидкості точки  $N$ :

$$\vec{V}_N = \vec{V}_O + \vec{V}_{NO}, \quad (3)$$

де  $\vec{V}_{NO}$  - відносна швидкість точки  $N$  у її відносному обертальному русі навколо полюса  $O$ .

За модулем  $\vec{V}_{NO}$  дорівнює:

$$V_{NO} = \omega \cdot (ON) = \omega \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с}.$$

Швидкість  $\vec{V}_{NO}$  направлена перпендикулярно до  $NO$  в бік кутової швидкості  $\omega$ , тобто вертикально униз.

З точки  $N$  (рис.4.14) будемо рівняння (3): відкладаємо вектор  $\vec{V}_O$ , а з його кінця вектор  $\vec{V}_{NO}$  вертикально униз. З'єднавши точку  $N$  з кінцем вектора  $\vec{V}_{NO}$  отримаємо вектор  $\vec{V}_N$  швидкості точки  $N$ .

Оскільки вектори  $\vec{V}_O$  і  $\vec{V}_{NO}$  між собою перпендикулярні, то вектор  $\vec{V}_N$  є гіпотенузою прямокутного трикутника:

$$V_N = \sqrt{V_O^2 + V_{NO}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_M = 7 \text{ м/с}$ ;  $V_P = 1 \text{ м/с}$ ;  $V_N = 5 \text{ м/с}$ .

### Задача №3

Колесо радіусом  $R = 2 \text{ м}$  котиться без проковзування по горизонтальній поверхні з швидкістю центра колеса  $V_O = 4 \text{ м/с}$ .



**Визначити:** швидкості точок  $M$ ,  $N$ ,  $L$  (рис.4.15).

**Розв'язок.** Розв'яжемо задачу за допомогою миттєвого центра швидкостей.

1. Визначимо положення миттєвого центра швидкостей. Оскільки колесо котиться по нерухомій поверхні, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці  $P$  дотику колеса до нерухомої поверхні.

2. Миттєвий радіус для точки  $O$  дорівнює  $OP$ . Тоді з формули (4.4) отримаємо кутову швидкість  $\omega$  колеса:

$$\omega = \frac{V_0}{(OP)} = \frac{V_0}{R} = \frac{4}{2} = 2 \text{ p/c}.$$

Направлена кутова швидкість за ходом годинникової стрілки.

3. Визначимо величину і напрям швидкостей точок  $M$ ,  $N$ ,  $L$ .

З'єднаємо точки  $M$ ,  $N$ ,  $L$  з миттєвим центром швидкостей  $P$ . Вектори швидкостей  $\vec{V}_M$ ,  $\vec{V}_N$  і  $\vec{V}_L$  будуть направлені перпендикулярно миттєвим радіусам  $MP$ ,  $NP$  і  $LP$ , відповідно.

За модулем швидкості будуть дорівнювати:

$$V_M = V_L = \omega \cdot (MP) = 2\sqrt{2}R = 4\sqrt{2} \text{ м/с};$$

$$V_N = \omega \cdot (NP) = 2 \cdot 4 = 8 \text{ м/с},$$

де

$$(MP) = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ м}; \quad (NP) = 2R = 4 \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $V_M = V_L = 4\sqrt{2} \text{ м/с}; V_N = 8 \text{ м/с}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 16.2; 16.4; 16.11; 16.12 [2].

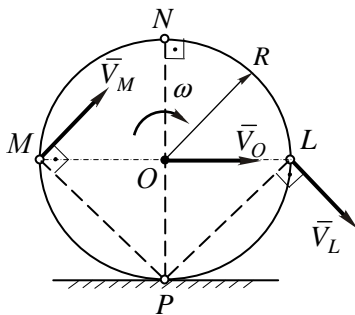


Рис. 4.15

## Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА (продовження)

### ЗАНЯТТЯ № 6

#### Визначення прискорень точок тіла

##### Зміст

- 4.6. Прискорення точок плоскої фігури.
- 4.7. Порядок розв'язування задач.
- 4.8. Контрольні запитання.
- 4.9. Приклади розв'язування задач.

#### 4.6. Прискорення точок плоскої фігури

Формула розподілу прискорень при плоскому русі тіла має вигляд:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}, \quad (4.10)$$

де  $\bar{a}_A$  - прискорення полюса, точки  $A$ , в поступальному русі;  
 $\bar{a}_{MA}$  - відносне прискорення точки  $M$  у її обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $A$ ;  
 $\bar{a}_M$  - прискорення будь-якої точки  $M$  тіла.

*Прискорення будь-якої точки  $M$  плоскої фігури дорівнює геометричній сумі прискорення точки, яку обрано за полюс, і прискорення точки  $M$  при її обертанні разом з тілом навколо цього полюса.*

Графічне визначення прискорення точки  $M$  виконується наступним чином (рис.4.16):

- З точки  $M$  відкладають вектор  $\bar{a}_A$ , який дорівнює прискоренню полюса  $A$ ;
- Під кутом  $\mu$  до  $AM$  проводять вектор  $\bar{a}_{MA}$ , відхилений в бік кутового прискорення  $\varepsilon$ , причому

$$tg \mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \quad a_{MA} = (MA) \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (4.11)$$

- Модуль і напрям прискорення  $\bar{a}_M$  визначається діагоналлю паралелограма, який побудовано на векторах  $\bar{a}_A$  і  $\bar{a}_{MA}$  як на сторонах.

Обчислення величини прискорення точки  $M$  за допомогою розглянутого паралелограма ускладнює розрахунки, оскільки попередньо треба визначити кут між векторами  $\bar{a}_{MA}$  і  $\bar{a}_A$ .

Враховуючи те, що  $\bar{a}_{MA}$  являє собою відносне прискорення

точки  $M$  у її відносному обертовому русі навколо полюса  $A$ , то це прискорення можна розкласти на відносну тангенціальну (дотичну) і відносну нормальну (доцентрову) складові:

$$\bar{a}_{MA} = \bar{a}_{MA}^{\tau} + \bar{a}_{MA}^n, \quad (4.12)$$

де

$$a_{MA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (AM);$$

$$a_{MA}^n = \omega^2 \cdot (AM).$$

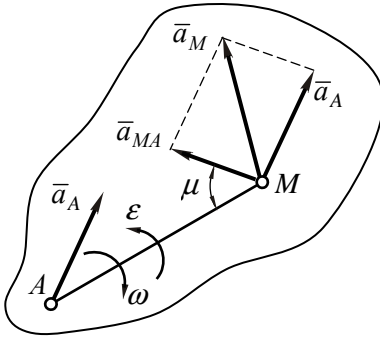


Рис. 4.16

Вектор  $\bar{a}_{MA}^{\tau}$  направлений перпендикулярно до  $AM$  в бік кутового прискорення, а вектор  $\bar{a}_{MA}^n$  завжди направлений від точки  $M$  до обраного полюса  $A$  (рис.4.17).

Тоді рівняння (4.10) набуде вигляду:

$$\bar{a}_M = \bar{a}_A + \bar{a}_{MA}^n + \bar{a}_{MA}^{\tau}. \quad (4.13)$$

Якщо точка  $A$ , яка обрана за полюс поступального руху, рухається не прямолінійно, то її прискорення, в свою чергу, теж можна розкласти на тангенціальну  $\bar{a}_A^{\tau}$  і нормальну  $\bar{a}_A^n$  складові:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^{\tau}.$$

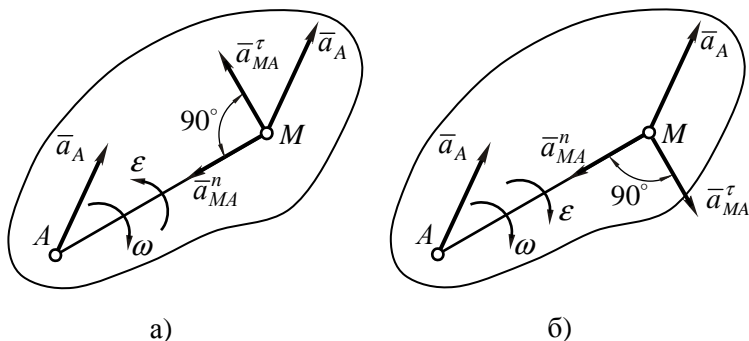


Рис. 4.17

#### 4.7. Порядок розв'язування задач

1. Обрати точку, яка буде полюсом при запису рівняння плоского руху (як правило обирають точку, прискорення якої відоме).
2. Записати векторне рівняння розподілу прискорень.
3. Спроекувати рівняння розподілу прискорень на дві взаємно перпендикулярні осі, одна з яких збігається з нормальним прискоренням, а друга – з тангенціальним.
4. Визначити миттєве кутове прискорення плоскої фігури.
5. Знайти шукані прискорення точок за допомогою рівняння розподілу прискорень.

#### 4.8. Контрольні запитання

1. Яку точку треба обирати за полюс для визначення прискорень точок плоскої фігури?
2. Запишіть формулу розподілу прискорень точок плоскої фігури.
3. Як обчислити модуль нормального прискорення?
4. Як обчислити модуль тангенціального прискорення?
5. Як направлений вектор нормального прискорення?
6. Як визначити напрям тангенціального прискорення?

## 4.9. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Прямокутна (рис.4.18,а) пластина  $ABCD$  рухається в площині креслення. Прискорення точки  $A$  в даний момент часу дорівнює  $2 \text{ м/с}^2$  і утворює з прямою  $AB$  кут  $30^\circ$ .

Прискорення точки  $B$  складає  $6 \text{ м/с}^2$  і утворює кут  $60^\circ$  з прямою  $BA$ .

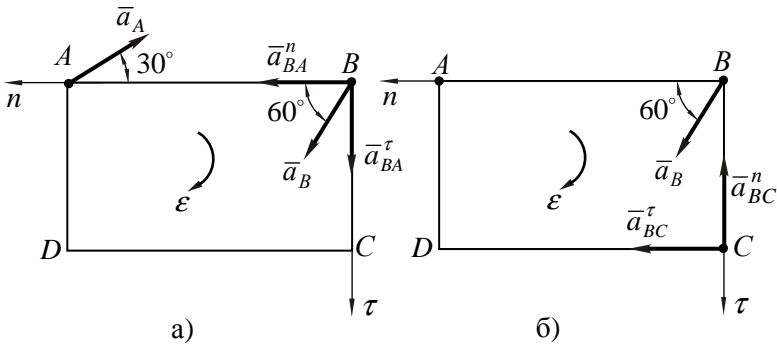


Рис. 4.18.

**Визначити** миттєву кутову швидкість і миттєве кутове прискорення пластини, та прискорення точки  $C$ , якщо  $AB = 0,1 \text{ м}$ ,  $BC = 0,05 \text{ м}$ .

#### Розв'язок.

1. Оберемо за полюс точку  $A$ , оскільки її прискорення відоме (задано у вихідних даних).
2. Складемо векторне рівняння для прискорення точки  $B$  пластини:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де  $\bar{a}_{BA}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $B$  у її обертальному русі разом з тілом навколо точки  $A$ . Вектор

цього прискорення направлений від точки  $B$  до точки  $A$  і за модулем дорівнює:  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (AB)$ ;

$\vec{a}_{BA}^\tau$  - відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки  $B$  у її обертанні разом з тілом навколо точки  $A$ . Спрямований вектор цього прискорення перпендикулярно до  $AB$  в бік кутового прискорення і за модулем дорівнює  $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot (AB)$ .

Оскільки напрям кутового прискорення невідомий, то напрямом  $\vec{a}_{BA}^\tau$  на рис. 4.18,а задаємося.

3. Спроекуємо складене рівняння (1) на осі  $Bn$  і  $B\tau$ .

В проекції на вісь  $Bn$  отримаємо:

$$a_B \cos 60^\circ = -a_A \cos 30^\circ + a_{BA}^n. \quad (2)$$

В проекції на вісь  $B\tau$ :

$$a_B \cos 30^\circ = -a_A \cos 60^\circ + a_{BA}^\tau. \quad (3)$$

4. З рівняння (2) дістанемо величину нормального прискорення:

$$a_{BA}^n = a_A \cos 30^\circ + a_B \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,866 + 6 \cdot 0,5 = 4,73 \text{ м/с}^2.$$

Знайдемо миттєву кутову швидкість фігури:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{(AB)}} = \sqrt{\frac{4,73}{0,1}} = 6,88 \text{ рад/с}.$$

5. З рівняння (3) отримаємо величину тангенціального прискорення:

$$a_{BA}^\tau = a_B \cos 30^\circ + a_A \cos 60^\circ = 6 \cdot 0,866 + 2 \cdot 0,5 = 6,2 \text{ м/с}^2.$$

Кутове прискорення фігури:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{(AB)} = \frac{6,2}{0,1} = 62 \text{ рад/с}^2.$$

Оскільки величина  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  додатня, то напрям тангенціального, а відповідно і кутового, прискорень обрано вірно.

6. Визначимо прискорення точки  $C$ .

Для обчислення прискорення точки  $C$  краще за полюс обрати точку  $B$ , оскільки прискорення цієї точки вже відоме і задана сторона  $BC$  прямокутника:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^{\tau}.$$

Напрямок векторів  $\bar{a}_{CB}^n$  і  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  показано на рис. 4.18,б.

Спроектуємо записане рівняння на осі  $Bn$  і  $B\tau$ :

$$a_{Cn} = a_B \cos 60^\circ + a_{CB}^{\tau} = 6 \cdot 0,5 + 3,1 = 6,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{C\tau} = a_B \sin 60^\circ - a_{CB}^n = 6 \cdot 0,866 - 2,36 = 2,84 \text{ м/с}^2,$$

де

$$a_{CB}^{\tau} = \varepsilon \cdot (CB) = 62 \cdot 0,05 = 3,1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CB}^n = \omega \cdot (CB) = 6,88^2 \cdot 0,05 = 2,36 \text{ м/с}^2.$$

Повне прискорення точки  $C$ :

$$a_C = \sqrt{a_{Cn}^2 + a_{C\tau}^2} = \sqrt{6,1^2 + (2,84)^2} = 6,7 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $\omega = 0,69 \text{ рад/с}$ ;  $\varepsilon = 0,62 \text{ рад/с}^2$ ;

$$a_C = 6,7 \text{ м/с}^2.$$

## Задача №2

Рівносторонній трикутник  $ABC$  рухається в площині креслення. Прискорення вершин  $A$  та  $B$  в даний момент часу дорівнюють  $16 \text{ м/с}^2$  і направлені вздовж сторін трикутника (рис.4.19).

**Визначити** прискорення вершини  $C$ .

**Розв'язок.** Якщо відомі прискорення двох точок плоскої фігури, наприклад  $A$  і  $B$ , то задачу рекомендується розв'язувати в наступній послідовності:

1. Розглядаючи першу точку  $A$  як полюс поступального руху, записати векторне рівняння розподілу прискорень при плоскому русі для точки  $B$  і спроектувати це рівняння на пряму  $AB$ , що з'єднає обидві точки.
2. З рівняння проєкцій визначити величину нормального прискорення  $a_{BA}^n$  і значення кутової швидкості фігури  $\omega$ .
3. Спроектувати векторне рівняння розподілу прискорень при плоскому русі на пряму, яка перпендикулярна до  $AB$ , та визначити з рівняння проєкцій величину тангенціального прискорення  $\bar{a}_{BA}^\tau$  і значення кутового прискорення фігури  $\varepsilon$ .
4. Якщо треба, то, використовуючи формулу розподілення прискорень при плоскому русі, визначити прискорення будь-якої іншої точки плоскої фігури.

Розв'яжемо задачу, дотримуючись наведеної послідовності.

1. Оберемо за полюс точку  $A$ . Для точки  $B$  трикутника можна записати:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де  $\bar{a}_{BA}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене вздовж  $BA$  від точки  $B$  до точки  $A$ ;

$\bar{a}_{BA}^\tau$  - відносне тангенціальне прискорення точки  $B$  в її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене перпендикулярно до  $BA$ , напрямом за даємося (рис.4.19).

Спроектуємо записану рівність (1) на пряму  $AB$ :

$$-a_B = a_A \cos 60^\circ - a_{BA}^n + 0.$$



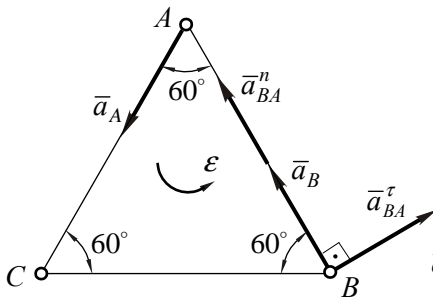


Рис.4.19

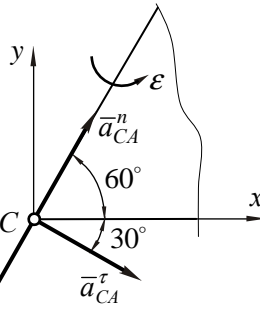


Рис.4.20

2. Звідки:

$$a_{BA}^n = a_B + a_A \cos 60^\circ = 16 + 16 \cdot 0,5 = 24 \text{ м/с}^2 .$$

Оскільки  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (BA)$ , то:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{(BA)}} = \sqrt{\frac{24}{(BA)}} \text{ рад/с} .$$

3. Спроєктуємо векторне рівняння на пряму, що перпендикулярна до  $AB$ :

$$0 = a_A \sin 60^\circ + 0 - a_{BA}^\tau .$$

Звідки:

$$a_{BA}^\tau = a_A \sin 60^\circ = 16 \cdot 0,866 = 13,86 \text{ м/с}^2 .$$

Враховуючи те, що  $a_{BA}^\tau = \varepsilon \cdot (BA)$ , отримаємо:

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^\tau}{(BA)} = \frac{13,86}{(BA)} \text{ рад/с}^2 .$$

Оскільки величина тангенціального прискорення  $\bar{a}_{BA}^\tau$  додатна, то його напрям на рис. 4.19 обрано вірно. Звідси випливає, що кутове прискорення направлено проти ходу годинникової стрілки.

4. Визначимо прискорення точки  $C$ , прийнявши за полюс точку  $A$ :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau, \quad (2)$$

де  $\bar{a}_{CA}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене вздовж  $CA$  від точки  $C$  до точки  $A$ ;

$\bar{a}_{CA}^\tau$  - відносне тангенціальне прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене перпендикулярно до  $CA$  в бік кутового прискорення фігури  $\varepsilon$ .

Враховуючи, що  $CA = BA$ , визначимо модулі відносного нормального і тангенціального прискорень:

$$a_{CA}^n = \omega^2 \cdot (CA) = \frac{24}{(BA)} \cdot (CA) = 24 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CA}^\tau = \varepsilon \cdot (CA) = \frac{13,86}{(BA)} \cdot (CA) = 13,86 \text{ м/с}^2.$$

Від точки  $C$  (рис.4.20) відкладемо вектори прискорень, які складають праву частину рівняння (2).

Оберемо систему координат  $xCy$ , причому вісь  $Cx$  напрямимо вздовж сторони  $CB$  трикутника.

Спроектуємо рівність (2) на осі обраної системи координат:

$$a_{Cx} = -a_A \cos 60^\circ + a_{CA}^n \cos 60^\circ + a_{CA}^\tau \cos 30^\circ;$$

$$a_{Cy} = -a_A \sin 60^\circ + a_{CA}^n \sin 60^\circ - a_{CA}^\tau \sin 30^\circ.$$

Підставляючи числові дані, отримаємо:

$$a_{Cx} = -16 \cdot 0,5 + 24 \cdot 0,5 + 13,86 \cdot 0,866 = 16 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -16 \cdot 0,866 + 24 \cdot 0,866 - 13,86 \cdot 0,5 = 0.$$

Таким чином, прискорення вершини  $C$  трикутника дорівнює:

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 16 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки проекція прискорення  $\bar{a}_C$  на вісь  $Sy$  дорівнює нулю і величина проекції на вісь  $Sx$  додатня, то вектор прискорення точки  $C$  буде направлений вздовж сторони  $CB$  трикутника від точки  $C$  до точки  $B$ .

**Відповідь:**  $a_C = 16 \text{ м/с}^2$ .

### Задача № 3

В шарнірному механізмі (рис.4.21) в даний момент часу кутова швидкість і кутове прискорення кривошипа  $OA$  дорівнюють  $\omega_0 = \pi \text{ рад/с}$ ;  $\varepsilon_0 = 0,2\pi \text{ рад/с}^2$ . Точка  $B$  механізму рухається по дузі кола радіусом  $O_1B = R = 0,3 \text{ м}$  і в момент часу, що розглядається, лежить на прямій  $OB$ .

**Знайти** прискорення точки  $B$  і миттєве кутове прискорення шатуна  $AB$ , якщо  $AB = 0,4 \text{ м}$ ,  $OA = 0,2 \text{ м}$ .

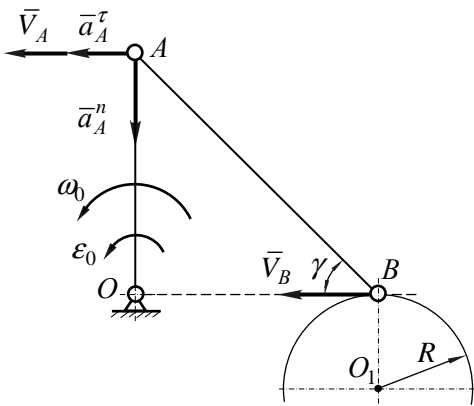


Рис.4.21

**Розв'язок.** Швидкість точки  $A$  кривошипа, який обертається навколо точки  $O$ , дорівнює:

$$V_A = \omega_0 \cdot (OA) = 0,2\pi \text{ м/с}.$$

Спрямована швидкість  $\bar{V}_A$  перпендикулярно до  $OA$  в бік кутової швидкості  $\omega_0$  (рис.4.21).

Точка  $B$  шатуна обертається навколо центра  $O_1$  і її лінійна швидкість направлена перпендику-

лярно до  $BO_1$ .

Оскільки швидкості точок  $A$  та  $B$  шатуна паралельні, то миттєвий центр швидкостей шатуна лежить в нескінченності і миттєвий рух шатуна є поступальним, тобто

$$\omega_{AB} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{V}_B = \bar{V}_A.$$

Прискорення точки  $A$  дорівнює геометричній сумі нормального і тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau,$$

де

$$a_A^n = \omega_0^2 \cdot (AO) = 0,2\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_A^\tau = \varepsilon_0 \cdot (AO) = 0,2 \cdot 0,2\pi = 0,04\pi \text{ м/с}^2.$$

Напрями прискорень  $\bar{a}_A^n$  і  $\bar{a}_A^\tau$  показані на рис.4.21.

Оберемо точку  $A$  за полюс для шатуна  $AB$ . Тоді для точки  $B$  шатуна:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau,$$

або

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_A^n + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau, \quad (1)$$

де  $\bar{a}_{BA}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене вздовж  $BA$  від точки  $B$  до точки  $A$ ,  $a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot (BA) = 0$ ;

$\bar{a}_{BA}^\tau$  - відносне тангенціальне прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $A$ , направлене перпендикулярно до  $BA$ , напрямом задається (рис.4.22),  $a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ .

Пов'яжемо з точкою  $B$  прямокутну систему координат  $xBy$  (рис.4.22) і спроектуємо рівняння (1), пам'ятаючи, що  $a_{BA}^n = 0$ , на осі обраної системи координат:

$$a_{Bx} = -a_A^\tau + a_{BA}^\tau \cdot \sin \gamma; \quad (2)$$

$$a_{By} = -a_A^n + a_{BA}^\tau \cdot \cos \gamma. \quad (3)$$

З іншого боку, при русі точки  $B$  по дузі кола радіуса  $R$ , точка набуває прискорення  $\bar{a}_B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau, \quad (4)$$

де  $\bar{a}_B^n$  - нормальне прискорення точки  $B$  у її обертальному русі навколо точки  $O_1$ , направлене до центра обертання;

$\bar{a}_B^\tau$  - тангенціальне прискорення точки  $B$  у її обертальному русі навколо точки  $O_1$ , направлене перпендикулярно до  $O_1B$ , напрямом задається (рис.4.22).

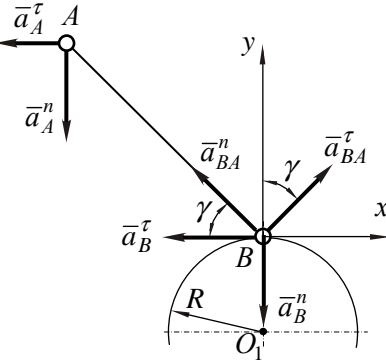


Рис.4.22

За величиною нормальне  $\bar{a}_B^n$  і тангенціальне  $\bar{a}_B^\tau$  прискорення відповідно дорівнюють:

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{R} = \frac{(0,2\pi)^2}{0,3} = \frac{0,4}{3}\pi^2, \text{ м/с}^2;$$

$$a_B^\tau = \varepsilon R.$$

Спроєкуємо рівняння (4) на осі обраної системи координат:

$$a_{Bx} = -a_B^\tau; \quad (5)$$

$$a_{By} = -a_B^n = -\frac{0,4}{3}\pi^2, \text{ м/с}^2. \quad (6)$$

Підставимо в (3) усі обраховані величини:

$$-\frac{0,4}{3}\pi^2 = -0,2\pi^2 + a_{BA}^\tau \cos \gamma.$$

Оскільки

$$\sin \gamma = \frac{OA}{AB} = 0,5 \Rightarrow \gamma = 30^\circ \Rightarrow \cos \gamma = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

то

$$a_{BA}^\tau = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( 0,2\pi^2 - \frac{0,4}{3}\pi^2 \right) = \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3}} = 0,77 \text{ м/с}^2.$$

Додатне значення величини  $a_{BA}^\tau$  вказує на те, що напрям  $\bar{a}_{BA}^\tau$  був обраний вірно.

Кутове прискорення тіла  $AB$  дорівнює:

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{(AB)} = \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3} \cdot 0,4} = 0,192\pi^2 = 1,9 \text{ рад/с}^2.$$

Кутове прискорення  $\varepsilon_{AB}$  направлене в бік  $\bar{a}_{BA}^\tau$ , тобто проти ходу годинникової стрілки.

Для визначення тангенціального прискорення  $\bar{a}_B^\tau$  в рівняння (2) підставимо  $\bar{a}_{Bx}$  з (5):

$$-a_B^\tau = -a_A^\tau + a_{BA}^\tau \sin \gamma.$$

Звідки

$$a_B^\tau = a_A^\tau + a_{BA}^\tau \sin \gamma = 0,04\pi - \frac{0,4\pi^2}{3\sqrt{3}} \cdot 0,5 = -0,254 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки величина  $a_B^\tau$  від'ємна, то напрям тангенціального прискорення  $\bar{a}_B^\tau$  обрано не в той бік.

Повне прискорення точки  $B$ :

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{0,77^2 + (-0,254)^2} = 0,81 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $a_B = 0,81 \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_{AB} = 1,9 \text{ рад/с}^2$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 18.12; 18.14; 18.22 [2].

## Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА (продовження)

### ЗАНЯТТЯ №7

#### План швидкостей

#### Зміст

- 4.10. План швидкостей.
- 4.11. Порядок розв'язування задач шляхом побудови плану швидкостей.
- 4.12. Контрольні запитання.
- 4.13. Приклади розв'язування задач.

#### 4.10. План швидкостей

Визначення швидкостей різних точок рухомої плоскої фігури легко може бути виконано графічно за допомогою побудови плану швидкостей.

*План швидкостей – це графічне зображення з єдиного центра (полюса) векторів абсолютних швидкостей точок фігури в фіксований момент її руху.*

План швидкостей може бути побудований, якщо:

- відома швидкість однієї точки плоскої фігури і напрям швидкості іншої точки;
- відома швидкість однієї точки плоскої фігури і миттєва кутова швидкість фігури.

Нехай відомі швидкості  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{V}_B$ ,  $\vec{V}_C$  і  $\vec{V}_D$ , вершин прямокутника  $ABCD$  (рис. 4.23,а). Для побудови плану швидкостей з довільної точки  $p$  (рис.4.23,б), яка називається полюсом плану швидкостей, відкладемо направлені відрізки  $(\overline{pa})$ ,  $(\overline{pb})$ ,  $(\overline{pc})$  і  $(\overline{pd})$ , які в обраному масштабі будуть зображати швидкості  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{V}_B$ ,  $\vec{V}_C$  і  $\vec{V}_D$ . Отримані точки  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $d$ , які називаються ве-

рщинами плану швидкостей, з'єднаємо між собою прямими лініями.

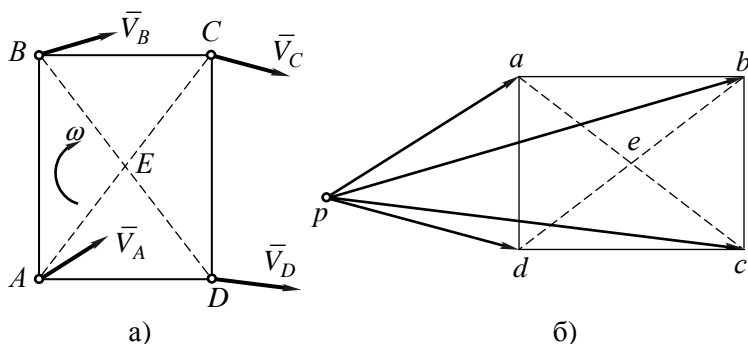


Рис. 4.23

Встановимо властивості і правила побудови плану швидкостей.

За рівнянням розподілу швидкостей при плоскому русі фігури, якщо за полюс прийняти точку  $A$ , то для точки  $B$  отримаємо:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}, \quad (4.14)$$

де  $\vec{V}_A$  - вектор абсолютної швидкості точки  $A$ ;

$\vec{V}_{BA}$  - вектор відносної швидкості точки  $B$  у відносному обертальному русі разом з тілом навколо точки  $A$ , направлена перпендикулярно до  $BA$  і за модулем дорівнює  $V_{BA} = \omega \cdot AB$ .

З іншого боку для векторів трикутника  $pab$  плану швидкостей (рис.4.23,б) можна записати:

$$\overline{pb} = \overline{pa} + \overline{ab}. \quad (4.15)$$

Ураховуючи, що вектори  $(\overline{pb})$  і  $(\overline{pa})$  зображають в обраному масштабі абсолютні швидкості  $\vec{V}_B$  і  $\vec{V}_A$ , та порівнюючи



рівняння (4.14) і (4.15), можна зробити висновок, що відрізок  $\overline{(ab)}$  зображає в масштабі швидкість  $\overline{V}_{BA}$ .

Таким чином, відрізок  $\overline{(ab)}$  плану швидкостей направлений перпендикулярно до сторони  $AB$  фігури і за модулем дорівнює:

$$(ab) = \omega \frac{(AB)}{\mu_V},$$

де  $\mu_V$  - масштабний коефіцієнт, який прийнятий при побудові плану швидкостей.

Аналогічно:

$$\begin{aligned} bc \perp BC, \quad (bc) &= \omega \frac{(BC)}{\mu_V}; \\ cd \perp CD, \quad (cd) &= \omega \frac{(CD)}{\mu_V}; \\ da \perp DA, \quad (da) &= \omega \frac{(DA)}{\mu_V}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Звідси миттєва швидкість обертання плоскої фігури:

$$\omega = \frac{(ab)\mu_V}{(AB)} = \frac{(bc)\mu_V}{(BC)} = \frac{(cd)\mu_V}{(CD)} = \frac{(da)\mu_V}{(DA)}. \quad (4.17)$$

Вектор  $\overline{(ab)}$  згідно рівнянню (4.14) направлений на плані швидкостей від точки  $a$  до точки  $b$ . Якщо цей вектор перенести в точку  $B$  фігури, то можна визначити напрям обертання точки  $B$  навколо точки  $A$  разом з фігурою (в даному випадку, за ходом годинникової стрілки). Напрямок же миттєвої кутової швидкості  $\omega$  плоскої фігури буде збігатися з напрямом її обертання.

З розглянутого витікає:

- *відрізки, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей на плані швидкостей, перпендикулярні відрізкам,*

що з'єднують відповідні точки тіла, і за модулем пропорційні цим відріzkам;

- (**теорема подібності**) багатокутник з вершинами  $abcd$  плану швидкостей подібний до багатокутника  $ABCD$  фігури і повернутий відносно останнього на  $90^\circ$  в бік обертального руху плоскої фігури.

#### 4.11. Порядок розв'язування задач

1. Зображають на кресленні в обраному масштабі плоску фігуру і вектор швидкості тієї точки, швидкість якої відома.
2. Визначають напрям швидкості другої точки плоскої фігури.
3. Записують векторне рівняння розподілу швидкостей при плоскому русі, приймаючи за полюс точку, швидкість якої відома, а за шукану ту точку, напрям швидкості якої відомий.
4. Розв'язують записане векторне рівняння графічно шляхом побудови в обраному масштабі плану швидкостей.
5. Визначають миттєву кутову швидкість обертання плоскої фігури.
6. Визначають швидкість інших точок плоскої фігури.

#### 4.12. Контрольні запитання

1. Які дані необхідні для побудови плану швидкостей?
2. Що являє собою відрізок, який з'єднує дві вершини плану швидкостей?
3. Як визначити миттєву кутову швидкість обертання плоскої фігури?
4. Як визначити напрям обертального руху плоскої фігури?
5. Яка точка називається полюсом плану швидкостей?
6. Яку точку обирають за полюс при складанні рівняння швидкостей для плоского руху?

### 4.13 Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

**Знайти** кутову швидкість  $\omega_2$  шатуна 2 і швидкість точки  $C$  повзуна 3 кривошипно-шатунного механізму (рис. 4.24), якщо :

$$\omega_1 = 10 \text{ рад/с}; \alpha = 30^\circ;$$

$$AB = 0,06 \text{ м}; \beta = 120^\circ.$$

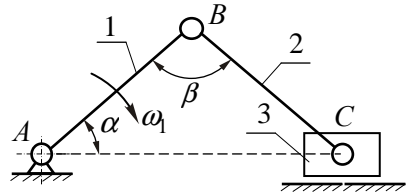


Рис. 4.24

#### **Розв'язування.**

1. Згідно з вихідними даними в довільному масштабі будемо схему механізму (рис.4.25,а).

2. Враховуючи, що кривошип 1 обертається навколо нерухомої точки  $A$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , визначаємо швидкість точки  $B$  кривошипа 1 і шатуна 2:

$$V_B = \omega_1 \cdot (AB) = 10 \cdot 0,06 = 0,6 \text{ м/с}.$$

Направлена швидкість  $\vec{V}_B$  перпендикулярно до  $AB$  в бік кутової швидкості  $\omega_1$ .

3. Наступною точкою шатуна, швидкість якої можна визначити, є точка  $C$ , оскільки вона, крім шатуна, одночасно належить і повзуну 3, що рухається поступально в горизонтальних напрямках. Тобто напрям цієї швидкості відомий.

Для визначення швидкості точки  $C$  запишемо рівняння розподілу швидкостей при плоскопаралельному русі, приймаючи за полюс точку  $B$ , швидкість якої відома:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}_{CB}$  - відносна швидкість точки  $C$  у її відносному обертовому русі разом з шатуном 2 навколо точки  $B$ . Вектор  $\vec{V}_{CB}$  направлений перпендикулярно до  $BC$ ;

$\bar{V}_C$  - абсолютна швидкість точки  $C$ , яка рухається прямолінійно разом з повзуном 3 в горизонтальних напрямках.

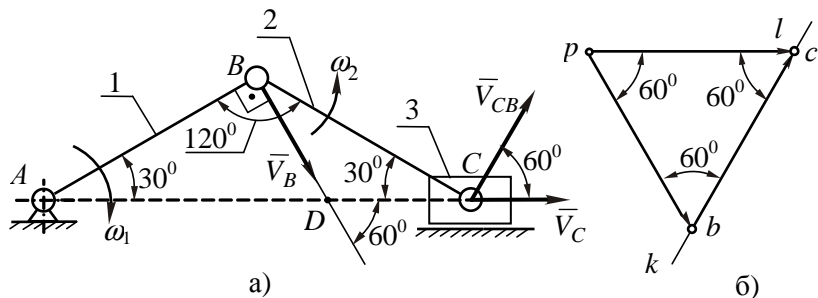


Рис. 4.25

4. Розв'яжемо рівняння (1) графічно (рис.4.25,б). Для цього з довільної точки  $p$  (полюса плану швидкостей) відкладемо направлений відрізок  $(\overline{pb})$ , який в певному масштабі буде зображати вектор швидкості  $\bar{V}_B$ . Через точку  $b$  цього відрізка проведемо лінію  $kl$  перпендикулярно до  $BC$ , вздовж якої від точки  $b$  буде направлений вектор швидкості  $\bar{V}_{CB}$ , довжина і напрям якого невідомі.

Вектор, що буде на плані швидкостей зображати абсолютну швидкість точки  $C$ , виходить з полюса  $p$  паралельно  $AC$  до перетину з лінією  $kl$  в точці  $C$ .

Визначимо напрям відрізка  $(\overline{bc})$ , який на плані швидкостей зображає відносну швидкість  $\bar{V}_{CB}$ . Оскільки, згідно рівняння (1), вектор  $\bar{V}_{CB}$  треба додати до вектора  $\bar{V}_B$ , який на плані швидкостей зображається вектором  $(\overline{pb})$ , то вектор  $(\overline{bc})$  буде направлений від точки  $b$  до точки  $C$ .

Отриманий векторний трикутник  $pbC$  являє собою план швидкостей для кривошипно-шатунного механізму в положенні,

що розглядається. Сторони цього трикутника в певному масштабі зображають:  $(\overline{pb})$  - абсолютну швидкість точки  $B$ ;  $(\overline{bc})$  - відносну швидкість точки  $C$  у її відносному обертовому русі разом з шатуном  $BC$  навколо точки  $B$ ;  $(\overline{pc})$  - абсолютну швидкість точки  $C$ .

Перенесемо з плану швидкостей в точку  $C$  на рис.4.25, а знайдені напрями швидкостей  $\overline{V}_{CB}$  і  $\overline{V}_C$ .

Оскільки швидкість  $\overline{V}_B$  на плані зображається вектором  $(\overline{pb})$ , а  $\overline{V}_C$  - вектором  $(\overline{pc})$ , то кут при вершині  $p$  буде дорівнювати куту між цими двома векторами швидкостей. Якщо на рис.4.25,а перенести  $\overline{V}_B$  і  $\overline{V}_C$  в точку  $D$ , то кут між ними буде складати  $60^\circ$ , тобто  $\angle p = 60^\circ$ .

Аналогічно,  $\angle c$  дорівнює куту між векторами  $\overline{V}_{CB}$  і  $\overline{V}_C$ . Враховуючи, що  $\overline{V}_{CB} \perp CB$  і  $\angle CBD = 30^\circ$ , з рис.4.25, а отримаємо:

$$\angle c = (\overline{V}_C, \overline{V}_{CB}) = 180^\circ - 30^\circ - 90^\circ = 60^\circ.$$

Таким чином, і кут при вершині  $b$  теж буде дорівнювати  $60^\circ$ , а трикутник  $pbC$  буде рівностороннім, тобто:

$$(\overline{pb}) = (\overline{pc}) = (\overline{bc}), \text{ або } V_B = V_C = V_{CB}.$$

5. Визначаємо миттєву кутову швидкість шатуна 2. Оскільки  $V_{CB} = \omega_2 \cdot (CB)$ , то:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{(CB)} = \frac{0,6}{0,06} = 10 \text{ рад/с},$$

де  $CB = AB = 0,06 \text{ м}$ , виходячи з того, що трикутник  $ABC$  (рис.4.25,а) рівнобедрений.

Напряма кутової швидкості  $\omega_2$  визначається вектором  $\overline{V}_{CB}$ . В даному випадку  $\omega_2$  направлена проти ходу годинникової стрілки.

**Відповідь:**  $\omega_2 = 10 \text{ рад/с}$ ,  $V_C = 0,6 \text{ м/с}$ .

### Задача №2

**Знайти** кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3 та абсолютні швидкості точок  $C$  і  $E$  важільного механізму (рис.4.26), якщо:  $\alpha = 60^\circ$ ;  $\beta = 30^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$ ;  $AB = BC = 0,05 \text{ м}$ ;  $BE = AB/2$ ;  $BE \perp BC$ .

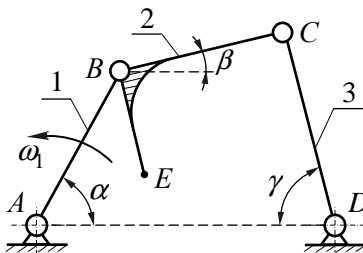


Рис. 4.26

Кутова швидкість кривошипа 1 -  $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$ .

### Розв'язок.

1. У відповідності з вихідними даними в довільному масштабі будемо схему механізму (рис.4.27,а).

2. Оскільки точка  $B$  належить кривошипу 1, який обертається навколо шарніра  $A$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , то:

$$V_B = \omega_1 \cdot (AB) = 20 \cdot 0,05 = 1 \text{ м/с}. \quad (1)$$

Вектор швидкості  $\vec{V}_B$  направлений перпендикулярно до  $AB$  в бік обертання кривошипа (рис.4.27,а).

2. Шатун 2 механізму рухається плоскопараллельно. Швидкість точки  $B$  шатуна 2 дорівнює швидкості точки  $B$  кривошипа 1. Другою точкою шатуна, напрям швидкості якої відомий, є точка  $C$ . Точка  $C$ , крім шатуна, належить і коромислу 3, яке обертається навколо центра  $D$ . Таким чином, швидкість точки  $C$  направлена перпендикулярно радіусу обертання  $CD$ .

3. Для визначення швидкості точки  $C$  запишемо формулу розподілення швидкостей:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}, \quad (2)$$

де  $\vec{V}_C$  - абсолютна швидкість точки  $C$ , яка направлена перпендикулярно до  $CD$ ;

$\vec{V}_B$  - абсолютна швидкість точки  $B$ ;

$\vec{V}_{CB}$  - відносна швидкість точки  $C$  у її відносному обертальному русі разом з шатуном 2 навколо полюса  $B$ . Направлений вектор  $\vec{V}_{CB}$  перпендикулярно до  $CB$ .

4. Розв'язуємо записане рівняння графічно. Для цього з довільної точки  $p$  (полюса плану швидкостей) (рис.4.27,б) проводимо вектор  $(\overline{pb})$  паралельно  $\vec{V}_B$ , який в певному масштабі буде зображати швидкість точки  $B$ .

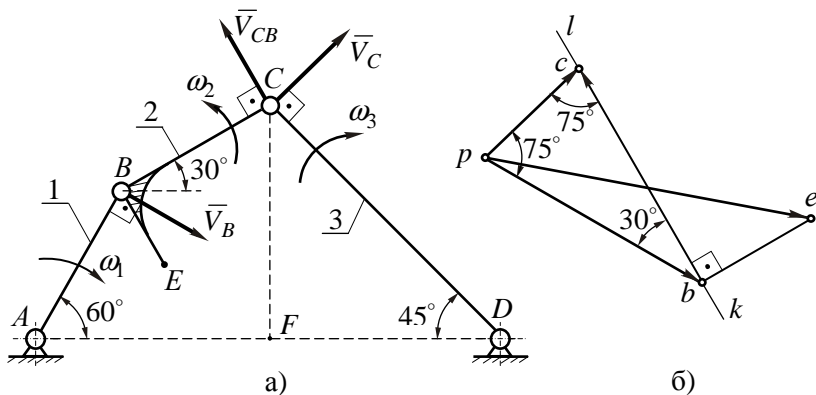


Рис. 4.27

Через кінець вектора  $(\overline{pb})$  проводимо лінію  $kl$  перпендикулярно до  $BC$ , вздовж якої від точки  $b$  буде направлений вектор відносної швидкості  $\vec{V}_{CB}$ . Довжина і напрям цього вектора невідомі.

Швидкість точки  $C$  направлена перпендикулярно до  $CD$  і, за правилом, повинна проходити через полюс плану швидкостей. Виходячи з цього, через точку  $p$  проводимо лінію перпендикулярну до  $CD$  до перетину в точці  $c$  з лінією  $kl$ .

Отриманий на рис. 4.27,б векторний трикутник  $pbc$  являє собою план швидкостей механізму в даному положенні. В цьому трикутнику вектор  $(\overline{pb})$  зображає абсолютну швидкість точки  $B$ , вектор  $(\overline{pc})$ , направлений від полюса до точки  $c$  - абсолютну швидкість точки  $C$ , а вектор  $(\overline{bc})$ , направлений від точки  $b$  до точки  $c$  - відносну швидкість  $\overline{V}_{CB}$ , оскільки, згідно рівнянню (2), ця швидкість додається до  $\overline{V}_B$ .

Перенесемо напрями швидкостей  $\overline{V}_{CB}$  і  $\overline{V}_C$  в точку  $C$  на рис. 4.27,а.

Оскільки  $pc \perp CD$ , а  $pb \perp AB$ , то кут при вершині  $c$  дорівнює куту при вершині  $F$  трикутника  $AFD$  на схемі механізму (рис. 4.28), який утворений шляхом продовження кривошипа  $AB$  і коромисла  $CD$  до перетину.

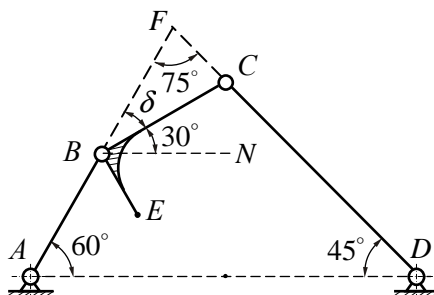


Рис.4.28

Таким чином

$$\angle c = \angle F = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

Кут при вершині  $b$  буде дорівнювати куту  $\delta$  між продовженням прямої  $AB$  (рис.4.28) і прямою  $BC$ , оскільки сторона  $pb \perp AB$ , а пряма  $kl \perp BC$ . Враховуючи, що  $\angle FBN = \angle BAD = 60^\circ$ , то:

$$\angle b = \delta = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Тоді кут при вершині  $p$ :

$$\angle p = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ.$$

Для визначення сторін  $\Delta pbc$  плану швидкостей скористаємося теоремою синусів:



$$\frac{(pb)}{\sin 75^\circ} = \frac{(cb)}{\sin 75^\circ} = \frac{(pc)}{\sin 30^\circ} . \quad (1)$$

З рівняння (1) отримаємо:

$$(cb) = (pb) \frac{\sin 75^\circ}{\sin 75^\circ} = (pb);$$

$$(pc) = (pb) \frac{\sin 30^\circ}{\sin 75^\circ} = (pb) \frac{0,5}{0,966} = 0,518(pb) .$$

Таким чином:

$$V_{CB} = V_B = 1 \text{ м/с};$$

$$V_C = 0,518V_B = 0,518 \text{ м/с} .$$

5. Визначимо миттєві кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3.

Оскільки  $V_{CB} = \omega_2 (CB)$ , то:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{(CB)} = \frac{1}{0,05} = 20 \text{ рад/с} .$$

Напрямок кутової швидкості  $\omega_2$  визначається напрямом відносної швидкості  $\bar{V}_{CB}$ . З рис.4.27,а видно, що кутова швидкість  $\omega_2$  буде направлена проти ходу годинникової стрілки.

Кутова швидкість коромисла 3 дорівнює:

$$\omega_3 = \frac{V_C}{(CD)} = \frac{0,518}{0,0966} = 5,36 \text{ рад/с} ,$$

де

$$(CD) = \frac{(CF)}{\sin 45^\circ} = \frac{0,0683}{0,707} = 0,097 \text{ м};$$

$$(CF) = (AB) \sin 60^\circ + (BC) \sin 30^\circ =$$

$$= 0,05 \cdot 0,866 + 0,05 \cdot 0,5 = 0,068 \text{ м} .$$

Напрямок  $\omega_3$  визначає швидкість  $\bar{V}_C$ . Направлена кутова швидкість коромисла 3 (рис.4.27,а) за ходом годинникової стрілки.

6. Визначити величини швидкостей  $\bar{V}_C$  та  $\bar{V}_{CB}$  можна безпосередньо і шляхом вимірювання відповідних відрізків на побудованому плані швидкостей.

Оскільки вектор  $\bar{V}_B$  на плані швидкостей зображається відрізком  $(pb) = 33,3$  мм, то масштабний коефіцієнт плану швидкостей буде дорівнювати:

$$\mu_V = \frac{V_B}{(pb)} = \frac{1}{33,3} = 0,03 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

Швидкості  $\bar{V}_C$  на плані швидкостей відповідає відрізок  $(pc) = 17$  мм, а швидкості  $\bar{V}_{CB}$  –  $(bc) = 33,3$  мм.

Тоді:

$$V_C = (pc) \cdot \mu_V = 17 \cdot 0,03 = 0,51 \text{ м/с};$$

$$V_{CB} = (bc) \cdot \mu_V = 33,3 \cdot 0,03 = 1 \text{ м/с}.$$

7. Для визначення швидкості точки  $E$  скористаємося теоремою подібності.

Оскільки фігура  $CBE$  на схемі механізму і фігура  $cbe$  на плані швидкостей повинні бути подібними, то можна скласти пропорцію:

$$\frac{(BE)}{(BC)} = \frac{(be)}{(bc)}. \quad (2)$$

В лівій частині пропорції (2) відношення відрізків на схемі механізму, а в правій - на плані швидкостей.

З рівняння (2) отримаємо відстань від точки  $b$  до точки  $e$  на плані швидкостей:

$$(be) = (bc) \frac{(BE)}{(BC)} = 33,3 \frac{0,025}{0,05} = 16,7 \text{ мм}.$$

Оскільки на схемі механізму відрізок  $BE$  перпендикулярний до  $BC$ , то і на плані швидкостей відрізок  $be$  треба провести перпендикулярно до  $bc$ , причому в той бік, щоб обхід точок  $c, b$  та  $e$  на плані швидкостей мав бути проти ходу годинникової стрілки, як і для точок  $C, B$  та  $E$  на схемі механізму.

Вектор швидкості  $\vec{V}_E$  точки  $E$  на плані швидкостей в масштабі буде зображатися вектором  $(pe)$ , а величина швидкості точки  $E$  дорівнює:

$$V_E = (pe) \cdot \mu_V = 43,5 \cdot 0,03 = 1,32 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_C = 0,518 \text{ м/с}$ ;  
 $V_E = 1,32 \text{ м/с}$ ;

$$\omega_2 = 20 \text{ рад/с};$$

$$\omega_3 = 5,36 \text{ рад/с}.$$

### Задача №3

До складу важільного механізму (рис.4.29) входять два кривошипа 1 і 4, та два шатуну 2 і 3. Кривошип 1 обертається з кутовою швидкістю  $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$ , а кривошип 4 - з кутовою швидкістю  $\omega_4 = 40 \text{ рад/с}$ .

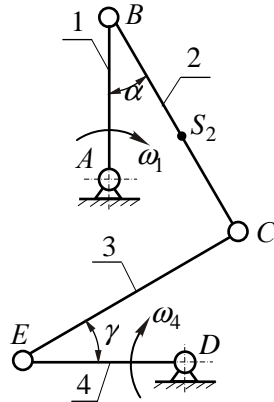


Рис.4.29

**Знайти** кутові швидкості шатунів 2 і 3 та абсолютні швидкості точок  $C$  і  $S_2$ , якщо:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$ ;  $AB = ED = 0,25 \text{ м}$ ;  $BC = CE = 0,4 \text{ м}$ ;  $BS_2 = BC/2$ . В даному положенні механізму кривошип 1 розташований вертикально, а кривошип 2 – горизонтально.

**Розв'язок.** Особливість цієї задачі полягає в тому, що визначити відразу напрям швидкості точки  $C$  неможливо. Але точка  $C$  одночасно належить до двох тіл (шатуну  $BC$  та шатуну  $CE$ ), і для неї можна записати два векторних рівняння розподілу швидкостей при плоскому русі (відносно точок  $B$  та  $E$ ), що дозволяє розв'язати задачу.

1. У відповідності з вихідними даними в довільному масштабі будемо схему механізму (рис.4.30,а).

2. Оскільки точка  $B$  належить кривошипу 1, який обертається навколо шарніра  $A$  з кутовою швидкістю  $\omega_1$ , то:

$$V_B = \omega_1 \cdot (AB) = 20 \cdot 0,25 = 5 \text{ м/с.}$$

Вектор швидкості  $\vec{V}_B$  направлений перпендикулярно до  $AB$  в бік обертання кривошипа 1 (рис.4.30, а).

Шатун 2 механізму рухається плоскопаралельно. Швидкість точки  $B$  шатуна 2 дорівнює швидкості точки  $B$  кривошипа 1.

Для визначення швидкості точки  $C$  шатуна 2 запишемо формулу розподілу швидкостей при плоскому русі:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB}, \quad (1)$$

де  $\vec{V}_C$  - абсолютна швидкість точки  $C$ , величина і напрям якої є невідомим;

$\vec{V}_B$  - абсолютна швидкість точки  $B$ ;

$\vec{V}_{CB}$  - відносна швидкість точки  $C$  при її обертанні разом з шатуном 2 навколо полюса  $B$ . Направлений вектор  $\vec{V}_{CB}$  перпендикулярно до  $CB$ .

В рівнянні (1) три невідомих: величина і напрям швидкості точки  $C$ ; величина швидкості  $\vec{V}_{CB}$ . Оскільки векторне рівняння

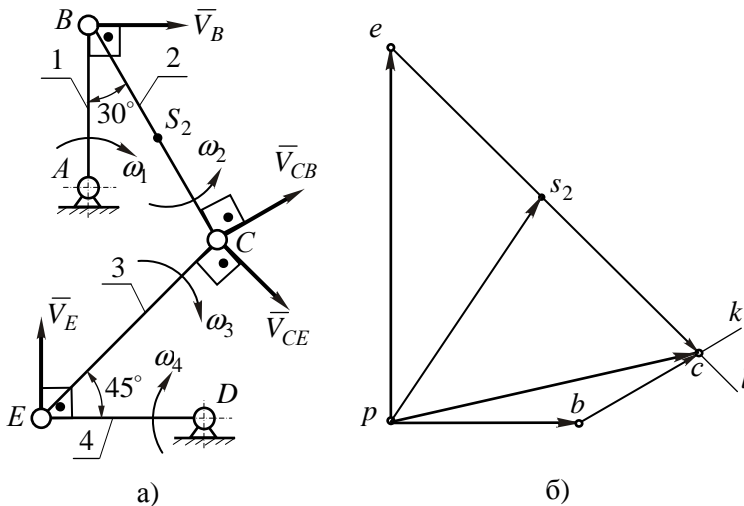


Рис.4.30

для площини дозволяє визначити тільки дві невідомих, то розв'язати рівняння (1) неможливо.

3. Розглянемо визначення швидкості точки  $C$  шатуна 3 відносно точки  $E$ .

Швидкість точки  $E$  кривошипа 4 дорівнює:

$$V_E = \omega_4 \cdot (ED) = 40 \cdot 0,25 = 10 \text{ м/с}.$$

Вектор швидкості  $\vec{V}_E$  направлений перпендикулярно до  $ED$  в бік обертання кривошипа 4 (рис.4.30,а).

Враховуючи, що шатун 3 механізму рухається плоскопаралельно, то для визначення швидкості точки  $C$  шатуна 3 запишемо формулу розподілу швидкостей при плоскому русі:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_E + \vec{V}_{CE}, \quad (2)$$

де  $\vec{V}_E$  - абсолютна швидкість точки  $E$  ;

$\vec{V}_{CE}$  - відносна швидкість точки  $C$  у її відносному обертальному русі разом з шатуном 3 навколо полюса  $E$  . Направлений вектор  $\vec{V}_{CE}$  перпендикулярно до  $CE$  .

В записаній системі векторних рівнянь (1,2) чотири невідомі: величина і напрям швидкості точки  $C$ ; величина швидкості  $\vec{V}_{CB}$ ; величина швидкості  $\vec{V}_{CE}$  . Оскільки з кожного рівняння можна визначити дві невідомих, то записана система є визначеною і її можна розв'язати.

4. Розв'язуємо записану систему векторних рівнянь (1) та (2) графічно. Для цього з довільної точки  $p$  побудуємо спочатку рівняння (1), а потім (2) (рис.4.30,б).

Згідно рівнянню (1) з довільної точки  $p$  проводимо вектор  $(\overline{pb})$  паралельно  $\vec{V}_B$ , який зображатиме швидкість точки  $B$ . Довжину відрізка  $(pb)$  оберемо 25 мм.

Тоді масштабний коефіцієнт плану швидкостей буде дорівнювати:

$$\mu_V = \frac{V_B}{(pb)} = \frac{5}{25} = 0,2 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

Через кінець вектора  $(\overline{pb})$  проводимо лінію  $bk$  перпендикулярно до  $BC$ , вздовж якої від точки  $b$  буде направлений вектор відносної швидкості  $\overline{V}_{CB}$ . Довжина і напрям цього вектора невідомі.

Тепер побудуємо з того ж самого полюса  $p$  рівняння (2). Спочатку відкладемо вектор  $(\overline{pe})$  паралельно  $\overline{V}_E$ , який в масштабі  $\mu_V$  буде зображати швидкість точки  $E$ . Довжина цього вектора відповідно дорівнює:

$$(\overline{pe}) = \frac{V_E}{\mu_V} = \frac{10}{0,2} = 50 \text{ мм.}$$

Через кінець вектора  $(\overline{pe})$  проводимо лінію  $el$  перпендикулярно до  $EC$ , вздовж якої від точки  $e$  буде направлений вектор відносної швидкості  $\overline{V}_{CE}$ .

Точка перетину  $c$  прямих  $bk$  та  $el$ , яка одночасно задовольняє векторним рівнянням (1) та (2), і буде розв'язком системи, а вектор, який на плані швидкостей зображає  $\overline{V}_C$ , буде направлений від полюса  $p$  до точки  $c$ .

Отриманий на рис. 4.30,б чотирикутник  $pbce$  являє собою план швидкостей механізму в даному положенні. В цьому чотирикутнику: вектор  $(\overline{bc})$  визначає відносну швидкість  $\overline{V}_{CB}$ ; вектор  $(\overline{ec})$  - відносну швидкість  $\overline{V}_{CE}$ ;  $(\overline{pc})$  - абсолютну швидкість точки  $C$ .

Перенесемо напрями швидкостей  $\overline{V}_{CB}$  та  $\overline{V}_{CE}$  на рис. 4.30,а і, помірявши довжини відповідних відрізків, визначимо величини цих швидкостей:

$$V_{CB} = (bc) \cdot \mu_V = 18,5 \cdot 0,2 = 3,7 \text{ м/с};$$

$$V_{CE} = (ec) \cdot \mu_V = 57,5 \cdot 0,2 = 11,6 \text{ м/с};$$

$$V_C = (pc) \cdot \mu_V = 42 \cdot 0,2 = 8,4 \text{ м/с}.$$

5. Визначимо миттєві кутові швидкості шатунів.

Оскільки  $V_{CB} = \omega_2 (CB)$ , то:

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{(CB)} = \frac{3,7}{0,4} = 9,25 \text{ рад/с}.$$

Напрямок кутової швидкості  $\omega_2$  визначається напрямком відносної швидкості  $\vec{V}_{CB}$ . З рис.4.30,а видно, що  $\omega_2$  буде направлена проти ходу годинникової стрілки.

Аналогічно, кутова швидкість шатуна 3 дорівнює:

$$\omega_3 = \frac{V_{CE}}{(EC)} = \frac{11,6}{0,4} = 29 \text{ рад/с}.$$

Напрямок  $\omega_3$  визначається відносною швидкістю  $\vec{V}_{CE}$ . Направлена кутова швидкість шатуна 3 за ходом годинникової стрілки.

Для визначення швидкості точки  $S_2$  скористаємося теоремою подібності. Оскільки точка  $S_2$  на схемі механізму лежить посередині шатуна  $BC$ , то і на плані швидкостей вона повинна лежати посередині відрізка  $(bc)$ .

Вектор швидкості  $\vec{V}_{S_2}$  точки  $S_2$  на плані швидкостей в масштабі буде зображатися вектором  $(\overline{ps_2})$ , а величина швидкості точки  $S_2$  дорівнює:

$$V_{S_2} = (ps_2) \cdot \mu_V = 36 \cdot 0,2 = 7,2 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_C = 8,4 \text{ м/с}$ ;  $V_{S_2} = 7,2 \text{ м/с}$ ;

$$\omega_2 = 9,25 \text{ рад/с}; \quad \omega_3 = 29 \text{ рад/с}.$$

## Тема 4. ПЛОСКИЙ РУХ ТІЛА (продовження)

### ЗАНЯТТЯ № 8

#### План прискорень

##### Зміст

- 4.14 План прискорень.
- 4.15 Контрольні запитання
- 4.16 Приклади розв'язування задач.

#### 4.14. План прискорень

Розглянемо графічний спосіб визначення прискорень точок плоскої фігури (тіла) за допомогою плану прискорень.

*Планом прискорень плоскої фігури є геометричне місце кінців векторів прискорень будь-яких точок фігури, що відкладені з однієї довільної точки, яку називають полюсом плану прискорень.*

Побудова плану прискорень базується на представленні прискорення  $\bar{a}_B$  будь якої точки  $B$  фігури у вигляді суми трьох векторів:

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^{\tau}, \quad (4.18)$$

де  $\bar{a}_A$  - прискорення точки фігури, яку прийнято за полюс поступального руху;

$\bar{a}_{BA}^n$  - відносне нормальне (доцентрове) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з тілом навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення від точки  $B$  до точки  $A$  і за модулем дорівнює  $a_{BA}^n = \omega^2 \cdot (BA)$ ;

$\bar{a}_{BA}^{\tau}$  - відносне тангенціальне (дотичне) прискорення точки  $B$  у її відносному обертальному русі разом з тілом



навколо полюса  $A$ . Направлене це прискорення перпендикулярно до  $\vec{a}_{BA}^n$  (відрізка  $AB$ ) в бік кутового прискорення  $\varepsilon$  тіла і за модулем дорівнює  $a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot (BA)$ .

Оскільки для визначення величини  $\vec{a}_{BA}^n$  треба знати кутову швидкість  $\omega$  плоскої фігури, то, якщо вона не задана, попередньо треба побудувати план швидкостей. З плану швидкостей визначити відносну швидкість обертання однієї точки фігури відносно другої і знайти кутову швидкість відносного обертального руху (заняття 7).

Для того, щоб рівняння (4.18) можна було розв'язати, повинно бути відоме прискорення  $\vec{a}_A$  будь-якої точки  $A$  фігури, яку обирають за полюс поступального руху.

Крім того, повинно бути відомо:

- *Випадок 1 - напрям прискорення точки  $B$  фігури, для якої записано векторне рівняння (4.18).*
- *Випадок 2 - прискорення  $\vec{a}_C$  точки  $C$  фігури, відносно якої, як полюса, можна записати для точки  $B$  друге векторне рівняння, аналогічне (4.18).*
- *Випадок 3 - в точці  $B$  до фігури приєднане інше тіло, відносно точки якого можна записати друге векторне рівняння для точки  $B$ , аналогічне (4.18).*

Розглянемо визначення прискорень точок  $B$  і  $C$  трикутника  $ABC$  (рис.4.31, а). Відомими є прискорення точки  $A$ , напрям прискорення точки  $B$  і кутова швидкість трикутника  $ABC$ , тобто випадок 1.

Для прискорення точки  $B$ , якщо за полюс обрати точку  $A$ , буде справедливим векторне рівняння (4.18).

Розв'яжемо рівняння (4.18) графічно. Для цього (рис.4.31,б) з довільної точки  $\pi$  (полюса плану прискорень) побудуємо вектор  $\overline{\pi a}$ , який в масштабі буде зображати прискорення  $\vec{a}_A$ . З кінця побудованого вектора (точки  $a$ ) побудуємо вектор  $\overline{\pi_{BA}}$ , який в тому ж масштабі буде зображати прискорення  $\vec{a}_{BA}^n$ .

Величину прискорення  $\bar{a}_{BA}^n$  визначимо з формули:

$$a_{BA}^n = \omega^2 (BA),$$

а направлений цей вектор вздовж  $BA$  від точки  $B$  до точки  $A$ .

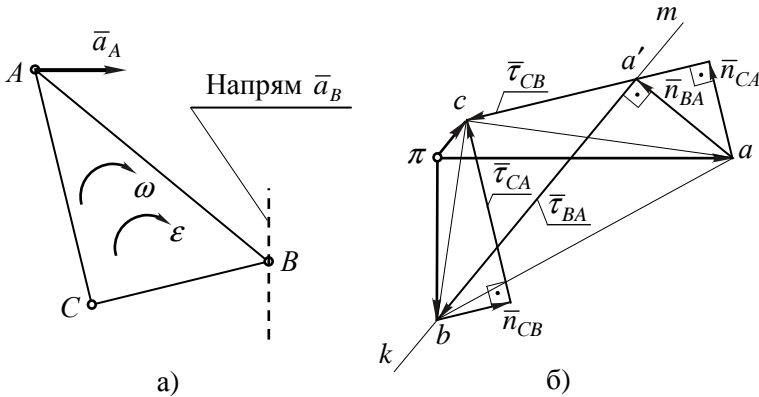


Рис.4.31

До нормального прискорення додамо, згідно рівнянню (4.18), тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{BA}^\tau$ . Оскільки величина цього прискорення невідома, то через точку  $a'$  (кінець вектора  $\bar{n}_{BA}$ ) проведемо лінію  $mk$  перпендикулярно до  $BA$ , вздовж якої і буде направлений вектор  $\bar{a}_{BA}^\tau$ .

Напрямок абсолютного прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$  відомий з умови задачі. Оскільки всі абсолютні прискорення точок на плані відкладаються від полюса  $\pi$ , то через полюс проведемо пряму, паралельну напрямку прискорення точки  $B$ . Точка перетину  $b$  ліній  $mk$  і  $\pi b$  буде рішенням рівняння (4.18), а вектор  $(\pi b)$  буде в обраному масштабі зображати прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$ .

Для визначення прискорення точки  $C$  скористаємося тим, що відомими вже є прискорення двох точок фігури  $A$  і  $B$  (випадок 2).

Запишемо векторні рівняння для прискорення точки  $C$  відносно полюсів  $A$  і  $B$ :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau; \quad (4.19)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau, \quad (4.20)$$

де  $\bar{a}_{CA}^n$  і  $\bar{a}_{CB}^n$  - відносні нормальні прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі відповідно навколо точок  $A$  і  $B$ ;

$\bar{a}_{CA}^\tau$  і  $\bar{a}_{CB}^\tau$  - відносні тангенціальні прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точок  $A$  і  $B$ , відповідно.

Першим розв'язуємо рівняння (4.19). Оскільки прискорення  $\bar{a}_A$  точки  $A$  на плані (рис.4.31,б) вже побудоване, то з його кінця (точки  $a$ ) будуюмо вектор  $\bar{n}_{CA}$ , який направлений від точки  $C$  до точки  $A$  і за модулем в масштабі дорівнює  $\bar{a}_{CA}^n$ :

$$a_{CA}^n = \omega^2 \cdot (CA).$$

Через кінець вектора  $\bar{n}_{CA}$  проводимо пряму, перпендикулярну до  $CA$ , вздовж якої буде направлене прискорення  $\bar{a}_{CA}^\tau$  і на якій буде лежати точка кінця вектора  $\bar{a}_C$ .

Наступним побудуємо рівняння (4.20). Оскільки прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$  на плані вже побудоване, то з його кінця, точки  $b$ , будуюмо вектор  $\bar{n}_{CB}$ , який направлений від  $C$  до  $B$  і за модулем в масштабі дорівнює  $\bar{a}_{CB}^n$ :

$$a_{CB}^n = \omega^2 \cdot (CB).$$

Через кінець вектора  $\bar{n}_{CB}$  проводимо пряму, перпендикулярну до  $CB$ , вздовж якої буде направлене прискорення  $\bar{a}_{CB}^\tau$  і на якій буде лежати точка кінця вектора  $\bar{a}_C$ .

Таким чином, кінець вектора  $\bar{a}_C$  буде лежати на перетині ліній, вздовж яких будуть направлені тангенціальні прискорення

$\bar{a}_{CA}^{\tau}$  і  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$ . Вектор ( $\bar{\pi c}$ ) на плані прискорень буде в масштабі зображати абсолютне прискорення точки  $C$ .

Вектори ( $\bar{\pi a}$ ), ( $\bar{\pi b}$ ) і ( $\bar{\pi c}$ ), які виходять з полюса плану прискорень, визначають абсолютні прискорення точок  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Відрізки ж, які з'єднують кінці векторів абсолютних прискорень ( $ab$ ), ( $bc$ ) і ( $ac$ ) визначають відносні прискорення одних точок при їх обертанні навколо інших ( $\bar{a}_{BA}$ ,  $\bar{a}_{CB}$ ,  $\bar{a}_{CA}$ ).

Крім абсолютних і відносних прискорень точок фігури  $ABC$ , визначається величина її кутового прискорення  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \frac{a_{BA}^{\tau}}{(BA)}, \text{ або } \varepsilon = \frac{a_{CA}^{\tau}}{(CA)}, \text{ або } \varepsilon = \frac{a_{CB}^{\tau}}{(CB)}.$$

Для визначення ж напрямку кутового прискорення  $\varepsilon$  треба перенести в точку  $B$  вектор тангенціального прискорення  $\bar{a}_{BA}^{\tau}$  і напрям цього вектора вкаже напрям кутового прискорення. В даному випадку, кутове прискорення  $\varepsilon$  направлене за ходом годинникової стрілки.

Трикутник  $abc$ , який утворився на плані прискорень, буде подібним до трикутника  $ABC$ .

Таким чином, для плану прискорень справедливе

*правило подібності: фігура, яку утворюють кінці векторів абсолютних прискорень точок тіла на плані прискорень подібна до фігури, яку однойменні точки утворюють на тілі.*

#### 4.15. Контрольні запитання

1. Які дані необхідні для побудови плану прискорень?
2. Яка точка називається полюсом плану прискорень?
3. Які прискорення зображають вектори, що виходять з полюса плану прискорень?
4. Як визначити величину і напрям кутового прискорення фігури?
5. Скільки векторних рівнянь треба записати для точки, величина і напрям прискорення якої невідомі?

## 4.16. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

**Знайти** прискорення точки  $C$  повзуна 3 і кутове прискорення  $\varepsilon_2$  шатуна 2 механізму, зображеному на рис.4.24. Вихідні дані:  $\omega_1 = 10 \text{ рад/с}$ ;  $AB = 0,06 \text{ м}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 120^\circ$ , кривошип 1 обертається рівномірно ( $\omega_1 = \text{const}$ ).

**Розв'язок.** План швидкостей для цього механізму був побудований в задачі № 1 заняття № 7 (рис.4.25,б) і була визначена кутова швидкість шатуна 2  $\omega_2 = 10 \text{ рад/с}$ .

1. Побудуємо схему механізму (рис. 4.32,а).

2. Спочатку знайдемо прискорення точки  $B$  механізму, оскільки вона належить кривошипу 1, який обертається навколо точки  $A$  з відомою кутовою швидкістю.

Враховуючи, що кутова швидкість кривошипа стала ( $\omega_1 = \text{const}$ ), то  $\varepsilon_1 = 0$  і повне прискорення  $\bar{a}_B$  буде дорівнювати нормальному прискоренню  $\bar{a}_{BA}^n$  ( $\bar{a}_{BA}^\tau = \varepsilon_1 \cdot AB = 0$ ) точки  $B$  в її обертальному русі навколо  $A$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA}^n.$$

За модулем:

$$a_B = a_{BA}^n = \omega_1^2 \cdot (AB) = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \text{ м/с}^2.$$

Направлене прискорення  $\bar{a}_B$  від точки  $B$  до точки  $A$  по лінії  $BA$ .

3. Для визначення прискорення точки  $C$  запишемо формулу розподілу прискорень при плоскому русі, прийнявши за полюс точку  $B$ , прискорення якої вже відомо:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^\tau, \quad (1)$$

де  $\bar{a}_C$  - абсолютне прискорення точки  $C$ , яке направлене по напрямку руху повзуна 3 в горизонтальних напрямках;

$\bar{a}_B$  - прискорення точки  $B$ , відоме за величиною і за напрямком;

$\bar{a}_{CB}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $C$  у її відносному обертальному русі навколо точки  $B$ , направлене по шатуну  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 (CB) = 10^2 \cdot 0,06 = 6 \text{ м/с}^2 ;$$

$\bar{a}_{CB}^\tau$  - тангенціальне прискорення точки  $C$  при її обертанні навколо точки  $A$ , направлене перпендикулярно до шатуна  $CB$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot (CB) .$$

Оскільки напрям прискорення точки  $C$  відомий, то рівняння (1) достатньо для визначення  $\bar{a}_C$ .

4. Розв'яжемо рівняння (1) графічно шляхом побудови плану прискорень.

З довільної точки  $\pi$  полюса плану прискорень (рис.4.32,б) відкладемо вектор  $(\pi b)$ , що буде зображати прискорення  $\bar{a}_B$ , і який направлений паралельно лінії  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ . Від кінця цього вектора відкладемо вектор  $\bar{n}_{CB}$ , що буде зображати  $\bar{a}_{CB}^n$ , і який направлений паралельно  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$ . Через кінець вектора  $\bar{n}_{CB}$ , точку  $b'$ , проведемо лінію  $lm$ , перпендикулярну до  $BC$ , вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CB}^\tau$  і на цій лінії буде лежати

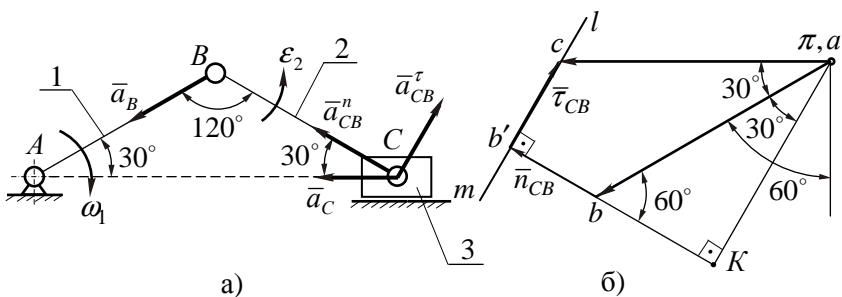


Рис.4.32

точка  $c$  - кінець вектора абсолютного прискорення точки  $C$  механізму.

Оскільки прискорення  $\bar{a}_C$  направлене по осі  $AC$  руху повзуна 3, то з полюса  $\pi$  проводимо горизонтальну пряму. Точка перетину  $c$  цієї прямої з лінією  $lm$ , що проведена перпендикулярно до  $BC$ , буде кінцем вектора прискорення точки  $C$ , а вектор  $\bar{\tau}_{CB}$  буде зображати на плані прискорень  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$ .

4. З побудованого плану прискорень визначимо абсолютні величини прискорень  $\bar{a}_C$  і  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$ . Для цього з полюса  $\pi$  опустимо перпендикуляр  $\pi K$  на продовження лінії  $bb'$ . Кут  $c\pi b$  дорівнює куту  $b\pi K$  і складає  $30^\circ$ .

З векторного чотирикутника  $\pi cb'b$  (рис. 4.32,б) витікає:

$$(\overline{\pi c}) = (\overline{\pi b}) + \bar{n}_{CB} + \bar{\tau}_{CB}. \quad (2)$$

Спроекуємо векторне рівняння (2) на пряму  $b'K$ :

$$-(\pi c) \cdot \sin 60^\circ = -(\pi b) \cdot \sin 30^\circ - n_{CB}. \quad (3)$$

Враховуючи, що  $(\overline{\pi c})$  зображає на плані прискорень  $\bar{a}_C$ ,  $(\overline{\pi b}) - \bar{a}_B$ , а  $\bar{n}_{CB} - \bar{a}_{CB}^n$ , рівняння (3) можна переписати наступним чином:

$$-a_C \sin 60^\circ = -a_B \sin 30^\circ - a_{CB}^n.$$

Звідки:

$$a_C = \frac{a_B \sin 30^\circ + a_{CB}^n}{\sin 60^\circ} = \frac{6 \cdot 0,5 + 6}{\sqrt{3}/2} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3} \text{ м/с}^2.$$

Тепер спроекуємо рівняння (2) на пряму  $K\pi$ :

$$-(\pi c) \cdot \cos 60^\circ = \tau_{CB} - (\pi b) \cdot \cos 30^\circ. \quad (3)$$

Враховуючи, що  $\bar{\tau}_{CB}$  на плані прискорень зображає  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$ , отримаємо:

$$-a_C \cos 60^\circ = a_{CB}^{\tau} - a_B \cos 30^\circ.$$

Звідки:

$$a_{CB}^{\tau} = a_B \cos 30^\circ - a_C \cos 60^\circ = 6 \frac{\sqrt{3}}{2} - 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Оскільки  $a_{CB}^{\tau} = 0$ , то:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{(BC)} = 0.$$

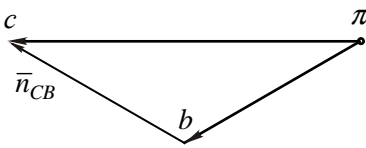


Рис.4.33

З отриманого результату випливає, що в даний момент часу шатун механізму обертається рівномірно ( $\varepsilon_2 = 0$ ) і план прискорень буде мати вигляд як на рис.4.33.

**Відповідь:**  $a_C = 6\sqrt{3} \text{ м/с}^2$ ;  $\varepsilon_2 = 0$ .

Якщо побудову плану прискорень виконувати з дотриманням масштабу, то прискорення характерних точок можна визначити безпосередньо вимірюванням відповідних відрізків на плані прискорень.

### Задача №2

**Знайти** абсолютне прискорення точок  $C$  і  $E$  та кутові прискорення шатуна 2 і коромисла 3 шарнірного механізму, схема якого зображена на рис.4.26, якщо:  $AB = BC = 0,05 \text{ м}$ ;  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$ . Кривошип 1 механізму обертається з сталою кутовою швидкістю  $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$ .

**Розв'язок.** План швидкостей механізму для положення, що розглядається, був побудований в задачі № 2 заняття № 7 (рис.4.27,б) і визначені миттєві кутові швидкості шатуна 2 і коромисла 3:  $\omega_2 = 20 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_3 = 5,36 \text{ рад/с}$ .

Розв'яжемо задачу шляхом побудови в масштабі плану прискорень.



1. Спочатку в довільному масштабі будуюмо схему механізму (рис.4.34,а).

2. Визначимо прискорення точки  $B$  кривошипу.

Оскільки кривошип 1 обертається навколо нерухомої точки  $A$  з сталою кутовою швидкістю  $\omega_1$  (тобто  $\varepsilon_1 = 0$  і відповідно  $a_{BA}^r = 0$ ), то прискорення  $\bar{a}_B$  точки  $B$ :

$$\bar{a}_B = \bar{a}_{BA}^n.$$

За модулем  $\bar{a}_B$  дорівнює:

$$a_B = a_B^n = \omega_1^2 \cdot (BA) = 20^2 \cdot 0,05 = 20 \text{ м/с}^2.$$

Направлене прискорення  $\bar{a}_B$  від точки  $B$  до точки  $A$ .

3. Запишемо векторні рівняння для визначення прискорення точки  $C$ .

Точка  $C$  належить одночасно шатуну 2 і коромислу 3 (випа-док 3). У шатуна 2 відоме вже визначене прискорення точки  $B$ , а у коромисла 3 прискорення точки  $D$  (точка  $D$  нерухома, тобто  $a_D = 0$ ). Таким чином, можна записати формули розподілу прискорень для точки  $C$ , взявши за полюс точку  $B$  для шатуна 2 в першому рівнянні і точку  $D$  для коромисла 3 в другому рівнянні:

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^r; \quad (1)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_D + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^r, \quad (2)$$

де  $\bar{a}_{CB}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $C$  у її відносно-му обертальному русі навколо точки  $B$ , направлене вздовж  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot (CB) = 20^2 \cdot 0,05 = 20 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_{CB}^{\tau}$  - відносне тангенціальне прискорення точки  $C$  у її відносному оберտальному русі навколо точки  $B$ , направлене перпендикулярно до  $BC$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CB}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot (CB);$$

$\bar{a}_{CD}^n$  - відносне нормальне прискорення точки  $C$  у її відносному оберտальному русі навколо точки  $D$ , направлене вздовж  $CD$  від точки  $C$  до точки  $D$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CD}^n = \omega_3^2 \cdot (CD) = 5,36^2 \cdot 0,0966 = 27,75 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_{CD}^{\tau}$  - відносне тангенціальне прискорення точки  $C$  у її відносному оберտальному русі навколо точки  $D$ , направлене перпендикулярно до  $CD$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CD}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot (CD).$$

4. Розв'яжемо графічно систему векторних рівнянь (1,2).

Спочатку побудуємо рівняння (1). Для цього з довільної точки  $\pi$  полюса плану прискорень (рис.4.34,б) відкладемо вектор  $(\bar{\pi b})$ , який буде зображати прискорення  $\bar{a}_B$ . Направлений вектор  $(\bar{\pi b})$  паралельно лінії  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ . Довжину цього вектора оберемо  $(\pi b) = 16 \text{ мм}$ . Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} = \frac{20}{16} = 1,25 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Від кінця вектора  $(\bar{\pi b})$  відкладемо вектор  $\bar{n}_{CB}$ , який буде зображати  $\bar{a}_{CB}^n$ . Направлений вектор  $\bar{n}_{CB}$  паралельно  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$ , а довжина цього вектора дорівнює:

$$n_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{20}{1,25} = 16 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\bar{n}_{CB}$  проведемо лінію перпендикулярну до  $BC$ , вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  і на цій лінії буде лежати точка  $c$  - кінець вектора абсолютного прискорення точки  $C$  механізму.

Наступним побудуємо рівняння (2).

Оскільки  $a_D = 0$ , то точка  $d$  буде лежати в полюсі  $\pi$  плану прискорень.

Від точки  $d$  відкладемо вектор  $\bar{n}_{CD}$ , який буде зображати  $\bar{a}_{CD}^n$ . Направлений вектор  $\bar{n}_{CD}$  паралельно  $CD$  від точки  $C$  до точки  $D$ , а довжина цього вектора відповідно дорівнює:

$$n_{CD} = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a} = \frac{27,75}{1,25} = 22 \text{ мм} .$$

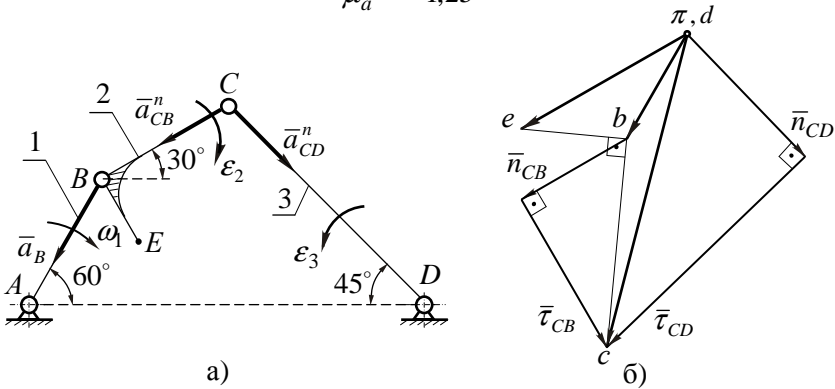


Рис.4.34

Через кінець вектора  $\bar{n}_{CD}$  проведемо лінію перпендикулярну до  $CD$ , вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CD}^{\tau}$ .

Розв'язком системи (1,2) буде точка  $c$ , в якій перетинаються лінії, що були проведені перпендикулярно до  $CB$  і  $CD$ , вздовж яких направлені відповідно тангенціальні прискорення  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  і  $\bar{a}_{CD}^{\tau}$ .

Вектор абсолютного прискорення  $\bar{a}_C$  точки  $C$  на плані прискорень в масштабі буде зображатися вектором  $(\overline{\pi c})$ , а величина прискорення точки  $C$  дорівнює:

$$a_C = (\pi c) \cdot \mu_a = 41 \cdot 1,25 = 51 \text{ м/с}^2.$$

Величини тангенціальних прискорень  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  і  $\bar{a}_{CD}^{\tau}$  знайдемо шляхом вимірювання відповідних відрізків на плані прискорень:

$$a_{CB}^{\tau} = \tau_{CB} \cdot \mu_a = 22,5 \cdot 1,25 = 28 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CD}^{\tau} = \tau_{CD} \cdot \mu_a = 36 \cdot 1,25 = 45 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_{CB}^{\tau} = \varepsilon_2 \cdot (CB)$  і  $a_{CD}^{\tau} = \varepsilon_3 \cdot (CD)$ , то миттєві кутові прискорення  $\varepsilon_2$  шатуна 2 і  $\varepsilon_3$  коромисла 3 відповідно дорівнюють:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^{\tau}}{(CB)} = \frac{28}{0,05} = 560 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^{\tau}}{(CD)} = \frac{45}{0,0966} = 466 \text{ рад/с}^2,$$

де  $(CD) = 0,0966 \text{ м}$  – довжина коромисла 3, яка була визначена в задачі №2 заняття №7.

Для визначення напрямку кутового прискорення  $\varepsilon_2$  перенесемо подумки в точку  $C$  відносно тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  ( $\bar{\tau}_{CB}$ ). Напрямок  $\bar{a}_{CB}^{\tau}$  вказує на те, що  $\varepsilon_2$  буде направлене за ходом годинникової стрілки.

Аналогічно, для визначення напрямку  $\varepsilon_3$  в точку  $C$  перенесемо  $\bar{a}_{CD}^{\tau}$  ( $\bar{\tau}_{CD}$ ). Кутове прискорення  $\varepsilon_3$  буде направлене проти ходу годинникової стрілки.

5. Для визначення прискорення точки  $E$  скористаємося теоремою подібності.

Для цього спочатку побудуємо пряму  $bc$  на плані прискорень (рис.4.34,б). Оскільки фігура  $CBE$  на схемі механізму і фі-

гура  $cbe$  на плані прискорень повинні бути подібними, то можна скласти пропорцію:

$$\frac{(BE)}{(BC)} = \frac{(be)}{(bc)}. \quad (3)$$

В лівій частині пропорції (3) відношення відрізків на схемі механізму, а в правій - на плані прискорень.

З рівняння (3) отримаємо відстань від точки  $b$  до точки  $e$  на плані прискорень:

$$(be) = (bc) \frac{(BE)}{(BC)} = 27,5 \frac{0,025}{0,05} = 13,8 \text{ мм.}$$

Оскільки на схемі механізму відрізок  $BE$  перпендикулярний до  $BC$ , то і на плані прискорень відрізок  $be$  треба провести перпендикулярно до  $bc$ , причому в той бік, щоб розташування точок  $c, b$  та  $e$  на плані прискорень було проти ходу годинникової стрілки, як і точок  $C, B$  та  $E$  на схемі механізму.

Вектор абсолютного прискорення  $\bar{a}_E$  точки  $E$  на плані прискорень в масштабі буде зображатися вектором  $(\overline{\pi e})$ , а величина прискорення точки  $E$  дорівнює:

$$a_E = (\overline{\pi e}) \cdot \mu_a = 12,5 \cdot 1,25 = 15,6 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**

$$a_C = 51 \text{ м/с}^2; \quad a_E = 15,6 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_2 = 560 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_3 = 466 \text{ рад/с}^2.$$

### Задача №3

До складу важільного механізму (рис.4.35) входять два кривошипа 1 і 4, та два шатуна 2 і 3. Кривошип 1 в даний момент часу обертається рівномірно з кутовою швидкістю  $\omega_1 = 20 \text{ рад/с}$ , а кривошип 4 – сповільнено з кутовою швид-

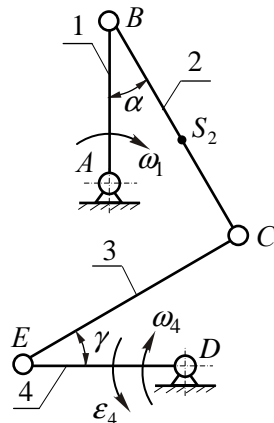


Рис.4.35

кістю  $\omega_4 = 40 \text{ рад/с}$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon_4 = 500 \text{ рад/с}^2$ .

**Знайти** кутові прискорення шатунів 2 і 3 та абсолютні прискорення точок  $C$  і  $S_2$ , якщо:  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$ ;  $AB = ED = 0,25 \text{ м}$ ;  $BC = CD = 0,4 \text{ м}$ ;  $BS_2 = BC/2$ . В даному положенні механізму кривошип 1 розташований вертикально, а кривошип 4 – горизонтально.

**Розв'язок.** План швидкостей механізму для положення, що розглядається, був побудований в задачі №3 заняття №7 (рис.4.30,б) і визначені миттєві кутові швидкості шатуна 2 і шатуна 3:  $\omega_2 = 9,25 \text{ рад/с}$ ;  $\omega_3 = 29 \text{ рад/с}$ .

1. В довільному масштабі побудуємо схему механізму (рис. 4.36,а).

2. Спочатку визначимо абсолютні прискорення точок  $B$  і  $E$ , що належать відповідно кривошипам 1 і 4, кутові швидкості яких відомі.

Оскільки кривошип 1 обертається навколо нерухомої точки  $A$  з сталою кутовою швидкістю ( $\omega_1 = \text{const}$ ,  $\varepsilon_1 = 0$ ), тобто  $a_B^r = \varepsilon_1 \cdot (AB) = 0$ , то:

$$\begin{aligned} \bar{a}_B &= \bar{a}_B^n; \\ a_B &= a_B^n = \omega_1^2 \cdot (AB) = 20^2 \cdot 0,25 = 100 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Направлене прискорення  $\bar{a}_B$  вздовж кривошипа  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ .

Кривошип 4 обертається навколо нерухомої точки  $D$  з кутовою швидкістю  $\omega_4$  і кутовим прискоренням  $\varepsilon_4$ . Оскільки кривошип 4 обертається сповільнено, то кутове прискорення направлене протилежно кутовій швидкості (рис.4.35.)

Абсолютне прискорення точки  $E$  кривошипа 4 являє собою векторну суму нормальної і тангенціальної складових:

$$\bar{a}_E = \bar{a}_E^n + \bar{a}_E^r. \quad (1)$$

Нормальна складова прискорення точки  $E$  направлена вздовж  $ED$  від точки  $E$  до точки  $D$  і за модулем дорівнює:

$$a_E^n = \omega_4^2 \cdot (ED) = 40^2 \cdot 0,25 = 400 \text{ м/с}^2,$$

а тангенціальна – перпендикулярно до  $ED$  в бік кутового прискорення  $\varepsilon_4$  і за модулем дорівнює:

$$a_E^r = \varepsilon_4 \cdot (ED) = 500 \cdot 0,25 = 125 \text{ м/с}^2.$$

3. Запишемо векторні рівняння для визначення прискорення точки  $C$ .

Точка  $C$  належить одночасно шатуна 2 і шатуна 3. У шатуна 2 відоме прискорення точки  $B$ , а у шатуна 3 - точки  $E$ . Таким чином, можна записати формули розподілу прискорень для точки  $C$ , взявши за полюс точку  $B$  для шатуна 2 в першому рівнянні і точку  $E$  шатуна 3 в другому :

$$\bar{a}_C = \bar{a}_B + \bar{a}_{CB}^n + \bar{a}_{CB}^r; \quad (2)$$

$$\bar{a}_C = \bar{a}_E + \bar{a}_{CE}^n + \bar{a}_{CE}^r, \quad (3)$$

В рівнянні (2):

$\bar{a}_{CB}^n$  – направлене вздовж  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 \cdot (CB) = 9,25^2 \cdot 0,4 = 34 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_{CB}^r$  – направлене перпендикулярно до  $BC$ , величина і напрям цього прискорення невідомі.

В рівнянні (3):

$\bar{a}_{CE}^n$  – направлене вздовж  $CE$  від точки  $C$  до точки  $E$  і за модулем дорівнює:

$$a_{CE}^n = \omega_3^2 \cdot (CE) = 29^2 \cdot 0,4 = 336 \text{ м/с}^2;$$

$\bar{a}_{CE}^r$  – направлене перпендикулярно до  $CE$ , величина і напрям цього прискорення невідомі.

4. Розв'яжемо графічно систему векторних рівнянь (2,3).

Спочатку побудуємо рівняння (2). Для цього з довільної точки  $\pi$  полюса плану прискорень (рис.4.36,б) відкладемо вектор

$(\overline{\pi b})$ , який буде зображати прискорення  $\overline{a}_B$ . Направлений вектор  $(\overline{\pi b})$  паралельно лінії  $AB$  від точки  $B$  до точки  $A$ . Довжину цього вектора оберемо  $(\pi b) = 12,5$  мм. Тоді масштабний коефіцієнт плану прискорень буде дорівнювати:

$$\mu_a = \frac{a_B}{(\pi b)} = \frac{100}{12,5} = 8 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Від кінця вектора  $(\overline{\pi b})$  відкладемо вектор  $\overline{n}_{CB}$ , який буде зображати  $\overline{a}_{CB}^n$ . Направлений вектор  $\overline{n}_{CB}$  паралельно  $CB$  від точки  $C$  до точки  $B$ , а довжина цього вектора дорівнює:

$$n_{CB} = \frac{a_{CB}^n}{\mu_a} = \frac{34}{8} = 4,25 \approx 4 \text{ мм}.$$

Через кінець вектора  $\overline{n}_{CB}$  проведемо лінію перпендикулярну до  $BC$ , вздовж якої буде направлене тангенціальне прискорення  $\overline{a}_{CB}^\tau$  і на цій лінії буде лежати точка  $c$  - кінець вектора абсолютного прискорення точки  $C$  механізму.

Наступним побудуємо рівняння (3).

Для побудови вектора  $\overline{a}_E$  від полюса  $\pi$  згідно рівнянню (1) відкладемо вектор  $\overline{n}_E$ , а з його кінця  $\overline{\tau}_E$ . Ці вектори в масштабі  $\mu_a$  будуть зображати прискорення  $\overline{a}_E^n$  та  $\overline{a}_E^\tau$  і будуть направлені їм паралельно (рис. 4.36, а).

Довжини векторів  $\overline{n}_E$  і  $\overline{\tau}_E$  відповідно дорівнюють:

$$n_E = \frac{a_E^n}{\mu_a} = \frac{400}{8} = 50 \text{ мм};$$

$$\tau_E = \frac{a_E^\tau}{\mu_a} = \frac{125}{8} = 15,6 \text{ мм}.$$

Абсолютне прискорення  $\overline{a}_E$  точки  $E$  на плані прискорень буде зображатися вектором  $(\overline{\pi e})$ .



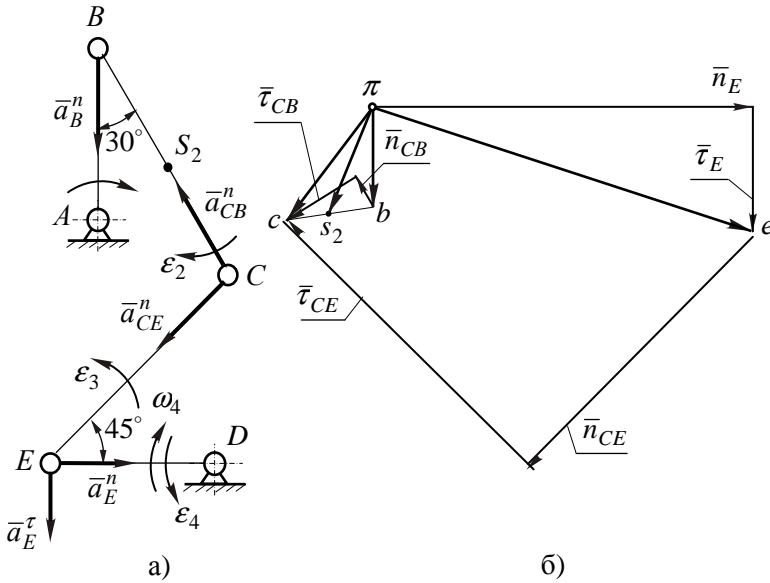


Рис.4.36

Від точки  $e$  відкладемо вектор  $\bar{n}_{CE}$ , який буде зображати  $\bar{a}_{CE}^n$ . Направлений вектор  $\bar{n}_{CE}$  паралельно  $CE$  від точки  $C$  до точки  $E$ , а довжина цього вектора дорівнює:

$$n_{CE} = \frac{a_{CE}^n}{\mu_a} = \frac{336}{8} = 42 \text{ мм} .$$

Через кінець вектора  $\bar{n}_{CE}$  проведемо лінію перпендикулярну до  $CE$ , вздовж якої буде направлено тангенціальне прискорення  $\bar{a}_{CE}^\tau$ .

Розв'язком системи (2,3) буде точка  $c$ , в якій перетинаються лінії, що були проведені перпендикулярно до  $CB$  і  $CE$ , вздовж яких направлені відповідно тангенціальні прискорення  $\bar{a}_{CB}^\tau$  і  $\bar{a}_{CE}^\tau$ .

Вектор абсолютного прискорення  $\bar{a}_C$  точки  $C$  на плані прискорень в масштабі буде зображатися вектором  $(\overline{\pi c})$ , а величина прискорення точки  $C$  дорівнює:

$$a_C = (\pi c) \cdot \mu_a = 14 \cdot 8 = 112 \text{ м/с}^2.$$

Величини тангенціальних прискорень  $\bar{a}_{CB}^\tau$  і  $\bar{a}_{CE}^\tau$  знайдемо шляхом вимірювання відповідних відрізків на плані прискорень:

$$a_{CB}^\tau = \tau_{CB} \cdot \mu_a = 10,5 \cdot 8 = 84 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CE}^\tau = \tau_{CE} \cdot \mu_a = 44 \cdot 8 = 352 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_{CB}^\tau = \varepsilon_2 \cdot (CB)$  і  $a_{CE}^\tau = \varepsilon_3 \cdot (CE)$ , то миттєві кутові прискорення  $\varepsilon_2$  шатуна 2 і  $\varepsilon_3$  шатуна 3 відповідно дорівнюють:

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{(CB)} = \frac{84}{0,4} = 210 \text{ рад/с}^2;$$

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CE}^\tau}{(CE)} = \frac{352}{0,4} = 880 \text{ рад/с}^2.$$

Напрями кутових прискорень  $\varepsilon_2$  і  $\varepsilon_3$  визначаємо шляхом перенесення подумки в точку  $C$  відносних тангенціальних прискорень  $\bar{a}_{CB}^\tau$  і  $\bar{a}_{CE}^\tau$  (аналогічно задачі №2). Кутове прискорення  $\varepsilon_2$  направлене за ходом годинникової стрілки, а  $\varepsilon_3$  - проти ходу годинникової стрілки.

5. Для визначення прискорення точки  $S_2$  скористаємося теоремою подібності. Оскільки точка  $S_2$  на схемі механізму лежить посередині шатуна  $BC$ , то і на плані прискорень вона повинна лежати посередині відрізка  $(bc)$ . Вектор прискорення  $\bar{a}_{S_2}$  точки  $S_2$  на плані прискорень в масштабі буде зображатися вектором  $(\overline{\pi s_2})$ , а величина абсолютного прискорення точки  $S_2$  дорівнює:

$$a_{S_2} = (\pi s_2) \cdot \mu_a = 13 \cdot 8 = 104 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $a_C = 112 \text{ м/с}^2$ ;  $a_{S_2} = 104 \text{ м/с}^2$ ;

$$\varepsilon_2 = 210 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_3 = 880 \text{ рад/с}^2.$$

# РОЗДІЛ ДРУГИЙ

## СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

**Статикою** називається розділ теоретичної механіки, який вивчає властивості сил та умови рівноваги твердих тіл.

Основною задачею **статики** є встановлення законів рівноваги твердих матеріальних об'єктів.

В навчальному посібнику розглядаються наступні теми статистики:

1. в'язі та їх реакції;
2. система збіжних сил;
3. довільна плоска система сил;
4. рівновага тіл при наявності тертя;
5. розрахунок ферм;
6. довільна просторова система сил;
7. центр тяжіння.

### Тема 1. В'ЯЗИ

#### ЗАНЯТТЯ № 1

##### *Зміст*

- 1.1. Основні поняття та аксіоми статистики.
- 1.2. Реакції в'язей.
- 1.3. Види навантажень, що діють на тіла.
- 1.4. Контрольні запитання.
- 1.5. Приклади розв'язування задач.

#### **1.1. Основні поняття та аксіоми статистики**

В теоретичній механіці користуються абстрактними уявленнями про *матеріальну точку* і *абсолютно тверде тіло*.

Матеріальне тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати, називається **матеріальною точкою**.

**Абсолютно твердим** називають таке тіло, в якому відстань між двома його точками при усіх умовах залишається незмінною (інакше кажучи, тіло не деформується).

**Силою** в механіці називають векторну величину, яка є мірою механічної взаємодії матеріальних тіл. Одиницею вимірювання сили в системі СІ є **1 Ньютон**, який визначається як сила, що надає тілу масою в 1 кг прискорення  $1 \text{ м/с}^2$ . Механічна сила визначається лінією дії, напрямом та числовим значенням сили.

Пряма, вздовж якої направлений вектор сили, називається **лінією дії сили**.

Сукупність сил, що прикладена до даного тіла, називається **системою сил**. Система сил, під дією якої тіло знаходиться в рівновазі, називається **еквівалентною нулю**, або **зрівноваженою**.

Якщо система сил еквівалентна одній силі, то така сила називається **рівнодіючою** даної системи сил.

Розв'язування задач статички базується на застосуванні ряду аксіом та теорем.

**Аксіома 1.** (перший закон Ньютона). *Ізольована від зовнішньої дії матеріальна точка знаходиться в стані спокою або рухається прямолінійно і рівномірно.*

**Аксіома 2.** *Дві сили, що прикладені до абсолютно твердого тіла, взаємно зрівноважені тоді і тільки тоді, коли вони рівні за модулем та діють уздовж однієї прямої в протилежні боки.*

**Аксіома 3.** *Прикладення або відкидання системи взаємно зрівноважених сил не змінює дію даної системи на абсолютно тверде тіло.*

**Наслідок з аксіом 2 та 3.** *Не змінюючи дію даної системи сил на абсолютно тверде тіло можна точку прикладання кожної сили переносити вздовж лінії її дії в будь-яку точку тіла.*

**Аксиома 4.** (аксіома про паралелограм сил). *Рівнодіюча двох сил, які прикладені до даної точки абсолютно твердого тіла і направлені під кутом одна до одної, прикладена до тієї ж точки і зображається діагоналлю паралелограма, що побудований на даних силах, як на сторонах.*

**Аксиома 5.** (дії та протидії). *Сили, з якими діють одне на одне два тіла, завжди рівні за модулем і направлені вздовж однієї прямої в протилежні боки.*

**Аксиома 6.** *Рівновага змінного (такого, що деформується) тіла, яке знаходиться під дією даної системи сил, не порушиться, якщо вважати, що тіло затверділо (стало абсолютно твердим).*

## 1.2. Реакції в'язей

У більшості задач на рівновагу розглядають невільні тверді тіла, тобто тіла, що знаходяться під дією інших тіл, з якими вони взаємодіють і які заважають їх переміщенню.

Все те, що обмежує переміщення даного тіла, називається **в'яззю**. В'язь діє на тіло, що розглядається, з деякою силою, яку називають **реакцією в'язі**. Для визначення кожної реакції, як і будь якої сили, необхідно знати її величину, напрям та лінію дії.

**Аксиома в'язей.** *Будь яке невільне тіло можна звільнити від в'язей, замінивши їх дію реакціями, після чого розглядати тіло як вільне, що знаходиться в рівновазі під дією заданих сил і реакцій.*

Незважаючи на велику кількість фізично існуючих в'язей, більшість з них може бути зведена до наступних типів.

### 1.2.1. Ідеально гладка поверхня

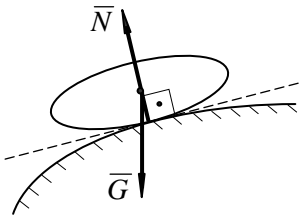


Рис. 1.1

Якщо сила тертя, що виникає між тілом та поверхнею (площиною) в'язі незначна, і при розгляданні реакції поверхні нею можна знехтувати, то поверхня в'язі називається **ідеально гладкою**.

Якщо тіло спирається на ідеально гладку поверхню (рис.1.1), то реакція такої поверхні або площини направлена перпендикулярно до їх спільної дотичної і виникає в точці дотику.

### 1.2.2. Ідеальна нитка

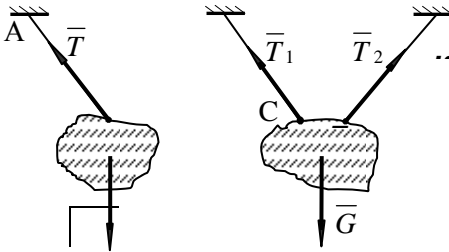


Рис. 1.2

В'язь (рис.1.2), що виконана у вигляді гнучкої нерозтяжної нитки (мотузки, каната, троса, ланцюга), не дає тілу віддалятися від точки підвісу нитки за напрямом  $AM$ .

Таким чином, реакція  $\bar{T}$  ( $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$ ) натягнутої нитки буде напрямлена вздовж нитки до точки її підвісу.

### 1.2.3. Реакції опор балок

**Балкою** називається матеріальне тіло, поперечними розмірами якого можна знехтувати в порівнянні з довжиною.

#### Циліндрична шарнірно-нерухома опора

Циліндричною шарнірно-нерухомою опорою (циліндричним шарніром) називається таке з'єднання двох тіл, яке допускає обертання обох тіл навколо їх загальної осі  $A$  (рис.1.3), або тільки одного з них відносно другого.

На рис.1.3,а схематично показана конструкція циліндричного шарніра, а на рис. 1.3,б його умовне зображення на схемі. Шарнірно-нерухома опора перешкоджає будь-якому поступаль-

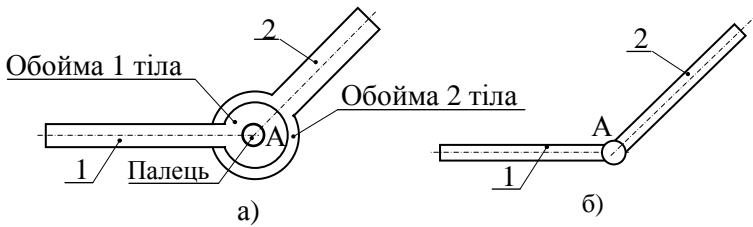


Рис. 1.3

ному руху тіла, але надає йому можливість вільно обертатися навколо осі шарніра  $A$ .

Центр шарніра є точкою прикладення опорної реакції  $\bar{R}_A$ , величина і напрям якої невідомі.

Реакцію  $\bar{R}_A$  можна розкласти на дві складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат (рис.1.4). Одну з осей координат доцільно напрямляти уздовж осі балки.

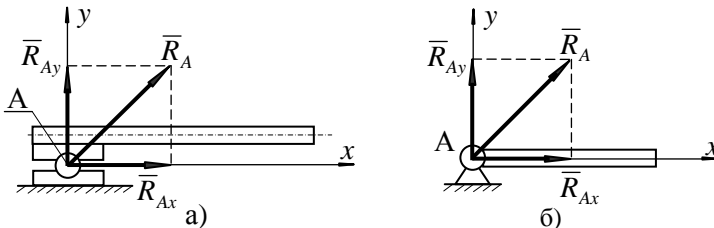


Рис. 1.4

### Циліндрична шарнірно-рухома опора

Шарнірно - рухома опора відрізняється від шарнірно-нерухомої тим, що та її частина, яка спирається на опорну поверхню, не закріплена жорстко, а поставлена на котки. Таке закріплення не перешкоджає переміщенню системи по лінії кочення котків (рис.1.5).

На рис.1.5,а схематично показана конструкція шарнірно-рухомої опори, а на рис. 1.5,б її умовне зображення на схемі.

Якщо не враховувати тертя котків, то реакція рухомої опори  $\bar{R}_B$  буде направлена перпендикулярно до площини кочення котків і проходить через вісь  $B$  шарніра.

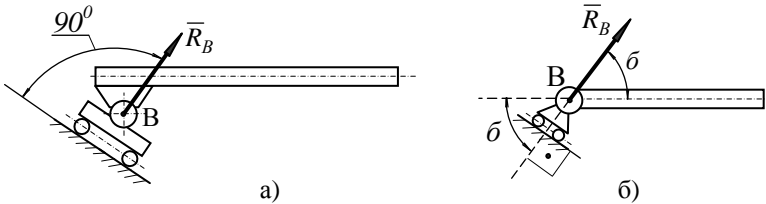


Рис. 1.5

#### 1.2.4. Жорстке защемлення

Нехай балка  $AB$  своїм кінцем жорстко замурована в стінку (рис.1.6). Таке закріплення не допускає ні поступального руху балки, ні обертального. Якщо на балку діють зовнішні сили, то в точці защемлення виникає як реакція  $\bar{R}_A$ , так і додаткова пара сил з моментом защемлення  $M_3$ .

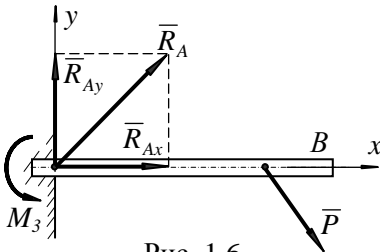


Рис. 1.6

Модуль та напрям реакцій  $\bar{R}_A$  і моменту  $M_3$  невідомі. Рекомендується розкласти реакцію  $\bar{R}_A$  на дві складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$ , за осями обраної системи координат. Момент защемлення  $M_3$  рекомендується приймати додатнім, тобто направленим проти ходу годинникової стрілки.

#### 1.2.5. Сферичний шарнір

Сферичний шарнір (рис.1.7) допускає обертання стержня  $OA$  в просторі навколо точки  $O$  (центра шарніра).

Реакція опори  $\bar{R}_O$  на сферичну частину стержня  $I$  невідома за модулем і напрямом, але її лінія дії проходить через центр



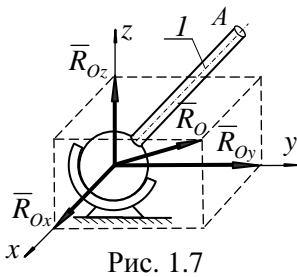


Рис. 1.7

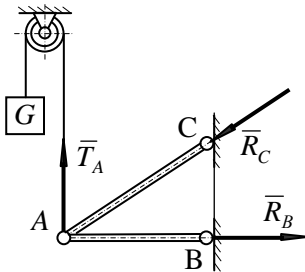


Рис. 1.8

шарніра  $O$ . Рекомендується розкласти реакцію сферичного шарніра  $R$  на складові  $\vec{R}_{Ox}$ ,  $\vec{R}_{Oy}$ ,  $\vec{R}_{Oz}$  (рис.1.7) за осями обраної системи координат.

### 1.2.6. Реакція невагомego ідеального стержня

На рис.1.8 показано закріплення тіла  $G$  за допомогою кронштейна, який складається з стержнів, вагою яких можна знехтувати. У кожного з стержнів на кінцях закріплені шарніри ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ), якими стержні з'єднуються між собою або приєднуються до інших елементів конструкції.

Оскільки вагою стержнів і силами тертя в шарнірах нехтують, то на кожен із стержнів будуть діяти дві зрівноважені сили, які прикладені до шарнірів і направлені вздовж прямої, що проходить через центри шарнірів.

Ці сили можуть як розтягувати ( $\vec{R}_B$ ) так і стискувати ( $\vec{R}_C$ ) стержень.

## 1.3. Види навантажень, що діють на тіла

Навантаження діляться на *зосереджені і розподілені*.

**Зосереджені** сили прикладаються до тіла на площадці, розміри якої дуже малі в порівнянні з розмірами тіла, і тому в розрахунках приймають, що такі сили прикладені до якої-небудь точки тіла. Зосереджені сили, як правило, позначають літерами  $\vec{P}$  і  $\vec{F}$ . Одиницею вимірювання зосереджених сил є *Ньютон (Н)*.

**Розподілене навантаження** прикладається до тіла вздовж лінії. Величина розподіленого навантаження, що діє на одиницю довжини тіла, називається *інтенсивністю навантаження* і познача-

ється літерою  $\bar{q}$ . Одиницею вимірювання інтенсивності розподіленого навантаження є  $H/м$ . Фігура, яка зображає розподілене навантаження, називається **епюрою розподіленого навантаження**.

Рівномірно розподілене навантаження (рис.1.9) при розв'язуванні задачі можна замінити рівнодіючою силою  $\bar{Q}$ . За модулем рівнодіюча сила дорівнює площі епюри  $Q = l \cdot q$  і прикладена ця сила до точки, що лежить на середині відрізка  $AB$ .

Для навантаження, розподіленого за “законом трикутника” (рис.1.10), інтенсивність є величиною змінною, збільшуючись від нуля до максимального значення  $\bar{q}_{\max}$ . Рівнодіюча такого навантаження за модулем дорівнює площі епюри (трикутника)  $Q = 0,5lq_{\max}$  і прикладена до точки, яка лежить на відстані  $l/3$  від сторони  $BC$  епюри  $ABC$ .

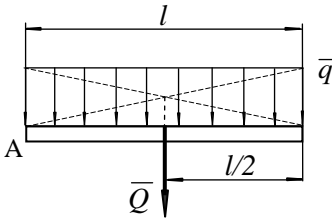


Рис. 1.9

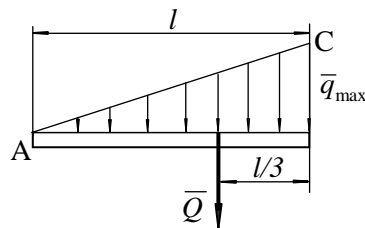


Рис. 1.10

#### 1.4. Контрольні запитання

1. Що називається в'яззю?
2. В чому полягає принцип звільнення тіла від в'язей?
3. Перерахувати основні типи в'язей, для яких лінія дії реакцій відома.
4. Перерахувати основні типи в'язей, для яких лінія дії реакції невизначена.
5. Як направлена реакція гладкої поверхні?
6. Як направлена реакція ідеального стержня?
7. Сформулюйте аксіому рівноваги двох сил.
8. Сформулюйте аксіому паралелограма сил.
9. Сформулюйте аксіому рівності дії і протидії.
10. Яка сила називається рівнодіючою?

## 1.5. Розв'язок задач

### Знаходження об'єкту рівноваги та розстановка сил

**Об'єктом рівноваги** називається точка, тіло або система тіл, що розглядаються в рівновазі при розв'язуванні задачі.

#### Задача № 1

Невагома стріла  $AB$  (рис.1.11), яка шарнірно закріплена до стіни в точці  $A$ , утримується в рівновазі тросом  $BC$ . До шарніра  $B$  прикріплено перекинутий через нерухомий блок  $D$  трос  $BD$ , до вільного кінця якого прикріплено вантаж вагою  $G$ .

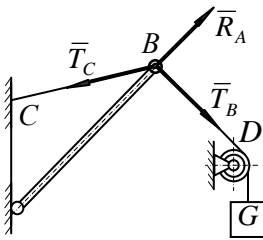


Рис. 1.11

**Розглянути** об'єкт рівноваги – шарнір  $B$ .

Шарнір  $B$  (точка  $B$ ) знаходиться в рівновазі під дією натягу  $\bar{T}_B$  троса (нитки)  $BD$ , який дорівнює силі тяжіння вантажу  $G$ ; натягу  $\bar{T}_C$  троса (нитки)  $BC$ , направленої вздовж нитки до точки підвісу  $C$ ; реакції  $\bar{R}_A$  стріли (ідеального стержня)  $AB$ , направленої вздовж осі стержня.

#### Задача № 2

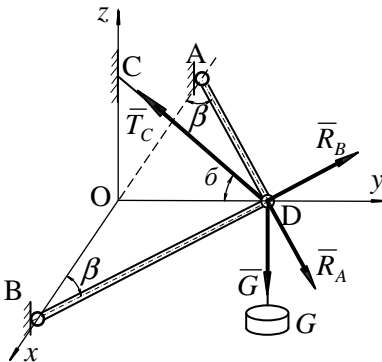


Рис.1.12

Невагомі стержні  $AD$  і  $BD$ , що з'єднані між собою шарніром  $D$ , до якого підвішений вантаж вагою  $G$ , утримуються в горизонтальній площині ниткою  $CD$  (рис.1.12).

**Розглянути** об'єкт рівноваги – шарнір  $D$ .

Шарнір  $D$  знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння вантажу  $\bar{G}$ ; натягу  $\bar{T}_C$

нитки, направленої до точки підвісу  $C$ ; реакцій  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$  стержнів, направлених уздовж осей невагомих стержнів  $AD$  і  $BD$ .

### Задача № 3

Балка  $AB$  (рис.1.13) вагою  $P$  закріплена циліндричною шарнірно-нерухомою опорою в точці  $A$  і утримується в рівновазі тросом  $DE$ . До точки  $B$  балки прикріплено перекинутий через нерухомий блок трос  $BK$ , який навантажено тілом вагою  $G$ .

**Розглянути** об'єкт рівноваги – балку  $AB$ .

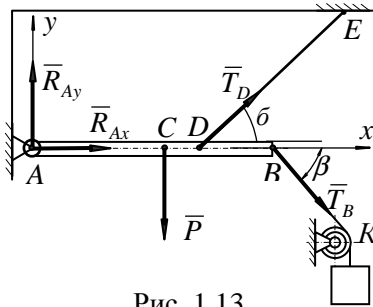


Рис. 1.13

Балка  $AB$  знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння  $\bar{P}$ , прикладеної до середини балки; натягу  $\bar{T}_D$  троса (нитки), направленої до точки підвісу нитки  $E$ , натягу  $\bar{T}_B$  троса (нитки), направленої вздовж  $BK$  від точки  $B$  до точки  $K$ ; реакції циліндричного шарніра  $A$ , яка розкладена на складові  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат  $Ax$ у (вісь  $Ax$  збігається з віссю балки  $AB$ , а вісь  $Ay$  – перпендикулярна до балки). Оскільки трос  $BK$  натягнуто силою тяжіння тіла  $G$ , то за модулем  $T_B = G$ .

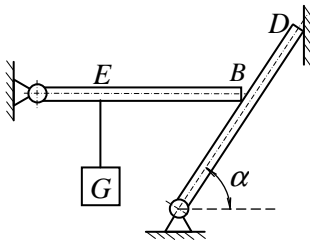


Рис. 1.14

### Задача № 4

Конструкція (рис.1.14) складається з двох балок: балки  $AB$  вагою  $P_1$ , яка закріплена циліндричною шарнірно-нерухомою опорою в точці  $A$  і спирається в точці  $B$  на балку  $CD$ ; балки  $CD$  вагою  $P_2$ , яка закріплена циліндричною шарнірно-нерухомою опорою в точці  $C$  і спирається на вертикальну поверхню в точці  $D$ .

**Розглянути** об'єкти рівноваги:

1. Балку  $AB$
2. Балку  $CD$ ;
3. Складену конструкцію  $ABCD$ .

### 1. Об'єкт рівноваги - балка $AB$

Балка  $AB$  (рис.1.15) знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння  $\bar{P}_1$ , прикладеної до середини балки  $AB$ ; сили тяжіння  $\bar{G}$  вантажу  $G$ ; реакції  $\bar{R}_B$  поверхні балки  $CD$ , направленої перпендикулярно до  $CD$ ; реакції циліндричного шарніра  $A$ , яка розкладена на складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат  $Axy$ .

### 2. Об'єкт рівноваги - балка $CD$

Балка  $CD$  (рис.1.16) знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння  $\bar{P}_2$ , прикладеної до середини балки  $CD$ ; реакції  $\bar{R}_D$  гладенької поверхні, направленої перпендикулярно до опорної поверхні в точці  $D$ ; реакції  $\bar{R}'_B$ , яка дорівнює за модулем  $\bar{R}_B$ , але направленої в протилежний бік; реакції циліндричного шарніра  $C$ , що розкладена на складові  $\bar{R}_{Cx}$  і  $\bar{R}_{Cy}$  за осями обраної для першого об'єкту рівноваги системи координат.

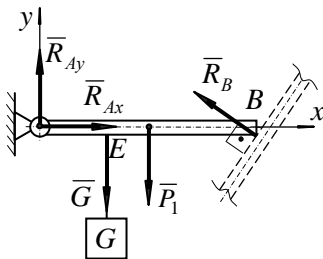


Рис. 1.15

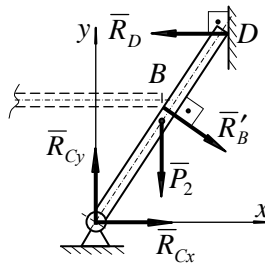
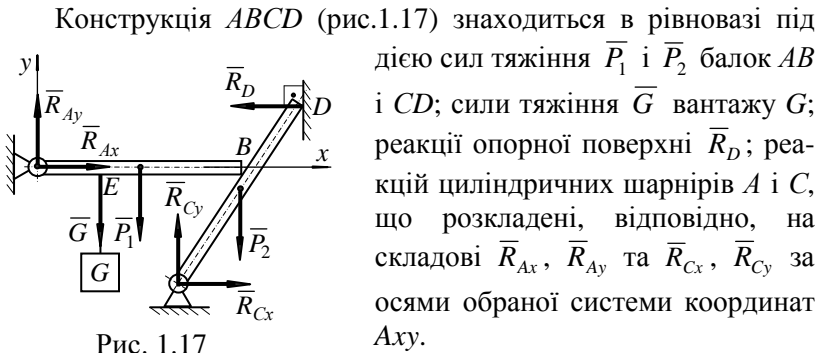


Рис. 1.16

### 3. Об'єкт рівноваги - складена конструкція ABCD



### Задача № 5

Невагома балка AB (рис.1.18), на яку діють розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$  і пара сил з моментом M, та невагома балка BC, до якої на нитці прикріплене тіло вагою G, з'єднані між собою циліндричним шарніром B і утримуються в рівновазі жорстким защемленням в точці C та циліндричною шарнірно-рухомою опорою в точці A.

**Розглянути** об'єкти рівноваги:

1. Невагому балку AB;
2. Невагому балку BC;
3. Складену конструкцію ABC.

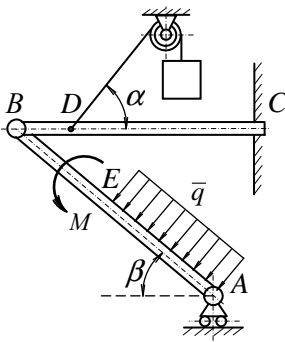


Рис. 1.18

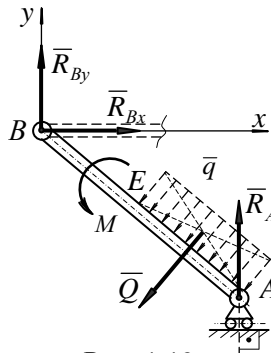


Рис. 1.19

### 1. Об'єкт рівноваги невагома балка $AB$

Балка  $AB$  (рис.1.19) знаходиться в рівновазі під дією: рівномірно розподіленого навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ , дію якого можна замінити зосередженою силою  $\bar{Q}$ ; пари сил з моментом  $M$ ; реакції шарнірно-рухомої опори  $\bar{R}_A$ , що направлена перпендикулярно до опорної поверхні (під кутом до осі балки); реакції циліндричного шарніра  $B$ , що розкладена на складові  $\bar{R}_{Bx}$  та  $\bar{R}_{By}$  за осями обраної системи координат.

### 2. Об'єкт рівноваги - невагома балка $BC$

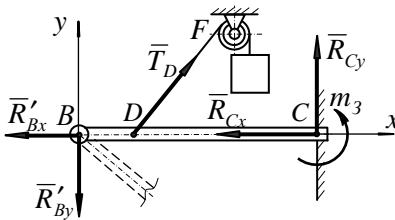


Рис. 1.20

Балка  $BC$  (рис.1.20) знаходиться в рівновазі під дією натягу  $\bar{T}_D$  нитки  $DF$ , причому за модулем  $T_D = G$ ; реакції циліндричного шарніра  $B$ , яку розклали на складові  $\bar{R}'_{Bx} = -\bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{R}'_{By} = -\bar{R}_{By}$ ; реакції жорсткого защемлення в точці  $C$ , яка включає складові і  $\bar{R}_{Cy}$  та пару сил з моментом  $m_3$ .

Балка  $BC$  знаходиться в рівновазі під дією натягу  $\bar{T}_D$  нитки  $DF$ , причому за модулем  $T_D = G$ ; реакції циліндричного шарніра  $B$ , яку розклали на складові  $\bar{R}'_{Bx} = -\bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{R}'_{By} = -\bar{R}_{By}$ ; реакції жорсткого защемлення в точці  $C$ , яка включає складові і  $\bar{R}_{Cy}$  та пару сил з моментом  $m_3$ .

### 3. Об'єкт рівноваги - складена конструкція $ABC$

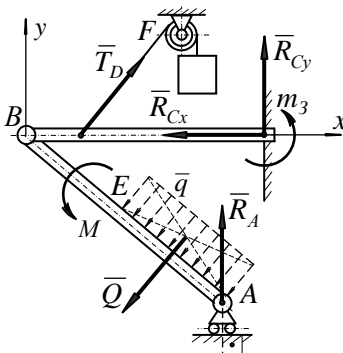


Рис. 1.21

Складена конструкція  $ABC$  (рис.1.21) знаходиться в рівновазі під дією сили  $\bar{Q}$ , що замінює дію розподіленого навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ ; пари сил з моментом  $M$ ; натягу  $\bar{T}_D$  нитки  $DF$ ; реакцій  $\bar{R}_{Cx}$ ,  $\bar{R}_{Cy}$  і моменту  $m_3$  жорсткого защемлення в точці  $C$  та реакції  $\bar{R}_A$  шарнірно-рухомої опори  $A$ .

## Задача № 6

Горизонтальна плита  $ABCD$  вагою  $P$  (рис.1.22) утримується в рівновазі сферичним шарніром  $A$ , циліндричним шарніром  $B$  (просторове зображення) і невагомим стержнем  $EC$ .

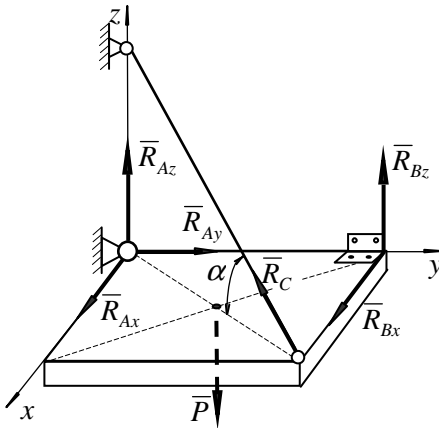


Рис 1.22

Розглянути об'єкт рівноваги - плиту  $ABCD$ . Плита  $ABCD$  знаходиться в рівновазі під дією сили тяжіння плити  $\bar{P}$ , що прикладена в точці перетину діагоналей  $BD$  і  $AC$ ; реакції  $\bar{R}_C$  стержня  $EC$ , яка направлена вздовж осі стержня  $CE$ ; реакції сферичного шарніра  $A$ , що розкладена на складові  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Az}$  за осями просторової системи координат  $Axyz$ ; реакції циліндричного шарніра  $B$ , що розкладена на складові  $\bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{R}_{Bz}$  (в напрямі осі  $Ay$  циліндричний шарнір не сприймає зусилля).

## Задача № 7

Вал  $AB$  (рис.1.23) з насадженими барабаном і шківом утримується в горизонтальному положенні радіальними підшипниками  $A$  і  $B$ . На барабан намотано трос, до кінця якого прикріплений вантаж вагою  $G$ . Від обертання вал утримує пас  $CEFD$ , вітка  $CE$

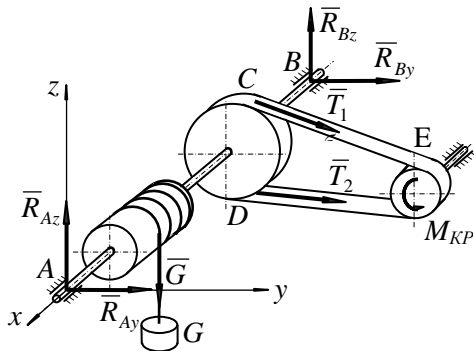


Рис. 1.23



якого має натяг  $T_1$ , а вітка  $DF$  -  $T_2$ . Натяг віток паса створюється моментом  $M_{KP}$  на шківу  $E$ .

**Розглянути** об'єкт рівноваги - вал  $AB$ .

Вал знаходиться в рівновазі під дією: сили тяжіння вантажу  $\bar{G}$ ; натягу вітки паса  $CE$  -  $\bar{T}_1$ ; натягу вітки паса  $DF$  -  $\bar{T}_2$ ; реакцій підшипників  $A$  і  $B$ , що розкладені на складові  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Az}$  і  $\bar{R}_{By}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ , відповідно. Складових реакцій підшипників в напрямі осі  $Ax$  не буде, оскільки радіальні підшипники не сприймають зусиль в цьому напрямі.

## Тема 2. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ НА ПЛОЩИНІ

### ЗАНЯТТЯ №2

#### Зміст

- 2.1. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил.
- 2.2. Геометричний метод розв'язування задач.
- 2.3. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.
- 2.4. Контрольні запитання.
- 2.5. Приклади розв'язування задач.

#### 2.1. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил

*Збіжними називаються сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис.2.1,а).*

Якщо перенести всі сили вздовж лінії їх дії в цю точку, дістанемо еквівалентну систему сил, що прикладена до однієї точки.

Рівнодіюча  $\vec{R}$  даної системи сил, які проходять через точку  $O$ , прикладена до цієї ж точки і зображається замикаючою стороною силового багатокутника, який побудовано (рис.2.1,б)

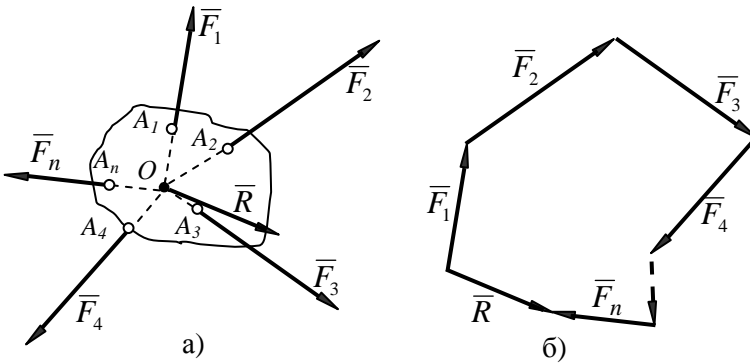


Рис.2.1

на силах, що додаються, тобто рівнодіюча  $\bar{R}$  дорівнює векторній сумі сил, що додаються:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

Оскільки система збіжних сил може бути замінена однією силою – рівнодіючою, то необхідною і достатньою умовою рівноваги тіла під дією системи збіжних сил є рівність нулю цієї рівнодіючої:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k = 0.$$

Геометрично ця умова полягає в тому, щоб кінець останнього вектора збігався з початком першого в векторному (силовому) многокутнику, побудованому з сил системи, тобто сили повинні утворювати замкнений багатокутник.

Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією **трьох** збіжних сил, то силовий багатокутник зводиться до силового трикутника. Розв'язування ж задачі про рівновагу в цьому випадку потребує знаходження невідомих елементів трикутника за допомогою тригонометричних формул або вимірювань.

При розв'язуванні задач на рівновагу тіла під дією **трьох** сил часто доводиться користуватися **теоремою про три сили**:

*Якщо тіло знаходиться в рівновазі під дією трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил обов'язково перетинаються в одній точці, тобто сили утворюють збіжну систему сил.*

Теорема про три непаралельні сили полегшує розв'язування задач на рівновагу твердого тіла в тих випадках, коли напрям однієї з трьох сил невідомий. Визначивши точку перетину ліній дії двох сил, напрям яких відомий, можна вказати напрям лінії дії третьої сили, оскільки вона повинна пройти через точку прикладення цієї сили і точку перетину ліній дії перших двох сил.

## 2.2. Геометричний метод розв'язування задач

Безпосереднє використання багатокутника сил при розв'язуванні задач статички приводить до геометричних побудов з наступним визначенням невідомих елементів за допомогою, наприклад, формул тригонометрії.

При розв'язуванні задач на рівновагу твердого тіла геометричним методом рекомендується дотримуватися наступного порядку:

1. Виділити об'єкт, який буде розглядатися в рівновазі.
2. Встановити і показати на схемі активні сили, що діють на тіло.
3. З'ясувати характер в'язей і встановити напрями їх реакцій.
4. Побудувати замкнений силовий багатокутник (побудову треба починати з сил, відомих за модулем і за напрямом).
5. З силового багатокутника визначити невідомі сили.

## 2.3. Аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил

Найбільш загальним способом визначення модуля і напрямку рівнодіючої є аналітичний, який базується на аналітичному означенні сили.

Якщо обрати деяку прямокутну систему координатних осей  $Oxy$  (рис.2.2.), то силу  $\vec{F}$  за правилом паралелограма (в даному випадку – прямокутника) можна розкласти на дві складові  $\vec{F}_x$  і  $\vec{F}_y$ .

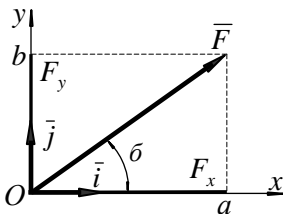


Рис.2.2

Алгебраїчні значення довжин направлених відрізків  $Oa$  і  $Ob$  називаються проєкціями сили на осі  $Ox$  і  $Oy$  та позначаються  $F_x$  і  $F_y$ .

Якщо  $\vec{i}$  та  $\vec{j}$  одиничні вектори, що направлені за осями  $Ox$  та  $Oy$ , а

$F_x$  і  $F_y$  - проекції сили на ці осі, то

$$\vec{F} = \vec{i} F_x + \vec{j} F_y.$$

Модуль та напрям сили за відомими проекціями на взаємно перпендикулярні осі  $Ox$ ,  $Oy$  знаходять з наступних формул:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{F_y}{F}.$$

При визначенні проекції сили на вісь можливі такі випадки (рис.2.3):

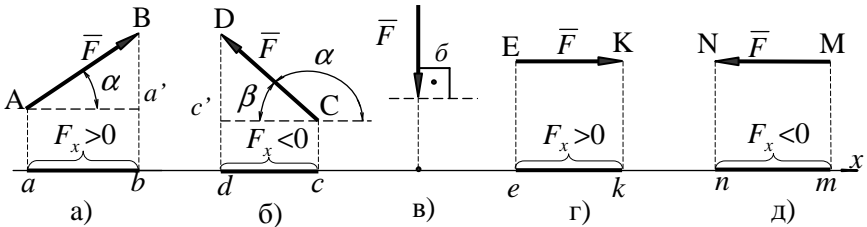


Рис. 2.3

1. Сила утворює гострий кут  $\alpha$  з додатним напрямком осі (рис.2.3, а). В цьому випадку проекція сили на вісь має додатний знак і за модулем дорівнює

$$F_x = ab = Aa' = F \cos \alpha.$$

2. Сила утворює з додатним напрямком осі тупий кут (рис.2.3, б). В цьому випадку її проекція на координатну вісь має від'ємний знак і дорівнює

$$F_x = -Cc' = -cd = -F \cos \beta = F \cos \alpha.$$

3. Сила утворює прямий кут ( $\alpha=90^\circ$ ) з координатною віссю (рис.2.3, в). В цьому випадку проекція сили на вісь дорівнює нулю:

$$F_x = 0.$$

4. Сила паралельна координатній осі (рис.2.3, г, д). В цьому випадку сила проектується в натуральну величину і проекція додатна, якщо її напрям збігається з додатним напрямом осі (рис.2.3, г), та від'ємна, якщо напрям сили збігається з від'ємним напрямом осі (рис.2.3, д).

Якщо сили  $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_n$  являють собою систему збіжних сил, то рівнодіюча  $\overline{R}$  дорівнює їх геометричній сумі, а її проекції на осі:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx}; \quad R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky}.$$

Оскільки модуль рівнодіючої визначається за формулою

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2},$$

то тіло під дією системи збіжних сил буде знаходитись в рівновазі, коли  $R=0$ , а це можливо, коли  $R_x=0$  і  $R_y=0$ . В результаті отримаємо наступні аналітичні умови рівноваги тіла під дією системи збіжних сил:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0;$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0.$$

Таким чином, для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх цих сил на кожен з координатних осей дорівнювали нулю.

При розв'язуванні задач аналітичним способом потрібно виконати три перших пункти, що вказані в параграфі 2.2, а потім наступні:

4. Обрати декартову систему координат  $Oxy$ .
5. Скласти рівняння рівноваги твердого тіла в проекціях на ці осі координат.
6. Розв'язати систему складених рівнянь та визначити невідомі величини.

## 2.4. Контрольні запитання

1. Як визначити напрям рівнодіючої системи збіжних сил при побудові силового багатокутника?
2. Які умови і які рівняння рівноваги системи збіжних сил, що розташована на площині?
3. Який порядок розв'язування задач статки на рівновагу тіла під дією системи збіжних сил?
4. При яких умовах сили, прикладені до твердого тіла, зрівноважуються.

## 2.5. Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

Ідеальний стержень  $AB$  утримується в рівновазі нерозтяжною ниткою  $BC$ . До шарніра  $B$  стержня на нитці підвішене тіло вагою  $G$  (рис.2.4).

**Визначити** натяг нитки  $BC$  і реакцію стержня  $AB$ , якщо  $\alpha = 45^\circ$ ;  $\beta = 105^\circ$ ;  $G=500H$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу вузла  $B$  (рис.2.4). До вузла  $B$  прикладена сила  $\vec{G}$ , яка перенесена вздовж лінії дії від центра мас тіла до точки  $B$ , натяг нитки  $\vec{T}$  і реакція стержня  $\vec{S}$ . Таким чином, вузол  $B$  знаходиться в рівновазі під дією трьох сил  $\vec{G}$ ,  $\vec{T}$  та  $\vec{S}$ , які лежать в одній площині і мають одну й ту ж точку перетину.

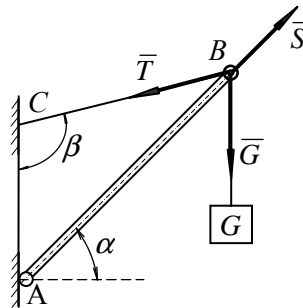


Рис. 2.4

Величину і напрям зусилля  $\vec{S}$  та величину натягу нитки  $\vec{T}$  визначимо геометричним методом, скориставшись геометричною умовою рівноваги плоскої системи збіжних сил. Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на точку  $B$ :

$$\sum \vec{F}_k = \vec{T} + \vec{G} + \vec{S} = 0.$$

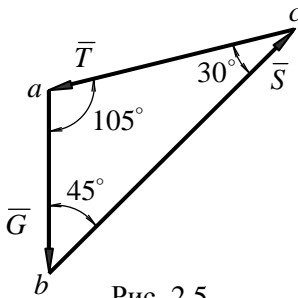


Рис. 2.5

Згідно з записаним векторним рівнянням побудуємо силовий трикутник.

Для цього з довільної точки  $a$  (рис. 2.5) відкладемо в деякому масштабі вектор  $\vec{G}$ . З точки “ $a$ ” початку вектора  $\vec{G}$  проведемо пряму, паралельну до лінії дії реакції  $\vec{T}$ , а з точки “ $b$ ” кінця вектора  $\vec{G}$  - пряму, паралельну до лінії дії реакції  $\vec{S}$ .

Проведені прямі перетнуться в точці  $c$ , утворивши трикутник  $abc$ . Вкажемо напрям сил, керуючись тим, що при додаванні векторів початок кожного наступного вектора повинен виходити з кінця попереднього.

Знайти невідомі величини можна або порівнявши відповідні сторони силового трикутника, або, за відомими кутами трикутника з теореми синусів:

$$\frac{G}{\sin 30^\circ} = \frac{T}{\sin 45^\circ} = \frac{S}{\sin 105^\circ}.$$

Звідки:

$$T = G \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,707}{0,5} = 707 \text{ Н};$$

$$S = G \frac{\sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = G \frac{\sin 75^\circ}{\sin 30^\circ} = 500 \frac{0,954}{0,5} = 954 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $T = 707 \text{ Н}$ ;  $S = 954 \text{ Н}$ .

## Задача № 2

Нитка з двома тілами на кінцях  $P$  і  $Q$  перекинута через блоки  $A$  і  $B$  (рис.2.6). В точці  $O$  до нитки, що знаходиться між блоками, прикріпили вантаж  $G=27,3 \text{ Н}$ . При рівновазі системи нитка  $OA$  утворила з горизонталлю кут  $60^\circ$ , а нитка  $OB$  –  $45^\circ$ .

**Визначити** вагу тіл  $P$  і  $Q$ . Силами тертя в блоках знехтувати.



**Розв'язок.** Спочатку з'ясуємо, рівновагу якого об'єкта треба розглянути при розв'язуванні задачі. За умовою задачі потрібно визначити вагу тіла  $P$  та вагу тіла  $Q$ , які прикладені до центрів мас тіл і направлені вертикально донизу. Кожне тіло натягує

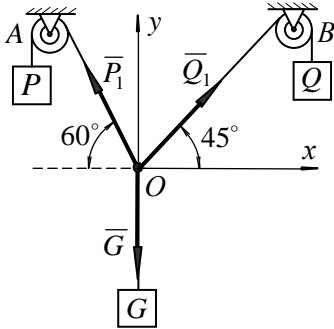


Рис. 2.6

нитку з силою, яка дорівнює його вазі. Блок змінює напрям нитки, а відповідно, і напрям сили натягу нитки. Сили  $\bar{P}_1$  і  $\bar{Q}_1$ , за модулем, дорівнюють  $P$  і  $Q$ , але направлені уздовж  $OA$  і  $OB$ .

Оскільки прямі  $OA$  і  $OB$  перетинаються в точці  $O$ , до якої можна прикласти і задану силу  $G$ , то при розв'язуванні задачі треба розглядати рівновагу точки  $O$ .

Таким чином, на об'єкт рівноваги, точку  $O$  (рис.2.6), діють сили натягу  $\bar{P}_1$  вітки нитки  $OA$ ; натягу  $\bar{Q}_1$  вітки нитки  $OB$ ; ваги тіла  $G$ . (Вагу тіл  $P$  і  $Q$  враховувати не треба, оскільки вони прикладені не до об'єкту рівноваги точки  $O$ ).

Складемо рівняння рівноваги. Для цього, оберемо систему координат  $Oxy$  з початком в точці  $O$ , спроектуємо сили на осі і складемо рівняння рівноваги.

Для проєкцій на вісь  $Ox$  дістанемо:

$$\sum F_{kx} = Q_1 \cos 45^\circ - P_1 \cos 60^\circ = 0.$$

Знак проєкції  $\bar{Q}_1$  - плюс, оскільки вона направлена за додатним напрямком осі  $Ox$ . Знак проєкції  $\bar{P}_1$  - мінус, оскільки вона направлена за від'ємним напрямком осі  $Ox$ . Проєкція сили  $\bar{G}$  на вісь  $Ox$  дорівнює нулю.

Сума проєкцій усіх сил на вісь  $Oy$  дорівнює:

$$\sum F_{ky} = Q_1 \sin 45^\circ + P_1 \sin 60^\circ - G = 0.$$

Проекції сил  $\bar{P}_1$  і  $\bar{Q}_1$  мають знак плюс, оскільки направлені за додатним напрямом осі  $Oy$ . Проекція сили  $\bar{G}$  має знак мінус, оскільки направлена за від'ємним напрямом осі.

З урахуванням чисельних значень тригонометричних функцій та величини  $G$ , рівняння набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} 0,707Q_1 - 0,5P_1 &= 0; \\ 0,707Q_1 + 0,866P_1 - 27,3 &= 0. \end{aligned}$$

Знайшовши з першого рівняння:

$$P_1 = \frac{0,707Q_1}{0,5} = 1,41Q_1,$$

і підставивши в друге, отримуємо:

$$\begin{aligned} 0,707 \cdot Q_1 + 0,866 \cdot 1,41 \cdot Q_1 - 27,3 &= 0; \\ Q_1 &= 14,1 \text{ Н}; \quad P_1 = 14,1 \cdot 14,1 = 20 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $P_1 = 20 \text{ Н}; \quad Q_1 = 14,1 \text{ Н}$ .

### Задача № 3

Однорідний стержень  $AB$  (рис.2.7), що прикріплено до вертикальної стінки за допомогою шарніра  $A$ , утримується під кутом  $\beta$  до вертикалі за допомогою троса  $BC$ , який утворює кут  $\beta$  з стержнем.

**Визначити** величину і напрям реакції  $\bar{R}_A$  шарніра, якщо вага стержня  $G=2 \text{ Н}; \alpha=60^\circ; \beta=30^\circ$ .

**Розв'язок.** Задачу розв'яжемо геометричним і аналітичним способами, використовуючи теорему про рівновагу тіла під дією 3-х сил.

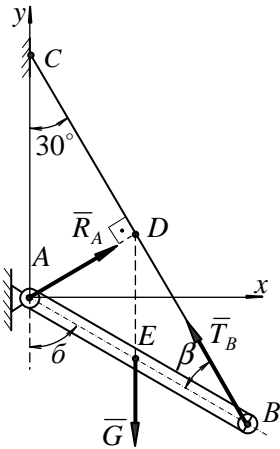


Рис. 2.7

Розглянемо рівновагу стержня  $AB$ . На стержень діє активна сила - сила тяжіння  $\vec{G}$  та реакції в'язей: натяг троса  $BC$ ; реакція циліндричного шарніра  $A$ .

Напрямок натягу троса  $\vec{T}_B$  відомий - реакція направлена вздовж троса до точки  $C$ . Напрямок реакції шарніра  $\vec{R}_A$  попередньо вказати не можна. Для визначення напрямку реакції  $\vec{R}_A$  скористаємося теоремою про три сили, оскільки стержень знаходиться в рівновазі під дією трьох сил  $\vec{T}_B$ ,  $\vec{G}$  і  $\vec{R}_A$ .

Знайдемо точку перетину ліній дії сили тяжіння  $\vec{G}$  і натягу троса  $\vec{T}_B$  - це точка  $D$ . Згідно з теоремою про три сили, лінія дії реакції  $\vec{R}_A$  теж повинна пройти через цю точку.

На рис.2.7  $\triangle BAC$  рівнобедрений (кути при вершинах  $C$  і  $B$  дорівнюють  $30^\circ$ ). Оскільки лінія дії ( $DE$ ) сили тяжіння  $\vec{G}$  проходить через середину стержня  $AB$  і являє собою середню лінію  $\triangle BAC$ , то точка  $D$  ділить сторону  $BC$  навпіл.

Відповідно, відрізок  $AD$  є одночасно висотою, медіаною і бісектрисою трикутника  $ABC$ .

Таким чином  $\angle CAD = 60^\circ$ ;  $\angle CDA = \angle ADB = 90^\circ$ .

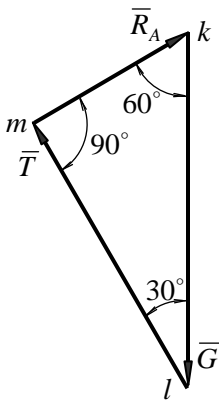


Рис. 2.8

Після визначення напрямку реакції  $\vec{R}_A$ , можна переходити до обчислення величин реакцій.

Запишемо геометричну умову рівноваги системи сил, що діють на стержень  $AB$ :

$$\sum \vec{F}_k = \vec{T}_B + \vec{G} + \vec{R}_A = 0.$$

Згідно записаному векторному рівнянню побудуємо замкнений силовий трикутник (рис.2.8).

Для цього з довільної точки  $k$  в деякому масштабі проводимо вектор сили тяжіння  $\vec{G}$ . Через точку  $k$  проводимо

пряму, паралельну лінії дії реакції  $\overline{R}_A$ , а через точку  $l$  кінця вектора  $\overline{G}$  проводимо пряму, паралельну лінії дії натягу  $\overline{T}_B$ .

Проведені прямі перетинаються в точці  $m$ , утворивши силний трикутник  $klm$ . Оскільки  $\triangle ADE$  (рис. 2.7) і  $\triangle mkl$  (рис. 2.8) подібні, то  $\angle m = 90^\circ$ ;  $\angle k = 60^\circ$ ;  $\angle l = 30^\circ$ .

З силового трикутника знаходимо:

$$R_A = mk = G \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ H};$$

$$T = ml = G \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ H}.$$

Розв'яжемо задачу аналітичним способом. Для цього обемо прямокутну систему координат  $Axy$  (рис.2.7) і складемо рівняння рівноваги в проекціях на осі:

$$\sum F_{kx} = R_A \cos 30^\circ - T_B \cos 60^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_A \cos 60^\circ - G + T_B \cos 30^\circ = 0.$$

З першого рівняння виразимо  $T_B$  і підставимо в друге рівняння:

$$T_B = R_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ};$$

$$R_A \cos 60^\circ - G + R_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ} \cos 30^\circ = 0.$$

Звідси отримаємо:

$$R_A = \frac{G \cos 60^\circ}{\cos^2 60^\circ + \cos^2 30^\circ} = \frac{G \cos 60^\circ}{\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ} = \frac{2 \cdot 0,5}{1} = 1 \text{ H};$$

$$T_B = 1 \frac{0,866}{0,5} = 1,73 \text{ H}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 1 \text{ H}; T_B = 1,73 \text{ H}.$

## Задача № 4

Балка  $AB$  (рис.2.9) закріплена шарнірно-нерухомою опорою в точці  $A$  і шарнірно-рухомою в точці  $B$ . До середини балки під кутом  $45^\circ$  прикладена сила  $P = 2 \text{ кН}$ .

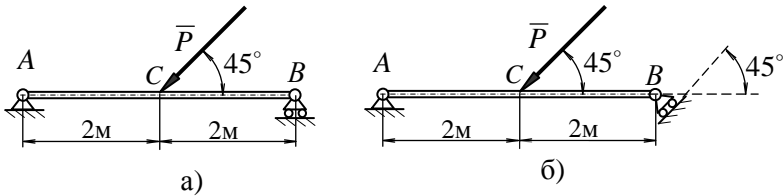


Рис. 2.9

**Визначити** реакції опор  $A$  і  $B$  для двох випадків нахилу рухомої опори (рис.2.9,а і 2.9,б). Вагою балки знехтувати.

**Розв'язування.** Розглянемо рівновагу балки  $AB$ , що зображена на рис.2.9,а. На балку діє активна сила  $\bar{P}$  і реакції опор  $A$  і  $B$  (рис. 2.10).

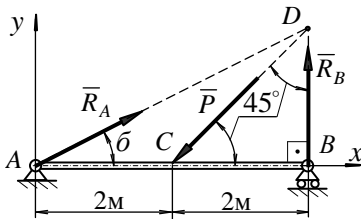


Рис. 2.10

Опора  $B$  шарнірно-рухома, її реакція направлена перпендикулярно до опорної поверхні. Оскільки, в даному випадку опорна поверхня паралельна осі балки, то реакція  $\bar{R}_B$  перпендикулярна до  $AB$ . Опора  $A$  шарнірно-нерухома і напрям її реакції попередньо вказати не можна.

Для визначення напрямку реакції  $\bar{R}_A$  (кута  $\alpha$ ) скористаємося теоремою про три сили. Лінії дії сили  $\bar{P}$  і реакції  $\bar{R}_B$  перетинаються в точці  $D$ . Таким чином, лінія дії  $\bar{R}_A$  теж повинна пройти через точку  $D$ .

З рис.2.10 видно, що  $\triangle CBD$  - рівнобедрений і прямокутний, тобто  $DB=CB=2\text{м}$ . Звідки:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DB}{AB} = \frac{2}{4} = 0,5; \quad \alpha = \operatorname{arctg}(0,5) = 26,6^\circ.$$

Тепер перейдемо до визначення величин реакцій опор.

Складемо рівняння рівноваги сил в проекціях на осі обраної системи координат  $Axy$ :

$$\sum F_{kx} = R_A \cos \alpha - P \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_A \sin \alpha - P \sin 45^\circ + R_B = 0.$$

З урахуванням числових значень:

$$\sum F_{kx} = 0,894R_A - 2 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0,448R_A - 2 \cdot 0,707 + R_B = 0.$$

В результаті отримаємо:

$$R_A = \frac{2 \cdot 0,707}{0,894} = 1,58 \text{ кН};$$

$$R_B = 2 \cdot 0,707 - R_A \cdot 0,448 = 1,41 - 1,58 \cdot 0,448 = 0,71 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 1,58 \text{ кН}; R_B = 0,71 \text{ кН}.$

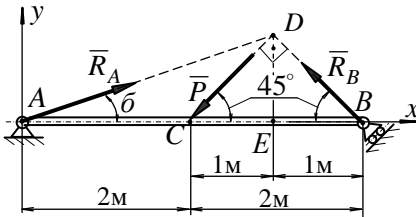


Рис. 2.11

Перейдемо до визначення реакцій опор балки  $AB$ , що зображена на рис.2.9,б.

В цьому випадку, реакція  $\bar{R}_B$  складає з віссю балки  $AB$  кут  $45^\circ$ . Лінія дії реакції  $\bar{R}_A$  (рис.2.11) проходить через точку  $D$ , в якій перетинаються лінії дії сили  $\bar{P}$  і реакції  $\bar{R}_B$ .

Визначимо кут  $\alpha$  між реакцією  $\bar{R}_A$  і віссю балки  $AB$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DE}{AE} = \frac{1}{3}; \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = 18,4^\circ.$$

Складемо рівняння рівноваги для системи сил, що діє на балку :

$$\sum F_{kx} = R_A \cos \alpha - P \cos 45^\circ - R_B \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_A \sin \alpha - P \sin 45^\circ + R_B \sin 45^\circ = 0.$$

З урахуванням числових даних:

$$\sum F_{kx} = 0,95R_A - 2 \cdot 0,707 - 0,707R_B = 0;$$

$$\sum F_{ky} = 0,32R_A - 2 \cdot 0,707 + 0,707R_B = 0.$$

Додавши рівняння отримаємо:

$$1,27R_A - 2,83 = 0; \quad R_A = \frac{2,83}{1,27} = 2,24 \text{ кН}.$$

Підставивши значення  $R_A$  в перше рівняння, знайдемо  $R_B$ :

$$R_B = \frac{0,95R_A - 1,41}{0,707} = \frac{0,95 \cdot 2,24 - 1,41}{0,707} = 1,0 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 2,24 \text{ кН}; \quad R_B = 1 \text{ кН}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 2,21; 2,23; 2,27; 2,31 [2].

## Тема 3. ПРОСТОРОВА СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

### ЗАНЯТТЯ № 3

#### Зміст

- 3.1. Просторова система збіжних сил.
- 3.2. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил.
- 3.3. Порядок розв'язування задач.
- 3.4. Приклади розв'язування задач.

### 3.1. Система збіжних сил у просторі

*Система сил називається просторовою, якщо лінії дії сил, що прикладені до тіла, не лежать в одній площині.*

Просторова система збіжних сил зводиться до рівнодіючої  $\bar{R}$ , яка прикладена до точки перетину ліній дії складових сил системи, і зображається замикаючою стороною просторового силового багатокутника, що побудований на цих силах, тобто:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k.$$

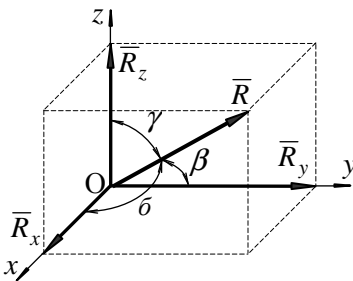


Рис.3.1

Силу  $\bar{R}$  можна розкласти на три взаємно перпендикулярні складові за осями просторової системи координат (рис.3.1). Сила  $\bar{R}$  являє собою діагональ паралелепіпеда, а його сторони - складові сили.

Нехай сила  $\bar{R}$  утворює з осями прямокутної системи координат кути  $\alpha, \beta, \gamma$ . Розкладемо силу  $R$  на три складові -  $\bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ .



Модулі цих складових являють собою проекції  $R_x, R_y, R_z$  сили  $\bar{R}$  на осі координат.

Модуль і напрям сили  $\bar{R}$  за відомими проекціями на три взаємно перпендикулярні осі  $Ox, Oy, Oz$  визначаються наступним чином:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{R_x}{R}; \quad \cos \beta = \frac{R_y}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{R_z}{R}.$$

В деяких випадках при визначенні проекції сили на координатну вісь невідомим є кут між силою і віссю, але відомими є: кут  $\beta$  між силою і координатною площиною та кут  $\beta$  між віссю і проекцією сили на площину (рис.3.2).

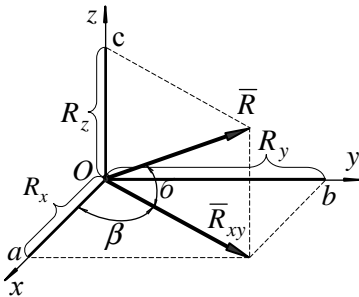


Рис. 3.2

В цьому випадку для визначення проекції  $R_x$  сили  $\bar{R}$  на вісь  $Ox$  необхідно:

- знайти проекцію  $\bar{R}_{xy}$  сили  $\bar{R}$  на координатну площину  $Oxy$ :

$$R_{xy} = R \cos \alpha,$$

- обчислити проекцію вектора  $\bar{R}_{xy}$  на вісь  $Ox$ :

$$R_x = Oa = R_{xy} \cos \beta = R \cos \alpha \cos \beta.$$

Таке проектування сили на вісь носить назву **подвійного проектування**.

Аналогічно, проекція сили  $\bar{R}$  на вісь  $Oy$ :

$$R_y = Ob = R_{xy} \sin \beta = R \cos \alpha \sin \beta.$$

Проекція сили  $\bar{R}$  на вісь  $z$ :

$$R_z = Oc = R \sin \alpha.$$

### 3.2. Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил

Аналітичні умови рівноваги просторової системи збіжних сил виражаються трьома рівняннями:

$$\begin{cases} R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + F_{nx} = 0; \\ R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + F_{ny} = 0; \\ R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + F_{nz} = 0. \end{cases}$$

і формулюються так: *просторова система збіжних сил знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчна сума проєкцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей дорівнює нулю.*

### 3.3. Порядок розв'язування задач

Задачі цього розділу рекомендується розв'язувати в наступному порядку:

1. Виділити об'єкт рівноваги, обираючи ту частину конструкції, до якої прикладені задані сили.
2. Встановити, які активні сили прикладені до об'єкту рівноваги, що розглядається.
3. Вказати можливі напрями реакцій.
4. Обрати систему координат, віддаючи перевагу прямокутній.
5. Скласти рівняння рівноваги в проєкціях на осі обраної системи координат.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь відносно невідомих величин.

### 3.4. Приклади розв'язування задач

#### Задача № 1

Тіло вагою  $Q=100\text{ Н}$  (рис.3.3) утримується невагомою стрілою  $AO$ , яка закріплена шарнірно в точці  $A$  і нахилена під кутом  $45^\circ$  до вертикалі, та двома горизонтальними рівними за довжиною ланцюгами  $BO$  і  $CO$ .

**Визначити** зусилля в стрілі та натяг  $\bar{T}_B$  і  $\bar{T}_C$  ланцюгів, якщо  $\angle CBO = \angle BCO = 45^\circ$ .

**Розв'язок.** Для визначення реакцій розглянемо рівновагу вузла  $O$ . До вузла прикладена сила  $\bar{Q}$  та реакції в'язей  $OA$ ,  $OB$  і  $OC$ .

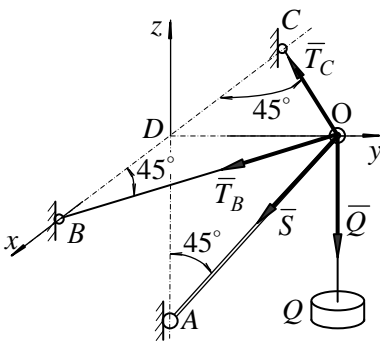


Рис. 3.3

Реакції  $\bar{T}_C$  і  $\bar{T}_B$  ланцюгів  $OC$  та  $OB$  направимо вздовж ланцюгів від точки  $O$  до точок  $B$  і  $C$ . Реакцію  $\bar{S}$  стріли  $OA$ , яку розглядаємо як ідеальний стержень, направимо від точки  $O$  вздовж стріли, приймаючи, що вона розтягнута.

Таким чином, вузол  $O$  знаходиться в рівновазі під дією просторової системи чотирьох збіжних сил:  $\bar{Q}$ ;  $\bar{T}_C$ ;  $\bar{T}_B$ ;  $\bar{S}$ .

Для цієї системи сил можна скласти три рівняння рівноваги. Оберемо прямокутну систему координат з початком в точці  $D$ . Вісь  $Dx$  направимо вздовж  $DB$ , вісь  $Dy$  – горизонтально вправо, а вісь  $Dz$  вертикально вгору.

Складемо рівняння рівноваги для отриманої системи сил в проекціях на осі обраної системи координат:

$$1. \sum F_{kx} = T_B \cos 45^\circ - T_C \cos 45^\circ = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = -T_B \sin 45^\circ - T_C \sin 45^\circ - S \cos 45^\circ = 0;$$

$$3. \sum F_{kz} = -S \sin 45^\circ - Q = 0.$$

З рівняння (1) випливає:  $T_B = T_C$ .

З рівняння (3) отримаємо:

$$S = -\frac{Q}{\sin 45^\circ} = -\frac{100}{0,707} = -141,7 \text{ Н.}$$

Розв'язавши рівняння (2), знайдемо  $T_B$ :

$$-T_B \sin 45^\circ - T_B \sin 45^\circ = S \cos 45^\circ$$

$$T_B = -\frac{S \cos 45^\circ}{2 \sin 45^\circ} = -\frac{-141,7 \cdot 0,707}{2 \cdot 0,707} = 70,7 \text{ Н.}$$

Оскільки при розв'язуванні задачі визначаються алгебраїчні значення реакцій, то у випадку, коли будь-яка з них буде мати від'ємне значення, це означає, що напрям цієї сили треба змінити на протилежний. Знак мінус при значенні  $S$  вказує на те, що стріла  $OA$  не розтягнута, а стиснута, тобто направлено реакцію  $S$  в протилежний бік від показаного на рис.3.3.

**Відповідь:**  $S = -141,7 \text{ Н}; T_B = T_C = 70,7 \text{ Н.}$

### Задача № 2

Ідеальні стержні  $CA$ ,  $CB$  і  $CD$  шарнірно з'єднані в точці  $C$  (рис.3.4). Стержні  $CA$  і  $CB$  взаємно перпендикулярні, лежать в горизонтальній площині та рівні за довжиною. Кут  $\theta$  між горизонтальною площиною і стержнем  $CD$  складає  $60^\circ$ . Вузол  $C$  конструкції навантажений вертикальною силою  $Q = 100 \text{ кН}$ .

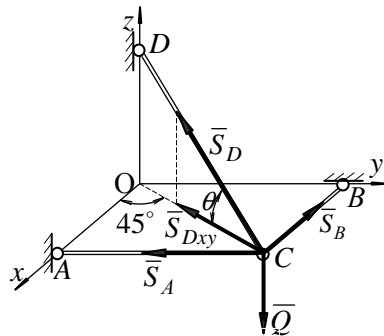


Рис. 3.4

**Визначити** зусилля  $S_A, S_B, S_D$  в стержнях.

**Розв'язок.** Для визначення реакцій в стержнях  $CA, CB$  і  $CD$  розглянемо рівновагу вузла  $C$ .

До вузла прикладені задана активна сила  $\bar{Q}$  і зусилля  $\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{S}_D$ , з якими стержні діють на вузол  $C$ . Реакції  $\bar{S}_A, \bar{S}_B, \bar{S}_D$  направимо від вузла уздовж стержнів, приймаючи, що всі стержні розтягнуті. Оскільки всі сили прикладені до точки  $C$ , то для визначення невідомих сил можна скористатися умовами рівноваги просторової системи збіжних сил.

За початок системи координат оберемо точку  $O$ , вісь  $Oz$  направимо вгору, перпендикулярно до площини, в якій лежать стержні  $CA$  і  $CB$ , а осі  $Ox$  і  $Oy$  - паралельно до ліній дій реакцій  $\bar{S}_B$  і  $\bar{S}_A$ . При такому обранні напрямів осей координат модулі проєкцій сил  $\bar{S}_A, \bar{S}_B$  і  $\bar{Q}$  на осі будуть дорівнювати або нулю, або величині відповідної сили.

При проектуванні реакції  $\bar{S}_D$  на осі  $Ox$  і  $Oy$ , спочатку знайдемо її проєкцію  $\bar{S}_{Dxy}$  на площину  $Oxy$ , а вже потім спроектуюмо  $\bar{S}_{Dxy}$  на осі  $Ox$  і  $Oy$ , тобто скористаємося методом подвійного проектування.

Модуль вектора  $S_{Dxy}$  буде дорівнювати:

$$S_{Dxy} = S_D \cos \theta.$$

Складемо рівняння рівноваги просторової системи збіжних сил:

$$1. \sum F_{kx} = -S_B - S_{Dxy} \cos 45^\circ = -S_B - S_D \cos \theta \cos 45^\circ = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = -S_A - S_{Dxy} \sin 45^\circ = -S_A - S_D \cos \theta \sin 45^\circ = 0;$$

$$3. \sum F_{kz} = S_D \sin \theta - Q = 0.$$

З урахуванням числових значень, одержимо

$$4. \sum F_{kx} = -S_B - S_D \cos 60^\circ \cos 45^\circ = -S_B - 0,35S_D = 0;$$

$$5. \sum F_{ky} = -S_A - S_D \cos 60^\circ \sin 45^\circ = -S_A - 0,35S_D = 0;$$

$$6. \sum F_{kz} = 0,866S_D - 100 = 0.$$

З рівняння (6), отримаємо:

$$S_D = \frac{100}{0,866} = 115,5 \text{ кН}.$$

З рівнянь (4) і (5) знайдемо:

$$S_B = -0,35S_D = -0,35 \cdot 115,5 = -40,4 \text{ кН};$$

$$S_A = -0,35S_D = -0,35 \cdot 115,5 = -40,4 \text{ кН}.$$

Оскільки значення реакцій  $S_A$  і  $S_B$  від'ємні, то напрями цих реакцій протилежні обраним на рис.3.4, а самі стержні не розтягнуті, як приймалося перед розв'язуванням задачі, а стиснуті.

**Відповідь:**  $S_D = 115,5 \text{ кН}$ ;  $S_A = -40,4 \text{ кН}$ ;  $S_B = -40,4 \text{ кН}$ .

### Задача №3

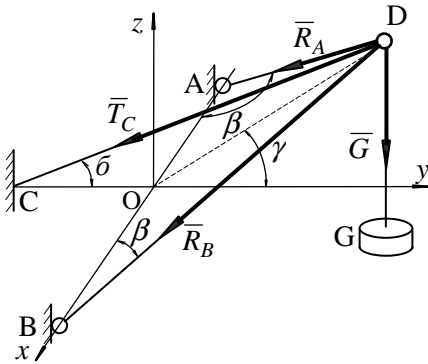


Рис. 3.5

Два стержня  $DA$  та  $DB$ , що з'єднані між собою в точці  $D$  (рис.3.5), до якої підвішене тіло вагою  $\bar{G}$ , утримуються в рівновазі за допомогою троса  $DC$ .

**Визначити** реакції в стержнях  $DA$ ,  $DB$  і натяг троса  $DC$ , якщо  $G = 500 \text{ Н}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ;  $\beta = 60^\circ$ ;  $\gamma = 45^\circ$ ;  $DA = DB$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу вузла  $D$  (рис.3.5).

Вузол  $D$  знаходиться в рівновазі під дією наступних сил: сили тяжіння  $\bar{G}$ , що направлена вертикально вниз; реакцій  $\bar{R}_A$

і  $\bar{R}_B$  стержнів  $DA$  і  $DB$ ; натягу  $\bar{T}_C$  троса  $DC$ . Реакції  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$  направимо від вузла  $D$ , рахуючи, що стержні розтягнуті.

Усі сили прикладені до однієї точки  $D$  і для визначення невідомих сил можна скористатися умовами рівноваги просторової системи збіжних сил.

З точкою  $O$  зв'яжемо прямокутну систему координат  $Oxyz$ . Вісь  $Oz$  направимо вгору, перпендикулярно до площини  $ABC$ , а осі  $Ox$  і  $Oy$  розташуємо в цій площині.

Спроектувавши всі сили на осі координат, складемо рівняння рівноваги вузла  $D$ :

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= -R_A \cos \beta + R_B \cos \beta = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= -T_C \cos \alpha - R_A \sin \beta \cos \gamma - R_B \sin \beta \cos \gamma = 0; \\ 3. \sum F_{kz} &= -T_C \sin \alpha - R_A \sin \beta \sin \gamma - R_B \sin \beta \sin \gamma - G = 0. \end{aligned}$$

З рівняння (1) отримаємо  $R_A = R_B$ .

Виразимо з рівняння (2)  $T_C$  як функцію від  $R_A$ :

$$T_C = -2R_A \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\cos \alpha}.$$

Підставивши  $T_C$  в рівняння (3), отримаємо:

$$2R_A \frac{\sin \beta \cos \gamma \sin \alpha}{\cos \alpha} - 2R_A \sin \beta \sin \gamma - G = 0.$$

Звідси

$$R_A = R_B = \frac{G}{2 \sin \beta (\cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha - \sin \gamma)};$$

$$R_A = R_B = \frac{500}{2 \sin 60^\circ (\cos 45^\circ \operatorname{tg} 30^\circ - \sin 45^\circ)} = 961 \text{ H}.$$

Оскільки,  $R_A$  і  $R_B$  від'ємні, то дійсні напрями реакцій стержнів  $DA$  і  $DB$  - в протилежні боки від показаних на рис.3.5, а самі стержні не розтягнуті, як було прийнято перед розв'язуванням, а стиснуті.

$$T_C = -2R_A \frac{\sin \beta \cos \gamma}{\cos \alpha} = -2(-961) \frac{\sin 60^\circ \cos 45^\circ}{\cos 30^\circ} = 1350 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $R_A = R_B = 961 \text{ Н}$ ;  $T_C = 1350 \text{ Н}$ .

#### Задача №4

Тіло  $G$  вагою  $100 \text{ Н}$  (рис.3.6) утримується в рівновазі трьома нитками: горизонтальною  $AO$  та двома нахиленими,  $BO$  і  $CO$ .

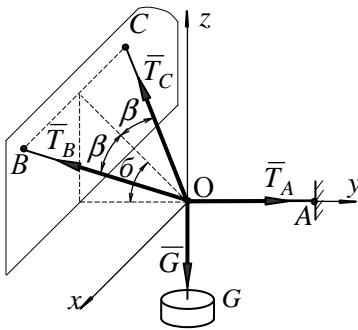


Рис. 3.6

Площина, в якій лежать нитки  $BO$  і  $CO$ , нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 45^\circ$  та перпендикулярна до вертикальної площини, що проходить через нитку  $AO$ . Нитки  $BO$  і  $CO$  натягнуті симетрично відносно цієї площини та утворюють з нею кут  $\beta = 30^\circ$ .

**Визначити** натяг ниток  $AO$ ,  $BO$  і  $CO$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу точки  $O$ .

Точка  $O$  знаходиться в рівновазі під дією сили  $\vec{G}$  - сили тяжіння тіла  $G$ , яка направлена вертикально вниз; сил  $T_C, T_B$  - натягу ниток  $BO$  і  $CO$ , які направлені до їх точок підвісу  $C$  та  $B$ ; сили  $\vec{T}_A$  - натягу нитки  $AO$ , яка направлена до точки підвісу  $A$ . Лінії цих усіх сил перетинаються в точці  $O$  і утворюють просторову систему збіжних сил.

Початок прямокутної системи координат розташуємо в точці  $O$ , сполучивши площину  $Oyz$  з вертикальною площиною симетрії з'єднання (рис.3.6).

Складемо рівняння рівноваги точки  $O$  в проєкціях на осі координат:



$$1. \sum F_{kx} = T_B \sin \beta - T_C \sin \beta = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = -T_B \cos \beta \cos \alpha - T_C \cos \beta \cos \alpha + T_A = 0;$$

$$3. \sum F_{kz} = T_B \cos \beta \sin \alpha + T_C \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

З рівняння (1) випливає, що  $T_B = T_C$ . З урахуванням цього рівняння (2) і (3) набудуть вигляду:

$$2'. \sum F_{ky} = -2T_B \cos \beta \cos \alpha + T_A = 0;$$

$$3'. \sum F_{kz} = 2T_B \cos \beta \sin \alpha - G = 0.$$

З рівняння (3') отримаємо:

$$T_B = \frac{G}{2 \cos \beta \sin \alpha} = \frac{100}{2 \cos 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{100}{2 \cdot 0,866 \cdot 0,707} = 80,6 \text{ Н.}$$

Тоді, з рівняння (2'):

$$T_A = 2T_B \cos \beta \cos \alpha = 2 \cdot 80,6 \cdot 0,866 \cdot 0,707 = 100 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $T_B = T_C = 80,6 \text{ Н}; T_A = 100 \text{ Н.}$

### Задача № 5

Просторова ферма (рис.3.7) складається з шести стержнів :

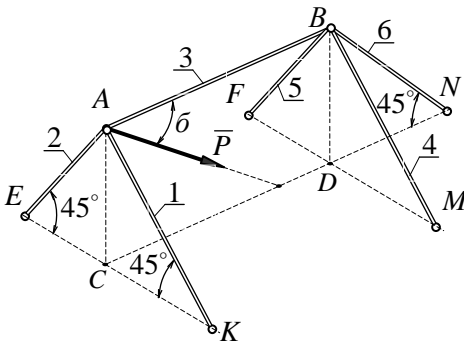


Рис. 3.7

1, 2, 3, 4, 5, 6. До вузла  $A$  в площині  $ABCD$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  прикладена сила  $\vec{P}$ . Кути рівнобедрених трикутників  $EAK$ ,  $FBM$  і  $NDB$  при вершинах  $A, B$  і  $D$  прямі.

**Визначити** зусилля в стержнях ферми, якщо  $P = 1 \text{ кН}$ .

**Розв'язок.** Просторова ферма являє собою складену конструкцію і для визначення зусиль в шести стержнях необхідно розглянути рівновагу двох вузлів  $A$  та  $B$ .

Спочатку розглянемо рівновагу вузла  $A$ , оскільки на нього діє відома сила  $\vec{P}$  і він з'єднує три стержня: 1, 2 і 3.

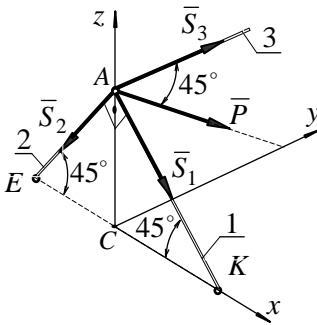


Рис. 3.8

До вузла  $A$  (рис.3.8) прикладена задана сила  $\vec{P}$  і реакції стержнів  $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3$ , які направимо від вузла уздовж стержнів, прийнявши, що всі стержні розтягнуті.

Таким чином, вузол  $A$  знаходиться в рівновазі під дією просторової системи чотирьох збіжних сил. Для цієї системи можна скласти три рівняння рівноваги в проекціях на осі координат.

Пов'яжемо з точкою  $C$  прямокутну систему координат  $Cxuz$  і складемо рівняння рівноваги:

1.  $\sum F_{kx} = S_1 \cos 45^\circ - S_2 \cos 45^\circ = 0;$
2.  $\sum F_{ky} = P \cos 45^\circ + S_3 = 0;$
3.  $\sum F_{kz} = -P \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ - S_2 \sin 45^\circ = 0.$

З рівняння (1) випливає, що  $S_1 = S_2$ .

Підставивши в рівняння (3)  $S_1 = S_2$ , отримаємо:

$$-P \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ - S_1 \sin 45^\circ = -(P + 2S_1) \sin 45^\circ = 0;$$

$$S_1 = -P/2 = -0,5 \text{ кН}.$$

Розв'язавши рівняння (2), знайдемо:

$$S_3 = -P \cos 45^\circ = -1 \cdot 0,707 = -0,707 \text{ кН}.$$

Знаки мінус вказують на те, що стержні 1,2 і 3 не розтягнуті, а стиснуті.

Розглянемо рівновагу вузла  $B$  (рис.3.9).

До вузла  $B$  прикладене зусилля  $\bar{S}'_3$  від стержня 3 і реакції від стержнів 4, 5 та 6.

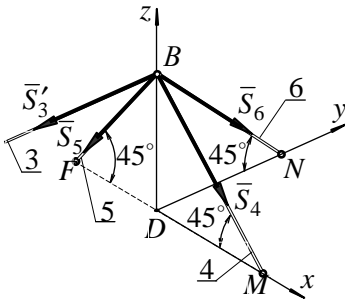


Рис. 3.9

Сила  $\bar{S}'_3$  за модулем дорівнює  $\bar{S}_3$ , але протилежно направлена.

Зусилля в стержнях 4, 5 і 6 направимо від вузла  $B$ , рахуючи, що стержні розтягнуті.

Вузол  $B$  знаходиться в рівновазі під дією просторової системи чотирьох збіжних сил:  $\bar{S}'_3$ ,  $\bar{S}_4$ ,  $\bar{S}_5$ ,  $\bar{S}_6$ .

Пов'яжемо з точкою  $D$  прямокутну систему координат  $Dxyz$  і складемо рівняння рівноваги даної просторової системи збіжних сил:

$$4. \sum F_{kx} = S_4 \cos 45^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0;$$

$$5. \sum F_{ky} = -S'_3 + S_6 \cos 45^\circ = 0;$$

$$6. \sum F_{kz} = -S_4 \sin 45^\circ - S_5 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ = 0.$$

З рівняння (5) отримаємо:

$$S_6 = \frac{S'_3}{\cos 45^\circ} = \frac{(-0,707)}{0,707} = -1 \text{ кН}.$$

Стержень 6 – стиснутий.

Оскільки з рівняння (4) впливає  $S_4 = S_5$ , то з рівняння (6) отримаємо:

$$\begin{aligned} -S_4 \sin 45^\circ - S_4 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ &= \\ = -2S_4 \sin 45^\circ - S_6 \sin 45^\circ &= -(2S_4 + S_6) \sin 45^\circ = 0; \end{aligned}$$

$$S_4 = S_5 = -\frac{S_6}{2} = -\frac{(-1)}{2} = 0,5 \text{ кН.}$$

Стержні 4 і 5 – розтягнуті, як і було прийнято.

**Відповідь:**  $S_1 = -0,5 \text{ кН}$ ;  $S_2 = -0,5 \text{ кН}$ ;  $S_3 = -0,707 \text{ кН}$ ;

$S_4 = 0,5 \text{ кН}$ ;  $S_5 = 0,5 \text{ кН}$ ;  $S_6 = -1 \text{ кН}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 6.5;  
6.7; 6.8; 6.11; 6.12 [2].

## Тема 4. ДОВІЛЬНА ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

### ЗАНЯТТЯ № 4

#### Зміст

- 4.1. Момент сили відносно точки. Пара сил.
- 4.2. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.
- 4.3. Порядок розв'язування задач.
- 4.4. Контрольні запитання.
- 4.5. Приклади розв'язування задач.

#### 4.1. Момент сили відносно точки. Пара сил

*Алгебраїчним моментом сили відносно точки називається добуток величини сили на довжину перпендикуляра, що опущений з точки, відносно якої визначається момент, на лінію дії сили.*

Позначається момент сили відносно точки наступним чином:

$$m_O(\vec{F}) = \pm Fh.$$

Точка  $O$ , відносно якої записується момент, називається **центром моменту**.

Перпендикуляр  $h$ , який опущений з точки  $O$  на лінію дії сили, називається **плечем сили** відносно точки  $O$  (рис.4.1).

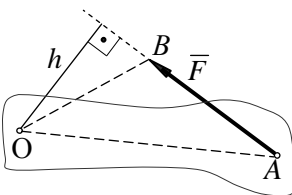


Рис. 4.1

Момент вважається **додатнім**, коли сила намагається повернути площину креслення навколо центра моменту *проти ходу годинникової стрілки* і **від'ємним**, коли в протилежному напрямі.

Момент сили відносно точки можна розглядати і як подвоєну площу  $\triangle AOB$ , вершиною якого є центр моменту, а основою – вектор сили, момент якої визначається:

$$m_O(\vec{F}) = \pm 2S_{\triangle AOB}.$$

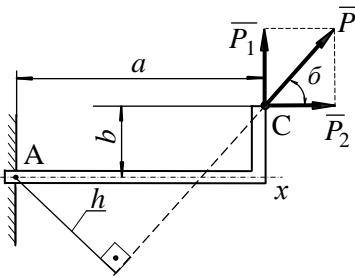


Рис. 4.2

Нехай сила  $\vec{P}$  прикладена до точки  $C$  під кутом  $\alpha$  до осі  $Ax$  (рис. 4.2).

За визначенням, момент сили  $\vec{P}$  відносно точки  $A$  дорівнює

$$m_A(\vec{P}) = Ph.$$

Оскільки, знаходження плеча  $h$  з рис.4.2 потребує геометричних викладок, то розкладемо силу  $\vec{P}$  на складові  $\vec{P}_1$  і  $\vec{P}_2$ , плечі яких відносно точки  $A$  визначити буде не важко:

$$P_1 = P \sin \alpha; \quad P_2 = P \cos \alpha.$$

За теоремою Варіньона:

$$m_A(\vec{P}) = m_A(\vec{P}_1) + m_A(\vec{P}_2),$$

де  $m_A(\vec{P}_1) = P_1 a; \quad m_A(\vec{P}_2) = -P_2 b.$

Тоді:

$$m_A(\vec{P}) = Ph = Pa \sin \alpha - Pb \cos \alpha.$$

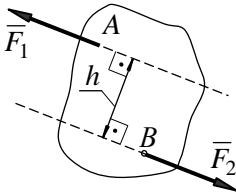


Рис. 4.3

**Парою сил** називається система двох паралельних сил, які рівні за модулем, направлені в протилежні боки і не лежать на одній прямій (рис. 4.3).

Найкоротша відстань  $h$  між лініями дії цих сил називається **плечем пари**.

Розмірність моменту сили в системі одиниць СІ –  $\text{Нм} = \text{Дж}$  (Джоуль), в технічній системі одиниць –  $\text{кгГм}$  ( $1\text{кгГм} = 9,81 \text{Дж}$ ).

В деяких випадках при визначенні моменту сили відносно точки зручно розкласти цю силу на складові і, користуючись **теоремою Варіньона**, знаходити момент сили як суму моментів цих складових.

Оскільки дві сили, що складають пару рівні за модулем, направлені в протилежні боки і не лежать на одній лінії дії, то тверде тіло, до якого прикладена пара сил, не знаходиться в рівновазі. Пара сил намагається повернути тверде тіло, до якого вона прикладена.

Мірою дії пари сил є алгебраїчна величина, яку називають **моментом пари**. Момент пари за модулем дорівнює добутку величини однієї з сил на плече пари:

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_1') = \pm F_1 \cdot h.$$

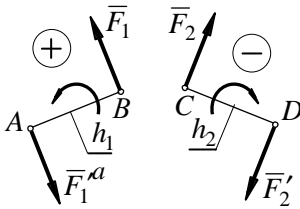


Рис. 4.4

Якщо пара сил обертає площину креслення (рис.4.4) проти ходу годинникової стрілки,  $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ , то момент пари додатній, а якщо за ходом,  $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ , – то від'ємний.

Теорія пар на площині зводиться до 4-х теорем:

**Теорема 1.** Алгебраїчна сума моментів сил, що складають пару, відносно довільної точки площини, в якій діє пара, не залежить від вибору цієї точки і дорівнює моменту пари.

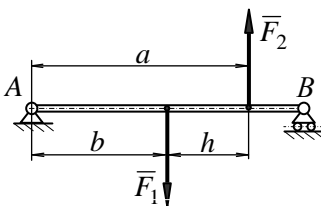


Рис. 4.5

Ця теорема пояснює, чому при обчисленні моментів сил відносно будь якої точки в рівняння моментів додається момент пари, що діє на об'єкт рівноваги.

Нехай на балку  $AB$  діє пара сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  з плечем  $h$  (рис. 4.5).

Момент пари дорівнює:

$$m(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 h = F_2 h.$$

Обчислимо суму моментів сил пари відносно точки  $A$ :

$$m_A(\vec{F}_1) + m_A(\vec{F}_2) = F_1 a - F_2 b.$$

Оскільки  $F_1 = F_2$  і  $a - b = h$ , то:

$$m_A(\bar{F}_1) + m_A(\bar{F}_2) = F_1(a - b) = F_2h.$$

При розв'язуванні задач такі викладки робити не треба, а в рівняння моментів сил треба додати момент пари з відповідним знаком “+” або “-”.

*Теорема 2. Не порушуючи стан твердого тіла, пару сил можна переносити в площині її дії в будь яке місце.*

*Теорема 3. Пари сил, моменти яких рівні – еквівалентні, тобто чинять на тіло однакову дію.*

*Теорема 4. При додаванні декількох пар сил на площині знаходиться рівнодіюча пара, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів пар, що додаються.*

## 4.2. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил

Аналітичні умови рівноваги плоскої системи сил виражаються трьома залежностями (основна форма):

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0. \end{cases}$$

і формулюються так: *довільна плоска система сил знаходиться в рівновазі, якщо алгебраїчні суми проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки площини дії сил дорівнюють нулю.*



### 4.3. Порядок розв'язування задач

Задачі на рівновагу довільної плоскої системи сил, що прикладена до твердого тіла, рекомендується розв'язувати в наступному порядку:

1. Встановити, рівновагу якого тіла треба розглянути.
2. Встановити і позначити на кресленні активні сили, що діють на тіло, та їх напрями.
3. З'ясувати характер в'язей та можливі напрями їх реакцій.
4. Скласти відповідні рівняння рівноваги. При цьому рекомендується:
  - при складанні рівнянь проекцій одну з координатних осей направити перпендикулярно до однієї з невідомих реакцій;
  - при складанні рівняння моментів, за центр моментів обрати таку точку, в якій перетинаються максимальна кількість ліній дії невідомих сил.
5. Розв'язавши систему рівнянь рівноваги, визначити невідомі величини.

### 4.4. Контрольні запитання

1. Що називається моментом сили відносно точки?
2. Як визначається алгебраїчний момент сили відносно точки?
3. Чи зміниться момент сили відносно даної точки при перенесенні сили вздовж лінії її дії?
4. В якому випадку момент сили відносно даної точки дорівнює нулю?
5. Яка система сил називається парою?
6. Чи можна пару сил замінити рівнодіючою?

### 4.5. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

Однорідна балка  $AB$  (рис.4.6) вагою  $20 \text{ кН}$  спирається на гладку горизонтальну підлогу в точці  $B$  під кутом  $60^\circ$  і, крім того, підтримується двома опорами в точках  $C$  та  $D$ .

**Визначити** реакції опор в точках  $B$ ,  $C$  і  $D$ , якщо  $AB=3\text{ м}$ ,  $BC=0,5\text{ м}$ ,  $BD=1\text{ м}$ .

**Розв'язок.** За об'єкт рівноваги оберемо балку  $AB$ , оскільки на неї діють всі відомі і невідомі сили.

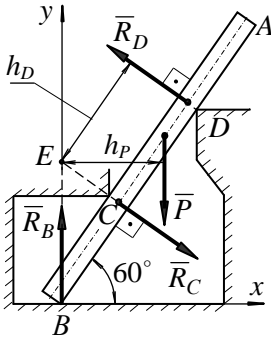


Рис. 4.6

До балки прикладені: активна сила - власна вага балки  $\bar{P}$ ; реакція підлоги  $\bar{R}_B$ , яка направлена перпендикулярно до поверхні підлоги; реакції опор  $\bar{R}_C$  і  $\bar{R}_D$ , які направлені перпендикулярно до балки  $AB$ .

Таким чином, балка  $AB$  знаходиться в рівновазі під дією довільної плоскої системи сил, для рівноваги якої необхідно:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m(\bar{F}_k) = 0.$$

Оберемо систему координат. Вісь  $Bx$  напрямимо горизонтально по підлозі, а  $By$  – вертикально вгору.

Складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = R_C \cos 30^\circ - R_D \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -R_C \sin 30^\circ + R_D \sin 30^\circ + R_B - P = 0.$$

Для запису рівняння моментів треба обрати центр моментів. За центр моментів зручно обирати точку, в якій перетинаються лінії дії невідомих за величиною реакцій, оскільки момент від цих сил буде дорівнювати нулю.

В даному випадку зручно обрати точку  $E$ , в якій перетинаються лінії дії невідомих реакцій  $\bar{R}_B$  і  $\bar{R}_C$ .

Для визначення плеча реакції  $\bar{R}_D$ , опустимо перпендикуляр  $h_D$  з центра моментів на лінію дії цієї реакції. З рис.4.6 видно, що

$$h_D = CD = BD - BC = 1 - 0,5 = 0,5\text{ м}.$$

Для визначення плеча сили тяжіння  $\bar{P}$  опустимо з точки  $E$  перпендикуляр  $h_P$  на лінію дії цієї сили:

$$h_P = \frac{AB}{2} \cos 60^\circ = \frac{3}{2} \cdot 0,5 = 0,75\text{ м}.$$

Рівняння моментів буде мати вигляд:

$$\sum m_E(\bar{F}_k) = R_D h_D - Ph_P = 0.$$

Підставивши числові значення отримаємо:

$$\sum F_{kx} = R_C - R_D = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -R_C \cdot 0,5 + R_D \cdot 0,5 + R_B - 20 = 0;$$

$$\sum m(\bar{F}_k) = R_D \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,75 = 0.$$

З останнього рівняння знайдемо величину реакції  $R_D$

$$R_D = \frac{20 \cdot 0,75}{0,5} = 30 \text{ кН}.$$

З першого рівняння випливає, що  $R_C = R_D = 30 \text{ кН}$ , а з другого:

$$R_B = 20 + R_C \cdot 0,5 - R_D \cdot 0,5 = 20 + 30 \cdot 0,5 - 30 \cdot 0,5 = 20 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_B = 20 \text{ кН}$ ;  $R_C = 30 \text{ кН}$ ;  $R_D = 30 \text{ кН}$ .

### Задача №2

На балку  $AC$  (рис.4.7) діють дві зосереджені сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$  та рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ .

**Визначити** реакції опор  $A$  і  $B$ , якщо  $F_1 = 6 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 8 \text{ кН}$ ;  $q = 3 \text{ кН/м}$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу балки  $AC$ , на яку діють зосереджені сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ , рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$  та реакції опор  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$ . Рівномірно розподілене навантаження замінимо рівнодіючою  $\bar{Q}$ , яку прикладемо посередині  $CB$ :

$$Q = q \cdot (CB) = 3 \cdot 2 = 6 \text{ кН}.$$

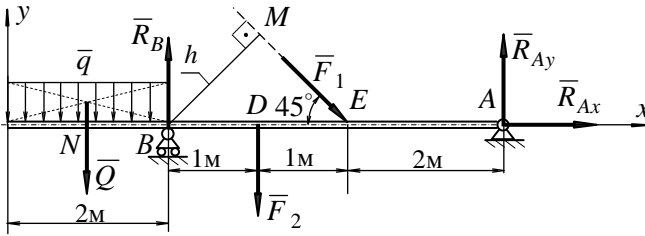


Рис. 4.7

З'ясуємо напрями реакцій опор  $A$  і  $B$ .

Опора  $B$  – шарнірно-рухома, її реакція  $\bar{R}_B$  буде направлена перпендикулярно до опорної поверхні, тобто перпендикулярно до балки.

Опора  $A$  – шарнірно-нерухома. Напрямок її реакції заздалегідь невідомий. Розкладемо цю реакцію на складові. Для цього оберемо систему координат. Вісь  $Sx$  направимо вздовж осі балки, а вісь  $Sy$  перпендикулярно вгору. Складові реакції  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  направимо за осями обраної системи координат.

Якщо після розв'язання відповідних рівнянь величина якоїсь з реакцій  $R_B, R_{Ax}, R_{Ay}$  буде від'ємною, то її напрямом буде протилежний від вказаного на схемі (рис.4.7).

Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, що діє на балку  $CA$  :

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0.$$

Складемо рівняння рівноваги, обравши за центр моментів точку  $B$ :

$$\sum F_{kx} = F_1 \cos 45^\circ + R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -Q + R_B - F_2 - F_1 \sin 45^\circ + R_{Ay} = 0;$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = Q \cdot (NB) - F_2 \cdot (BD) - F_1 h + R_{Ay} \cdot (BA) = 0.$$

де  $NB, BD, h, BA$  – плечі відповідних сил відносно точки  $B$ ;

$$h = (BE) \cdot \sin 45^\circ = 2 \cdot 0,707 = 1,41 \text{ м.}$$

З урахуванням числових значень рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$1. \sum F_{kx} = 6 \cdot 0,7097 + R_{Ax} = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = -6 + R_B - 8 - 6 \cdot 0,707 + R_{Ay} = 0;$$

$$3. \sum m_B(\bar{F}_k) = 6 \cdot 1 - 8 \cdot 1 - 6 \cdot 1,41 + R_{Ay} \cdot 4 = 0.$$

З рівнянь (1) і (3) отримаємо:

$$R_{Ax} = 6 \cdot 0,707 = -4,24 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = \frac{-6 \cdot 1 + 8 \cdot 1 + 6 \cdot 1,41}{4} = 2,61 \text{ кН}.$$

Підставивши  $R_{Ay}$  в рівняння (2), знайдемо:

$$R_B = 6 + 8 + 6 \cdot 0,707 - R_{Ay} = 6 + 8 + 4,24 - 2,61 = 15,63 \text{ кН}.$$

Таким чином, реакції  $\bar{R}_{Ay}$  і  $\bar{R}_B$  направлені так, як показано на рис.4.7, а реакція  $\bar{R}_{Ax}$  напрямлена в протилежний бік від попередньо обраного напрямку.

Величина реакції  $\bar{R}_A$  дорівнює

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-4,24)^2 + (2,61)^2} = 4,98 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_{Ax} = -4,24 \text{ кН}; R_{Ay} = 2,61 \text{ кН}; R_A = 4,98 \text{ кН};$

$$R_B = 15,63 \text{ кН}.$$

### Задача №3

На жорстко затиснуту консольну балку  $AB$  (рис.4.8), діють зосереджена сила  $\bar{F}$ ; пара сил з моментом  $M$  і рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ .

**Визначити** реакцію затиснення, якщо  $F = 4 \text{ кН}; M = 2 \text{ кНм}; q = 1,5 \text{ кН/м}; AB=5 \text{ м}; AC=3 \text{ м}.$

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу балки  $AB$ , на яку діють задані (активні) навантаження: зосереджена сила  $\bar{F}$ ; пара сил з моментом  $M$ ; розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$  і реакції в опорі  $A$ .

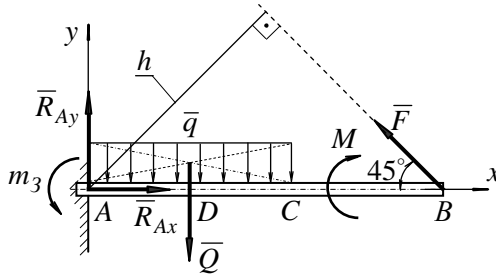


Рис. 4.8

Рівномірно розподілене навантаження заміномо рівнодіючою  $\bar{Q}$ , яка прикладена посередині відрізка  $AC$  і за модулем дорівнює

$$Q = q \cdot (AC) = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ кН.}$$

Балка  $AB$ , рівновага якої розглядається, називається **консольною**, оскільки має один вільний (не опертий) кінець, а другий замуруваний (затиснутий) в стіну або в будь яку іншу масивну частину конструкції. Таке закріплення балки перешкоджає повороту і зміщенню затиснутого кінця в будь якому напрямі. Таким чином, в затисненні  $A$  виникають два силових фактора: сила (реакція)  $\bar{R}_A$ , що не допускає зміщення балки, і пара сил, момент якої позначається  $m_3$ , що не допускає повороту балки.

Реакцію  $\bar{R}_A$  розкладемо на складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат  $Axy$ , а момент затиснення  $m_3$  напрямимо проти ходу годинникової стрілки, прийнявши його додатним (рис.4.8).

Умови рівноваги плоскої довільної системи сил, що діють на балку  $AB$ :

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0.$$

Складемо рівняння рівноваги, обравши за центр моментів точку  $A$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - Q + F \sin 45^\circ = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = m_3 - Q \cdot (AD) - M + F \cdot h = 0,$$

де  $AD$  і  $h$  - плечі сил  $\bar{Q}$  і  $\bar{F}$  відносно точки  $A$ ;

$$AD = AC/2 = 1,5 \text{ м};$$

$$h = (AB) \cdot \sin 45^\circ = 5 \cdot 0,707 = 3,54 \text{ м}.$$

З урахуванням числових значень рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} - 4 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - 4,5 + 4 \cdot 0,707 = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = m_3 - 4,5 \cdot 1,5 - 2 + 4 \cdot 3,54 = 0.$$

Розв'язавши послідовно одержані рівняння одержимо:

$$R_{Ax} = 4 \cdot 0,707 = 2,83 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = 4,5 - 4 \cdot 0,707 = 1,67 \text{ кН};$$

$$m_3 = 4,5 \cdot 1,5 + 2 - 4 \cdot 3,54 = -5,37 \text{ кНм}.$$

Додатні значення реакцій  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  вказують на те, що їх напрями обрані правильно. Знак мінус перед значенням  $m_3$  вказує на те, що дійсним є напрям моменту затиснення в протилежний бік від показаного на рис.4.8, тобто за ходом годинникової стрілки.

**Відповідь:**  $R_{Ax} = 2,83 \text{ кН}; R_{Ay} = 1,67 \text{ кН}; m_3 = -5,37 \text{ кНм}.$

#### Задача №4

Жорстка рама (рис.4.9) закріплена в точці  $A$  шарнірно-нерухомою, а в точці  $B$  шарнірно-рухомою опорами. В точці  $C$  до рами прикріплений трос, що перекинутий через блок і до кінця

якого підвішений вантаж  $P$  вагою  $30 \text{ кН}$ . На раму діє пара сил з моментом  $M=60 \text{ кНм}$  та дві зосереджені сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$  величиною відповідно  $20 \text{ кН}$  і  $40 \text{ кН}$ , які прикладені в точках  $E$  і  $D$ .

**Визначити** реакції опор в точках  $A$  і  $B$ , якщо  $AD=0,2\text{м}$ ;  $AK=0,5\text{м}$ ;  $KC=1\text{м}$ ;  $CE=0,3\text{м}$ ;  $CB=0,4\text{м}$ ;  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=30^\circ$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу рами  $AKCB$ . На раму діють задані активні сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ ; пара сил з моментом  $M$ ; натяг троса  $\bar{T}$  (за модулем  $T=P$ ); реакції в'язей в шарнірах  $A$  і  $B$ .

Реакцію шарнірно-нерухомої опори  $A$  розкладемо на дві складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$ , які направимо за осями обраної системи координат  $Axy$ .

Реакцію  $\bar{R}_B$  шарнірно-рухомої опори  $B$  направимо перпендикулярно до опорної поверхні.

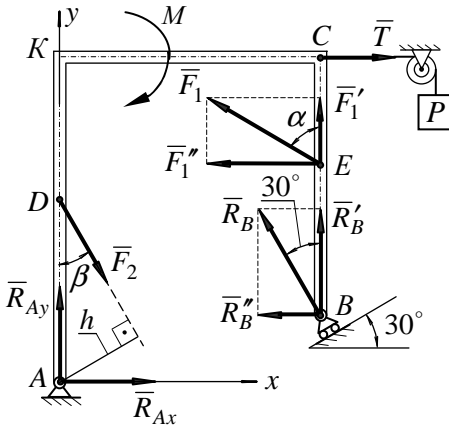


Рис. 4.9

Оберемо за центр моментів точку  $A$ . Перш ніж записувати умови рівноваги, звернемо увагу на те, що для сил  $\bar{F}_1$  і  $\bar{R}_B$  буде важко визначити плечі відносно точки  $A$  в рівнянні моментів.

Скористаємося теоремою Варіньона. Розкладемо сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{R}_B$  на складові паралельні до осей обраної системи координат  $Axy$ :

$$F_1' = F_1 \cos \alpha; \quad R_B' = R_B \cos 30^\circ;$$

$$F_1'' = F_1 \sin \alpha; \quad R_B'' = R_B \sin 30^\circ.$$

Моменти сил  $F_1'$ ,  $F_1''$ ,  $R_B'$  і  $R_B''$  відносно точки  $A$  будуть додатними. Плечем для сил  $F_1'$  і  $R_B'$ , оскільки їх лінії дії збіга-



ються, буде відстань  $KC$ , а для сил  $\bar{F}_1''$  і  $\bar{R}_B''$  плечі відповідно дорівнюють  $AK - CE$  і  $AK - CB$ .

Складемо рівняння рівноваги для отриманої плоскої системи сил:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= R_{Ax} + F_2 \sin \beta - F_1'' + T - R_B'' = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - F_2 \cos \beta + F_1' + R_B' = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -F_2 h - M - T \cdot (AK) + (F_1' + R_B') \cdot (KC) + \\ &\quad + F_1'' \cdot (AK - CE) + R_B'' \cdot (AK - CB) = 0.\end{aligned}$$

де  $h = (AD) \sin \beta$  - плече сили  $\bar{F}_2$  відносно центра  $A$ .

Підставимо вирази для  $F_1'$ ,  $F_1''$ ,  $R_B'$  і  $R_B''$  в записану систему:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= R_{Ax} + F_2 \sin \beta - F_1 \sin \alpha + T - R_B \sin 30^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - F_2 \cos \beta + F_1 \cos \alpha + R_B \cos 30^\circ = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= -F_2 (AD) \sin \beta - M - T(AK) + (F_1 \cos \alpha + \\ &\quad + R_B \cos 30^\circ)(KC) + F_1 \sin \alpha(AK - CE) + \\ &\quad + R_B \sin 30^\circ(AK - CB) = 0.\end{aligned}$$

З урахуванням числових даних отримуємо:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= R_{Ax} + 40 \sin 30^\circ - 20 \sin 60^\circ + 30 - R_B \sin 30^\circ = \\ &= R_{Ax} + 20 - 17,3 + 30 - 0,5 R_B = R_{Ax} - 0,5 R_B + 12,7 = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - 40 \cos 30^\circ + 20 \cos 60^\circ + R_B \cos 30^\circ = \\ &= R_{Ay} - 34,6 + 10 + 0,866 R_B = R_{Ay} + 0,866 R_B - 24,6 = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= 40 \cdot 0,2 \sin 30^\circ - 60 - 30 \cdot 0,5 + 20 \cos 60^\circ + \\ &\quad + 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 1 + 20 \sin 60^\circ \cdot 0,2 + R_B \cos 30^\circ \cdot 1 + \\ &\quad + R_B \sin 30^\circ \cdot 0,1 = -65,54 + 0,915 R_B = 0.\end{aligned}$$

З останнього рівняння знаходимо  $R_B$ :

$$R_B = \frac{65,54}{0,915} = 71,6 \text{ кН}.$$

Підставивши значення  $R_B$  в перше і друге рівняння, отримаємо:

$$R_{Ax} = 0,5R_B - 12,7 = 0,5 \cdot 71,6 - 12,7 = 23,1 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = 24,6 - 0,866R_B = 24,6 - 0,866 \cdot 71,6 = -37,3 \text{ кН}.$$

Знак мінус перед значенням  $R_{Ay}$  вказує на те, що реакція  $\bar{R}_{Ay}$  направлена в протилежний бік від обраного на рис.4.9.

Повна реакція  $R_A$  шарнірно-нерухої опори  $A$  дорівнює:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{23,1^2 + (-37,3)^2} = 44 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 44 \text{ кН}; R_B = 71,6 \text{ кН}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 4.25; 4.27; 4.29; 4.31 [2].

## Тема 5. РІВНОВАГА СКЛАДЕНОЇ КОНСТРУКЦІЇ

### ЗАНЯТТЯ №5

#### Зміст

- 5.1. Порядок розв'язування задач на рівновагу системи тіл.
- 5.2. Приклади розв'язування задач.

#### 5.1. Порядок розв'язування задач на рівновагу системи тіл

У практиці часто зустрічаються задачі на рівновагу системи тіл, тобто з'єднаних між собою декількох тіл.

В'язі, що з'єднують тіла між собою, називаються *внутрішніми*, а в'язі, що з'єднують систему тіл з опорами, називаються *зовнішніми*.

При розв'язуванні задач на рівновагу системи сил може виявитися, що число рівнянь рівноваги складеної конструкції в цілому менше ніж число невідомих сил. В цьому випадку додатково розглядають рівновагу одного або декількох тіл, що входять до системи.

Другий спосіб розв'язування подібних задач полягає в тому, що конструкцію зразу розчленовують на окремі тіла і розглядають рівновагу кожного з цих тіл. При цьому реакції внутрішніх в'язей системи будуть зовнішніми по відношенню до окремих тіл. Вони будуть попарно рівними за модулем і протилежними за напрямом.

Задачі на рівновагу складеної конструкції розв'язуються в наступному порядку:

1. До складеної конструкції прикласти всі зовнішні сили.
2. З'ясувати характер зовнішніх в'язей і показати можливі напрями їх реакцій.
3. Якщо число невідомих реакцій в'язей більше, ніж число рівнянь рівноваги, які можна скласти для отриманої системи сил, складену конструкцію розчленовують на окремі тіла, замінюючи внутрішні в'язі відповідними реакціями.

4. Кожне з тіл, що входять до складу конструкції, розглядають як вільне, що знаходиться під дією заданих сил і реакцій зовнішніх і внутрішніх в'язей.
5. Порівнюють загальне число невідомих величин і число усіх рівнянь рівноваги сил, які можна скласти після розчленування конструкції на складові. З'ясовують, чи є задача *статично визначеною*, тобто, чи розв'язується з використанням тільки рівнянь рівноваги.
6. Складають рівняння рівноваги сил, що прикладені до об'єктів рівноваги.
7. Якщо задача є статично визначеною, то отриману систему рівнянь розв'язують в найбільш зручній послідовності і визначають усі невідомі величини.

## 5.2. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Конструкція складається з двох балок  $AD$  і  $DC$  з'єднаних циліндричним шарніром в точці  $D$  (рис.5.1). На конструкцію діють зосереджена сила  $\vec{F}$  і рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ .

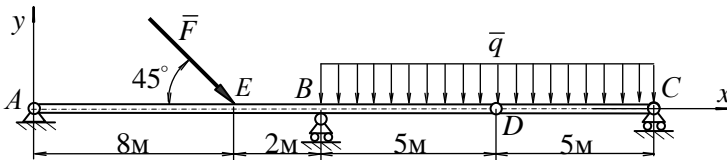


Рис. 5.1

**Визначити** реакції опор  $A, B, C$  і шарніра  $D$ , якщо  $F = 4 \text{ кН}$ ;  $q = 2 \text{ кН/м}$ .

**Розв'язок.** Конструкція знаходиться в рівновазі під дією сили  $\vec{F}$ , розподіленого навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$  та реакцій опор  $A, B$  і  $C$ . Опора  $A$  – шарнірно-нерухома. Напрямок реакції  $\vec{R}_A$  – невідомий, тому розкладемо її на складові  $\vec{R}_{Ax}$  і  $\vec{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат.

Опори  $B$  і  $C$  – шарнірно-рухомі. Реакції  $\bar{R}_B$  і  $\bar{R}_C$  направлені перпендикулярно до опорних поверхонь, тобто вертикально.

Взаємодія між балками  $AD$  і  $DC$  буде мати місце в шарнірі  $D$ , який їх з'єднує. Одна з цих внутрішніх сил конструкції прикладена до балки  $AD$ , а друга, рівна їй за модулем, але протилежно направлена, прикладена до балки  $DC$ . Якщо розглядати всю конструкцію як тверде тіло, то ці сили враховувати не треба, оскільки вони взаємно зрівноважуються.

Якщо скласти три умови рівноваги для всієї конструкції в цілому, то в них, крім зовнішніх сил, що діють на конструкцію, увійдуть і чотири невідомих реакції  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_B$  і  $\bar{R}_C$ .

Оскільки кількість рівнянь рівноваги менша, ніж число невідомих, то визначити величину невідомих реакцій в'язей не можна.

При розчленуванні конструкції по шарніру  $D$ , на балку  $AD$  буде діяти з боку балки  $DC$  реакція  $\bar{R}_D$ , а на балку  $DC$  рівна їй за модулем, але протилежно напрямлена реакція  $\bar{R}'_D$ , з боку балки  $AD$ .

Реакції  $\bar{R}_D$  і  $\bar{R}'_D$  розкладаються на складові, які напрямляються вздовж осей  $Ax$  і  $Ay$ , причому:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{Dx} &= -\bar{R}'_{Dx}; & \bar{R}_{Dy} &= -\bar{R}'_{Dy}; \\ R_{Dx} &= R'_{Dx}; & R_{Dy} &= R'_{Dy}.\end{aligned}$$

Таким чином, при розчленуванні конструкції додаються ще дві невідомі реакції  $\bar{R}_{Dx}$  та  $\bar{R}_{Dy}$ , і число невідомих величин збільшується до шести, тобто:

$$\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}, \bar{R}_B, \bar{R}_C, \bar{R}_{Dx}, \bar{R}_{Dy}.$$

Якщо розглянути рівновагу балки  $DC$ , то можна скласти ще три рівняння рівноваги, і загальне число рівнянь буде дорівнювати шести, що дозволить визначити всі невідомі величини.

Рівновага балки  $DC$ , а не  $AD$ , розглядається тому, що на неї діє менше число сил і рівняння рівноваги будуть більш простими.

Розглянемо рівновагу конструкції в цілому (рис.5.2).

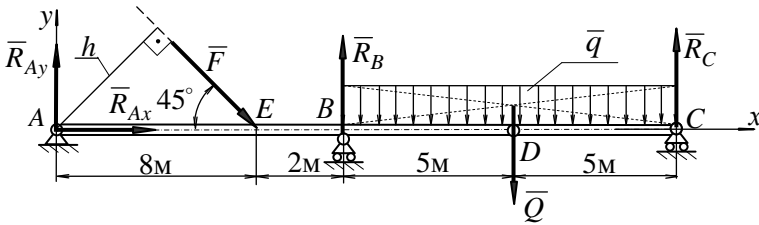


Рис. 5.2

Спочатку замінимо рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $\bar{q}$  зосередженою силою  $\bar{Q}$ :

$$Q = q \cdot (BC) = 2 \cdot 10 = 20 \text{ кН},$$

яку прикладемо до середини відрізка  $BC$ , тобто в точці  $D$ .

Запишемо умови рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_A(\bar{F}_k) = 0.$$

Складемо ці рівняння:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + F \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - F \sin 45^\circ + R_B - Q + R_C = 0;$$

$$\sum m_A(F_k) = -F \cdot h + R_B(AB) - Q(AD) + R_C(AC) = 0,$$

де  $h = (AE) \sin 45^\circ = 8 \cdot 0,707 = 5,65 \text{ м}$ .

З урахуванням числових значень величин рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$1. \sum F_{kx} = R_{Ax} + 4 \cdot 0,707 = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = R_{Ay} - 4 \cdot 0,707 + R_B - 20 + R_C = 0;$$

$$3. \sum m_A(F_k) = -4 \cdot 5,65 + 10R_B + 20 \cdot 15 + R_C \cdot 20 = 0.$$

З рівняння (1) дістанемо величину реакції  $\bar{R}_{Ax}$ :

$$R_{Ax} = -4 \cdot 0,707 = -2,83 \text{ кН}.$$

Оскільки в рівняння (2) і (3) входять три невідомі величини, причому, в кожному не менше двох, то розв'язати ці рівняння і

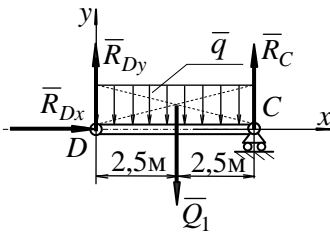


Рис. 5.3

визначити невідомі не можна. Тому розглянемо рівновагу балки  $DC$  і складемо додаткові рівняння рівноваги.

Балка  $DC$  (рис.5.3) знаходиться в рівновазі під дією розподіленого навантаження  $\bar{q}$  на частині  $DC$ , реакції опори  $C$  і реакції шарніра  $D$ . Напрямок реакції  $\bar{R}_C$  вже заданий. Реакцію  $\bar{R}_D$  розкладемо на дві складові  $\bar{R}_{Dx}$  і  $\bar{R}_{Dy}$  за осями обраної системи координат  $Dxy$ .

Сила  $\bar{Q}_1$ , що замінює дію рівномірно розподіленого навантаження, прикладена посередині відрізка  $DC$  і за модулем дорівнює:

$$Q_1 = q(DC) = 2 \cdot 5 = 10 \text{ кН.}$$

Складемо рівняння рівноваги для балки  $DC$ :

$$4. \sum F_{kx} = R_{Dx} = 0;$$

$$5. \sum F_{ky} = R_{Dy} - Q_1 + R_C = 0;$$

$$6. \sum m_D(\bar{F}_k) = -Q_1 \cdot \frac{(DC)}{2} + R_C \cdot (DC) = 0.$$

З рівняння (4) випливає, що  $R_{Dx} = 0$ .

Реакцію  $R_C$  знайдемо з рівняння (6):

$$R_C = \frac{Q_1 \cdot (DC)}{2 \cdot (DC)} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН.}$$

З рівняння (5) знайдемо реакцію  $R_{Dy}$ :

$$R_{Dy} = Q_1 - R_C = 10 - 5 = 5 \text{ кН.}$$

Підставивши в рівняння (3) значення  $R_C$ , знайдемо  $R_B$ :

$$R_B = \frac{4 \cdot 5,65 + 20 \cdot 15 - 5 \cdot 20}{10} = 22,2 \text{ кН.}$$

Розв'язавши рівняння (2), отримаємо реакцію  $R_{Ay}$ :

$$R_{Ay} = 4 \cdot 0,707 - R_B + 20 - R_C = 2,8 + 20 - 5 = -4,4 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $R_{Ax} = -2,83 \text{ кН}; R_{Ay} = -4,4 \text{ кН}; R_{Dx} = 0;$

$$R_{Dy} = 5 \text{ кН}; R_C = 5 \text{ кН}; R_B = 22,2 \text{ кН.}$$

### Задача №2

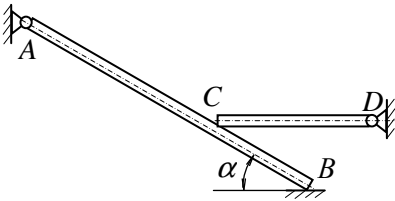


Рис. 5.4

Конструкція складається з двох однорідних стержнів  $AB$  і  $CD$  вагою  $P_1 = 100 \text{ Н}$  і  $P_2 = 200 \text{ Н}$  (рис.5.4). Стержень  $AB$  закріплений нерухомим шарніром в точці  $A$  і спирається на горизонтальну поверхню в точці  $B$ . Горизонтальний стержень  $CD$  закріплений нерухомим шарніром в точці  $D$  і спирається на стержень  $AB$ .

Горизонтальний стержень  $CD$  закріплений нерухомим шарніром в точці  $D$  і спирається на стержень  $AB$ .

**Визначити** реакції в шарнірі  $A$  і в точці  $C$ , де стержень  $CD$  спирається на стержень  $AB$ , якщо  $AB=2 \text{ м}$ ,  $CD=1 \text{ м}$ ,  $CB=0,5 \text{ м}$ ,  $\alpha=30^\circ$ .

**Розв'язок.** В даній задачі потрібно визначити реакції в шарнірно-нерухомій опорі  $A$  ( $\bar{R}_A$ ) і в точці  $C$  ( $\bar{R}_C$ ), де стержні дотикаються. Реакція  $\bar{R}_C$  є силою взаємодії між стержнями  $AB$  і  $CD$ . Якщо розглядати рівновагу конструкції в цілому, то сила  $\bar{R}_C$ , як внутрішня сила, не буде входити в систему сил, що діють на об'єкт рівноваги і повністю розв'язати задачу буде неможливо.

Але, якщо розглядати рівновагу кожного стержня окремо, то на кожен з стержнів сила  $\bar{R}_C$  буде діяти як зовнішня. В точці  $C$  на стержень  $AB$  діє стержень  $CD$ , а на стержень  $CD$  з рівною за модулем і протилежною за напрямом силою діє стержень  $AB$ .

Оскільки обидві точки  $A$  і  $C$ , реакції в яких треба визначити, належать стержню  $AB$ , то розглянемо його рівновагу.



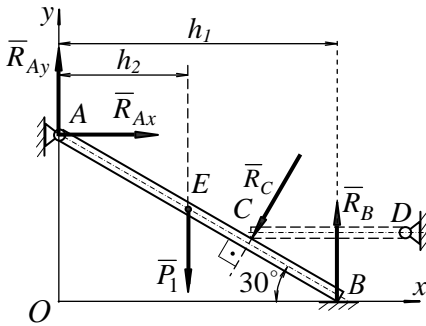


Рис. 5.5

На стержень  $AB$  діють наступні сили (рис.5.5): вага  $\bar{P}_1$ , що прикладена до середини стержня  $AB$  в точці  $E$ ; нормальна реакція  $\bar{R}_B$  горизонтальної поверхні, що прикладена до точки  $B$ ; реакція шарніра  $A$ , яку розкладемо на складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  за осями об-

раної системи координат; невідома за величиною сила тиску  $\bar{R}_C$  стержня  $CD$ , що прикладена до точки  $C$  і направлена перпендикулярно до стержня  $AB$ .

Складемо рівняння рівноваги стержня  $AB$ :

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= R_{Ax} - R_C \cos 60^\circ = 0; \\ \sum F_{ky} &= R_{Ay} - P_1 - R_C \sin 60^\circ + R_B = 0; \\ \sum m_A(\bar{F}_k) &= R_B \cdot h_1 - P_1 \cdot h_2 - R_C \cdot (AC) = 0,\end{aligned}$$

де  $h_1, h_2, AC$  - плечі сил  $\bar{R}_B, \bar{P}_1, \bar{R}_C$  відносно точки  $A$ ;

$$h_1 = (AB) \cos 30^\circ = 2 \cdot 0,866 = 1,73 \text{ м};$$

$$h_2 = (AE) \cos 30^\circ = \frac{(AB)}{2} \cos 30^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м};$$

$$AC = AB - CB = 2 - 0,5 = 1,5 \text{ м}.$$

З урахуванням числових значень рівняння рівноваги набудуть вигляду:

1.  $\sum F_{kx} = R_{Ax} - R_C \cdot 0,5 = 0;$
2.  $\sum F_{ky} = R_{Ay} - 100 - R_C \cdot 0,866 + R_B = 0;$
3.  $\sum m_A(\bar{F}_k) = R_B \cdot 1,73 - 100 \cdot 0,866 - R_C \cdot 1,5 = 0.$

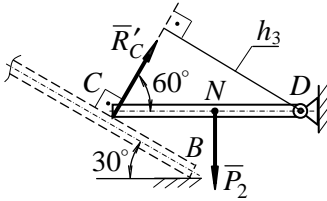


Рис. 5.6

Таким чином, при розгляді рівноваги стержня  $AB$ , маємо чотири невідомих:  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ ,  $R_C$ , і  $R_B$ . Оскільки, складених рівнянь рівноваги три, то задача статично невизначена.

Розглянемо рівновагу стержня  $CD$  (рис.5.6).

Стержень  $CD$  знаходиться в рівновазі під дією наступних сил: ваги стержня  $\bar{P}_2$ , що прикладена до середини стержня  $CD$  в точці  $N$ ; реакції  $\bar{R}'_C$ , рівної за величиною  $\bar{R}_C$  і направленої в протилежний бік від вектора  $\bar{R}_C$ ; реакції  $\bar{R}_D$ , що прикладена до точки  $D$  (оскільки її величину за умовою задачі визначати не треба, то на рис 5.6 вона не показана).

Для визначення величини реакції  $\bar{R}'_C$  досить взяти суму моментів усіх сил відносно точки  $D$ , оскільки момент від невідомої реакції  $\bar{R}_D$  відносно цієї точки буде дорівнювати нулю:

$$4. \sum m_D(\bar{F}_k) = -R'_C h_3 + P_2 \cdot (ND) = 0,$$

де  $h_3$  і  $ND$  - плечі сил  $\bar{R}'_C$  і  $\bar{P}_2$  відносно точки  $D$ ;

$$h_3 = (CD) \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м};$$

$$ND = \frac{1}{2} (CD) = 0,5 \text{ м}.$$

Підставимо в рівняння (4) числові дані і визначимо  $\bar{R}'_C$ :

$$-R'_C \cdot 0,866 + 200 \cdot 0,5 = 0; \Rightarrow R'_C = \frac{200 \cdot 0,5}{0,866} = 115,5 \text{ Н}.$$

Розв'язавши послідовно рівняння (1), (3) і (2) визначимо величини інших реакцій:

$$R_{Ax} - 115,5 \cdot 0,5 = 0; \quad R_{Ax} = 57,7 \text{ Н};$$

$$R_B = \frac{100 \cdot 0,866 + R_C \cdot 1,5}{1,73} = \frac{86,6 + 115,5 \cdot 1,5}{1,73} = 150 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = 100 + R_C \cdot 0,866 - R_B = 100 + 115,5 \cdot 0,866 - 150 = 50 \text{ Н.}$$

Реакція в шарнірі  $A$  дорівнює:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{57,7^2 + 50^2} = 76,34 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**

$$R_A = 76,34 \text{ Н; } R_{Ax} = 57,7 \text{ Н;}$$

$$R_{Ay} = 50 \text{ Н; } R_C = 115,5 \text{ Н.}$$

### Задача №3

Конструкція складається з жорсткого кутника  $AEC$  і стержня  $BL$ , що спирається на кутник. Конструкція утримується в рівновазі шарнірно-нерухомими опорами  $A$  та  $B$  і шарнірно-рухомою опорою  $D$  (рис.5.7).

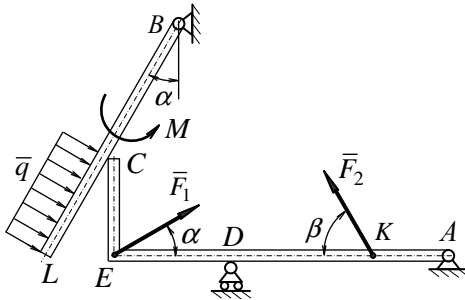


Рис. 5.7

Конструкцію навантажено парою сил з моментом  $M=60 \text{ кНм}$ , рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q = 20 \text{ кН/м}$  на частині стержня  $LC$ ; зосередженими силами  $F_1 = 30 \text{ кН}$  і  $F_2 = 50 \text{ кН}$ , що прикладені в точках  $E$  і  $K$  під кутами  $\alpha = 30^\circ$  та  $\beta = 60^\circ$ , відповідно.

**Визначити** реакції в'язей в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і  $D$ , що викликаються заданими навантаженнями, якщо  $AE=1,5\text{м}$ ;  $CE=0,4\text{м}$ ;  $KA=KD = 0,35\text{м}$ ;  $BL=1\text{м}$ ;  $BC=0,6\text{м}$ .

**Розв'язок.** Дана задача на рівновагу системи тіл, що знаходяться під дією плоскої системи сил. При її розв'язуванні можна розглянути рівновагу всієї системи в цілому, а потім – рівновагу одного з тіл системи, зобразивши його окремо, або зразу ж розчленувати систему на складові та розглянути рівновагу кожного з тіл окремо.

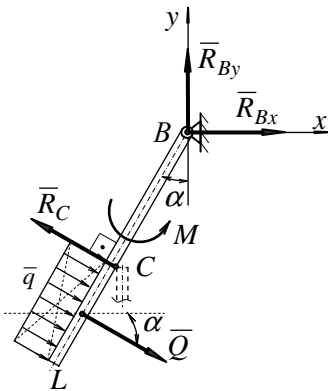


Рис. 5.8

Розчленимо систему і розглянемо рівновагу стержня  $BL$  (рис.5.8). На стержень  $BL$  діють пара сил з моментом  $M$ ; рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю  $\bar{q}$ , дію якого замінимо зосередженою силою  $\bar{Q}$ , що прикладена до середини ділянки  $CL$  і за модулем дорівнює

$$Q = q(CL) = 20 \cdot 0,4 = 8 \text{ кН};$$

реакція шарнірно-нерухомої опори  $B$ , яку розкладемо на складові

$\bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{R}_{By}$  за осями обраної системи координат  $Bxy$ ; реакція  $\bar{R}_C$  кутника  $AEC$ , яку направимо перпендикулярно до поверхні стержня  $BL$ .

Складемо умови рівноваги для плоскої системи сил, що діє на стержень  $BL$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Bx} - R_C \cos \alpha + Q \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{ky} = R_{By} + R_C \sin \alpha - Q \sin \alpha = 0;$$

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = M - R_C \cdot (BC) + Q(BC + LC/2) = 0.$$

Підставимо в складені рівняння числові значення заданих величин:

$$1. \sum F_{kx} = R_{Bx} - R_C \cdot 0,866 + 8 \cdot 0,866 = R_{Bx} - 0,866R_C + 6,92 = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = R_{By} + R_C \cdot 0,5 - 8 \cdot 0,5 = R_{By} + 0,5R_C - 4 = 0;$$

$$3. \sum m_B(\bar{F}_k) = 60 - R_C \cdot 0,6 + 8(0,6 + 0,4/2) = 60,8 - 0,6R_C = 0.$$

З рівняння (3) знайдемо величину реакції  $\bar{R}_C$ :

$$R_C = \frac{60,8}{0,6} = 10,1 \text{ кН}.$$

Підставивши знайдене значення  $R_C$  в рівняння (1) і (2), отримаємо:

$$R_{Bx} = 0,866R_C - 6,92 = 0,866 \cdot 10,1 - 6,92 = 1,83 \text{ кН};$$

$$R_{By} = 4 - 0,5R_C = 4 - 0,5 \cdot 10,1 = -1,06 \text{ кН}.$$

Знак мінус перед значенням  $R_{By}$  вказує на те, що дійсний напрям реакції - в протилежний бік від обраного на рис.5.8.

Розглянемо рівновагу кутника  $AEC$  (рис.5.9).

На кутник діють сила тиску стержня  $\bar{R}'_C$ , яка направлена

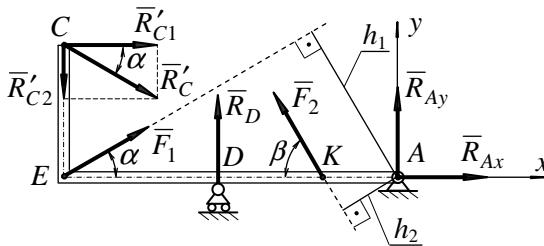


Рис. 5.9

протилежно  $\bar{R}_C$ ; активні сили  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ , що прикладені до точок  $E$  і  $K$ ; реакція  $\bar{R}_D$  шарнірно-рухомої опори  $D$ , яка направлена перпендикулярно до  $EA$ ; реакція шарнірно-нерухомої опори  $A$ , яку розкладаємо на складові  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$  за осями обраної системи координат  $Axy$ .

Силу  $\bar{R}'_C$ , для якої важко визначити плече в рівнянні моментів відносно центра  $A$ , розкладемо на складові за осями обраної системи координат (рис.5.9):

$$R'_{C1} = R'_C \cos \alpha; \quad R'_{C2} = R'_C \sin \alpha.$$

Запишемо умови рівноваги для довільної плоскої системи сил, що діє на кутник:

$$\sum F_{kx} = R'_{C1} + F_1 \cos \alpha - F_2 \cos \beta + R_{Ax} = 0;$$

$$\sum F_{ky} = -R'_{C2} + F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \beta + R_D + R_{Ay} = 0;$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = R'_{C2}(EA) - R'_{C1}(CE) - F_1 h_1 - R_D(AD) - F_2 h_2 = 0,$$

де  $h_1 = (EA)\sin\alpha = 1,5\sin 30^\circ = 0,75 \text{ м};$

$$h_2 = (AK)\sin\beta = 0,35\sin 60^\circ = 0,3 \text{ м}.$$

З урахуванням числових даних отримаємо:

$$4. \sum F_{kx} = 10,12 \cos 30^\circ + 30 \cos 30^\circ - 50 \cos 60^\circ + R_{Ax} =$$

$$= 10,12 \cdot 0,866 + 30 \cdot 0,866 - 50/2 + R_{Ax} = R_{Ax} + 9,65 = 0;$$

$$5. \sum F_{ky} = -10,12 \sin 30^\circ + 30 \sin 30^\circ + 50 \sin 60^\circ + R_D + R_{Ay} =$$

$$= (30 - 10,12)/2 + 50 \cdot 0,866 + R_D + R_{Ay} = R_D + R_{Ay} + 53,2 = 0;$$

$$6. \sum m_A(\bar{F}_k) = 5,06 \cdot 1,5 - 8,75 \cdot 0,4 - 30 \cdot 0,75 - R_D \cdot 0,8 -$$

$$- 50,3 \cdot 0,3 = -0,8R_D - 33,4 = 0.$$

З рівняння (4) впливає:  $R_{Ax} = -9,65 \text{ кН}.$

З рівняння (6) знаходимо:  $R_D = -33,4/0,8 = -41,7 \text{ кН}.$

Підставивши  $R_D$  в рівняння 5, дістанемо:

$$R_{Ay} = -R_D - 53,2 = -(-41,7) - 53,2 = -11,5 \text{ кН}.$$

Від'ємні значення величин реакцій  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$  і  $R_D$  вказують на те, що дійсні напрями цих реакцій протилежні від тих, що показано на рис.5.9.

Абсолютні значення реакцій  $\bar{R}_A$  і  $\bar{R}_B$  дорівнюють:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2} = \sqrt{(-9,65)^2 + (-11,5)^2} = 14,7 \text{ кН};$$

$$R_B = \sqrt{R_{Bx}^2 + R_{By}^2} = \sqrt{1,83^2 + (-1,06)^2} = 2,12 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 14,7 \text{ кН};$   $R_B = 2,12 \text{ кН};$   
 $R_C = 10,12 \text{ кН};$   $R_D = 41,7 \text{ кН}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 4.33; 4.35; 4.37 [2].

## Тема 6. РОЗРАХУНОК ЗУСИЛЬ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМИ

### Заняття №6

#### Зміст

- 6.1. Прості ферми.
- 6.2. Визначення зусиль в стержнях ферми.
- 6.3. Порядок розв'язування задач.
- 6.4. Контрольні запитання.
- 6.5. Приклади розв'язування задач.

### 6.1. Прості ферми

**Фермою** називається геометрично незмінна конструкція, що складається з стержнів, з'єднаних між собою на кінцях шарнірами (рис.6.1).

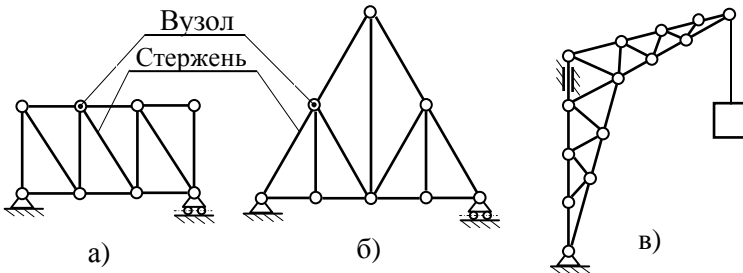


Рис. 6.1

Шарніри, що з'єднують стержні між собою, називаються **вузлами ферми**. Стержні, що розташовані всередині контуру ферми, утворюють її решітку. Якщо всі стержні, що утворюють ферму, розташовані в одній площині, то така ферма називається **плоскою**.

При розрахунку ферм приймається, що вагою стержнів можна знехтувати і шарніри розташовані на кінцях стержнів. Оскільки навантаження, що діють на ферму, передаються в шарнірах, то кожен стержень буде сприймати зусилля, яке направ-

лене вздовж осі стержня, тобто буде або розтягнутий або стиснутий.

Серед різноманітних типів ферм розрізняють два основних види:

1. ферми без зайвих стержнів.
2. ферми, в яких є зайві стержні.

В подальшому будемо розглядати прості плоскі ферми, які будуються наступним чином: до основного стержневого трикутника двома стержнями приєднується новий шарнір (вузол), до нього другий і т.д.

За своїм призначенням ферми поділяються в основному на мостові, кроквяні і кранові (рис.б.1 а,б,в).

Залежність між числом стержнів  $m$  і числом вузлів  $n$  для ферми без зайвих стержнів має вигляд:

$$m = 2n - 3.$$

Якщо  $m < 2n - 3$ , то число стержнів є недостатнім для забезпечення геометричної незмінності ферми. Якщо ж  $m > 2n - 3$ , то ферма має зайві стержні.

Під час розрахунку ферм припускається, що виконуються наступні умови:

1. усі стержні ферми - прямолінійні.
2. тертя в шарнірах відсутнє.
3. сили, що діють на ферму, лежать в площині цієї ферми і прикладені тільки до її вузлів.
4. власна вага кожного стержня ферми настільки мала в порівнянні з силами прикладеними до вузлів ферми, що нею можна знехтувати.

*Основною задачею розрахунку простих ферм є визначення зусиль в стержнях ферми, які являють собою внутрішні сили, що виникають в стержнях під дією зовнішніх сил.*

## **6.2. Визначення зусиль в стержнях ферми**

Обмежимося двома аналітичними способами визначення зусиль в стержнях простих ферм:

1. спосіб вирізання вузлів.
2. спосіб перерізів (метод Ріттера).



**Спосіб вирізання вузлів** полягає в тому, що кожен вузол вирізають з ферми і розглядають окремо в рівновазі під дією прикладених до нього зовнішніх сил і зусиль розрізаних стержнів.

**Метод Ріттера** дозволяє визначити зусилля в будь-якому стержні ферми незалежно від зусиль в інших стержнях і полягає в тому, що ферма розсікається на дві частини таким чином, щоб в перерізу було не більше трьох стержнів з невідомими зусиллями.

### Деякі часткові випадки визначення зусиль в стержнях ферми

Визначення зусиль в стержнях ферм спрощується, якщо при розгляді рівноваги вузла зустрічаються наступні випадки.

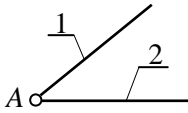


Рис. 6.2

1. Вузол ферми з двома стержнями без навантаження (рис.6.2).

В цьому випадку зусилля в кожному з стержнів дорівнює нулю, оскільки інакше рівновага вузла була б неможлива.

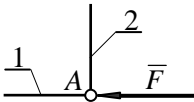


Рис. 6.3

2. Вузол ферми з двома стержнями, за віссю одного з яких прикладена сила  $\bar{F}$  (рис.6.3).

Реакція стержня, з віссю якого збігається напрям сили, за модулем дорівнює, а за напрямом протилежна силі  $\bar{F}$ . Зусилля ж в другому стержні дорівнює нулю.

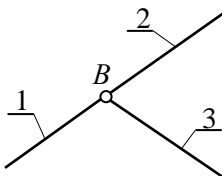


Рис. 6.4

3. Вузол ферми з трьома стержнями, осі двох стержнів якого направлені вздовж прямої (рис.6.4).

В цьому випадку зусилля в третьому стержні дорівнює нулю, а в кожному з перших двох або теж дорівнюють нулю, або рівні між собою за величиною і направлені в протилежні боки, тобто ці стержні або не зазнають навантажень, або обидва стиснуті (розтягнуті) з однаковими силами.

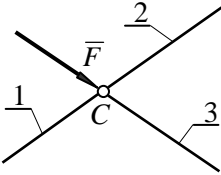


Рис. 6.5

В цьому випадку реакція третього стержня за величиною дорівнює, а за напрямом протилежна силі  $\bar{F}$ . Зусилля в перших двох стержнях або дорівнюють нулю, або рівні між собою за величиною і направлені в протилежні боки.

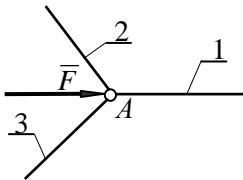


Рис. 6.6

До вузла ферми з трьома стержнями за віссю одного з стержнів прикладена сила  $\bar{F}$ , а зусилля в одному з двох інших стержнів дорівнює нулю (рис.6.6).

В цьому випадку реакція стержня, вісь якого збігається з лінією дії сили  $\bar{F}$ , за величиною рівна, а за напрямом протилежна силі  $\bar{F}$ . Зусилля в другому та третьому стержнях дорівнюють нулю.

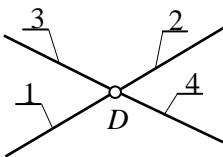


Рис. 6.7

6. Вузол ферми з чотирма стержнями, в якому осі стержнів попарно розташовані за однією прямою (рис.6.7).

В цьому випадку зусилля або:

- а) дорівнюють нулю в кожному стержні;
- б) дорівнюють нулю тільки в двох стержнях, що розташовані за однією прямою, а в двох інших рівні за модулем і протилежні за напрямом;
- в) для кожної пари стержнів, що розташовані за однією прямою, рівні між собою за модулем і протилежні за напрямом.

### 6.3. Порядок розв'язування задач

#### Спосіб вирізання вузлів

1. Виділити ферму, рівновагу якої треба розглянути для знаходження невідомих величин.

2. Прикласти активні сили, що діють на об'єкт рівноваги.
3. Відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями.
4. Розглянути рівновагу ферми, як твердого тіла, під дією активних сил і реакцій в'язей.
5. Визначити реакції опор.
6. Вирізати вузол, до якого сходяться два стержня і розглянути його рівновагу під дією активних сил і реакцій розрізаних стержнів. (При обранні напрямку реакції стержня, краще приймати що він розтягнутий, тобто направляти реакцію від вузла стержня).
7. Користуючись умовами рівноваги плоскої системи збіжних сил, визначити реакції розрізаних стержнів.
8. Рухаючись по фермі від вузла до вузла, аналогічно розглядається рівновага кожного вузла. При цьому, в кожному наступному вирізаному вузлі повинно бути тільки два стержня, реакції в яких невідомі.

### **Спосіб перерізів (метод Ріттера)**

1. Визначити опорні реакції, розглядаючи рівновагу ферми як твердого тіла, що знаходиться під дією плоскої системи сил.
2. Уявно розрізати ферму, до якої прикладені всі зовнішні сили, на дві частини таким чином, щоб число розрізаних стержнів не було більше трьох.
3. Відкинути одну з частин ферми і замінити її дію реакціями розрізаних стержнів. (Рекомендується приймати, що всі стержні розтягнуті).
4. Розглянути рівновагу обраної частини ферми під дією активних сил і реакцій розрізаних стержнів. (При складанні умов рівноваги краще керуватися тим, щоб в кожне рівняння входила одна невідома реакція. Для цього, за центр моментів обирають точку, де перетинаються лінії дії двох невідомих реакцій, а у випадку, коли два розрізаних стержня паралельні, складають рівняння проєкцій на вісь, що перпендикулярна до цих стержнів).
5. Розв'язати складену систему рівнянь, визначити невідомі зусилля в стержнях.

### 6.4. Контрольні запитання

1. Що називається фермою?
2. З яких елементів складаються ферми?
3. На які основні види розрізняються ферми?
4. Яка залежність між числом стержнів і числом вузлів ферми без зайвих стержнів?
5. Яким умовам повинні задовольняти ферми при їх розрахунках?
6. Які є способи визначення зусиль у стержнях простих ферм?
7. Які бувають часткові випадки визначення зусиль в стержнях ферм?

### 6.5. Приклади розв'язування задач

Ферма (рис.6.8) навантажена вертикальними силами  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  і  $\bar{F}_4$ .

**Визначити** опорні реакції і зусилля в стержнях, якщо  $F_1 = 1 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_3 = 2 \text{ кН}$ ;  $F_4 = 1 \text{ кН}$ ;  $AC = 2 \text{ м}$ ;  $CB = 2 \text{ м}$ .

**Розв'яжемо** задачу першим способом – **методом вирізання вузлів**.

Для визначення опорних реакцій розглянемо рівновагу ферми в цілому.

На ферму діють активні сили  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$ ,  $\bar{F}_3$  і  $\bar{F}_4$  та реакції опор  $A$  і  $B$ .

Пов'яжемо з фермою систему координат  $Axy$ : вісь  $Ax$  направимо горизонтально через опори  $A$  і  $B$ ; вісь  $Ay$  – вертикально вгору.

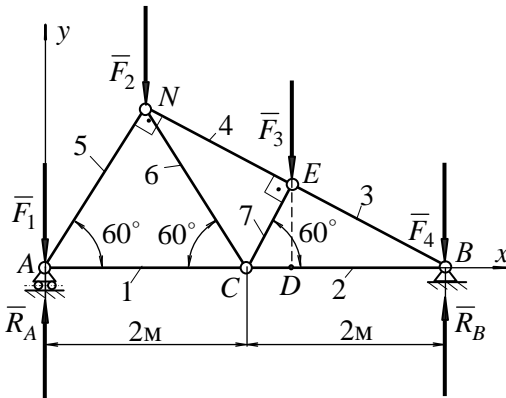


Рис. 6.8

Реакція  $\bar{R}_A$  шарнірно-рухомої опори  $A$  направлена перпендикулярно до опорної поверхні, тобто вертикально. Оскільки всі активні сили та реакція  $\bar{R}_A$  перпендикулярні до осі  $Ax$ , то і реакція шарнірно-нерухомої опори  $B$  теж буде перпендикулярна до осі  $Ax$ .

Складемо рівняння рівноваги для системи сил, що діє на ферму:

$$1. \sum F_{ky} = R_A - F_1 - F_2 - F_3 - F_4 + R_B = 0;$$

$$2. \sum m_A(\bar{F}_k) = -F_2 \frac{(AC)}{2} - F_3(AD) - F_4(AB) + R_B(AB) = 0,$$

де  $CE = (CB) \sin 30^\circ$ ;

$$CD = (CE) \sin 30^\circ = (CB) \sin^2 30^\circ = 2 \cdot (0,5)^2 = 0,5 \text{ м};$$

$$AD = AC + CD = 2 + 0,5 = 2,5 \text{ м};$$

$$AB = AC + CB = 2 + 2 = 4 \text{ м}.$$

З другого рівняння отримаємо  $R_B$ :

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{F_2 \cdot 0,5(AC) + F_3(AD) + F_4(AB)}{AB} = \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2,5 + 1 \cdot 4}{4} = 2,75 \text{ кН}. \end{aligned}$$

З першого рівняння знайдемо  $R_A$ :

$$R_A = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 - R_B = 1 + 2 + 2 + 1 - 2,75 = 3,25 \text{ кН}.$$

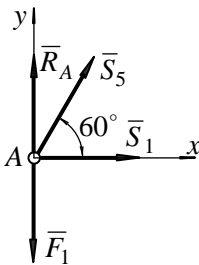


Рис. 6.9

Після визначення реакцій опор перейдемо до визначення зусиль в стержнях. Для цього треба розглянути рівновагу кожного вузла ферми окремо, уявно відкинувши всі стержні, що сходяться до нього, і замінивши їх дію на вузол реакціями.

Першими треба розглядати вузли, до яких прикладені тільки дві невідомі сили. У даній задачі таким вимогам відповідають два вузла  $A$  і  $B$ . Розрахунок можна починати з будь якого із цих вузлів.

Почнемо з вузла  $A$ . Вузол  $A$  знаходиться в рівновазі під дією реакції  $\bar{R}_A$ , активної сили  $\bar{F}_1$  і невідомих реакцій  $\bar{S}_1$  і  $\bar{S}_5$  стержнів 1 і 5 (рис.6.9).

Реакції стержнів направимо від вузла, припускаючи, що стержні розтягнуті.

Через точку  $A$  проводимо осі  $Ax$  і  $Ay$  та складаємо рівняння рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$3. \sum F_{kx} = S_1 + S_5 \cos 60^\circ = 0;$$

$$4. \sum F_{ky} = R_A + S_5 \sin 60^\circ - F_1 = 0.$$

Розв'язавши послідовно рівняння (4) і (3), отримаємо:

$$S_5 = \frac{F_1 - R_A}{\sin 60^\circ} = \frac{1 - 3,25}{0,866} = -2,6 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_5 \cos 60^\circ = -(-2,6) \cdot 0,5 = 1,3 \text{ кН}.$$

Від'ємне значення реакції  $S_5$  вказує на те, що дійсний її напрям в протилежний показаному на рис.6.9. Стержень 5 не розтягнутий, а стиснутий. Стержень 1 – розтягнутий.

Наступним розглянемо вузол  $N$ , оскільки до вузла  $C$  треба буде прикласти три невідомих реакції  $\bar{S}_2$ ,  $\bar{S}_7$  і  $\bar{S}_6$ , а до вузла  $N$  – тільки дві –  $\bar{S}_6$  і  $\bar{S}_4$ , зусилля в стержні 5 цього вузла вже визначено.

Вузол  $N$  знаходиться в рівновазі під дією: активної сили  $\bar{F}_2$ ; відомої реакції  $\bar{S}'_5$ , яка за величиною дорівнює реакції  $S_5$ , що прикладена до вузла  $A$ , але направлена в протилежний бік; невідомих реакцій  $\bar{S}_6$  і  $\bar{S}_4$  стержнів 4 і 6 (рис.6.10).

Проведемо через точку  $N$  осі координат і складемо рівняння рівноваги вузла:

$$5. \sum F_{kx} = -S'_5 \cos 60^\circ + S_4 \cos 30^\circ + S_6 \cos 60^\circ = 0;$$

$$6. \sum F_{ky} = -F_2 - S'_5 \sin 60^\circ - S_4 \sin 30^\circ - S_6 \sin 60^\circ = 0;$$

З рівняння (5) виразимо  $S_4$  :

$$S_4 = \frac{S'_5 \cos 60^\circ - S_6 \cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{-2,6 \cdot 0,5 - S_6 \cdot 0,5}{0,866} = -1,5 - 0,577S_6.$$

Підставимо вираз для  $S_4$  в (6) і знайдемо  $S_6$  :

$$\begin{aligned} -F_2 - S'_5 \sin 60^\circ - (-1,5 - 0,577S_6) \sin 30^\circ - S_6 \sin 30^\circ &= 0; \\ -2 - (-2,6 \cdot 0,866) + 1,5 \cdot 0,5 + 0,577 \cdot 0,5 \cdot S_6 - 0,866 \cdot S_6 &= 0; \\ S_6 &= \frac{-2 + 2,25 + 0,75}{0,578} = 1,73 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Тоді:

$$S_4 = -1,5 - 0,577 \cdot 1,73 = -2,5 \text{ кН}.$$

Таким чином, стержень 6 розтягнутий, як і припускалось, а стержень 4 – стиснутий.

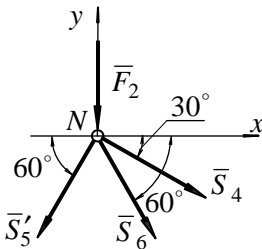


Рис. 6.10

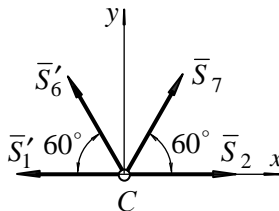


Рис. 6.11

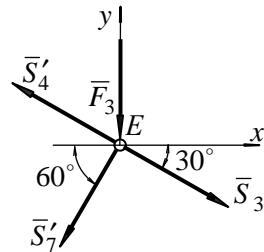


Рис. 6.12

Наступним вирізаємо вузол  $C$ .

До вузла прикладені дві невідомі реакції  $\bar{S}_7$  та  $\bar{S}_2$  стержнів 7 і 2; дві відомі реакції  $\bar{S}'_6$  та  $\bar{S}'_1$ , стержнів 6 і 1, які за величинами дорівнюють реакціям  $\bar{S}_6$  та  $\bar{S}_1$ , що прикладені відповідно до вузлів  $N$  і  $A$ , але направлені в протилежні боки (рис.6.11).

Проводимо через точку  $C$  координатні осі та складаємо рівняння рівноваги вузла  $C$ :

$$7. \sum F_{kx} = -S'_1 - S'_6 \cos 60^\circ + S_7 \cos 60^\circ + S_2 = 0;$$

$$8. \sum F_{ky} = S_6 \sin 60^\circ + S_7 \sin 60^\circ = 0;$$

З рівняння (8) знайдемо

$$S_7 = -S'_6 = -1,73 \text{ кН}.$$

З рівняння (7) знаходимо  $S_2$ :

$$S_2 = S'_1 + (S'_6 - S_7) \cos 60^\circ = 1,3 + (1,73 - (-1,73))0,5 = 3,03 \text{ кН}.$$

Таким чином, стержень 2 розтягнутий, а стержень 7 – стиснутий.

Розглянемо рівновагу вузла  $E$  (рис.6.12).

На вузол діють невідома реакція  $\bar{S}_3$  стержня 3; активна сила  $\bar{F}_3$ ; відома реакція  $\bar{S}'_4$  стержня 4, яка за модулем дорівнює реакції  $\bar{S}_4$ , що прикладена до вузла  $N$ , але протилежно направлена; відома реакція  $\bar{S}'_7$  стержня 7, яка за модулем дорівнює реакції  $\bar{S}_7$ , що прикладена до вузла  $C$ , але протилежно направлена.

Через точку  $E$  проводимо осі координат  $Ex$  і  $Ey$ . Оскільки на вузол  $E$  діє тільки одна невідома сила  $S_3$ , то достатньо скласти тільки одне рівняння рівноваги:

$$9. \sum F_{kx} = -S'_4 \cos 30^\circ - S'_7 \cos 60^\circ + S_3 \cos 30^\circ = 0.$$

Звідси:

$$S_3 = S_4 + S'_7 \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = -2,5 + (-1,73) \frac{0,5}{0,866} = -3,5 \text{ кН}.$$

Стержень 3 - стиснутий.

Таким чином визначені зусилля в усіх стержнях ферми. З'ясовано, що стержні 1, 2, 6 – розтягнуті, а стержні 3, 4, 5 та 7 – стиснуті.

Розгляд рівноваги вузла  $B$  (рис.6.13), дозволяє перевірити правильність розрахунку ферми.



Рівняння рівноваги для вузла  $B$ :

$$10. \sum F_{kx} = -S'_2 - S'_3 \cos 30^\circ = 0;$$

$$11. \sum F_{ky} = R_B - F_4 + S'_3 \sin 30^\circ = 0.$$

Підставивши в ці рівняння числові дані, отримаємо:

$$-3,03 - (-3,5) \cdot 0,866 = -3,03 + 3,03 = 0;$$

$$2,75 - 1 + (-3,5) \cdot 0,5 = 1,75 - 1,75 = 0.$$

Рівняння (10) і (11) перетворюються в тотожності, що вказує на правильність виконаного розрахунку.

Перевіримо, наскільки вірно визначені зусилля в окремих стержнях ферми **методом перерізів (методом Риттера)**.

Для визначення зусиль в стержнях 1, 6, 4 розсічемо ферму перерізом  $a-a$  на дві частини таким чином, щоб в переріз потрапило не більше трьох стержнів, зусилля в яких невідомі (рис.6.14). Відкинемо праву частину ферми, замінивши її дію реакціями стержнів  $\bar{S}_4$ ,  $\bar{S}_6$  і  $\bar{S}_1$ . Реакції стержнів напрямимо від вузлів  $A$  і  $N$ , уявивши, що всі стержні розтягнуті (рис.6.15).

Таким чином, ліва частина ферми буде знаходитись в рівновазі під дією реакції опори  $\bar{R}_A$ , активних сил  $\bar{F}_1$ ,  $\bar{F}_2$  та реак-

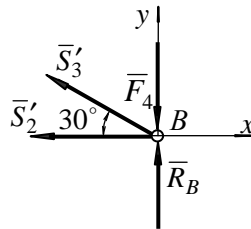


Рис. 6.13

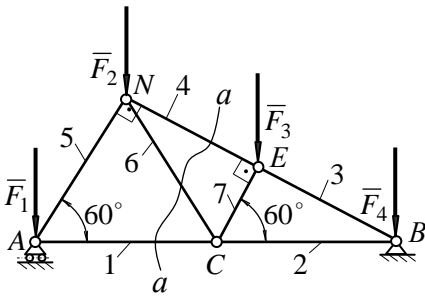


Рис. 6.14

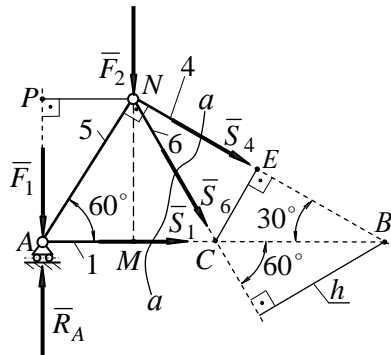


Рис. 6.15

цій стержнів  $\bar{S}_1, \bar{S}_4, \bar{S}_6$ .

Складемо рівняння рівноваги для лівої частини ферми.

Скористаємося формою умов рівноваги у вигляді 3-х рівнянь моментів для довільної плоскої системи сил.

*Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил відносно трьох довільних центрів, які не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:*

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0; \quad \sum m_C(\bar{F}_k) = 0.$$

Оберемо за центри моментів точки:

$C$ , де перетинаються лінії дії невідомих реакцій  $\bar{S}_1$  і  $\bar{S}_6$ ;

$B$ , де перетинаються лінії дії невідомих реакцій  $\bar{S}_1$  і  $\bar{S}_4$ ;

$N$ , де перетинаються лінії дії невідомих реакцій  $\bar{S}_6$  і  $\bar{S}_4$ .

$$12. \sum m_C(\bar{F}_k) = -S_4(CE) + F_1(AC) - R_A(AC) + F_2(MC) = 0;$$

$$13. \sum m_B(\bar{F}_k) = S_6 h + F_2(MB) + F_1(AB) - R_A(AB) = 0;$$

$$14. \sum m_N(\bar{F}_k) = S_1(MN) - R_A(NP) + F_1(NP) = 0.$$

З рівняння (12) визначимо реакцію  $S_4$ :

$$S_4 = \frac{(F_1 - R_A)(AC) + F_2(MC)}{(CE)} = \frac{(1 - 3,25) \cdot 2 + 2 \cdot 1}{1} = -2,5 \text{ кН},$$

де  $AC = 2 \text{ м}$  - плече сил  $\bar{F}_1$  і  $\bar{R}_A$  відносно центра  $C$ ;

$CE$  - плече реакції  $\bar{S}_4$  відносно центра  $C$ ,

$$CE = (DC) \sin 30^\circ = 2 \cdot 0,5 = 1 \text{ м}.$$

З рівняння (13) визначимо:

$$S_6 = \frac{(R_A - F_1)(AB) - F_2 \cdot (MB)}{h} = \frac{(3,25 - 1) \cdot 4 - 2 \cdot 3}{1,732} = 1,73 \text{ кН},$$

де  $AB = 4 \text{ м}$  - плече сил  $\bar{F}_1$  і  $\bar{R}_A$  відносно центра  $B$ ;

$MB$  - плече сили  $\bar{F}_2$  відносно центра  $B$ ,

$$MB = CB + AB/2 = 3 \text{ м};$$

$h$  - плече реакції  $\bar{S}_6$  відносно центра  $B$ ,

$$h = (NB) \sin 30^\circ = (AB) \cos 30^\circ = 4 \cdot 0,866 \cdot 0,5 = 1,73 \text{ м}.$$

З рівняння (14) знайдемо:

$$S_1 = \frac{(R_A - F_1) \cdot (NP)}{NM} = \frac{(3,25 - 1) \cdot 1}{1,73} = 1,3 \text{ кН},$$

де  $NP$  - плече сил  $\bar{F}_1$  і  $\bar{R}_A$  відносно центра  $N$ ,

$$NP = AC/2 = 1 \text{ м};$$

$NM$  - плече реакції  $S_1$  відносно центра  $N$ ,

$$NM = (AM) \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 1 \cdot 1,73 = 1,73 \text{ м}.$$

Таким чином, при визначенні зусиль в стержнях ферми методом перерізів, маємо  $S_1 = 1,3 \text{ кН}$ ;  $S_4 = -2,5 \text{ кН}$ ;  $S_6 = 1,73 \text{ кН}$ , що повністю збігається з результатами, які знайдено методом вирізання вузлів.

**Відповідь:**  $S_1 = 1,3 \text{ кН}$ ;  $S_2 = 3,03 \text{ кН}$ ;  $S_3 = -3,5 \text{ кН}$ ;  
 $S_4 = -2,5 \text{ кН}$ ;  $S_5 = -2,6 \text{ кН}$ ;  $S_6 = 1,73 \text{ кН}$ ;  
 $S_7 = -1,73 \text{ кН}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи:  
 5.12; 5.15 [2].

## Тема 7. ДОВІЛЬНА ПРОСТОРОВА СИСТЕМА СИЛ

### ЗАНЯТТЯ №7

#### Зміст

- 7.1. Момент сили відносно осі.
- 7.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
- 7.3. Порядок розв'язування задач.
- 7.4. Контрольні запитання.
- 7.5. Приклади розв'язування задач.

#### 7.1. Момент сили відносно осі

*Момент сили відносно осі визначається як алгебраїчна величина, абсолютне значення якої дорівнює добутку модуля проекції сили на площину, що перпендикулярна до осі, на відстань від точки, в якій вісь перетинає цю площину, до лінії дії проекції сили на площині.*

Для того, щоб знайти момент сили  $\vec{F}$  відносно осі, треба зробити наступне (рис.7.1):

1. Провести площину ( $Q$ ), що перпендикулярна до осі.
2. Спроектувати силу  $\vec{F}$  на цю площину.
3. З точки  $O$  перетину осі з площиною ( $Q$ ) опустити перпендикуляр  $h$  на лінію дії проекції сили  $\vec{F}_z$ .
4. Помножити модуль проекції сили  $\vec{F}_z$  на довжину  $h$  перпендикуляра і взяти цей добуток зі знаком плюс, якщо з додатного напрямку осі  $Oz$  обертання проекції  $\vec{F}_z$  навколо точки  $O$  видно проти ходу годинникової стрілки і зі знаком мінус, якщо обертання відбувається за ходом годинникової стрілки.

Таким чином, момент сили  $\vec{F}$  навколо осі  $Oz$  (рис.7.1) дорівнює

$$m_z(\vec{F}) = m_O(\vec{F}_z) = F_z h .$$

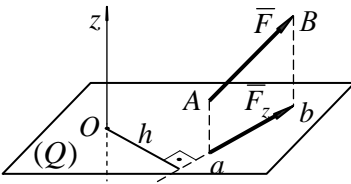


Рис. 7.1

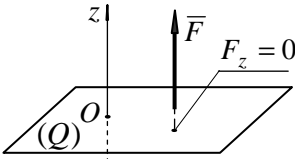


Рис. 7.2

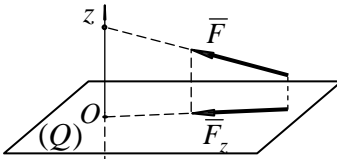


Рис. 7.3

Момент сили буде додатним, оскільки напрям обертання проекції  $\bar{F}_z$  навколо осі  $Oz$  з додатного боку осі видно проти ходу годинникової стрілки.

Момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:

1. Якщо лінія дії сили паралельна осі (рис.7.2). В цьому випадку проекція  $\bar{F}_z$  сили  $\bar{F}$  на площину, перпендикулярну до осі, буде дорівнювати нулю.

2. Коли лінія дії сили перетинає вісь (рис.7.3). В цьому випадку плече проекції  $\bar{F}_z$  відносно точки  $O$  буде дорівнювати нулю.

## 7.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил виражаються наступними рівняннями:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum M_x(\bar{F}_k) &= 0; & \sum M_y(\bar{F}_k) &= 0; & \sum M_z(\bar{F}_k) &= 0, \end{aligned}$$

і формулюються так: для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил на кожну з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно кожної з цих осей дорівнювали нулю.

### 7.3. Порядок розв'язування задач

При розв'язуванні задач на рівновагу довільної просторової системи сил рекомендується дотримуватися такої послідовності:

1. Виділити тверде тіло, рівновагу якого треба розглянути для визначення невідомих величин.
2. Показати активні сили, що діють на об'єкт рівноваги.
3. З'ясувати характер в'язей і показати на розрахунковій схемі можливі напрями їх реакцій.
4. Перевірити, чи є задача, що розглядається, статично визначеною, тобто число невідомих величин не повинно бути більшим шести.
5. Скласти необхідну кількість рівнянь рівноваги.
6. Розв'язати отриману систему рівнянь і визначити невідомі величини.

### 7.4. Контрольні запитання

1. Як визначається величина і знак моменту сили відносно осі?
2. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
3. У якій площині повинна лежати сила і який вона повинна мати напрям, щоб її момент відносно певної осі був максимальним?
4. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил і чим вони відрізняються від умов рівноваги для довільної плоскої системи сил?

### 7.5. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

На горизонтальний вал  $AB$  (рис.7.4) насаджено зубчасте колесо  $C$  і шестерня  $D$ . До колеса  $C$  по дотичній прикладена горизонтальна сила  $\overline{P}$ , а до шестерні  $D$  по дотичній прикладена вертикальна сила  $\overline{Q}$ .

**Визначити** величину сили  $\bar{Q}$  та реакції підшипників  $A$  і  $B$  в положенні рівноваги вала, якщо  $P = 10 \text{ кН}$ ;  $r_C = 0,25 \text{ м}$ ;  $r_D = AD = CB = 0,1 \text{ м}$ ;  $DC = 0,2 \text{ м}$ .

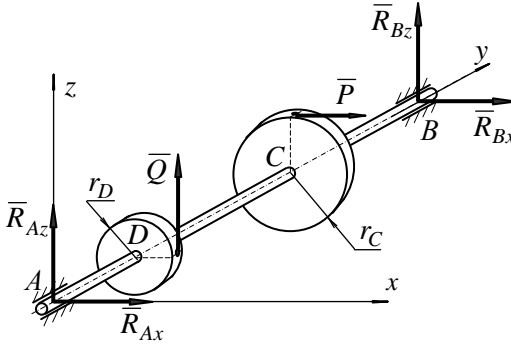


Рис. 7.4

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу вала  $AB$ , до якого прикладені активні сили  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}$  та реакції в'язей опор  $A$  і  $B$  (рис.7.4).

Оскільки підшипники  $A$  і  $B$  допускають переміщення в осьовому напрямі  $Ay$  і в цьому напрямі немає протидії, то реакції, що виникнуть в підшипниках, розкладемо на складові за осями  $Ax$  і  $Az$ :  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Az}$ ,  $\bar{R}_{Bx}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ .

Як видно, на вал  $AB$  діє довільна просторова система сил і у випадку її рівноваги вона повинна задовольняти наступним умовам:

$$\begin{aligned} \sum F_{kx} &= 0; & \sum F_{ky} &= 0; & \sum F_{kz} &= 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= 0; & \sum m_y(\bar{F}_k) &= 0; & \sum m_z(\bar{F}_k) &= 0. \end{aligned}$$

Складемо рівняння рівноваги в проекціях на осі:

1.  $\sum F_{kx} = R_{Ax} + P + R_{Bx} = 0;$
2.  $\sum F_{ky} = 0;$
3.  $\sum F_{kz} = R_{Az} + Q + R_{Bz} = 0.$

При складанні рівнянь моментів сил, треба пам'ятати, що коли сила паралельна до осі або перетинає її, то момент сили відносно цієї осі дорівнює нулю.

Так при складанні рівняння суми моментів відносно осі  $Ax$ , сили  $\bar{R}_{Ax}, \bar{P}, \bar{R}_{Bx}$  паралельні до осі  $Ax$ , а сила  $\bar{R}_{Az}$  - перетинає вісь. Момент кожної з цих сил відносно осі  $Ax$  дорівнює нулю.

При визначенні моменту сили  $\bar{Q}$  відносно осі  $Ax$ , силу  $\bar{Q}$  попередньо треба спроекувати на площину  $Ayz$  (вона проектується в натуральну величину), а потім з точки перетину осі  $Ax$  з площиною  $Ayz$  (точка  $A$ ) опустити перпендикуляр  $AD$  на лінію дії проекції, який і буде її плечем. Таким чином:

$$4. \sum m_x(\bar{F}_k) = Q \cdot (AD) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0.$$

В рівнянні моментів відносно осі  $Ay$ , моменти від сил  $\bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bz}, \bar{R}_{Bx}$  дорівнюють нулю, оскільки вони перетинають вісь  $Ay$ .

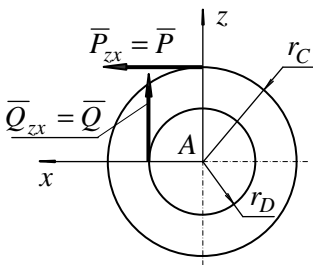


Рис. 7.5

Для визначення моментів сил  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  відносно осі  $Ay$ , треба їх спроекувати на площину  $Axz$ , перпендикулярну до цієї осі (рис.7.5), і знайти плече цих сил. Сили  $\bar{Q}$  і  $\bar{P}$  проектуються на цю площину в натуральну величину.

Плечем сили  $\bar{Q}$  буде радіус  $r_D$ , а сили  $\bar{P}$  - радіус  $r_C$ .

Рівняння суми моментів відносно цієї осі буде мати вигляд:

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot r_C - Q \cdot r_D = 0.$$

Оскільки моменти сил  $\bar{R}_{Az}, \bar{Q}, \bar{R}_{Ax}$ , що паралельні до осі  $Az$ , та сили  $\bar{R}_{Ax}$ , що перетинає цю вісь, дорівнюють нулю, а плечем проекції сили  $\bar{P}$  на площину  $Axy$ , перпендикулярну до осі  $Az$ , буде  $AC$ , то

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = -P \cdot (AC) - R_{Bx} \cdot (AB) = 0.$$



З урахуванням числових даних рівняння рівноваги набудуть вигляду:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= R_{Ax} + 10 + R_{Bx} = 0; \\ \sum F_{kz} &= R_{Az} + Q + R_{Bz} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) &= Q \cdot 0,1 + R_{Bz} \cdot 0,4 = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) &= 10 \cdot 0,25 - Q \cdot 0,1 = 0; \\ \sum m_z(\bar{F}_k) &= -10 \cdot 0,3 - R_{Bx} \cdot 0,4 = 0.\end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, починаючи з останнього рівняння, знайдемо:

$$\begin{aligned}R_{Bx} &= -\frac{10 \cdot 0,3}{0,4} = -7,5 \text{ кН}; \quad Q = \frac{10 \cdot 0,25}{0,1} = 25 \text{ кН}; \\ R_{Bz} &= -\frac{Q \cdot 0,1}{0,4} = -\frac{25 \cdot 0,1}{0,4} = -6,25 \text{ кН}; \\ R_{Az} &= -Q - R_{Bz} = -25 - (-6,25) = -18,75 \text{ кН}; \\ R_{Ax} &= -10 - R_{Bx} = -10 - (-7,5) = -2,5 \text{ кН}.\end{aligned}$$

**Відповідь:**  $R_{Ax} = -2,5 \text{ кН}; R_{Az} = -18,75 \text{ кН}; Q = 25 \text{ кН};$   
 $R_{Bx} = -7,5 \text{ кН}; R_{Bz} = -6,25 \text{ кН}.$

### Задача № 2

За допомогою невагомому колворота, що схематично зображений на рис. 7.6., рівномірно піднімають вантаж  $Q = 100 \text{ Н}$ . Мотузка, на якій піднімається вантаж, набігає на барабан колворота за дотичною, яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 60^\circ$ .

Розміри колворота:  $R = 5 \text{ см}; AC = KD = 40 \text{ см}; AD = 30 \text{ см}; CB = 60 \text{ см}.$

**Визначити** реакції опор  $A$  і  $B$  та силу тиску  $\bar{P}$  на рукоятку при такому положенні ворота, коли рукоятка  $KD$  займе горизонтальне положення.

**Розв'язок.** До коловорота прикладені зовнішні сили: тиск  $\bar{P}$  на рукоятку ворота в точці  $K$ ; натяг мотузки  $\bar{Q}'$ . Вага вантажу передається через мотузку і діє на барабан за дотичною, яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 60^\circ$  (рис.7.6), за модулем  $Q' = Q = 100 \text{ Н}$ .

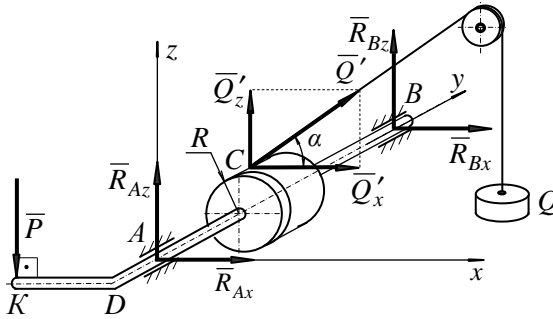


Рис. 7.6

Оскільки опорні підшипники  $A$  і  $B$  допускають переміщення вала за напрямом осі  $Ay$ , то реакції опор будуть мати складові, що направлені вздовж осей  $Ax$  і  $Az$ :  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Az}$ ,  $\bar{R}_{Bx}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ .

Складемо рівняння рівноваги для довільної просторової системи сил, що діє на коловорот. В проекціях на осі отримаємо:

1.  $\sum F_{kx} = R_{Ax} + Q' \cos \alpha + R_{Bx} = 0;$
2.  $\sum F_{ky} = 0;$
3.  $\sum F_{kz} = -P + R_{Az} + Q' \sin \alpha + R_{Bz} = 0.$

Для зручності визначення моментів сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{Q}'$  і  $\bar{R}_{Bx}$  відносно осі  $Ax$ , спроектуємо ці сили на площину  $Ayz$  перпендикулярну до цієї осі (рис.7.7).

4.  $\sum m_x(\bar{F}_k) = P \cdot (DA) + Q'_z \cdot (AC) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0,$

де  $Q'_z$  - величина проекції сили  $\bar{Q}'$  на площину  $Ayz$ ,

$$Q'_z = Q' \sin \alpha = 100 \sin 60^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ Н};$$

$DA, AC$  і  $AB$  - плечі сил  $\bar{P}, \bar{Q}'$  і  $\bar{R}_{Bz}$  відносно точки  $A$ , в якій вісь  $Ax$  перетинає площину  $Ayz$ .

Для запису рівняння суми моментів відносно осі  $Ay$  спроектуємо всі сили на площину  $Axz$  (рис.7.8). Оскільки, сили  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bx}$  та  $\bar{R}_{Bz}$  перетинають вісь  $Ay$  і їх моменти відносно цієї осі будуть дорівнювати нулю, то на рис.7.8 їх проекції не показані.

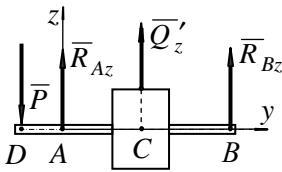


Рис. 7.7

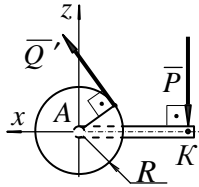


Рис. 7.8

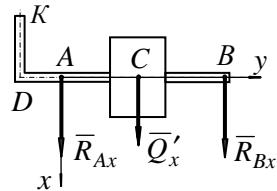


Рис. 7.9

Сили  $\bar{Q}'$  і  $\bar{P}$ , які паралельні площини  $Axz$ , будуть проектуватися в натуральну величину. Тоді:

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = Q' \cdot R - P \cdot (KA) = 0.$$

І нарешті, для суми моментів відносно осі  $Az$  спроектуємо усі сили на площину  $Axy$  (рис.7.9). Оскільки сили  $\bar{P}, \bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Bx}$  перпендикулярні до площини  $Axy$ , то їх проекції на цю площину дорівнюють нулю.

Рівняння моментів відносно осі  $Az$ , з урахуванням того, що сила  $\bar{R}_{Ax}$  перетинає цю вісь і її момент дорівнює нулю, буде мати вигляд

$$6. \sum m_z(\bar{F}_k) = -Q'_x \cdot (AC) - R_{Bx} \cdot (AB) = 0,$$

де  $Q'_x$  - величина проекції сили  $\bar{Q}'$  на площину  $Axy$ ,

$$Q'_x = Q' \cos \alpha = 100 \cos 60^\circ = 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ H};$$

$AC$  і  $CB$  – плечі сил  $\bar{Q}'_x$  і  $\bar{R}_{Bx}$  відносно точки  $A$ , в якій вісь  $Az$  перетинає площину  $Axy$ .

З урахуванням числових даних система (1) – (6) набуде вигляду:

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + 100 \cos 60^\circ + R_{Bx} = 0;$$

$$\sum F_{kz} = -P + R_{Az} + 100 \sin 60^\circ + R_{Bz} = 0;$$

$$\sum m_x(\bar{F}_k) = P \cdot 30 + 86,6 \cdot 40 + R_{Bz} \cdot 100 = 0;$$

$$\sum m_y(\bar{F}_k) = -P \cdot 40 + 100 \cdot 5 = 0;$$

$$\sum m_z(\bar{F}_k) = -50 \cdot 40 - R_{Bx} \cdot 100 = 0.$$

Розв'язавши систему, починаючи з останнього рівняння, визначимо:

$$R_{Bx} = -\frac{50 \cdot 40}{100} = -20 \text{ H}; \quad P = \frac{100 \cdot 5}{40} = 12,5 \text{ H};$$

$$R_{Bz} = \frac{-P \cdot 30 + 86,6 \cdot 40}{100} = \frac{-12,5 \cdot 30 - 3464}{100} = -38,4 \text{ H};$$

$$R_{Az} = P - 100 \sin 60^\circ - R_{Bz} = 12,5 - 100 \cdot 0,866 + 38,4 = -35,7 \text{ H};$$

$$R_{Ax} = -100 \cdot 0,5 - R_{Bx} = -50 - (-20) = -30 \text{ H}.$$

**Відповідь:**  $P = 12,5 \text{ H}; R_{Ax} = -30 \text{ H}; R_{Az} = -35,7 \text{ H};$

$R_{Bx} = -20 \text{ H}; R_{Bz} = -38,4 \text{ H}.$

### Задача № 3

Прямокутні двері (рис.7.10), які відкриті на  $\angle CAD = 60^\circ$ , утримуються в цьому положенні двома мотузками  $CD$  і  $EF$ . Мотузка  $CD$  перекинута через блок  $D$  і натягується вантажем  $P = 20 \text{ H}$ , а мотузка  $EF$  прикріплена до підлоги в точці  $F$ . Вага дверей  $Q = 140 \text{ H}$ , ширина  $AD = AC = 1 \text{ м}$ , висота  $AB = 2 \text{ м}$ .

**Визначити** натяг  $\bar{T}$  мотузки  $EF$ , реакції циліндричного шарніра в точці  $A$  і підп'ятника в точці  $B$ .

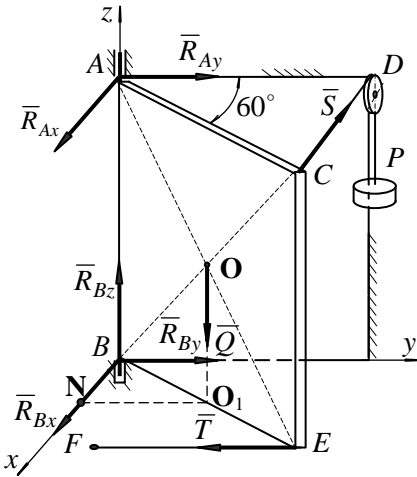


Рис. 7.10

реакції в'язей в точках  $A$ ,  $B$  і  $E$ .

Реакцію циліндричного шарніра  $A$ , оскільки він допускає переміщення в напрямі осі  $Bz$ , представимо у вигляді двох складових:  $\bar{R}_{Ax}$  і  $\bar{R}_{Ay}$ . Реакцію підп'ятника  $B$  представимо у вигляді трьох складових:  $\bar{R}_{Bx}$ ,  $\bar{R}_{By}$ ,  $\bar{R}_{Bz}$ . Реакцію  $\bar{T}$  мотузки  $EF$ , що за величиною дорівнює її натягу, направимо вздовж мотузки до точки  $F$ .

Перед складанням рівнянь рівноваги розкладемо натяг  $\bar{S}$  мотузки  $CD$  на дві складові  $\bar{S}_x$  і  $\bar{S}_y$ , які паралельні осям  $Bx$  і  $By$ , відповідно (рис.7.11).

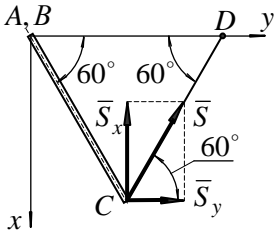


Рис. 7.11

Силами тертя в блоці  $D$  знехтувати.

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу дверей ВАСЕ. Приймемо за початок системи координат точку  $B$  і направимо координатні осі як показано на рис. 7.10.

На двері діють: сила тяжіння  $\bar{Q}$ , що прикладена в точці  $O$  на перетині діагоналей прямокутника  $ABEC$ ; натяг  $\bar{S}$  мотузки  $CD$ , причому  $S=P=20$  Н;

Оскільки  $AC=AD$  і  $\angle CAD = 60^\circ$ , то трикутник  $ADC$  буде рівностороннім, у якого всі внутрішні кути дорівнюють  $60^\circ$ .

З рис. 7.11. отримаємо:

$$S_x = S \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ Н};$$

$$S_y = S \sin 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ Н}.$$

Складемо рівняння рівноваги для довільної просторової системи сил, що діє на двері:

$$\begin{aligned} 1. \sum F_{kx} &= R_{Ax} + R_{Bx} - S_x = 0; \\ 2. \sum F_{ky} &= R_{Ay} + R_{By} + S_y - T = 0; \\ 3. \sum F_{kz} &= R_{Bz} - Q = 0. \end{aligned}$$

Для складання рівнянь моментів усіх сил відносно осей  $Bx$ ,  $Bu$  і  $Bz$  скористаємося проєкціями дверей, разом з прикладеними до неї силами, на площини  $Buz$ ,  $Bxz$  і  $Bxy$  (рис.7.12, 7.13, 7.14).

$$\begin{aligned} 4. \sum m_x(\bar{F}_k) &= -Q \cdot (O_1N) - R_{Ay} \cdot (AB) - S_y \cdot (AB) = 0; \\ 5. \sum m_y(\bar{F}_k) &= Q \cdot (BN) + R_{Ax} \cdot (AB) - S_x \cdot (AB) = 0; \\ 6. \sum m_z(\bar{F}_k) &= S \cdot (AM) - T \cdot (BK) = 0. \end{aligned}$$

В рівнянні (4) моменти від сил  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bx}, \bar{S}_x$ , що паралельні осі  $Bx$ , і  $\bar{T}$ , що перетинає вісь  $Bx$ , дорівнюють нулю.

В рівнянні (5) моменти відносно осі  $Bu$  від сил  $\bar{T}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{By}$  і  $\bar{S}_y$ , що паралельні осі  $Bu$ , та  $\bar{R}_{Bz}$  і  $\bar{R}_{Bx}$ , що перетинають вісь  $Bu$ , дорівнюють нулю.

В рівнянні (6) моменти відносно осі  $Bz$  від сил  $\bar{R}_{Bz}$  і  $\bar{Q}$ , що паралельні до осі  $Bz$ , та  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}, \bar{R}_{Bx}, \bar{R}_{By}$ , що перетинають вісь  $Bz$ , дорівнюють нулю.

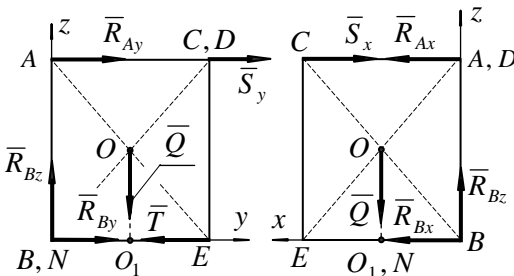


Рис. 7.12

Рис. 7.13

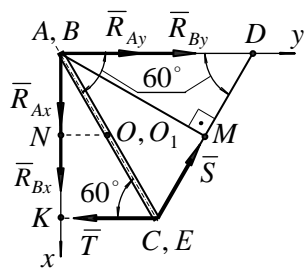


Рис. 7.14

Визначимо плечі  $O_1N$ ,  $BN$ ,  $AM$  і  $BK$ , що входять в рівняння (4), (5) і (6).

З прямокутного трикутника  $BO_1N$  (рис.7.14, 7.11):

$$O_1N = \frac{BE}{2} \cos 60^\circ = \frac{AC}{2} \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,25 \text{ м};$$

$$BN = \frac{BE}{2} \sin 60^\circ = \frac{AC}{2} \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 0,866 = 0,433 \text{ м}.$$

З прямокутного трикутника  $AMC$  (рис.7.14):

$$AM = AC \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м}.$$

З прямокутного трикутника  $KBE$  (рис.7.14):

$$BK = AC \cdot \sin 60^\circ = 1 \cdot 0,866 = 0,866 \text{ м}.$$

Підставивши знайдені і задані числові дані в складену систему (1) – (6), отримаємо:

$$1'. R_{Ax} + R_{Bx} - 17,32 = 0;$$

$$2'. R_{Ay} + R_{By} + 10 - T = 0;$$

$$3'. R_{Bz} - 140 = 0;$$

$$4'. -140 \cdot 0,25 - R_{Ay} \cdot 2 - 10 \cdot 2 = 0;$$

$$5'. 140 \cdot 0,433 - R_{Ax} \cdot 2 - 17,32 \cdot 2 = 0;$$

$$6'. 20 \cdot 0,866 - T \cdot 0,866 = 0.$$

Розв'язавши систему (1') – (6') в зворотному порядку отримаємо:

$$T = 20 \text{ Н};$$

$$R_{Ax} = \frac{140 \cdot 0,433 - 17,32 \cdot 2}{2} = 13 \text{ Н};$$

$$R_{Ay} = -140 \cdot 0,25 - 10 \cdot 2 = -55 \text{ Н};$$

$$R_{Bz} = 140 \text{ Н};$$

$$R_{By} = -R_{Ay} - 10 + T = -(-55) - 10 + 20 = 65 \text{ Н};$$

$$R_{Bx} = -R_{Ax} + 17,32 = -13 + 17,32 = 4,32 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $T = 20 \text{ H}$ ;  $R_{Ax} = 13 \text{ H}$ ;  $R_{Ay} = 4,32 \text{ H}$ ;  
 $R_{Bx} = 13 \text{ H}$ ;  $R_{By} = -55 \text{ H}$ ;  $R_{Bz} = 140 \text{ H}$ .

#### Задача № 4

Горизонтальна прямокутна однорідна плита  $ABCD$  вагою  $P=10 \text{ кН}$  утримується в рівновазі сферичним шарніром в точці  $A$ , циліндричним шарніром в точці  $B$  і тросом  $CE$ , що нахилений до площини  $ABCD$  під кутом  $\alpha = 45^\circ$  (рис.7.15).

**Визначити** реакції опор  $A$  і  $B$ , та натяг троса  $CE$ , якщо  $AB=4 \text{ м}$ ;  $AD=3 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Розглянемо рівновагу плити  $ABCD$  (рис.7.15).

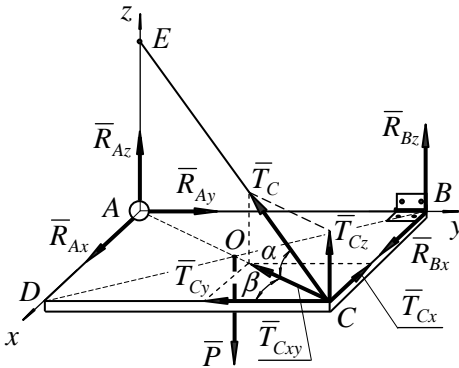


Рис.7.15

Оберемо за початок системи координат точку  $A$  та направимо осі  $Ax$  і  $Ay$  уздовж ребер плити, а вісь  $Az$  – вертикально.

На об'єкт рівноваги діють: вага плити  $\bar{P}$ , що прикладена в точці  $O$  перетину діагоналей прямокутника  $ABCD$ ; реакції в'язей в точках  $A$ ,  $B$  і  $C$ .

Реакцію сферичного шарніра  $A$  розкладемо на

три складові  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$  і  $\bar{R}_{Az}$ , направивши їх за осями обраної системи координат  $Axyz$ . Реакцію циліндричного шарніра  $B$ , оскільки він допускає переміщення в напрямі осі  $Ay$ , розкладемо на дві складові  $\bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{R}_{Bz}$ . Реакцію  $\bar{T}_C$  троса  $CE$  направимо вздовж троса до точки підвісу  $E$ .

Таким чином, на об'єкт рівноваги, плиту  $ABCD$ , діє довільна просторова система сил.



Перш ніж скласти рівняння рівноваги, розкладемо реакцію  $\overline{T}_C$ , яка направлена під кутом  $\alpha$  до площини  $ABCD$ , на складові за осями обраної системи координат (рис.7.15):

$$T_{Cz} = T_C \sin \alpha;$$

$$T_{Cx} = T_{Cxy} \sin \beta = T_C \cos \alpha \sin \beta;$$

$$T_{Cy} = T_{Cxy} \cos \beta = T_C \cos \alpha \cos \beta,$$

де  $T_{Cxy}$  - модуль проекції вектора  $\overline{T}_C$  на площину  $Axy$ ;

$$\sin \beta = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + DC^2}} = \frac{3}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3}{5};$$

$$\cos \beta = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{\sqrt{AD^2 + DC^2}} = \frac{4}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}.$$

При складанні рівнянь рівноваги в даній задачі будемо дотримуватися наступного порядку. Спочатку спроекуємо систему сил, що діє на об'єкт рівноваги, на одну з координатних площин, а потім складемо відповідні рівняння.

Спроекуємо всі сили, що діють на плиту  $ABCD$ , на координатну площину  $Axy$  (рис.7.16). При цьому треба пам'ятати, що при проектуванні завжди треба дивитися на площину з додатнього кінця осі, перпендикулярної до неї, в даному випадку  $Az$ . (На рис.7.16 проекції сил  $\overline{R}_{Az}$ ,  $\overline{R}_{Bz}$ ,  $\overline{T}_{Cz}$  і  $\overline{P}$ , що перпендикулярні до площини  $Axy$ , дорівнюють нулю).

За даною проекцією системи сил можна скласти три рівняння рівноваги: суму проекцій усіх сил на вісь  $Ax$ ; суму проекцій усіх сил на вісь  $Ay$ ; суму моментів усіх сил відносно осі  $Az$ , що перпендикулярна до площини  $Axy$  і перетинає її в точці  $A$ :

$$1. \sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - T_{Cx} = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = R_{Ay} - T_{Cy} = 0;$$

$$3. \sum m_z(\overline{F}_k) = -R_{Bx}(AB) = 0.$$

В рівнянні (3) моменти сил  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}$  і  $\bar{T}_{Cxy}$ , лінії дії яких проходять через точку  $A$  (перетинають вісь  $Az$ ), дорівнюють нулю.

Спроекуємо усі сили, що діють на плиту  $ABCD$ , на площину  $Axz$  (рис.7.17). (На рис.7.17 проекції сил  $\bar{R}_{Ay}$  і  $\bar{T}_{Cy}$ , що перпендикулярні до площини  $Axz$ , дорівнюють нулю).

За даною проекцією системи сил можна скласти наступні рівняння рівноваги: суму проекцій усіх сил на вісь  $Ax$  (це рів-

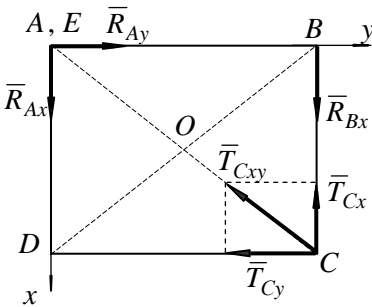


Рис.7.16

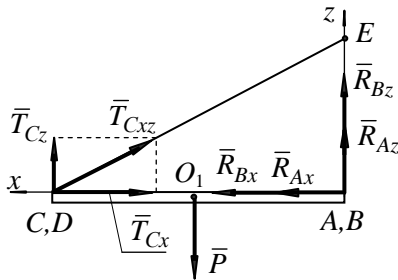


Рис.7.17

няння вже складене); суму проекцій усіх сил на вісь  $Az$ ; суму моментів усіх сил відносно осі  $Ay$ , яка перпендикулярна до площини  $Axz$  і перетинає її в точці  $A$ :

$$4. \sum F_{kz} = R_{Az} + T_{Cz} + R_B = 0;$$

$$5. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot (AO_1) - T_{Cz} \cdot (AD) = 0.$$

В рівнянні (5) моменти сил  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Bx}, \bar{R}_{Bz}, \bar{T}_{Cx}$ , лінії дії яких проходять через точку  $A$  (перетинають вісь  $Ay$ ), дорівнюють нулю.

Спроекуємо всі сили, що діють на плиту  $ABCD$ , на площину  $Ayz$  (рис.7.18). (На рис. 7.18 проекції сил  $\bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Bx}$  і  $\bar{T}_{Cx}$ , що перпендикулярні до площини  $Ayz$ , дорівнюють нулю).

За даною проекцією системи сил можна скласти наступні рівняння рівноваги: суму проекцій усіх сил на вісь  $Ay$  (це рівняння вже складене); суму проекцій усіх сил на вісь  $Az$  (це рів-

няння вже складене); суму проекцій усіх сил на вісь  $Az$  (це рівняння теж уже складене); суму моментів усіх сил відносно осі  $Ax$ , яка перпендикулярна до площини  $Ayz$  і перетинає її в точці  $A$ :

$$6. \sum m_x(\bar{F}_k) = -P \cdot (AO_2) + T_{Cz} \cdot (AB) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0.$$

В рівнянні (6) моменти сил  $\bar{R}_{Az}, \bar{R}_{Ay}$  і  $\bar{T}_{Cy}$ , лінії дії яких

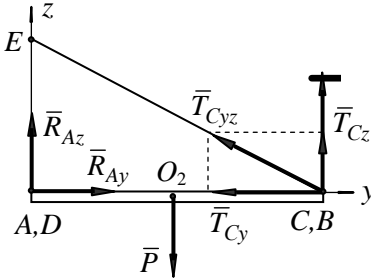


Рис.7.18

проходять через точку  $A$  (або перетинають вісь  $Ax$ ), дорівнюють нулю.

З рівняння (3) знаходимо, що  $R_{Bx} = 0$ .

Оскільки плита  $ABCD$  прямокутна, то проекції відрізка  $AO$  на координатні площини  $Axz$  і  $Ayz$  відповідно дорівнюють:

$$AO_1 = \frac{AD}{2};$$

$$AO_2 = \frac{AB}{2}.$$

Перепишемо складену систему рівнянь з урахуванням виразів для складових реакції  $\bar{T}_C$ :

$$1'. \sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} - T_C \cos \alpha \sin \beta = 0;$$

$$2'. \sum F_{ky} = R_{Ay} - T_C \cos \alpha \cos \beta = 0;$$

$$3'. \sum F_{kz} = R_{Az} + T_C \sin \alpha + R_{Bz} = 0;$$

$$4'. \sum m_x(\bar{F}_k) = -P \cdot \frac{AB}{2} + T_C \sin \alpha \cdot (AB) + R_{Bz} \cdot (AB) = 0;$$

$$5'. \sum m_y(\bar{F}_k) = P \cdot \frac{AD}{2} - T_C \sin \alpha \cdot (AD) = 0.$$

Розв'язавши систему в зворотному порядку отримуємо:

$$T_C = \frac{0,5P \cdot (AD)}{\sin \alpha \cdot (AD)} = \frac{0,5P}{\sin 45^\circ} = \frac{0,5 \cdot 10}{0,707} = 7,07 \text{ кН};$$

$$R_{Bz} = \frac{0,5P \cdot (AB) - T_C \sin \alpha \cdot (AB)}{(AB)} =$$

$$= 0,5P - T_C \sin 45^\circ = 0,5 \cdot 10 - 7,07 \cdot 0,707 = 0;$$

$$R_{Az} = -T_C \sin \alpha - R_{Bz} = -T_C \sin 45^\circ = -7,07 \cdot 0,707 = -5 \text{ кН};$$

$$R_{Ay} = T_C \cos \alpha \cos \beta = T_C \cos 45^\circ \cdot \frac{4}{5} = 7,07 \cdot 0,707 \cdot \frac{4}{5} = 4 \text{ кН};$$

$$R_{Ax} = T_C \cos \alpha \sin \beta - R_{Bx} = T_C \cos 45^\circ \cdot \frac{3}{5} = 7,07 \cdot 0,707 \cdot \frac{3}{5} = 3 \text{ кН};$$

**Відповідь:**  $R_{Ax} = 3 \text{ кН}; R_{Ay} = 4 \text{ кН}; R_{Az} = -5 \text{ кН};$   
 $R_{Bx} = 0; R_{Bz} = 0; T_C = 7,07 \text{ кН}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 8.13; 8.17; 8.21; 8.25 [2].

## Тема 8. РІВНОВАГА ТІЛА З УРАХУВАННЯМ СИЛ ТЕРТЯ

### ЗАНЯТТЯ № 8

#### Зміст

- 8.1. Закони тертя ковзання.
- 8.2. Порядок розв'язування задач.
- 8.3. Контрольні запитання.
- 8.4. Приклади розв'язування задач.

#### 8.1. Закони тертя ковзання

При переміщенні одного тіла по поверхні іншого завжди виникає сила, яка заважає руху тіла і називається **силою тертя ковзання**.

В інженерних розрахунках силу тертя ковзання завжди треба враховувати. При цьому виходять із встановлених експериментальним шляхом загальних законів тертя ковзання у спокої, які формулюються наступним чином:

1. Гранична сила тертя ковзання пропорційна нормальному тиску одного тіла на друге:

$$F_{\text{тр.гр.}} = f \cdot N,$$

де  $f$  – статичний коефіцієнт тертя.

2. Статичний коефіцієнт тертя залежить від матеріалів поверхонь, що труться, та їх фізичного стану.

3. Сила тертя не залежить від площі поверхні за якою дотикаються тіла, що труться.

Таким чином, коли розглядають рівновагу сил, що діють на тверде тіло, яке знаходиться на шорсткій поверхні, то, на відміну від гладкої поверхні, треба враховувати складову реакції шорсткої поверхні – силу тертя.

Сила  $\vec{T}$  (рис.8.1) намагається змістити тіло, до якого вона прикладена, відносно другого. Реакція поверхні  $\vec{R}_1$ , що виникає

в точках дотикання цих тіл, буде відхилитися на деякий кут  $\alpha$  від нормалі до поверхні ковзання. Нормальна складова цієї реакції  $\bar{N}$  завжди дорівнює за модулем нормальному тиску одного тіла на друге. Величина дотичної складової  $\bar{F}_1$  (сила тертя), залежить від величини сили  $\bar{T}$ , яка намагається зсунути тіло, і може змінюватися від нуля до граничного значення, тобто:

$$0 \leq F_1 \leq F_{\text{тр.гр.}} = f \cdot N.$$

У випадку, коли  $F_1$  досягає граничного значення  $F_{\text{тр.гр.}}$ , повна реакція в'язі  $\bar{R}$  відхиляється від  $\bar{N}$  на кут  $\varphi$ , який називається **кутом тертя**:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_{\text{тр.гр.}}}{N} = \frac{f \cdot N}{N} = f.$$

Таким чином, **тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя**.

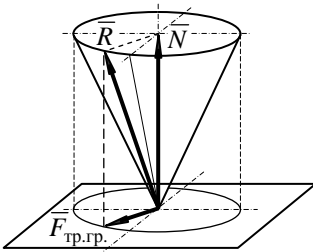


Рис. 8.2

Якщо величина сили  $T$  набуде значення більшого, ніж  $F_{\text{тр.гр.}}$ , то почнеться ковзання одного тіла по поверхні другого.

В залежності від напрямку дії максимальної сили тертя, яка дорівнює  $F_{\text{тр.гр.}}$ , в площині, перпендикулярній до  $N$ , повна реакція  $\bar{R}$  завжди буде лежати на поверхні конуса (рис.8.2), який називається **конусом тертя**.

*Якщо лінія дії рівнодіючої активних сил, що прикладені до твердого тіла, буде лежати всередині конуса тертя, то незалежно від модуля цієї сили, тіло буде зберігати стан спокою.*

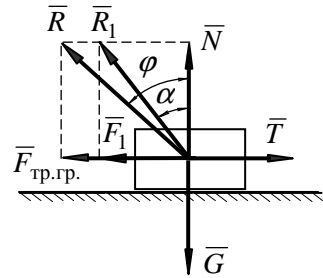


Рис. 8.1

Це пояснюється тим, що в цьому випадку складова рівнодіючої, що намагається зсунути тіло, буде меншою за граничну силу тертя.

Оскільки сила тертя може набувати значень від нуля до граничного значення, то рівняння рівноваги твердого тіла при наявності сили тертя перетворюються в нерівності.

У зв'язку з цим, при розв'язуванні задач, за правилом, розглядають випадок, коли сила тертя набуває граничного значення і з рівнянь рівноваги визначають граничні (найбільші і найменші) значення невідомих величин.

## 8.2. Порядок розв'язування задач

1. Виділити тверде тіло, рівновагу якого треба розглянути, щоб знайти невідомі величини.
2. Показати активні сили.
3. Відкинути в'язі і замінити їх дію реакціями. Реакцію шорсткої поверхні представити або двома складовими - нормальною реакцією і силою тертя, або, якщо не розкласти цю реакцію на складові, направити її під кутом тертя  $\varphi$  до нормалі к поверхні.
4. Розглянути рівновагу виділеного тіла як вільного, що знаходиться під дією активних сил і реакцій в'язей.
5. Порівняти кількість невідомих величин і кількість рівнянь рівноваги, які повинні бути однаковими для статично визначеної задачі. При цьому, до рівнянь рівноваги твердого тіла слід додати залежність сили тертя від сили нормального тиску.
6. Обрати систему координат.
7. Скласти систему рівнянь рівноваги для сил, що прикладені до твердого тіла або системи твердих тіл.
8. Розв'язати складену систему рівнянь рівноваги, знайти невідомі величини.

## Контрольні запитання

1. Що називається силою тертя?
2. Від яких основних параметрів залежить сила тертя?
3. В яких межах змінюється сила тертя?
4. Як напрямлена сила тертя?
5. Що називається кутом тертя?
6. Що називається конусом тертя?
7. Які можливі напрями реакції шорсткої поверхні?
8. Як повинна бути направлена рівнодіюча активних сил по відношенню до конуса тертя, щоб тіло почало рухатися?

## Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Шорстка площина (рис.8.3) нахилена до горизонту на такий кут  $\alpha$ , при якому тіло, що знаходиться на цій площині, ковзає донизу з сталою швидкістю, яку йому надали на початку руху. Тіло розглядати як матеріальну точку.

**Визначити** коефіцієнт тертя  $f$  між тілом і площиною.

**Розв'язок.** Якщо тіло рухається рівномірно і прямолінійно, то система сил, що діє на тіло, знаходиться в рівновазі.

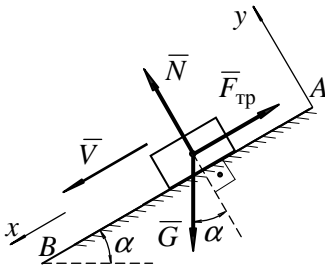


Рис. 8.3

На тіло діють активна сила тяжіння  $\vec{G}$  і реакція поверхні  $AB$ , яку розкладемо на нормальну реакцію  $\vec{N}$  і силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Сила тертя направлена в протилежний бік від напрямку руху тіла.

Таким чином, в рівновазі знаходиться система трьох сил:  $\vec{G}$ ,  $\vec{N}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}}$ . Невідомими силами в даній задачі є  $\vec{N}$  і  $\vec{F}_{\text{тр}}$ .

Крім того, невідомим є коефіцієнт тертя  $f$ .



Таким чином, число невідомих величин є більшим числа рівнянь. Для отримання статично визначеної задачі треба ще додати одне рівняння, наприклад, залежність сили тертя від сили нормального тиску.

Виберемо систему координат: вісь  $Ax$  направимо вздовж похилої площини за напрямом руху тіла, а вісь  $Ay$  – перпендикулярно до площини.

Оскільки система сил, що діє на тіло, є плоскою збіжною, то можна скласти два рівняння рівноваги.

Складемо рівняння рівноваги для даної системи сил:

$$1. \sum F_{kx} = G \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = N - G \cos \alpha = 0.$$

Запишемо залежність сили тертя від сили нормального тиску:

$$3. F_{\text{тр}} = f \cdot N.$$

З рівнянь (1) і (2) визначаємо силу тертя і силу нормального тиску:

$$F_{\text{тр}} = G \sin \alpha; \quad N = G \cos \alpha.$$

Підставляючи у рівняння (3), отримаємо::

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{N} = \frac{G \sin \alpha}{G \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

**Відповідь:**  $f = \operatorname{tg} \alpha$ .

### Задача №2

Клин  $A$  (рис.8.4.), кут нахилу щоки якого відносно осі складає  $\alpha = 30^\circ$ , вдавлюється в тіло  $B$  зусиллям  $Q = 6 \text{ кН}$ .

**Визначити** нормальний тиск  $N$  на щоки клина та зусилля  $P$ , яке треба прикласти до клина, щоб його витягнути, якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,1$  і нормальний тиск на щоки клина при витягуванні дорівнює тиску при вдавлюванні.

**Розв'язок.** Для визначення нормального тиску  $N$  пружного тіла  $B$  на клин  $A$  розглянемо клин під час його вдавлювання в тіло  $B$  під дією сили  $\bar{Q}$  (рис.8.5).

На клин  $A$  діють активна сила  $\bar{Q}$  і реакції від тіла  $B$  на щоки клина. Реакції на щоки клина розкладемо на складові нормального тиску  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$ , та сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр.1}}$  і  $\bar{F}_{\text{тр.2}}$ , які направимо проти напрямку руху клина під час вдавлювання.

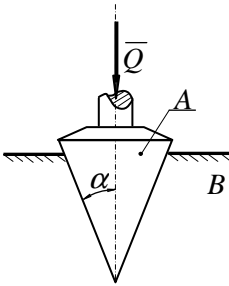


Рис. 8.4

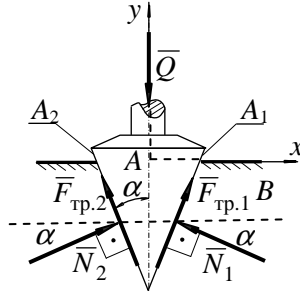


Рис. 8.5

Таким чином, клин знаходиться в рівновазі під дією системи сил  $\bar{Q}$ ,  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{F}_{\text{тр.1}}$  і  $\bar{F}_{\text{тр.2}}$ , причому сили тертя будуть мати максимальне значення.

Пов'яжемо з клином прямокутну систему координат  $Axy$  і складемо рівняння рівноваги для даної системи сил в проекціях на осі координат:

$$1. \sum F_{kx} = -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + F_{\text{тр.1}} \sin \alpha - F_{\text{тр.2}} \sin \alpha = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = -Q + N_1 \sin \alpha + N_2 \sin \alpha + F_{\text{тр.1}} \cos \alpha + F_{\text{тр.2}} \cos \alpha = 0.$$

Крім цього, запишемо залежності сил тертя від сил нормального тиску:

$$3. F_{\text{тр.1}} = f \cdot N_1; \quad 4. F_{\text{тр.2}} = f \cdot N_2.$$

Перетворимо рівняння (1) з урахуванням залежностей (3) і (4):

$$\begin{aligned} -N_1 \cos \alpha + N_2 \cos \alpha + fN_1 \sin \alpha - fN_2 \sin \alpha &= N_1(f \sin \alpha - \\ -\cos \alpha) + N_2(\cos \alpha - f \sin \alpha) &= 0. \end{aligned}$$

Тоді:

$$N_1(f \sin \alpha - \cos \alpha) = N_2(f \sin \alpha - \cos \alpha), \quad \text{або } N_1 = N_2.$$

Оскільки  $N_1 = N_2$ , то  $F_{\text{тр.1}} = F_{\text{тр.2}}$ .

Замінюючи  $N_1$  на  $N_2$  і  $F_{\text{тр.1}}$  на  $F_{\text{тр.2}}$ , з рівняння (2) отримаємо:

$$-Q + 2N_1 \sin \alpha + 2F_{\text{тр.1}} \cos \alpha = -Q + 2N_1 \sin \alpha + 2N_1 f \cos \alpha = 0.$$

Звідки:

$$N_1 = \frac{Q}{2(\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{6}{2(0,0499 + 0,1 \cdot 0,999)} = 20 \text{ кН}.$$

Тепер розглянемо визначення зусилля  $P$ , яке треба прикласти, щоб витягнути клин.

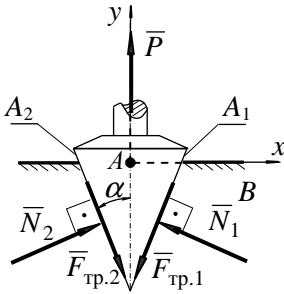


Рис. 8.6

Клин (рис.8.6) знаходиться в рівновазі під дією активної сили  $\bar{P}$  і реакцій з боку тіла  $B$  на щоки клина:  $\bar{N}_1$ ,  $\bar{N}_2$ ,  $\bar{F}_{\text{тр.1}}$  і  $\bar{F}_{\text{тр.2}}$ .

При витягуванні клин буде рухатися вгору і сила тертя кожної щоки буде прикладена вздовж щоки проти напрямку її руху.

Оскільки з першої частини задачі відомо, що  $N_1 = N_2 = 20 \text{ кН}$  і  $F_{\text{тр.1}} = F_{\text{тр.2}}$ , то для визначення зусилля  $P$  досить скласти тільки одне рівняння рівноваги в проекції на вісь  $Ay$ :

$$5. \sum F_{ky} = P + 2N_1 \sin \alpha - 2F_{\text{тр.1}} \cos \alpha = 0.$$

Звідки:

$$6. P = 2F_{\text{тр.1}} \cos \alpha - 2N_1 \sin \alpha = 2N_1(f \cos \alpha - \sin \alpha).$$

Тоді

$$P = 2 \cdot 20 \cdot (0,1 \cdot 0,999 - 0,0499) = 2 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $N = 20 \text{ кН}$ ;  $P = 2 \text{ кН}$ .

**Зауваження.** З аналізу формули (6) випливає, що величина сили  $P$  може дорівнювати нулю, коли:

$$f \cos \alpha - \sin \alpha = 0, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha = f.$$

Оскільки коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута тертя, то кут нахилу щоки в цьому випадку буде дорівнювати куту тертя.

Таким чином, якщо кут нахилу щоки клина буде більшим за кут тертя, то клин не буде заклинювати в тому тілі, в яке його вдавлюють (забивають). Цим і пояснюється те, що для розколювання деревини, як правило, використовують клини з досить великим кутом нахилу щоки.

І навпаки, якщо потрібно клин заклинити в іншому тілі, то кут нахилу щоки клина повинен бути меншим, ніж кут тертя.

Все це справедливо для пружних тіл, коли існують нормальні реакції  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$ .

### Задача №3

Для механізму, що зображено на рис. 8.7 **знайти** відношення розмірів  $l$  до  $L$ , виходячи з вимоги самозаклинювання, якщо коефіцієнт тертя між стінками та повзунами  $A$  і  $B$  -  $f = 0,6$ . (Стержні  $CA$  і  $CB$  вважати ідеальними).

**Розв'язок.** Явище самозаклинювання полягає в тому, що при будь якій силі  $\bar{P}$  направленій вниз, сили тертя, які будуть виникати на повзунах  $A$  і  $B$ , будуть блокувати рух механізму донизу.

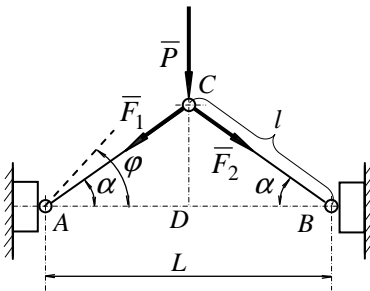


Рис. 8.7

Сила  $\bar{P}$  стискає ідеальні стержні  $CA$  і  $CB$ , які передають тиск на повзуни  $A$  і  $B$  під кутом нахилу стержнів  $\alpha$  (рис. 8.7).

Для того, щоб повзуни  $A$  і  $B$  не рухалися під дією сил  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ , лінії дії цих сил повинні проходити всередині кута тертя  $\varphi$ , тобто повинна виконуватися умова:

$$\alpha < \varphi, \text{ або } \operatorname{tg} \alpha < \operatorname{tg} \varphi.$$

Враховуючи, що  $\operatorname{tg} \varphi = f$ , то  $\operatorname{tg} \alpha < f = 0,6$ .

Для рис.8.7 можна записати:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CD}{AD}; \quad AD = \frac{L}{2};$$

$$CD = \sqrt{(AC)^2 - (AD)^2} = \sqrt{l^2 - 0,25L^2}.$$

Таким чином:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - 0,25L^2}}{0,5L} < 0,6.$$

Зробимо перетворення:

$$\frac{1}{L} \sqrt{l^2 - 0,25L^2} < 0,3; \quad \frac{l^2 - 0,25L^2}{L^2} < 0,09;$$

$$\frac{l^2}{L^2} - 0,25 < 0,09; \quad \frac{l}{L} < \sqrt{0,34} = 0,585.$$

Оскільки з умови існування схеми механізму мінімальна довжина стержнів  $l$  не може бути меншою за  $AD = L/2$ , то нерівність, яка визначає конструкцію, буде мати вигляд:

$$0,5 < l/L < 0,585.$$

**Відповідь:**  $0,5 < l/L < 0,585$ .

#### Задача №4

Три тіла  $A$ ,  $B$  і  $C$  (рис.8.8) вагою, відповідно  $10 H$ ,  $30 H$  і  $60 H$ , лежать на площині, що нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту. Вантажі між собою з'єднані тросами послідовно. Коефіцієнти тертя між тілами і площиною дорівнюють, відповідно:  $f_A = 0,1$ ;  $f_B = 0,25$ ;  $f_C = 0,5$ .

**Визначити** кут  $\alpha$ , при якому тіла будуть рівномірно рухатися донизу по площині. Знайти натяги тросів, що з'єднують тіла.

**Розв'язок.** При рівномірному ковзанні системи тіл по площині донизу, як і у випадку стану спокою, сили, що діють на систему тіл, повинні бути в рівновазі.

Таким чином, для визначення кута нахилу площини і натягу тросів треба скласти рівняння рівноваги сил, що діють на систему тіл, і за їх допомогою визначити невідомі величини.

Спочатку розглянемо рівновагу системи тіл в цілому (рис.8.8).

До системи тіл прикладені активні сили тяжіння  $\bar{P}_A, \bar{P}_B$  і  $\bar{P}_C$ ; нормальні реакції поверхні  $\bar{N}_A, \bar{N}_B$  і  $\bar{N}_C$ ; сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр.}A}, \bar{F}_{\text{тр.}B}$  і  $\bar{F}_{\text{тр.}C}$ .

Оберемо систему координат – вісь  $Ox$  напрямимо вздовж площини за напрямом руху, а вісь  $Oy$  перпендикулярно до площини. Складемо рівняння рівноваги сил, що діють на систему, в проекціях на осі координат.

- $\sum F_{kx} = P_A \sin \alpha + P_B \sin \alpha + P_C \sin \alpha - F_{\text{тр.}A} - F_{\text{тр.}B} - F_{\text{тр.}C} = 0;$
- $\sum F_{ky} = -P_A \cos \alpha - P_B \cos \alpha - P_C \cos \alpha + N_A + N_B + N_C = 0.$

Оскільки в цій системі число невідомих величин більше ніж число рівнянь, то необхідно розглянути рівновагу кожного тіла окремо. Для цього треба відкинути троси, що з'єднують тіла, і замінити їх дію реакціями (рис.8.9).

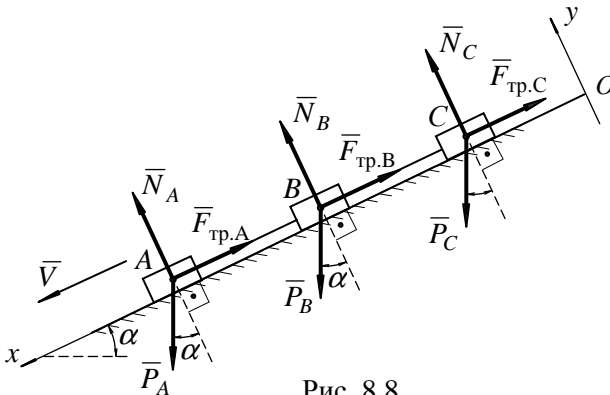


Рис. 8.8

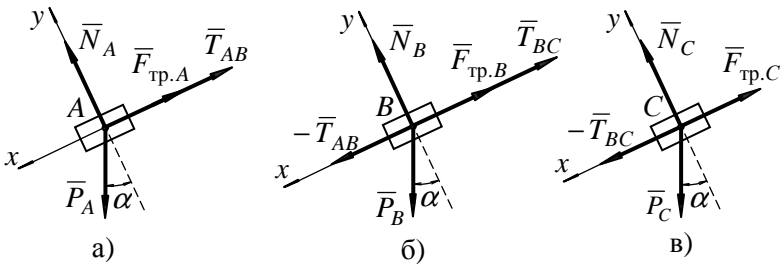


Рис. 8.9

Рівняння рівноваги для тіла  $A$  (рис.8.9,а):

$$3. \sum F_{kx} = P_A \sin \alpha - F_{\text{тр.}A} - T_{AB} = 0;$$

$$4. \sum F_{ky} = -P_A \cos \alpha + N_A = 0.$$

Рівняння рівноваги для тіла  $B$  (рис.8.9,б):

$$5. \sum F_{kx} = P_B \sin \alpha + T_{AB} - F_{\text{тр.}B} - T_{BC} = 0;$$

$$6. \sum F_{ky} = N_B - P_B \cos \alpha = 0.$$

Рівняння рівноваги для тіла  $C$  (рис.8.9,в):

$$7. \sum F_{kx} = P_C \sin \alpha + T_{BC} - F_{\text{тр.}C} = 0;$$

$$8. \sum F_{ky} = -P_C \cos \alpha + N_C = 0.$$

Додамо до записаних рівнянь залежності для сил тертя з урахуванням виразів (4), (6) і (8) для сил нормального тиску:

$$9. F_{\text{тр.}A} = f_A N_A = f_A P_A \cos \alpha;$$

$$10. F_{\text{тр.}B} = f_B N_B = f_B P_B \cos \alpha;$$

$$11. F_{\text{тр.}C} = f_C N_C = f_C P_C \cos \alpha.$$

З урахуванням виразів для сил тертя з (1) отримаємо:

$$\begin{aligned} & \sin \alpha (P_A + P_B + P_C) - f_A P_A \cos \alpha - f_B P_B \cos \alpha - f_C P_C \cos \alpha = \\ & = (P_A + P_B + P_C) \sin \alpha - (f_A P_A + f_B P_B + f_C) \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Звідки:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{f_A P_A + f_B P_B + f_C P_C}{P_A + P_B + P_C} = \\ &= \frac{0,1 \cdot 10 + 0,25 \cdot 30 + 0,5 \cdot 50}{10 + 30 + 60} = 0,385; \end{aligned}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 0,385 = 21^\circ.$$

З рівнянь (3) і (7) знайдемо натяги тросів  $T_{AB}$  і  $T_{BC}$ :

$$\begin{aligned} T_{AB} &= P_A \sin \alpha - F_{\text{тр.}A} = P_A \sin 21^\circ - f_A P_A \cos 21^\circ = \\ &= 10 \cdot 0,358 - 0,1 \cdot 10 \cdot 0,933 = 2,65 \text{ Н}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{BC} &= F_{\text{тр.}C} - P_C \sin \alpha = f_C P_C \cos 21^\circ - P_C \sin 21^\circ = \\ &= 0,560 \cdot 0,933 - 60 \cdot 0,358 = 6,51 \text{ Н}. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\alpha = 21^\circ$ ;  $T_{AB} = 2,65 \text{ Н}$ ;  $T_{DC} = 6,4 \text{ Н}$ .

### Задача №5

Драбина  $AB$  (рис.8.10) вагою  $P$  спирається на гладку вертикальну стінку в точці  $A$  і на шорстку горизонтальну підлогу в точці  $B$ .

**Визначити** під яким кутом до підлоги треба поставити драбину, щоб по ній до точки  $A$  могла піднятися людина, вага якої  $G$ .

**Розв'язок.** Для визначення кута  $\alpha$  розглянемо рівновагу драбини  $AB$  (рис.8.10).

На драбину діють сила  $\bar{P}$  - вага драбини, яка прикладена в точці

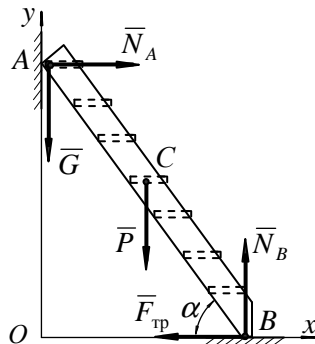


Рис. 8.10



$C$  (посередині  $AB$ );  $\bar{G}$  - вага людини, прикладена в точці  $A$ ; реакції поверхонь  $\bar{N}_A$  і  $\bar{N}_B$ , направлені перпендикулярно до відповідних поверхонь; сила тертя ковзання  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , яка направлена в бік, протилежний можливому переміщенню точки  $B$  драбини.

Оскільки на об'єкт рівноваги діє довільна плоска система сил, то умови рівноваги будуть мати вигляд:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad \sum F_{ky} = 0; \quad \sum m_B(\bar{F}_k) = 0.$$

Складемо ці рівняння рівноваги:

$$1. \sum F_{kx} = N_A - F_{\text{тр}} = 0;$$

$$2. \sum F_{ky} = N_B - P - G = 0;$$

$$3. \sum m_B(\bar{F}_k) = -N_A \cdot (AB) \sin \alpha + G(AB) \cos \alpha + P \frac{(AB)}{2} \cos \alpha = 0.$$

До цих рівнянь додамо залежність сили тертя від нормального тиску:

$$4. F_{\text{тр}} = f \cdot N_B.$$

Розділивши рівняння (3) на  $AB$  і  $\cos \alpha$ , отримаємо

$$-N_A \operatorname{tg} \alpha + G + 0,5P = 0.$$

Звідки:

$$5. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2G + P}{N_A}.$$

Визначивши з рівняння (2) силу нормального тиску в точці  $B$  і підставивши в вираз для сили тертя в рівняння (1), знайдемо:

$$N_A = F_{\text{тр}} = f \cdot N_B = f(P + G).$$

Підставивши значення  $N_A$  в рівняння (5), отримаємо:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2G + P}{2f(P + G)}.$$

Таким чином, рівновага драбини можлива коли

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2G + P}{2f(P + G)}.$$

**Відповідь:** 
$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2G + P}{2f(P + G)}.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 2.63, 2.65, 2.67, 4.67 [2].

## Тема 9. ЦЕНТР ВАГИ

### ЗАНЯТТЯ № 9

#### Зміст

- 9.1. Центр паралельних сил.
- 9.2. Центр тяжіння.
- 9.3. Центри тяжіння деяких плоских однорідних фігур.
- 9.4. Контрольні запитання.
- 9.5. Приклади розв'язування задач.

#### 9.1. Центр паралельних сил

Якщо на тіло діє система паралельних сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_n$ , то точка  $C$ , через яку проходить рівнодіюча  $\bar{R}$  цієї системи сил, називається *центром паралельних сил* (рис.9.1).

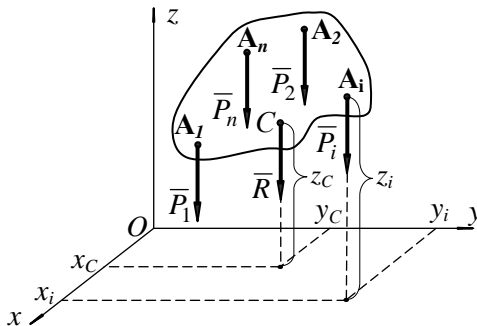


Рис. 9.1

Координати центра паралельних сил визначаються за залежностями:

$$x_C = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum x_i P_i}{\sum P_i};$$

$$y_C = \frac{y_1 P_1 + y_2 P_2 + \dots + y_n P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum y_i P_i}{\sum P_i};$$

$$z_C = \frac{z_1 P_1 + z_2 P_2 + \dots + z_n P_n}{P_1 + P_2 + \dots + P_n} = \frac{\sum z_i P_i}{\sum P_i};$$

де  $x_i, y_i, z_i$  - координати точок прикладення сил  $\bar{P}_i$ .

Центр паралельних сил має ту особливість, що через нього обов'язково буде проходити лінія дії рівнодіючої при повертанні ліній дії усіх сил системи навколо точок їх прикладення на один і той же кут в один і той же бік. Модулі сил при повертанні не повинні змінюватися.

## 9.2. Центр ваги

Якщо тверде тіло знаходиться біля поверхні Землі, то на кожному матеріальну частину цього тіла діє сила тяжіння  $\Delta\bar{G}_i$ , яка напрямлена до центра Землі. Оскільки розміри тіла невеликі в порівнянні з розмірами Землі, то утворену систему сил можна розглядати як паралельну. Рівнодіюча цієї паралельної системи сил  $\bar{G}$ , яка дорівнює їх сумі, називається *вагою тіла*, а центр цієї системи - точка  $C$  називається *центром ваги тіла* (рис.9.2).

Координати центра тяжіння твердого тіла можна визначити як координати центра паралельних сил:

$$x_C = \frac{x_1 \Delta G_1 + x_2 \Delta G_2 \dots + x_n \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum x_i \Delta G_i}{G};$$

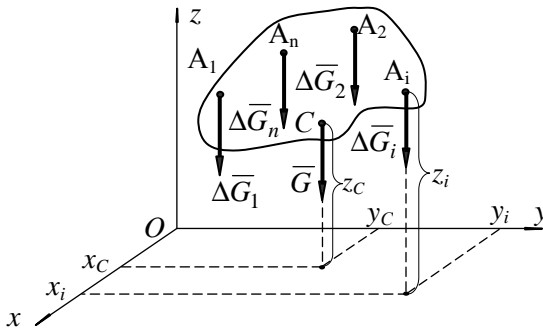


Рис. 9.2.

$$y_C = \frac{y_1 \Delta G_1 + y_2 \Delta G_2 \dots + y_n \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum y_i \Delta G_i}{G};$$

$$z_C = \frac{z_1 \Delta G_1 + z_2 \Delta G_2 \dots + z_n \Delta G_n}{\Delta G_1 + \Delta G_2 + \dots + \Delta G_n} = \frac{\sum z_i \Delta G_i}{G};$$

де  $\Delta G_i$  - сила тяжіння елементарної частинки тіла;  
 $G$  - вага тіла;  
 $x_C, y_C, z_C$  - координати центра тяжіння;  
 $x_i, y_i, z_i$  - координати елементарної частинки тіла.

Якщо тіло однорідне, тобто питома вага не змінюється за об'ємом ( $\gamma = \text{const}$ ), то:

$$G = \gamma V; \quad \Delta G_i = \gamma \Delta V_i,$$

де  $V$  - об'єм тіла;  
 $\Delta V_i$  - об'єм елементарної частинки.

Тоді формули для визначення координат центра тяжіння твердого тіла набудуть вигляду:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta V_i}{V}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta V_i}{V}; \quad z_C = \frac{\sum z_i \Delta V_i}{V}.$$

Положення центра тяжіння однорідного тіла залежить тільки від форми об'єму, що займає тіло, і називається **центром тяжіння цього об'єму**.

Якщо однорідне тіло має форму тонкої пластини, то його можна розглядати як матеріальну плоску фігуру. В цьому випадку положення центра тяжіння плоскої фігури визначається двома координатами  $x_C$  та  $y_C$  і залежить від форми площі фігури:

$$x_C = \frac{\sum x_i \Delta F_i}{F}; \quad y_C = \frac{\sum y_i \Delta F_i}{F};$$

де  $\Delta F_i$  - площа елементарної частини плоскої фігури;  
 $F$  - площа плоскої фігури.

Центр тяжіння однорідної пластини називається **центром ваги плоскої фігури**.

Якщо виділений елементарний об'єм  $\Delta V_i$  (площу елементарної площадки у плоскому випадку) спрямувати до нуля, то формули для обчислення координат центра тяжіння набудуть інтегрального вигляду:

а) для однорідного твердого тіла:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} x dV; \quad y_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} y dV; \quad z_C = \frac{1}{V} \int_{(V)} z dV,$$

де  $V = \int_{(V)} dV$  - об'єм тіла, інтегрування виконується за всім об'ємом тіла;

б) для однорідної поверхні:

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS; \quad z_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} z dS;$$

де  $S = \int_{(S)} dS$  - площа поверхні, інтегрування виконується по всій поверхні тіла;

в) для однорідної плоскої фігури, що лежить в площині  $xy$ :

$$x_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS; \quad y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS; \quad z_C = 0.$$

г) для однорідної лінії:

$$x_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} x dl; \quad y_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} y dl; \quad z_C = \frac{1}{L} \int_{(L)} z dl;$$

де  $L = \int_{(L)} dl$  - довжина лінії, інтегрування виконується по всій довжині лінії.

### 9.3. Центри ваги деяких плоских однорідних фігур

Для спрощення визначення центра тяжіння використовуються наступні допоміжні правилами:

1. Якщо тіло має площину симетрії, то центр тяжіння лежить на цій площині.
2. Якщо тіло симетричне відносно осі, то центр тяжіння лежить на цій осі.
3. Якщо тіло симетричне відносно точки, то центр тяжіння лежить в центрі симетрії.
4. Якщо тіло складається з декількох частин, центри тяжіння яких можна визначити, то центр тяжіння такого тіла знаходять як центр тяжіння декількох матеріальних точок, а саме тих, в яких розташовані ваги кожної окремої частини тіла.

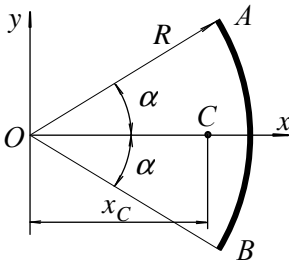


Рис. 9.3

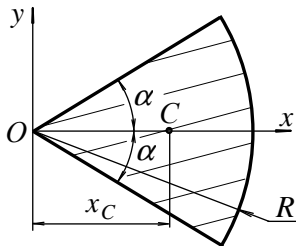


Рис. 9.4

#### 9.3.1. Центр тяжіння дуги кола

Центр тяжіння дуги кола  $AB$  (рис.9.3) лежить на її осі симетрії і на відстані  $OC$  від центра кола:

$$x_C = OC = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad y_C = 0,$$

де  $R$  - радіус кола;

$\alpha$  - половина центрального кута, що спирається на дугу  $AB$ .

#### 9.3.2. Центр тяжіння кругового сектора

Центр тяжіння кругового сектора лежить на осі симетрії і має координати:

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}; \quad y_C = 0,$$

де  $R$  - радіус кола;

$\alpha$  - половина центрального кута сектора.

### 9.3.3. Центр тяжіння кругового сегмента

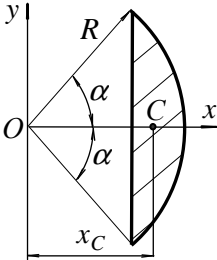


Рис. 9.5.

Центр тяжіння кругового сегмента лежить на осі симетрії сегмента і має координати:

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin^3 \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}; \quad y_C = 0,$$

де  $R$  - радіус кола;

$\alpha$  - половина центрального кута сегмента.

### 9.3.4. Центр тяжіння трикутника

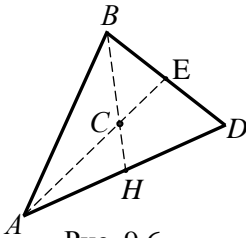


Рис. 9.6

Центр тяжіння трикутника (рис. 9.6) лежить в точці перетину його медіан – на відстані  $1/3$  кожної медіани від відповідної основи трикутника.

### 9.3.5. Центр тяжіння трапеції

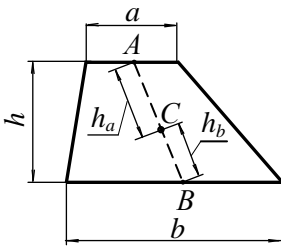


Рис. 9.7

Центр тяжіння трапеції (рис.9.7) з основами  $a$  і  $b$  та висотою  $h$  лежить на прямій  $AB$ , яка з'єднує середини основ.

Відстані  $h_a$  і  $h_b$  центра тяжіння  $C$  площі трапеції від її основ визначаються за формулами:



$$h_a = \frac{h}{3} \frac{a+2b}{a+b}; \quad h_b = \frac{h}{3} \frac{2a+b}{a+b}.$$

Найбільш поширений спосіб визначення положення центра тяжіння однорідного тіла складної форми полягає в тому, що його розбивають на такі частини, положення центрів тяжіння яких відомо, або може бути легко визначене.

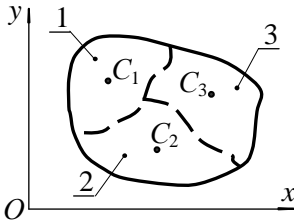


Рис. 9.8

Наприклад, однорідну плоску фігуру (рис.9.8) розбивають на три частини 1, 2 і 3, положення центрів тяжіння яких,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , можна визначити.

Координати центра тяжіння фігури  $C$  визначається за формулами:

$$x_C = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3}; \quad y_C = \frac{y_1 F_1 + y_2 F_2 + y_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де  $x_1, y_1$  - координати центра тяжіння  $C_1$  першої частини плоскої фігури;

$F_1$  - площа першої частини і т.п.

Цим способом зручно користуватися і при визначенні положення центра тяжіння плоскої фігури, з якої вирізана деяка частина (рис.9.9).

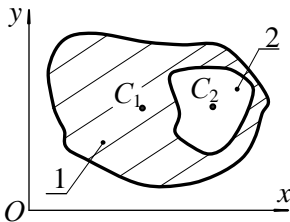


Рис. 9.9

В цьому випадку, площу плоскої фігури можна записати у вигляді різниці площ суцільної фігури 1 (площа додатна) і вирізаної частини 2 (площа від'ємна), тобто  $F = F_1 - F_2$ .

Координати центра тяжіння фігури дорівнюють:

$$x_C = \frac{x_1 F_1 - x_2 F_2}{F_1 - F_2}; \quad y_C = \frac{y_1 F_1 - y_2 F_2}{F_1 - F_2},$$

де  $x_1, y_1$  - координати центра тяжіння суцільної фігури 1, площа якої дорівнює  $F_1$ ;

$x_2, y_2$  - координати центра тяжіння вирізаної частини 2, площа якої дорівнює -  $F_2$ .

Перший з цих методів має назву “метод розбиття”, другий – “метод доповнення”, або “метод від’ємних мас”. В загальному випадку формули для визначення центру тяжіння плоскої фігури мають вигляд:

$$x_C = \frac{\sum x_k F_k}{F}; \quad y_C = \frac{\sum y_k F_k}{F},$$

де  $F = \sum F_k$  - площа усієї фігури.

#### 9.4. Контрольні запитання

1. Яку властивість має центр паралельних сил ?
2. За якими формулами обчислюються координати центра паралельних сил ?
3. Як визначається положення центра тяжіння площі, якщо відомі положення центрів тяжіння окремих її частин ?
4. Якими допоміжними теоремами користуються при визначенні положення центра тяжіння ?

#### 9.5. Приклади розв’язування задач

##### Задача № 1

**Знайти** центр ваги двотаврового профілю, розміри якого в сантиметрах вказані на рис.9.10.

**Розв’язок.** Оскільки форма перерізу має вісь симетрії, то вісь  $Ox$  напрямимо вздовж осі симетрії, а вісь  $Oy$  перпендикулярно до неї.

В силу симетричності профілю відносно осі  $Ox$  центр тяжіння буде лежати на цій осі, тобто  $y_C = 0$ .

Лініями  $AB$  і  $DE$  поділимо профіль на три прямокутника 1, 2 і 3.

Запишемо рівняння для визначення абсциси центра тяжіння площі:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3}{F_1 + F_2 + F_3},$$

де  $x_1, x_2, x_3$  - абсциси центрів тяжіння прямокутників 1, 2, 3;  
 $F_1, F_2, F_3$  - площі цих прямокутників.

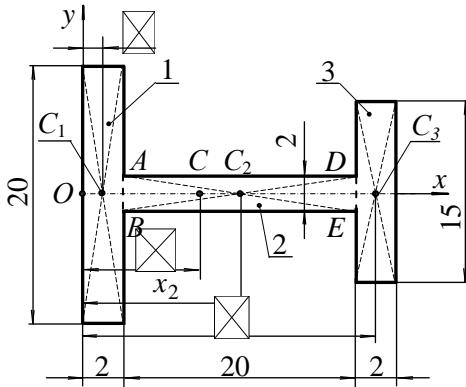


Рис. 9.10

Оскільки центри тяжіння прямокутників  $C_1, C_2$  і  $C_3$  лежать на перетині їх діагоналей, то (рис.9.10):

$$x_1 = OC_1 = 1 \text{ см}; \quad x_2 = OC_2 = 12 \text{ см}; \quad x_3 = OC_3 = 23 \text{ см}.$$

Площі цих прямокутників відповідно дорівнюють:

$$F_1 = 2 \cdot 20 = 40 \text{ см}^2; \quad F_2 = 20 \cdot 2 = 40 \text{ см}^2; \quad F_3 = 2 \cdot 15 = 30 \text{ см}^2.$$

Тоді

$$x_C = \frac{1 \cdot 40 + 12 \cdot 40 + 23 \cdot 30}{40 + 40 + 30} = 11 \text{ см}.$$

Таким чином, центр тяжіння фігури лежить в точці  $C$  з координатами:  $x_C = 11 \text{ см}; \quad y_C = 0$ .

**Відповідь:**  $x_C = 11 \text{ см}; \quad y_C = 0$ .

## Задача №2

**Знайти** координати центра тяжіння поперечного перетину різнобокого кутника (рис.9.11), полки якого мають ширину  $OA=a$ ,  $OB=b$  і товщину  $AE=BD=d$ .

**Розв'язок.** Розділимо перетин лінією  $KN$  на два прямокутника  $OBND$  і  $NKEA$ , центри тяжіння яких лежать на перетині відповідних діагоналей.

Запишемо формули для координат  $x_C$  і  $y_C$  центра тяжіння перетину:

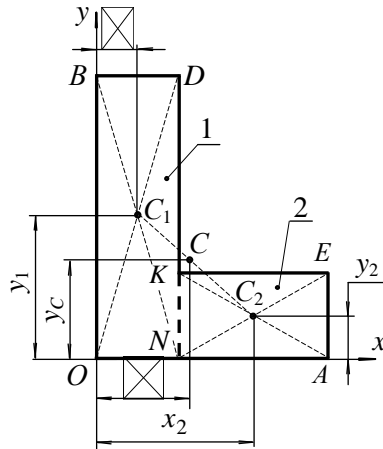


Рис. 9.11

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$y_C = \frac{\sum y_i F_i}{\sum F_i} = \frac{y_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2},$$

де  $x_1, y_1$  і  $x_2, y_2$  - координати центрів ваги прямокутників 1 і 2;

$F_1, F_2$  - площі прямокутників 1 і 2.

З рис.9.11 бачимо, що

$$x_1 = \frac{BD}{2} = \frac{d}{2}; \quad y_1 = \frac{OB}{2} = \frac{b}{2};$$

$$F_1 = (OB) \cdot (BD) = b \cdot d;$$

$$x_2 = \frac{OA + ON}{2} = \frac{a + d}{2}; \quad y_2 = \frac{AE}{2} = \frac{d}{2};$$

$$F_2 = (OA - ON) \cdot (AE) = (a - d)d.$$

Тоді:

$$x_C = \frac{\frac{d}{2}bd + \frac{a+d}{2}(a-d)d}{bd + (a-d)d} = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(b+a-d)};$$

$$y_C = \frac{\frac{b}{2}bd + \frac{d}{2}(a-d)d}{bd + (a-d)d} = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b+a-d)}.$$

**Відповідь:**  $x_C = \frac{a^2 + bd - d^2}{2(b+a-d)};$   $y_C = \frac{b^2 + ad - d^2}{2(b+a-d)}.$

### Задача № 3

**Визначити** положення центра ваги плоскої фігури (рис.9.12), обмеженої півколом  $AOB$  радіуса  $R$  і двома прямими рівної довжини  $AD$  і  $BD$ , причому  $OD = 3R$ .

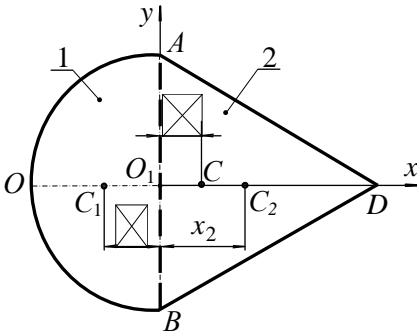


Рис. 9.12

**Розв'язок.** Дана площа має вісь симетрії, вздовж якої направимо вісь  $O_1x$ . Оскільки центр тяжіння площі  $C$  лежить на осі симетрії, то  $y_C = 0$ .

Розділимо площу  $AOBD$  лінією  $AB$  на дві частини: півколо  $AOB$  і рівнобедрений трикутник  $ADB$ .

Абсциса центра ваги площі  $x_C$  буде дорівнювати:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 + x_2 F_2}{F_1 + F_2},$$

де  $x_1$  - координата центра тяжіння половини круга  $AOB$ ;

$x_2$  - координата центра тяжіння трикутника  $ADB$ ;

$F_1, F_2$  - площі половини круга і трикутника.

Для визначення  $x_1$  скористаємося наведеними у розділі 9.3.2 координатами центру тяжіння кругового сектора:

$$x_1 = -(O_1C_1) = -\frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

У випадку половини круга  $\alpha = \pi/2$ ,  $\sin \alpha = 1$ :

$$x_1 = -\frac{2}{3}R \frac{1}{\pi/2} = -\frac{4}{3\pi}R.$$

Площа половини круга дорівнює:

$$F_1 = \frac{\pi R^2}{2}.$$

Центр тяжіння трикутника лежить на перетині його медіан (розділ 9.3.4). Оскільки трикутник  $ADB$  рівнобедрений, то лінія  $O_1D$  буде його медіаною і відстань  $O_1C_2$  буде дорівнювати третій частині від  $O_1D$ :

$$x_2 = O_1C_2 = \frac{1}{3}(O_1D) = \frac{1}{3}(OD - OO_1) = \frac{1}{3}(3R - R) = \frac{2}{3}R.$$

Площа трикутника  $ADB$  дорівнює:

$$F_2 = \frac{1}{2}(AB) \cdot (O_1D) = \frac{1}{2}2R \cdot 2R = 2R^2.$$

Підставивши знайдені значення  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $F_1$  і  $F_2$  в рівняння для  $x_C$ , отримаємо:

$$x_C = \frac{-\frac{4}{3\pi}R \frac{\pi R^2}{2} + \frac{2}{3}R \cdot 2R^2}{\frac{\pi R^2}{2} + 2R^2} = \frac{4R}{3(\pi + 4)} \approx 0,19R.$$

**Відповідь:**  $x_C = 0,19R$ ;  $y_C = 0$ .

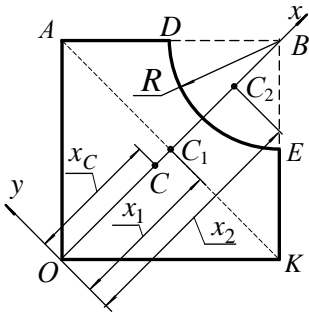


Рис. 9.13

**Задача № 4**

**Знайти** координати центра ваги квадратної пластини з вирізом у вигляді сегмента радіуса  $R$  (рис.9.13), якщо

$$OA = OK = a; \quad BE = BD = R = \frac{a}{2}.$$

**Розв'язок.** Віссю симетрії фігури, що розглядається, буде діагональ  $OB$  прямокутника  $OABK$ .

Тож направимо вісь  $Ox$  вздовж цієї лінії, а вісь  $Oy$  - перпендикулярно (рис.9.13).

Центр тяжіння пластини буде лежати на осі  $Ox$ , тобто  $y_C = 0$ .

Площу фігури  $OADEK$  можна представити як різницю площ квадрата  $OABK$  (додатня площа) і сектора  $DBE$  (від'ємна площа).

Абсциса центра тяжіння фігури буде дорівнювати:

$$x_C = \frac{\sum x_i F_i}{\sum F_i} = \frac{x_1 F_1 - x_2 F_2}{F_1 - F_2},$$

де  $x_1$  - абсциса центра ваги квадрата  $OABK$ ;

$x_2$  - абсциса центра ваги сектора  $DBE$ ;

$F_1$  і  $F_2$  - площі квадрата і сектора.

Для квадрата  $OABK$  отримаємо:

$$x_1 = \frac{1}{2}(OB) = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = a\frac{\sqrt{2}}{2} = 0,707a; \quad F_1 = a^2.$$

Як випливає з рис. 9.13,  $x_2$  дорівнює

$$x_2 = OB - BC_2,$$

де  $BC_2$  - відстань від точки  $B$  до центра тяжіння кругового сектора  $DBE$ .

Для кругового сектора (розділ 9.3.2) отримаємо:

$$BC_2 = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

Оскільки  $R = a/2$  і  $\alpha = \pi/4$ , то

$$BC_2 = \frac{2 a \sin \frac{\pi}{4}}{3 \cdot 2 \pi/4} = \frac{2 a \sqrt{2}/2}{3 \cdot 2 \pi/4} = \frac{2\sqrt{2}a}{3\pi} = 0,3a.$$

Таким чином, абсциса  $x_2$  дорівнює:

$$x_2 = a\sqrt{2} - 0,3a = 1,41a - 0,3a = 1,11a.$$

Площа кругового сектора  $DBE$ :

$$F_2 = \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi a^2}{16} = 0,196a^2.$$

Підставивши значення  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $F_1$  і  $F_2$  в формулу для  $x_C$ , отримаємо:

$$x_C = \frac{0,707a \cdot a^2 - 1,11a \cdot 0,196a^2}{a^2 - 0,196a^2} = \frac{0,49a^3}{0,804a^2} = 0,61a.$$

**Відповідь:**  $x_C = 0,61a$ ;  $y_C = 0$ .

### Задача №5

**Знайти** координати центра ваги площі, що обмежена (рис.9.14) правою віткою параболи  $y = 0,5x^2$ , віссю  $Oy$  і прямою  $y = h = 8 \text{ см}$ .

**Розв'язок.** На відстані  $x$  від осі  $Oy$  виділимо елементарну площадку  $dS_y$  шириною  $dx$  (заштрихована область).

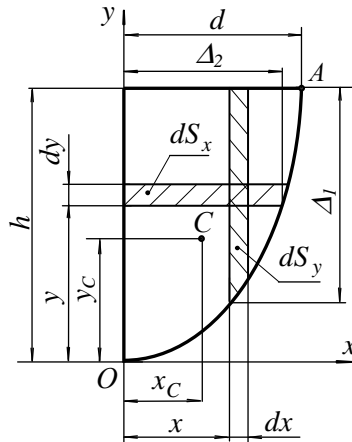


Рис. 9.14



Площа виділеної елементарної площадки буде дорівнювати:

$$dS_y = \Delta_1 \cdot dx = (h - 0,5x^2)dx.$$

Площа фігури, що обмежена заданими лініями:

$$S = \int_{(S)} dS_y = \int_0^d (h - 0,5x^2)dx = hd - \frac{0,5d^3}{3}.$$

Оскільки точка  $A$  являє собою перетин параболи  $y = 0,5x^2$  і прямої  $y = 8$ , то  $h = 0,5d^2$ .

Звідси:

$$d = \sqrt{\frac{h}{0,5}} = \sqrt{\frac{8}{0,5}} = 4 \text{ см.}$$

Тоді:

$$S = 8 \cdot 4 - \frac{0,5 \cdot 4^3}{3} = 21,3 \text{ см}^2.$$

Абсциса центра тяжіння

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1}{S} \int_{(S)} x dS_y = \frac{1}{S} \int_0^d x(h - 0,5x^2)dx = \frac{1}{S} \left( \frac{hd^2}{2} - \frac{0,5d^4}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{21,3} \left( \frac{8 \cdot 4^2}{2} - \frac{0,5 \cdot 4^4}{4} \right) = 1,52 \text{ см.} \end{aligned}$$

Для визначення координати  $y_C$  виділимо елементарну площадку  $dS_x$  шириною  $dy$  на відстані  $y$  від осі  $Ox$ .

Площа виділеної площадки:

$$dS_x = \Delta_2 \cdot dy = \sqrt{\frac{y}{0,5}} dy.$$

Ордината центра ваги:

$$y_C = \frac{1}{S} \int_{(S)} y dS_x = \frac{1}{S} \int_0^h y \sqrt{\frac{y}{0,5}} dy = \frac{1}{S} \int_0^h \frac{y^{3/2}}{\sqrt{0,5}} dy = \frac{1}{S} \frac{2}{5} h^2 \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{0,5}}.$$

Тоді:

$$y_C = \frac{1}{S} \frac{2}{5} h^2 d = \frac{2 \cdot 8^2 \cdot 4}{21,3 \cdot 5} = 4,71 \text{ см.}$$

**Відповідь:**  $x_C = 1,52 \text{ см}; \quad y_C = 4,71 \text{ см.}$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи : 9.1, 9.4, 9.11, 9.12 [2].

## РОЗДІЛ ТРЕТІЙ

# ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

*Динамікою називається розділ теоретичної механіки, в якому вивчається механічний рух матеріальних об'єктів в залежності від фізичних факторів, тобто від причин, що викликають цей рух.*

Нагадаємо, що у класичній механіці рух матеріальних об'єктів розглядається за допомогою абстрактних моделей: матеріальної точки, механічної системи та абсолютно твердого тіла.

**Матеріальна точка** – це матеріальне тіло, розмірами та різницею в русі його частин якого можна знехтувати.

**Механічною системою (системою матеріальних точок)** називається сукупність матеріальних точок, які між собою взаємодіють, тобто, положення та рух яких взаємопов'язані.

**Абсолютно твердим тілом** називається сукупність матеріальних точок, відстані між якими під час руху не змінюються.

Рух механічної системи визначається рухом усіх його точок. Тому вивчення динаміки починається з вивчення руху однієї матеріальної точки.

У динаміці точки розглядаються дві основні задачі:

- *рух точки задається, а необхідно знайти сили, які цей рух реалізують (перша, або пряма задача);*
- *сили задаються, а необхідно визначити закон руху, який є результатом дії цих сил.*

Для розв'язання цих задач використовуються базові відомості зі статички та кінематики, а також закони динаміки, тобто, загальні закони руху тіл та механічних систем під дією прикладених до них сил. Ці закони вперше в найбільш повному вигляді сформульовані Ісааком Ньютоном наприкінці XVII століття.

## Тема 1. ПРЯМА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ ТОЧКИ

### Заняття № 1

#### Зміст

- 1.1. Основні закони динаміки.
- 1.2. Рівняння руху матеріальної точки у декартовій і природній системах відліку.
- 1.3. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки.
- 1.4. Контрольні запитання.
- 1.5. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки невіЛЬНОЇ матеріальної точки.
- 1.6. Приклади розв'язування задач.

#### 1.1. Основні закони динаміки

У динаміці вивчається рух матеріальних систем у зв'язку з діючими на них силами. Найпростішим об'єктом механіки є матеріальна точка.

*Матеріальна точка – тіло, розмірами якого при розв'язуванні даної задачі можна знехтувати.*

Якщо на положення матеріальної точки і на її рух не накладені ніякі обмеження, точка називається *вільною*, у протилежному випадку маємо справу з рухом *невільної точки*.

Рух механічної системи визначається рухом усіх її матеріальних точок. Тому вивчення динаміки починається з вивчення руху однієї матеріальної точки.

В основі динаміки лежать три закони І.Ньютона, які вперше в найбільш повному й закінченому вигляді були сформульовані у книзі “Математичні начала натуральної філософії” (1686 р.).

**1. Перший закон (закон інерції):**  
*ізольована від зовнішніх дій матеріальна точка зберігає свій стан спокою або рівномірного прямолінійного руху до тих пір, поки дія інших тіл не змінить цього стану.*

**2. Другий закон** (основний закон динаміки):  
сила, яка діє на матеріальну точку, дорівнює добутку маси точки на її прискорення, а напрямок сили співпадає з напрямком прискорення:

$$\bar{F} = m\bar{a}. \quad (1.1)$$

Якщо на точку діє декілька сил, то їх можна замінити рівнодіючою:

$$\bar{R} = \sum \bar{F}_k. \quad (1.2)$$

Якщо точка рухається по якійсь поверхні, то на неї, крім активних сил діє і реакція в'язі  $\bar{N}$ .

Таким чином у загальному випадку у рівнянні (1.1):

$$\bar{F} = \bar{R} + \bar{N}.$$

**3. Третій закон** (закон рівності дії і протидії):  
Сили взаємодії двох матеріальних точок рівні між собою за модулем і направлені вздовж однієї прямої, яка з'єднує ці точки, у протилежні боки.

## 1.2. Рівняння руху матеріальної точки у декартових і природних системах відліку

Замість рівняння руху (1.1) у векторній формі можна одержати рівняння у скалярній формі, якщо спроектувати (1.1) на осі декартової або природної систем координат.

Рівняння руху у декартових координатах:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= ma_x, \\ F_y &= ma_y, \\ F_z &= ma_z. \end{aligned} \right\} \quad (1.3)$$

Тут  $F_x, F_y, F_z$  – проекції сили  $\bar{F}$  на відповідні декартові осі координат;

$a_x, a_y, a_z$  – проекції прискорення  $\bar{a}$  на ті ж самі осі.

### 1.3.1. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки

**Перша задача (пряма):** знаючи масу точки  $m$  та закони її руху, наприклад, у декартових координатах:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t),$$

визначити рівнодіючу прикладених до точки сил.

Спочатку треба визначити проекції прискорення точки на осі координат:

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Використовуючи рівняння руху точки у декартових координатах (1.3), визначаємо значення проекцій рівнодіючої прикладених до точки сил, а також її модуль:

$$F_x = ma_x; \quad F_y = ma_y; \quad F_z = ma_z,$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}. \quad (1.4)$$

Напрямок вектора сили відносно осей координат визначається за допомогою напрямних косинусів:

$$\cos(\vec{F}, \vec{i}) = \frac{F_x}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{j}) = \frac{F_y}{F}; \quad \cos(\vec{F}, \vec{k}) = \frac{F_z}{F}. \quad (1.5)$$

**Друга задача (обернена):** знаючи сили, які діють на матеріальну точку, її масу, а також початкові умови (положення точки та її швидкість у деякі моменти часу, не обов'язково у початковий), одержати рівняння руху точки.

## 1.4. Контрольні запитання

1. Сформулюйте основні закони динаміки.
2. Яке рівняння називається основним рівнянням динаміки?
3. Що є мірою інертності твердих тіл при поступальному русі?
4. Чи залежить вага тіла від його місця знаходження на Землі?
5. Яку систему відліку називають інерціальною?

## Порядок розв'язування прямої задачі динаміки невільної матеріальної точки

1. Зобразити на рисунку матеріальну точку у проміжному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, які на неї діють.
3. Вибрати систему відліку.
4. Записати векторне рівняння руху точки у формі другого закону динаміки (1.1).
5. Спроекувати векторне рівняння руху точки на вибрані осі координат.
6. Із одержаних рівнянь визначити необхідні величини.

### 1.6. Приклади розв'язування задач

#### Задача № 1

В шахту починає опускатися рівноприскорено ліфт, маса якого  $m = 280$  кг. У перші 10 с він проходить 35 м.

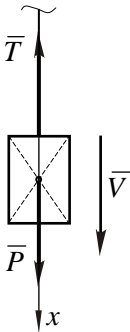


Рис. 1.1

**Визначити** натяг  $T$  каната, на якому висить ліфт.

**Розв'язок.** Зобразимо кабінку ліфту у довільному положенні (рис.1.1). На ліфт діє сила тяжіння  $\vec{P}$ , яка спрямована донизу, і натяг канату  $\vec{T}$ , який спрямовано вздовж троса догори.

Рух відбувається по вертикалі, тому спрямуємо вісь  $x$  вертикально донизу відповідно до напрямку швидкості та прискорення.

Запишемо рівняння руху кабіни ліфту у формі другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k,$$

де  $\vec{a}$  - прискорення кабіни ліфту.

З урахуванням сил, що діють на кабінку ліфту, рівняння буде мати вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Спроекуємо це рівняння на вісь  $x$  :

$$ma = P - T.$$

З урахуванням того, що  $P = mg$ , знаходимо

$$T = P - ma = mg - ma = m(g - a) = mg \left( 1 - \frac{a}{g} \right).$$

Ми одержали залежність натягу каната від прискорення, з яким рухається кабіна ліфту.

Проаналізуємо цю залежність. Може бути три випадки:

- $a = 0$  - кабіна ліфту рухається рівномірно або нерухома;
- $a > 0$  - кабіна ліфту має прискорення, яке за напрямком співпадає з додатним напрямком осі  $x$  (униз);
- $a < 0$  - кабіна ліфту з прискоренням піднімається угору.

У першому випадку

$$T = mg(1 - 0) = mg = P.$$

Тобто, якщо кабіна ліфту рухається без прискорення у будь-якому напрямку, натяг троса буде дорівнювати силі тяжіння кабіни ліфту.

У другому випадку натяг троса менший за силу тяжіння кабіни ліфту, бо  $\frac{a}{g} > 0$ , а якщо  $a = g$ , то  $T = 0$ .

У третьому випадку натяг троса завжди більший за силу тяжіння кабіни ліфту, бо  $\frac{a}{g} < 0$  і  $\left( 1 - \frac{a}{g} \right) > 1$ .

Наприклад, коли  $|a| = g$ ,  $T = 2mg = 2P$ , тобто натяг троса удвічі перевищує силу тяжіння кабіни ліфту.

У нашій задачі прискорення визначиться з виразу для шляху при рівнозмінному русі з урахуванням того, що початкова швидкість  $V_0 = 0$ :

$$S = \frac{at^2}{2}, \quad a = \frac{2S}{t^2}.$$



Тоді

$$T = m(g - a) = m \left( g - \frac{2S}{t^2} \right) =$$

$$= 280 \left( 9,81 - \frac{2 \cdot 35}{10^2} \right) = 2,55 \cdot 10^3 \text{ Н} = 2,55 \text{ кН}.$$

**Відповідь:** натяг троса  $T = 2,55 \text{ кН}$ .

### Задача №2

До тіла вагою  $P = 3 \text{ Н}$ , яке лежить на столі, прив'язали нитку, другий кінець якої (рис.1.2) держать у руці.

**Визначити**, з яким прискоренням  $a$  треба піднімати тіло вгору вертикально, щоб нитка обірвалася, якщо вона рветься коли натяг досягає величини  $T = 4,2 \text{ Н}$ ?

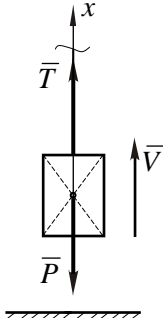


Рис. 1.2

**Розв'язок:** Зобразимо тіло з прив'язаною до нього ниткою (рис.1.2). Покажемо сили, які діють на тіло: сила тяжіння  $\bar{P}$  та натяг нитки  $\bar{T}$ . Вісь  $x$  спрямуємо вертикально вгору у додатному напрямку швидкості та прискорення.

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_K = \bar{T} + \bar{P}.$$

Спроєктуємо це рівняння на вісь  $x$ :

$$ma = T - P; \quad \frac{P}{g}a = T - P.$$

Звідки

$$a = g \left( \frac{T}{P} - 1 \right).$$

Якщо врахувати числові дані, то

$$a = 9,81 \left( \frac{4,2}{3} - 1 \right) = 3,92 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $a = 3,92 \text{ м/с}^2$ .

### Задача №3

Куля вагою  $G = 100 \text{ Н}$  падає вертикально вниз під дією сили тяжіння і зазнає опору середовища (рис.1.3). Закон руху кулі відповідає рівнянню  $x = 327t - 109(1 - e^{-3t})$ , причому  $x$  виражається у сантиметрах,  $t$  – у секундах.

**Визначити** силу опору середовища  $R$  у вигляді функції швидкості, тобто  $R = f(V)$ .

**Розв'язок.** Зобразимо кулю у довільному положенні на траєкторії і покажемо сили, які на неї діють (рис.1.3):

$\bar{G}$  - сила тяжіння;

$\bar{R}$  - сила опору середовища.

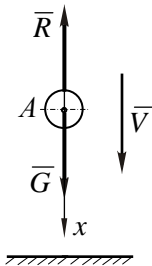


Рис. 1.3

Рух кулі відбувається вздовж вертикалі, тому спрямуємо вісь  $x$  вертикально униз за напрямком швидкості. Тоді положення кулі буде визначатися координатою  $x$ .

Запишемо рівняння руху кулі у векторній формі:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_K = \bar{G} + \bar{R}$$

та спроектуємо його на вісь  $x$ :

$$ma_x = G - R,$$

звідки

$$R = G - ma_x.$$

Таким чином, щоб визначити силу опору  $R$ , необхідно знати прискорення кулі  $a_x$ .

Оскільки закон зміни координати  $x$  відомий, то

$$V_x = \dot{x}, \quad a_x = \ddot{x}.$$

Знаходимо першу и другу похідні від закону руху кулі:

$$V_x = \dot{x} = [327t - 109(1 - e^{-3t})]' = 327 - 109 \cdot 3e^{-3t} = 327(1 - e^{-3t}),$$

$$a_x = \ddot{x} = [327(1 - e^{-3t})]' = 327 \cdot e^{-3t} = 981e^{-3t}.$$

Таким чином,

$$R = G - \frac{G}{g} \cdot 981 \cdot e^{-3t} = 100 - \frac{100}{981} \cdot 981 \cdot e^{-3t} = 100(1 - e^{-3t}).$$

Із виразу для  $V_x$  (з урахуванням того, що  $V_x = V$ ) витікає

$$v(1 - e^{-3t}) = \frac{V}{327},$$

тобто

$$R = \frac{100}{327}V = 0,306 \cdot V.$$

**Відповідь:**  $R = 0,306 \cdot V$ .

#### Задача № 4

Рух тіла масою  $m = 1\text{кг}$  виражається рівняннями:

$$x = V_0 t, \quad y = h - \frac{gt^2}{2},$$

де  $x$  і  $y$  - в метрах;  $t$  - в секундах.

**Визначити** силу  $Q$ , яка діє на тіло, приймаючи його за матеріальну точку (рис.1.4).

**Розв'язок.** Проекції на осі координат сили  $\bar{Q}$ , яка прикладена до тіла, визначаються за формулами:

$$Q_x = ma_x, \quad Q_y = ma_y,$$

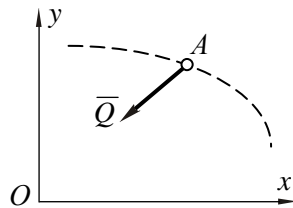


Рис. 1.4

де  $a_x$  і  $a_y$  - проекції прискорення тіла на осі координат.

У даному випадку

$$a_x = \ddot{x}, \quad \dot{x} = V_0, \quad \ddot{x} = 0; \quad a_y = \ddot{y}, \quad \dot{y} = -gt, \quad \ddot{y} = -g.$$

Отже

$$Q_x = 0; \quad Q_y = -mg = -1 \cdot 9,81 = -9,81 \text{ Н}.$$

Модуль сили  $Q$  дорівнює:

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2} = \sqrt{9,81^2} = 9,81 \text{ Н}.$$

Сила  $Q$  спрямована вертикально вниз, оскільки  $Q_x = 0$ . Таким чином, шукана сила, модуль якої дорівнює  $mg$ , є силою тяжіння.

**Відповідь:**  $Q = 9,81 \text{ Н}$ .

### Задача № 5

Прямолінійний рух ножа  $BC$  різального апарата жатки зернозбирального комбайна (рис.1.5) наближено виражається рівнянням  $S = -0,05 \cos 10\pi t$  ( $S$  - в метрах;  $t$  - в секундах).

**Визначити**

силу  $\bar{F}$ , яка призводить ніж до руху, в залежності від відстані  $S$ . Вага ножа  $Q = 100 \text{ Н}$ .

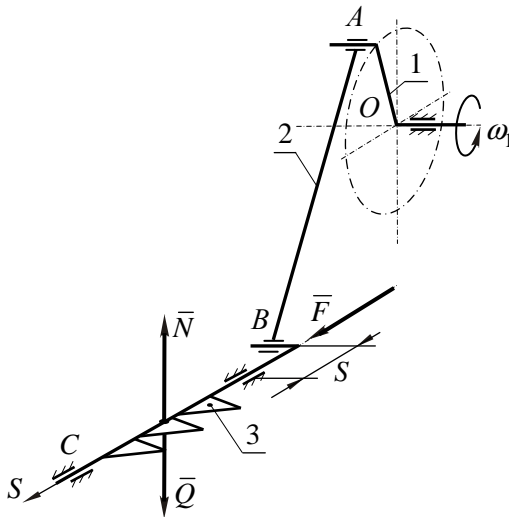


Рис. 1.5

**Пояснення:** Для приводу ножа різального апарата жатки використовуються плоскі і просторові механізми. Серед плоских

механізмів знайшли застосування кривошипно-шатунні, які складаються з кривошипа 1, шатуна 2 і ножа жатки 3. Механізм перетворює обертальний рух кривошипа 1 в зворотно-поступальний рух ножа 3.

У збиральних машинах вісь кривошипного пальця  $O$  знаходиться вище лінії руху ножа  $BC$ .

**Розв'язок.** Зобразимо ніж різального апарата у середньому положенні на переміщенні  $S$  і покажемо сили, які діють на нього.

На ніж  $BC$  діє сила ваги  $\bar{Q}$ , нормальна реакція опорної поверхні напрямних ножа  $\bar{N}$  і сила  $\bar{F}$  з боку шатуна  $AB$ , яка викликає рух ножа.

Запишемо рівняння руху ножа у векторній формі:

$$m\bar{a} = \sum F_k = \bar{Q} + \bar{N} + \bar{F}.$$

Проектуємо це рівняння на напрямок руху ножа (вісь  $S$ ):

$$ma = F, \quad \text{або} \quad \frac{Q}{g}a = F.$$

Із останнього рівняння випливає, що для визначення сили  $F$  необхідно знати прискорення  $a$ .

Оскільки задано закон руху ножа  $BC$ :  $S = 0,05 \cos 10\pi t$ , то прискорення  $a$  визначається як друга похідна від закону руху за часом:

$$a = \frac{d^2 S}{dt^2};$$

$$V = \frac{dS}{dt} = (-0,05 \cos 10\pi t)' = 0,05 \cdot 10\pi \sin 10\pi t = 0,5\pi \sin 10\pi t,$$

$$a = \frac{dV}{dt} = (0,5\pi \sin 10\pi t)' = 0,5 \cdot 10\pi^2 \cos 10\pi t = 5\pi^2 \cos 10\pi t.$$

Отже,

$$F = \frac{Q}{g} a = \frac{100}{9,81} (5\pi^2 \cos 10\pi t).$$

Урахуємо, що  $\cos 10\pi t = \frac{S}{0,05}$ , та одержимо:

$$F = \frac{100}{9,81} \frac{5}{0,05} \pi^2 S \approx 10^3 \pi^2 S.$$

**Відповідь:**  $F = 10^3 \pi^2 S$ .

### Задача № 6

Навантажена вагонетка масою  $m = 700$  кг опускається по канатній залізниці з нахилом  $\alpha = 15^\circ$  і має швидкість  $V = 1,6$  м/с (рис.1.6).

**Визначити** натяг каната при рівномірному опусканні і при гальмуванні вагонетки, якщо час гальмування  $t = 4$  с, загальний коефіцієнт опору руху  $f = 0,015$ . При гальмуванні вагонетка рухається рівноуповільнено.

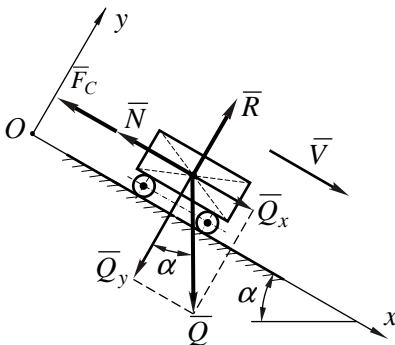


Рис. 1.6

**Розв'язок.** Зобразимо вагонетку у довільному положенні. Покажемо сили, які діють на неї: силу тяжіння  $\bar{Q}$ , нормальну реакцію залізниці  $\bar{R}$ , натяг канату  $\bar{N}$  і силу опору  $\bar{F}_C$ .

Вибираємо декартову систему координат: вісь  $x$  спрямуємо паралельно дорозі у бік руху; вісь  $y$  - вгору перпендикулярно дорозі. Запишемо векторне рівняння руху вагонетки у

формі другого закону Ньютона:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{Q} + \bar{R} + \bar{N} + \bar{F}_C.$$

Проектуємо векторне рівняння руху на осі координат:

$$ma_x = Q \sin 15^\circ - N - F_C; \quad (1)$$

$$ma_y = -Q \cos 15^\circ + R. \quad (2)$$

Оскільки  $y = const$  весь час руху вагонетки, то  $a_y = 0$ , і з рівняння (2) легко знаходимо величину нормальної реакції:

$$R = Q \cos 15^\circ = mg \cdot \cos 15^\circ = 700 \cdot 9,81 \cdot 0,966 = 6,63 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

Тоді загальна сила опору руху складає:

$$F_C = f \cdot R = 0,015 \cdot 6,63 \cdot 10^3 = 97,8 \text{ Н}.$$

Для визначення натягу  $\bar{N}$  використаємо рівняння (1)

$$N = Q \sin 15^\circ - F_C - ma_x.$$

При рівномірному опусканні  $a_x = 0$  і  $N_1$  складе:

$$\begin{aligned} N_1 &= mg \sin 15^\circ - F_C = 700 \cdot 9,81 \cdot 0,259 - 97,8 = \\ &= 1681 \text{ Н} = 1,681 \cdot 10^3 \text{ Н}. \end{aligned}$$

При рівноуповільненому гальмуванні

$$a_x = \frac{V_2 - V_1}{t},$$

де  $V_1 = 1,6 \text{ м/с}$  – початкова швидкість;

$V_2 = 0$  – кінцева швидкість.

Таким чином

$$a_x = \frac{0 - 1,6}{4} = -0,4 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$N_2 = N_1 + 700 \cdot 0,4 = 1681 + 280 = 1961 \text{ Н} = 1,961 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $N_1 = 1,681 \text{ кН}$ ,  $N_2 = 1,961 \text{ кН}$ .

З отриманих результатів витікає, що при гальмуванні навантаження на канат збільшується порівняно з навантаженням при рівномірному русі.

### Задача №7

Вагон вагою  $\bar{P}$  скочується по колії, яку нахилено до горизонту під кутом  $\alpha$ .

**Визначити** силу гальмування вагона  $\bar{F}$ , яка викликається тертям коліс по рейках, припускаючи, що рух вагона відбувається зі сталим прискоренням, а також те значення кута  $\alpha$ , при якому вагон буде скочуватися рівномірно.

**Розв'язок.** Зображаємо вагон у вигляді матеріальної точки у довільному положенні на похилій площині та показуємо сили, що на нього діють (рис.1.7):  $\bar{P}$  – сила тяжіння вагону;  $\bar{N}$  – нормальна реакція рейок;  $\bar{F}$  – сила тертя.

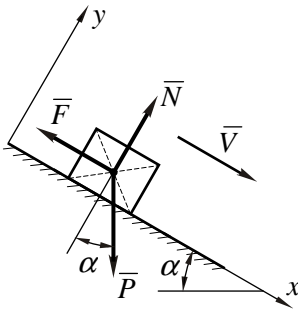


Рис. 1.7

Вибираємо декартову систему координат, причому вісь  $x$  направимо паралельно рейкам у бік руху вагона; а вісь  $y$  – перпендикулярно рейкам.

Запишемо рівняння руху вагона у векторній формі:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{N} + \bar{F}. \quad (1)$$

та спроекуємо його на осі вибраної системи координат:

$$ma_x = P \sin \alpha - F, \quad (2)$$

$$ma_y = N - P \cos \alpha. \quad (3)$$

З рівняння (2) визначимо силу гальмування вагона:

$$F = P \sin \alpha - ma = P \sin \alpha - \frac{P}{g} a = P \left( \sin \alpha - \frac{a}{g} \right).$$



За умовами задачі вагон рухається з прискоренням  $a = \text{const}$ , яке направлено вздовж осі  $Ox$ , тобто  $a_y = 0$ .

Якщо підставимо у рівняння (3)  $a_y = 0$ , то отримаємо:

$$N = P \cos \alpha.$$

Визначимо значення кута  $\alpha$ , при якому вагон буде скочуватися рівномірно. Оскільки

$$F = f \cdot N,$$

то

$$F = f \cdot P \cos \alpha,$$

де  $f$  – коефіцієнт тертя.

Звідки одержимо

$$f = \frac{F}{P \cos \alpha} = \frac{P(\sin \alpha - a/g)}{P \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{g}. \quad (4)$$

З цього рівняння витікає, що, змінюючи кут  $\alpha$ , можна знайти таке значення кута, при якому  $a = 0$ . Якщо в рівнянні (4) присвоїти  $a = 0$ , то

$$f = \operatorname{tg} \alpha.$$

Оскільки відомо, що коефіцієнт тертя дорівнює тангенсу кута тертя  $\varphi$ , то

$$\alpha = \varphi.$$

Таким чином, при куті нахилу рейок до горизонту, що дорівнює куту тертя  $\varphi$ , вагон буде скочуватися рівномірно.

**Відповідь:**  $F = P(\sin \alpha - \frac{a}{g}), \quad \alpha = \varphi.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 26.2, 26.8, 26.10, 26.20, 26.24 [2].

## Тема 1. ПРЯМА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ ТОЧКИ (продовження)

### ЗАНЯТТЯ №2

При вирішенні задач, пов'язаних з рухом точки по криволінійній траєкторії, якщо траєкторія відома, зручно розглядати рух точки у природній системі координат  $M\tau nb$  (рис.1.8):

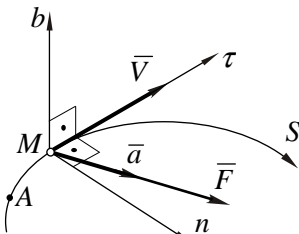


Рис. 1.8

$$ma_{\tau} = m \frac{dV}{dt} = \sum F_{k\tau}; \quad (1.6)$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{\rho} = \sum F_{kn}; \quad (1.7)$$

$$0 = \sum F_{kb}, \quad (1.8)$$

де  $V$  – модуль швидкості точки,  
 $\rho$  – радіус кривизни траєкторії у заданому положенні точки.

В рівняннях (1.6) ч (1.8)  $\sum F_{k\tau}$ ,  $\sum F_{kn}$ ,  $\sum F_{kb}$  суми проєкцій сил, що діють на точку, на напрямки осей: дотичної ( $M\tau$ ), нормальної ( $Mn$ ) і бінормальної ( $Mb$ ) до траєкторії в заданому положенні точки.

Порядок розв'язування прямої задачі динаміки точки у випадку використання рівнянь (1.6) ч (1.8) співпадає з рекомендаціями пунктів 1 ч 6 заняття №1.

Якщо задано рівняння руху матеріальної точки по траєкторії у вигляді  $S = f(t)$ , то для знаходження рівнодіючої прикладених до цієї точки сил, необхідно спочатку знайти проєкції  $a_{\tau}$  та  $a_n$  повного прискорення  $\bar{a}$  точки:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}, \quad a_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad (1.9)$$

Далі, з рівнянь (1.6), (1.7) знаходимо значення дотичної та нормальної проекції сили  $\vec{F}$  :

$$F_{\tau} = ma_{\tau}, \quad F_n = ma_n. \quad (1.10)$$

Модуль прикладеної до матеріальної точки сили, при природному способі означення руху, буде дорівнювати

$$F = \sqrt{F_{\tau}^2 + F_n^2} = m\sqrt{a_{\tau}^2 + a_n^2}. \quad (1.11)$$

### Задача №1

Матеріальна точка масою  $m=1,2$  кг рухається по колу з радіусом  $r=0,6$  м згідно закону  $S=2,4t$ .

**Визначити** модуль  $R$  рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки.

**Розв'язок.** У задачі рух матеріальної точки задано природним способом, тому для визначення рівнодіючої сил скористаємося залежностями (1.6) і (1.7):

$$R_{\tau} = ma_{\tau} = m \frac{dV}{dt};$$

$$R_n = ma_n = m \frac{V^2}{r}.$$

Визначимо дотичне і нормальне прискорення матеріальної точки:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} \Rightarrow V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(2,4t)}{dt} = 2,4 \text{ м/с} \Rightarrow a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = 0;$$

$$a_n = \frac{V^2}{r} = \frac{2,4^2}{0,6} = 9,6 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки  $a_{\tau} = 0$ , то проекція  $R_{\tau}$  рівнодіючої на дотичну вісь дорівнює нулю.

Знаходимо нормальну складову рівнодіючої сил:

$$R_n = m \frac{V^2}{r} = ma_n = 1,2 \cdot 9,6 = 11,5 \text{ Н}.$$

Модуль рівнодіючої визначимо з виразу (1.11):

$$R = \sqrt{R_n^2 + R_\tau^2} = \sqrt{(11,5)^2 + 0} = 11,5 \text{ Н.}$$

Таким чином, заданий рух матеріальної точки відбувається під дією сили, сталої за модулем і спрямованої вздовж радіуса до центра кола.

**Відповідь:**  $R = 11,5 \text{ Н.}$

### Задача №2

Матеріальна точка масою  $m = 18 \text{ кг}$  рухається по колу з радіусом  $R = 8 \text{ м}$  згідно закону  $S = e^{0,3t}$ .

**Визначити** проєкцію  $F_\tau$  рівнодіючої сил, що прикладені до матеріальної точки, на дотичну до траєкторії в момент часу  $t = 10 \text{ с}$ .

**Розв'язок.** Для визначення проєкції  $F_\tau$  скористаємося рівнянням (1.6):

$$F_\tau = ma_\tau = m \frac{dV}{dt}. \quad (1)$$

Спочатку знайдемо значення швидкості матеріальної точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{0,3t}) = 0,3e^{0,3t}.$$

При  $t = 10 \text{ с}$ :  $V = 0,3 \cdot e^{0,3 \cdot 10} = 0,3 \cdot 2,72^3 = 6,04 \text{ м/с}$ .

Визначаємо величину дотичного прискорення

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{0,3t}) = 0,09e^{0,3t},$$

при  $t = 10 \text{ с}$ :  $a_\tau = 0,09 \cdot e^{0,3 \cdot 10} = 0,09 \cdot 2,72^3 = 1,81 \text{ м/с}^2$ .

Підставивши в рівняння (1) значення  $a_\tau$  і  $m$ , одержимо:

$$F_\tau = ma_\tau = 18 \cdot 1,8 = 32,4 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $F_\tau = 32,4 \text{ Н.}$

### Задача №3

Матеріальна точка масою  $m = 22 \text{ кг}$  рухається по колу з радіусом  $R = 10 \text{ м}$  згідно закону  $S = 0,3t^2$ .

**Визначити** модуль  $F$  рівнодіючої сил, що діють на точку, у момент часу  $t = 5 \text{ с}$ .

**Розв'язок.** Оскільки рух матеріальної точки задано природним способом, то модуль рівнодіючої сил, прикладених до точки, визначається за залежностями (1.10) і (1.11):

$$F_\tau = ma_\tau; \quad F_n = ma_n;$$

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2}.$$

Величини дотичного і нормального прискорення матеріальної точки визначаються за рівняннями (1.9):

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}; \quad a_n = \frac{V^2}{R}.$$

Враховуючи, що швидкість точки

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(0,3t^2)}{dt} = 0,6t,$$

то дотичне прискорення точки дорівнює:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,6t) = 0,6 \text{ м/с}^2.$$

Оскільки в момент часу  $t = 5 \text{ с}$  швидкість точки:

$$V = 0,6t = 0,6 \cdot 5 = 3 \text{ м/с},$$

то нормальне прискорення точки складе:

$$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{3^2}{10} = 0,9 \text{ м/с}^2.$$

Визначаємо  $F_\tau$  і  $F_n$  за рівняннями (1.10):

$$F_\tau = m \cdot a_\tau = 22 \cdot 0,6 = 13,2 \text{ Н};$$

$$F_n = m \cdot a_n = 22 \cdot 0,9 = 19,8 \text{ Н}.$$

Тоді модуль рівнодіючої сил, що діють на матеріальну точку, дорівнює:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{13,2^2 + 19,8^2} = 23,8 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $F = 23,8 \text{ Н}$ .

#### Задача №4

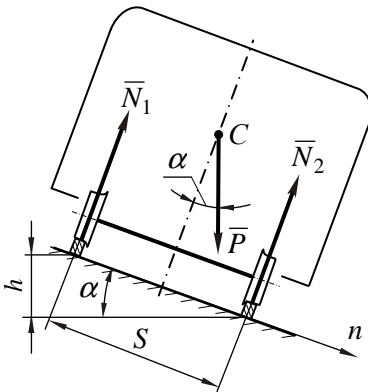


Рис. 1.9

На криволінійних ділянках залізничної колії зовнішню рейку піднімають вище над внутрішньою (рис.1.9). При русі поїзда на цій ділянці його швидкість  $V$  підтримують такою, щоб тиск вагона на рейки був направлений перпендикулярно залізничному полотну.

**Визначити** величину  $h$  підвищення зовнішньої рейки над внутрішньою при наступних даних: радіус закруглення

залізничної колії  $R = 400 \text{ м}$ , швидкість поїзда  $V = 10 \text{ м/с}$ , відстань між рейками  $S = 1,6 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** На вагон діють: сила тяжіння  $\vec{P}$ , яка спрямована вертикально вниз, та реакції рейок на колеса  $\vec{N}_1$  і  $\vec{N}_2$ , які направлені перпендикулярно до залізничного полотна.

Запишемо рівняння руху вагона у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{P} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2, \quad (1)$$

де  $\vec{a}$  – прискорення вагона.

Оскільки рух відбувається по криволінійній траєкторії, то вибираємо природну систему координат: вісь  $n$  спрямуємо за нормаллю до центра кривизни траєкторії, а вісь  $\tau$  – за дотичною у бік руху вагона. Бінормаль, вісь  $b$ , на рис. 1.9 не показано.

Проектуємо рівняння руху (1) на вісь  $n$ :

$$ma_n = P \sin \alpha; \quad \text{або} \quad m \frac{V^2}{R} = P \sin \alpha.$$

З рис. 1.8 видно, що  $\sin \alpha = h/S$ .

Отже,

$$\frac{mV^2}{R} = P \frac{h}{S} = mg \frac{h}{S} \Rightarrow \frac{V^2}{R} = g \frac{h}{S} \Rightarrow h = \frac{SV^2}{g \cdot R}.$$

Підставивши числові значення відомих величин, отримуємо:

$$h = \frac{1,6 \cdot 10^2}{9,81 \cdot 400} = 0,0408 \text{ м} = 4,08 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $h = 4,08 \text{ см}.$

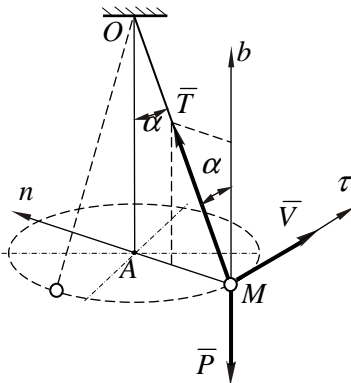


Рис. 1.10

### Задача № 5

Вантаж  $M$  вагою  $P = 1 \text{ Н}$ , який підвішений до нитки довжиною  $l = 0,3 \text{ м}$  у нерухомій точці  $O$ , являє собою конічний маятник (рис.1.10), тобто рухається по колу у горизонтальній площині, при цьому нитка з вертикаллю утворює кут  $\alpha = 60^\circ$ .

**Визначити** величину швидкості вантажу  $V$  і модуль сили натягу нитки  $T$ .

**Розв'язок.** Зобразимо вантаж  $M$  у будь якому положенні і покажемо сили, які на нього діють: силу тяжіння  $\vec{P}$ , яка спрямована вертикально вниз, і натяг нитки  $\vec{T}$ , який спрямовано до точки підвісу  $O$ .

Для розв'язування задачі вибираємо природну систему координат: вісь  $\tau$  спрямована по дотичній до кола в бік руху вантажу, вісь  $n$  – по нормалі до центру кривизни і вісь  $b$  – вертикально вгору.

Запишемо рівняння руху вантажу у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{P} + \vec{T}.$$

Проектуємо це векторне рівняння на осі координат:

$$ma_\tau = 0; \quad ma_n = T \sin 60^\circ; \quad ma_b = T \cos 60^\circ - P. \quad (1)$$

Модуль сили натягу нитки  $T$  знайдемо з третього із рівнянь (1), враховуючи, що  $a_b = 0$ :

$$0 = T \cos 60^\circ - P \Rightarrow T = \frac{P}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{0,5} = 2H.$$

З другого із рівнянь (1) знайдемо  $V$ , якщо врахувати, що

$$a_n = \frac{V^2}{R}; \quad m = \frac{P}{g}; \quad R = l \sin 60^\circ.$$

Тоді

$$\frac{P}{g} \frac{V^2}{l \sin 60^\circ} = T \sin 60^\circ.$$

Звідки

$$V = \sqrt{\frac{T \cdot g \cdot l \sin^2 60^\circ}{P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \cdot 0,3}{1}} \cdot 0,866 = 2,10 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V = 2,1 \text{ м/с}; T = 2H.$



## Задача №6

Матеріальна точка вагою  $G = 100H$  рухається по горизонтальній поверхні під дією сили  $\vec{F}$ . У період розгону точки шлях, який вона проходить, змінюється за законом  $S = 0,1t^3$  ( $t$  – у секундах,  $S$  – у метрах). Траєкторією руху точки на площині (рис.1.11) є коло з радіусом  $R = 100m$ .

**Визначити** модуль сили  $F$ , яка діє, в момент, коли модуль швидкості точки дорівнює  $V = 30$  м/с.

**Розв'язок.** Зобразимо точку  $M$  у будь-якому положенні на колі (рис.1.11). Покажемо сили, що діють на матеріальну точку: силу тяжіння  $\vec{G}$ ; реакцію поверхні  $\vec{N}$ , яка перпендикулярна до поверхні, та задану силу  $\vec{F}$ , яка лежить в площині руху точки і направлена в бік центра кривизни траєкторії.

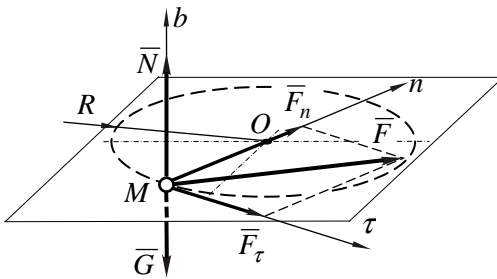


Рис. 1.11

З точкою  $M$  пов'яжемо природну систему координат. Вісь  $M\tau$  спрямуємо по дотичній до кола у бік руху, а вісь  $Mn$  – перпендикулярно до неї у бік центра кривизни кола.

Запишемо рівняння руху точки у вигляді другого закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{F} + \vec{G} + \vec{N}.$$

Спроектуємо це векторне рівняння на осі обраної системи координат:

$$ma_\tau = m \frac{dV}{dt} = F_\tau,$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{R} = F_n.$$

Оскільки закон руху відомий, то:

$$V = \dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,1t^3) = 0,3t^2,$$

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(0,3t^2) = 0,6t.$$

За умовами  $V = 30 \text{ м/с}$ . Знайдемо момент часу, коли ця умова виконується:

$$V = 0,3t^2 = 30 \Rightarrow t = \sqrt{100} = 10 \text{ с}.$$

Тоді:

$$a_\tau = 0,6t = 6 \text{ м/с}^2, \quad a_n = \frac{30^2}{100} = 9 \text{ м/с}^2.$$

Враховуючи, що маса точки дорівнює  $m = G/g$ , знаходимо:

$$F_\tau = ma_\tau = \frac{100}{9,81} \cdot 6 = 61,2 \text{ Н},$$

$$F_n = ma_n = \frac{100}{9,81} \cdot 9 = 91,8 \text{ Н}.$$

Визначаємо модуль шуканої сили:

$$F = \sqrt{F_\tau^2 + F_n^2} = \sqrt{61,2^2 + 91,8^2} = 110,1 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $F = 110,1 \text{ Н}$ .

### Задача №7

Радіус закруглення моста у точці  $A$  дорівнює  $r = 50 \text{ м}$  (рис.1.12).

**Визначити**, з якою силою автомобіль тисне на міст у точці  $A$ , якщо його маса  $m = 1000 \text{ кг}$ , а модуль швидкості руху  $V = 20 \text{ м/с}$ .

**Розв'язок.** Розглянемо автомобіль як матеріальну точку, оскільки його розмірами в порівнянні з розмірами моста можна знехтувати. Зо-

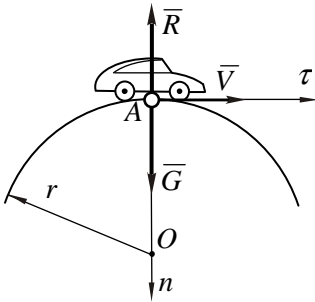


Рис. 1.12

бразимо автомобіль у точці  $A$  моста (рис.1.12) і покажемо сили, які діють на нього:  $\vec{G}$  – силу тяжіння автомобіля і  $\vec{R}$  – реакцію моста.

Оскільки автомобіль рухається по криволінійній траєкторії, то для розв'язування задачі скористуємося природною системою координат  $A\tau n$ .

Запишемо рівняння руху автомобіля у векторній формі:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{R}$$

і спроекуємо його на осі вибраної системи координат:

$$ma_\tau = 0 \text{ (оскільки } V = \text{const, то } a_\tau = 0), \quad (1)$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{r} = G - R. \quad (2)$$

Із рівняння (2) визначаємо реакцію моста  $R$  за модулем:

$$R = G - m \frac{V^2}{r} = mg - m \frac{V^2}{r} = m \left( g - \frac{V^2}{r} \right),$$

$$R = 1000 \left( 9,81 - \frac{20^2}{50} \right) = 1810 \text{ H.}$$

Сила тиску  $N$  автомобіля на міст дорівнює за модулем реакції моста, але спрямована донизу.

Оскільки вага автомобіля  $G$  дорівнює

$$G = mg = 1000 \cdot 9,81 = 9810 \text{ H,}$$

то, якщо міст опуклий, сила тиску автомобіля на нього зменшується порівняно з тим випадком, коли автомобіль рухається по горизонтальному мосту.

Поставимо додаткове питання: з якою швидкістю  $V_{\max}$  повинен рухатись автомобіль, щоб сила тиску автомобіля на міст  $\vec{R}$  дорівнювала нулю?

Оскільки  $\vec{R} = 0$ , то

$$0 = m \left( g - \frac{V_{\max}^2}{R} \right), \quad \text{або} \quad g - \frac{V_{\max}^2}{R} = 0.$$

Звідси

$$V_{\max} = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \cdot 50} = 22,2 \text{ м/с (80 км/год)}.$$

**Відповідь:**  $N = 1810 \text{ Н}$ .

### Задача №8

Камінь вагою  $G = 3\text{Н}$ , який прив'язано до нитки довжиною  $l = 1 \text{ м}$ , описує коло у вертикальній площині (рис.1.13).

**Визначити** найменше значення кутової швидкості обертання  $\omega$ , при якій нитка розірветься, якщо її опір розриву складає  $9 \text{ Н}$ .

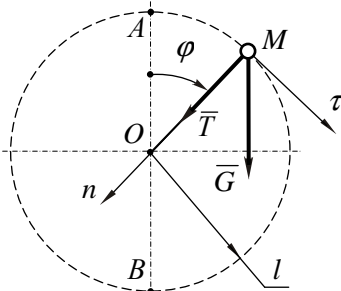


Рис. 1.13

**Розв'язок.** Зобразимо камінь  $M$  у будь якому положенні на дузі кола. Положення точки  $M$  визначається кутом  $\varphi$ , який відраховується від вертикалі  $OA$  у напрямку кутової швидкості  $\omega$ .

На камінь (точку  $M$ ) діють сила тяжіння  $\vec{G}$  та сила натягу нитки  $\vec{T}$ .

З точкою  $M$  пов'яжемо природну систему координат  $Mtn$  і запишемо рівняння руху точки  $M$  у векторній формі:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{T}.$$

Спроекуємо це рівняння на осі вибраної системи координат:

$$ma_{\tau} = G \sin \varphi; \quad (1)$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{\rho} = T + G \cos \varphi. \quad (2)$$

Зауважимо, що  $V = \omega l$ , а  $\rho = l$ . Тобто рівняння (2) перетворюється до вигляду:

$$m \frac{\omega^2 l^2}{l} = m\omega^2 l = T + G \cos \varphi .$$

Звідси

$$\omega = \sqrt{\frac{T + G \cos \varphi}{ml}} = \sqrt{\frac{g(T + G \cos \varphi)}{Gl}} . \quad (3)$$

Із рівняння (3) витікає, що при  $T = T_{\max} = 9 \text{ Н}$  кутова швидкість  $\omega$  є тільки функцією кута  $\varphi$ . Найменше значення  $\omega$ , коли нитка розривається, буде при  $\cos \varphi = -1$ , тобто, коли  $\varphi = 180^\circ$ , що відповідає положенню каменя у точці  $B$ . Таким чином:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81(9 - 3 \cdot 1)}{3 \cdot 1}} = 4,43 \text{ рад/с} .$$

**Відповідь:**  $\omega = 4,43 \text{ рад/с}$ .

### Задача №9

Трек для випробування автомобілів на кривих відрізках шляху має віражі, профіль яких (рис.1.14) у поперечному перетині є прямою, яка нахилена до горизонту так, що зовнішній край треку є вищим за внутрішній.

**Визначити**, з якими найменшою і найбільшою швидкостями можна їхати по віражу, що має радіус кривизни  $r$  і кут нахилу до горизонту  $\alpha$ ? Коефіцієнт тертя шин  $f$  об поверхню треку вважати відомим.

**Розв'язок.** На автомобіль, який рухається по віражу, діють: сила тяжіння  $\vec{G}$ , сила нормального тиску з боку поверхні віражу  $\vec{N}$  і сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , яка спрямована уздовж поверхні віражу у площині, яка перпендикулярна до напрямку швидкості. Виникнення сили тертя обумовлюється тертям коліс автомобіля об поверхню віражу.

Розглянемо рух центра ваги автомобіля (точка  $A$ ), вважаючи, що всі сили прикладені до цієї точки. Першим розглянемо випадок руху автомобіля, коли сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}} = 0$  (рис.1.14,а). З

точкою  $A$  пов'яжемо природну систему координат  $Anb$ : нормаль  $An$  спрямуємо до центра кривизни,  $Ab$  - перпендикулярно до  $An$ .

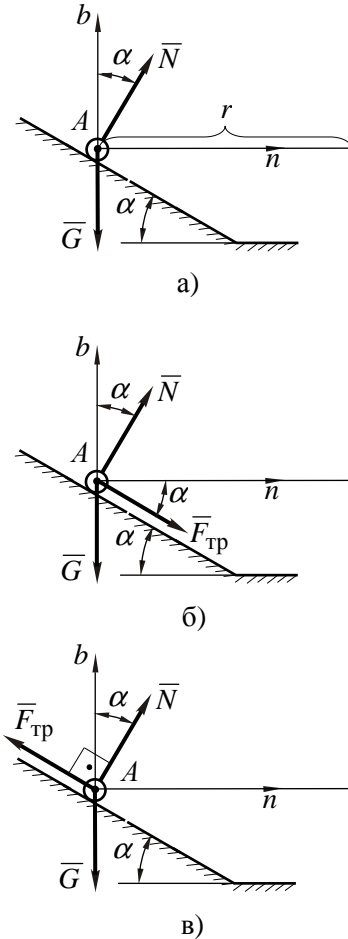


Рис. 1.14

Запишемо рівняння руху автомобіля у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{G} + \vec{N},$$

і спроекуємо це рівняння на осі координат  $Ab$  і  $An$ :

$$ma_b = 0 = N \cos \alpha - G; \quad (1)$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{r} = N \sin \alpha. \quad (2)$$

Із рівняння (1) знайдемо величину нормальної реакції  $N$ :

$$N = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Підставимо знайдене значення  $N$  у рівняння (2) і визначимо швидкість автомобіля, коли сила тертя об поверхню треку дорівнює нулю:

$$m \frac{V^2}{r} = \frac{G}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha \Rightarrow$$

$$V = \sqrt{g \cdot r \cdot \operatorname{tg} \alpha}. \quad (3)$$

При максимальній швидкості автомобіля  $V_{\text{max}}$  сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  спрямована до нижнього краю віражу (рис.1.14,б) і дорівнює  $F_{\text{тр}} = f \cdot N$ .

Векторне рівняння руху автомобіля у цьому випадку буде мати вигляд:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \quad (4)$$

Проектуємо рівняння (4) на осі  $Anb$ :

$$ma_b = 0 = N \cos \alpha - F_{\text{тр}} \sin \alpha - G; \quad (5)$$

$$ma_n = m \frac{V^2}{r} = N \sin \alpha + F_{\text{тр}} \cos \alpha. \quad (6)$$

Рівняння (5) перепишемо у вигляді:

$$N \cos \alpha - f \cdot N \sin \alpha = G,$$

звідки

$$N = \frac{G}{\cos \alpha - f \sin \alpha}. \quad (7)$$

Підставимо значення  $N$  у рівняння (6) і визначимо максимальне значення швидкості  $V_{\text{max}}$ :

$$m \frac{V_{\text{max}}^2}{r} = \frac{G \sin \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} + \frac{f \cdot G \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha};$$

$$V_{\text{max}}^2 = gr \frac{\sin \alpha + f \cos \alpha}{\cos \alpha - f \sin \alpha} = gr \frac{\text{tg} \alpha + f}{1 - f \cdot \text{tg} \alpha}.$$

Звідси:

$$V_{\text{max}} = \sqrt{gr \frac{\text{tg} \alpha + f}{1 - f \cdot \text{tg} \alpha}}.$$

Якщо швидкість автомобіля мінімальна  $V_{\text{min}}$  (рис.1.14,в), то тертя спрямоване до верхнього краю треку і проекції рівняння (4) на осі  $Anb$  будуть мати вигляд:

$$ma_b = 0 = N \cos \alpha + F_{\text{тр}} \sin \alpha - G; \quad (8)$$

$$ma_n = m \frac{V_{\text{min}}^2}{r} = N \sin \alpha - F_{\text{тр}} \cos \alpha. \quad (9)$$

Із рівнянь (8) та (9) одержуємо:

$$V_{\text{min}} = \sqrt{gr \frac{\text{tg} \alpha - f}{1 + f \cdot \text{tg} \alpha}}.$$

**Відповідь:**  $V_{\max} = \sqrt{gr \frac{\operatorname{tg}\alpha + f}{1 - f \cdot \operatorname{tg}\alpha}}$ ;  $V_{\min} = \sqrt{gr \frac{\operatorname{tg}\alpha - f}{1 + f \cdot \operatorname{tg}\alpha}}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 26,7; 26,8; 26,27; 26,31 [2].



## Тема 2. ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ

### ЗАНЯТТЯ №3

#### Зміст

- 2.1. Обернена задача динаміки.
- 2.2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки
- 2.3. Контрольні запитання
- 2.4. Приклади розв'язування задач

#### 2.1. Обернена задача динаміки.

**Обернена задача динаміки** формулюється наступним чином:

*знаючи сили, що діють на матеріальну точку, та її масу, треба одержати рівняння руху точки і кінематичні характеристики руху: координати, швидкість, прискорення.*

Для розв'язування оберненої задачі динаміки необхідно проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху, які відповідають вибраній системі відліку.

Якщо задача розв'язується у проекціях на осі системи декартових координат, то інтегруванню підлягає система диференціальних рівнянь руху:

$$m\ddot{x} = \sum_{k=1}^n F_{kx}, \quad m\ddot{y} = \sum_{k=1}^n F_{ky}, \quad m\ddot{z} = \sum_{k=1}^n F_{kz}. \quad (2.1)$$

У результаті інтегрування цієї системи визначається закон руху точки у декартових координатах.

Оскільки система (2.1) складається із 3-х диференціальних рівнянь другого порядку, то при її інтегруванні з'являються шість сталих:  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ , які визначаються за відомими характеристиками руху в певний момент часу або при певному положенні точки. У подальшому ці відомі характеристики руху будемо називати **початковими умовами руху**.

Оскільки положення точки у просторі визначається трьома координатами  $x, y, z$ , а швидкість точки – трьома проекціями

вектора швидкості  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  на координатні осі, то при русі точки у просторі початкові умови при  $t = t_0$  будуть мати вигляд:

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0; \quad (\text{положення точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0, \quad \dot{z} = \dot{z}_0; \quad (\text{швидкість точки}).$$

У результаті підстановки початкових умов руху у перші і другі інтеграли системи (2.1) утворюється система шести рівнянь для визначення шести невідомих  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$  сталих інтегрування.

При русі матеріальної точки у площині, наприклад  $xOy$ , будемо мати два диференціальних рівняння руху, а сталих інтегрування – чотири ( $C_1, C_2, C_3, C_4$ ). Кількість початкових умов в цьому випадку при  $t = t_0$  складає чотири:

$$x = x_0, \quad y = y_0; \quad (\text{положення точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad (\text{швидкість точки}).$$

Якщо матеріальна точка рухається прямолінійно, наприклад, уздовж осі  $Ox$ , то будемо мати тільки одне диференціальне рівняння руху і дві сталі інтегрування ( $C_1, C_2$ ), а початкові умови при  $t = t_0$  будуть мати вигляд:

$$x = x_0, \quad (\text{положення точки}),$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0. \quad (\text{швидкість точки}).$$

При русі матеріальної точки по криволінійній траєкторії розв'язувати обернену задачу динаміки часто простіше скориставшись рівняннями руху в природній формі:

$$ma_\tau = \sum F_{k\tau}; \quad ma_n = \sum F_{kn}; \quad 0 = \sum F_{kb}. \quad (2.2)$$

В системі (2.2)  $\sum F_{k\tau}$ ,  $\sum F_{kn}$ ,  $\sum F_{kb}$  – суми проєкцій всіх сил, що діють на матеріальну точку, у тому числі і реакції в'язей, на дотичну вісь  $\tau$ , нормальну вісь  $n$  і бінормальну вісь  $b$  природної системи координат.

Початковими умовами руху у цьому випадку при  $t = t_0$  є значення дугової координати  $S(t_0) = S_0$  і початкової швидкості  $V(t_0) = V_0$ .

Необхідно зауважити, що початкова швидкість в початкових умовах, враховує вплив на рух матеріальної точки тих сил, які діяли на точку до початкового моменту часу.

## 2.2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки

Обернену задачу динаміки матеріальної точки рекомендується розв'язувати у наступному порядку:

1. Зобразити матеріальну точку у поточному положенні.
2. Показати активні сили і реакції в'язей, що прикладені до матеріальної точки.
3. Обрати систему координат.
4. Записати початкові умови руху матеріальної точки.
5. Записати рівняння руху у векторній формі.
6. Спроектувати рівняння руху на осі обраної системи координат (скласти диференціальні рівняння руху матеріальної точки).
7. Проінтегрувати систему диференціальних рівнянь руху і, скориставшись початковими умовами руху, визначити сталі інтегрування.
8. Визначити величини, які треба відшукати за умовою задачі.

**Зауваження.** У випадку руху вільної матеріальної точки зручно розв'язувати задачу користуючись декартовою системою координат. При криволінійному ж русі невідомої матеріальної точки простіше розв'язувати задачу в проєкціях на осі природної системи координат. При цьому необхідно урахувати реакції в'язей.

Задачі, які розглядаються у цьому розділі, можна поділити на два основних типи:

1. Задачі, які відносяться до прямолінійного руху точки.
2. Задачі, які відносяться до криволінійного руху точки.

При розв'язуванні задач першого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є:

- сталими;
- залежать від часу;
- залежать від координат точки;
- залежать від швидкості точки.

При розв'язуванні задач другого типу будемо розглядати випадки, коли на матеріальну точку діють сили, які є:

- сталими;
- залежать від координат точки;
- залежать від швидкості точки.

### 2.3. Контрольні запитання

1. Які рівняння динаміки називаються природними рівняннями руху матеріальної точки?

2. Як записуються диференціальні рівняння руху в декартовій системі координат?

3. Які дві основні задачі динаміки точки розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь руху матеріальної точки?

4. Яка кількість початкових умов потрібна при розв'язуванні задачі про рух матеріальної точки в площині?

### 2.4. Приклади розв'язування задач

#### Задачі першого типу

##### Задача №1

Важке тіло ковзає по гладкій поверхні, яка нахилена під кутом  $\alpha = 30^\circ$  до горизонту.

**Визначити**, за який час  $T$  тіло пройде шлях  $S = 9,6$  м, якщо у початковий момент його швидкість дорівнювала  $V_0 = 2$  м/с.

**Розв'язок.** Зобразимо тіло у довільному положенні на похилій

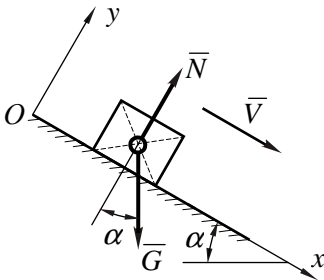


Рис. 2.1

площині (рис.2.1). Оскільки рух тіла по площині є поступальним, а при поступальному русі прискорення всіх точок тіла однакові, то рух такого тіла будемо розглядати як рух матеріальної точки (дане допущення буде справедливим і для наступних задач цієї теми).

Покажемо сили, що діють на тіло: силу тяжіння  $\vec{G}$  і нормальну реакцію похилої площини  $\vec{N}$ .

Вісь  $Ox$  спрямуємо у напрямку руху тіла.

Початкові умови при  $t = 0$  мають вигляд:

$$x_0 = 0; \quad V_{x0} = V_0 = 2 \text{ м/с}.$$

Запишемо рівняння руху тіла у векторній формі:

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}.$$

Проектуємо це рівняння на вісь  $Ox$  :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dV_x}{dt} = G \sin \alpha.$$

Враховуючи, що  $G = mg$ , одержимо

$$\frac{dV_x}{dt} = g \sin \alpha.$$

Знайдемо залежність швидкості  $V_x$  від часу  $t$ .

Для цього розділимо змінні в останньому рівнянні і проінтегруємо:

$$\begin{aligned} dV_x &= g \sin \alpha dt, \\ \int dV_x &= g \sin \alpha \int dt, \\ V_x &= gt \sin \alpha + C_1. \end{aligned}$$

Використовуючи початкові умови визначаємо сталу інтегрування  $C_1$ . Для цього підставляємо їх в останнє рівняння. Оскільки при  $t = 0$   $V_{x0} = 2 \text{ м/с}$ , то:

$$2 = g \sin \alpha \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 2.$$

Таким чином, рівняння для зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V_x = gt \sin \alpha + 2.$$

Знаходимо залежність координати  $x$  від часу:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = gt \sin \alpha + 2;$$

$$dx = gt \sin \alpha dt + 2dt;$$

$$\int dx = g \sin \alpha \int t dt + 2 \int dt;$$

$$x = g \frac{t^2}{2} \sin \alpha + 2t + C_2.$$

Сталу інтегрування  $C_2$  визначимо скориставшись початковими умовами, підставивши їх в останнє рівняння. Оскільки при  $t = 0$   $x_0 = 0$ , то:

$$0 = g \cdot 0 \cdot \sin \alpha + 2 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Остаточно, для координати  $x$  будемо мати залежність:

$$x = g \frac{t^2}{2} \sin \alpha + 2t.$$

Визначимо час  $T$ , при якому  $x = S = 9,6$  м:

$$9,6 = 9,81 \frac{T^2}{2} \sin 30^\circ + 2T,$$

або

$$2,45T^2 + 2T - 9,6 = 0.$$

Звідси:

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 2,45 \cdot 9,6}}{2,45} = \frac{-1 \pm 4,95}{2,45}.$$

Оскільки час може бути тільки додатним, то:

$$T = \frac{-1 + 4,95}{2,45} = 1,6 \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $T = 1,6$  с.

### Задача №2

Важке тіло піднімається по негладкій похилій площині, яка нахилена до горизонту під кутом  $\alpha = 30^\circ$ . У початковий момент швидкість тіла дорівнювала  $V_0 = 15 \text{ м/с}$ . Коефіцієнт тертя тіла об площину  $f = 0,1$ .

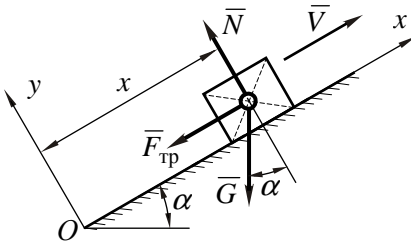


Рис. 2.2

**Визначити**, який шлях  $S$  пройде тіло до зупинки? За який час  $T$  тіло пройде цей шлях?

**Розв'язок.** Зобразимо тіло у вигляді матеріальної точки в довільному положенні (рис.2.2).

Покажемо сили, що діють на матеріальну точку: силу тяжіння  $\vec{G}$ , реакцію похилої площини  $\vec{N}$  і силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$ .

Вісь  $Ox$  спрямуємо вздовж похилої поверхні у напрямку руху, а початок відліку (точку  $O$ ) візьмемо у початковому положенні точки. Вісь  $Oy$  спрямуємо перпендикулярно до осі  $Ox$ . Початкові умови руху точки при  $t = 0$  будуть мати вигляд:

$$x = 0; V_{x0} = V_0 = 15 \text{ м/с}.$$

Запишемо рівняння руху точки у векторній формі:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{G} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N}. \quad (1)$$

Проектуємо векторне рівняння (1) на осі координат:

$$m\ddot{x} = -F_{\text{тр}} - G \sin \alpha; \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = N - G \cos \alpha. \quad (3)$$

Оскільки точка в напрямі осі  $Oy$  не рухається ( $\ddot{y} = 0$ ), то із рівняння (3) випливає, що нормальна складова реакції похилої поверхні дорівнює  $N = G \cos \alpha$ .

Підставивши в рівняння (2)  $m = G/g$ , отримаємо:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -F_{\text{тр}} - G \sin \alpha,$$

де  $F_{\text{тр}} = f \cdot N = f \cdot G \cos \alpha$ .

Тоді:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = -f \cdot G \cos \alpha - G \sin \alpha,$$

або

$$\ddot{x} = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$\frac{dV_x}{dt} = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$dV_x = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha) dt.$$

Після інтегрування цього рівняння одержимо:

$$V_x = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha)t + C_1. \quad (4)$$

Співвідношення (4) є першим інтегралом диференціального рівняння (2). Для визначення сталої інтегрування  $C_1$  підставимо в рівняння (4) початкову умову, а саме при  $t = 0$ ,  $V_{x0} = V_0$ .

Тоді:

$$V_0 = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = V_0,$$

та

$$V_x = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha)t + V_0. \quad (5)$$

Для визначення закону руху точки запишемо отримане рівняння наступним чином:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha)t + V_0.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$dx = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha)t dt + V_0 dt;$$

$$\int dx = -g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \int t dt + V_0 \int dt;$$



$$x = -\frac{g}{2}(f \cos \alpha + \sin \alpha)t^2 + V_0 t + C_2.$$

Стала інтегрування  $C_2$  визначиться після підстановки початкових умов (при  $t=0$   $x_0=0$ ) в останнє рівняння:

$$0 = -\frac{g}{2}(f \cos \alpha + \sin \alpha)0 + V_0 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, закон руху тіла має вигляд:

$$x = V_0 t - \frac{g}{2}(f \cos \alpha + \sin \alpha)t^2. \quad (6)$$

Отже, ми одержали закони зміни швидкості (5) та координати  $x$  (6) тіла в залежності від часу.

Визначимо час  $T$  руху тіла до повної зупинки, швидкість при цьому  $V_x = 0$ .

Таким чином, рівняння (5) буде мати вигляд:

$$0 = V_0 - g(f \cos \alpha + \sin \alpha)T,$$

звідкіля:

$$T = \frac{V_0}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

Через час  $T$ , згідно рівнянню (6), точка буде знаходитися від початку координат на відстані  $S$ , яка у нашому випадку чисельно дорівнює пройденому точкою шляху:

$$S = V_0 T - \frac{g}{2}(f \cos \alpha + \sin \alpha)T^2.$$

Підставивши вираз для  $T$ , отримаємо:

$$S = \frac{V_0 \cdot V_0}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{g(f \cos \alpha + \sin \alpha) \cdot V_0^2}{2g^2(f \cos \alpha + \sin \alpha)^2},$$

$$S = \frac{V_0^2}{g(f \cos \alpha + \sin \alpha)} - \frac{V_0^2}{2g(f \cos \alpha + \sin \alpha)},$$

$$S = \frac{V_0^2}{2g(f \cos \alpha + \sin \alpha)}.$$

З урахуванням числових значень отримаємо:

$$T = \frac{15}{9,81(0,1 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)} = 2,6 \text{ с},$$

$$S = \frac{15^2}{2 \cdot 9,81(0,1 \cos 30^\circ + \sin 30^\circ)} = 19,6 \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $T = 2,6 \text{ с}$ ,  $S = 19,6 \text{ м}$ .

### Задача №3

Під час розгону вантажівки (рис.2.3) із стану спокою на прямолінійній горизонтальній ділянці сила тяги  $\vec{F}_T$  перевищує силу опору  $\vec{F}_0$ , причому різниця між силою тяги і силою опору збільшується пропорційно часу, збільшуючись за кожну секунду на  $F_T - F_0 = 1,5 \text{ кН}$ , починаючи від початку руху автомобіля. Вага вантажівки  $P = 70 \text{ кН}$ .

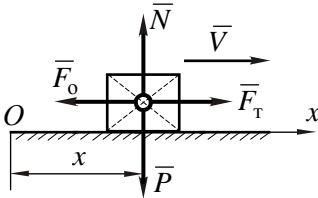


Рис. 2.3

**Визначити** швидкість автомобіля  $V$  через  $t = 10 \text{ с}$  після початку руху і пройдений шлях  $S$ .

**Розв'язок.** Проведемо вісь  $Ox$  за напрямком руху автомобіля, приймаючи за початок координат початкове положення автомобіля у момент зрушування з місця (рис.2.3).

Зобразимо автомобіль у довільному положенні і покажемо сили, які на нього діють: сила тяжіння  $\vec{P}$ ; нормальна реакція поверхні  $\vec{N}$ ; сила тяги  $\vec{F}_T$ ; сила опору  $\vec{F}_0$ .

Початкові умови при  $t = 0$  будуть мати вигляд:

$$x_0 = 0; \quad V_0 = 0.$$

Запишемо векторне рівняння руху автомобіля:

$$m\bar{a} = \bar{P} + \bar{F}_T + \bar{F}_0 + \bar{N}. \quad (1)$$

Спроектуємо рівняння (1) на вісь  $Ox$ :

$$ma = F_T - F_0.$$

Оскільки  $F_T - F_0 = 1,5 \cdot t$ , то  $ma = 1,5t$ , або

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 1,5t.$$

Враховуючи, що  $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt}$ , отримаємо:

$$m \cdot \frac{dV}{dt} = 1,5t.$$

Виконавши інтегрування цього рівняння, одержимо:

$$dV = \frac{1,5}{m} t dt; \quad \int dV = \frac{1,5}{m} \int t dt; \quad V = \frac{1,5}{m} \frac{t^2}{2} + C_1.$$

Сталу інтегрування  $C_1$  визначимо використовуючи початкові умови. Оскільки при  $t=0$   $V=V_0=0$ , то:

$$0 = \frac{1,5}{2m} \cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Таким чином, закон зміни швидкості автомобіля з часом має вигляд:

$$V = \frac{1,5}{2m} t^2. \quad (2)$$

Визначимо швидкість автомобіля через  $t=10$  с після початку руху:

$$V = \frac{1,5g}{2P} t^2 = \frac{1,5 \cdot 9,81}{2 \cdot 70} \cdot 10^2 = 10,51 \text{ м/с} = 37,8 \text{ км/год}.$$

Враховуючи, що  $V = \frac{dx}{dt}$ , одержимо наступне диференціальне рівняння руху автомобіля:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1,5}{2m} t^2.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$dx = \frac{1,5}{2m} t^2 dt; \quad \int dx = \frac{1,5}{2m} \int t^2 dt; \quad x = \frac{1,5}{2m} \cdot \frac{t^2}{3} + C_2.$$

Для визначення сталої інтегрування  $C_2$  скористаємося початковими умовами. Оскільки при  $t = 0$   $x = x_0 = 0$ , то:

$$0 = \frac{1,5}{6m} \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, закон зміни відстані  $x$  від часу має вигляд:

$$x = \frac{1,5}{6m} t^3.$$

Визначимо шлях, який проїде автомобіль за час  $t = 10$  с, враховуючи, що  $m = \frac{P}{g}$ :

$$S = \frac{1,5g}{6P} t^3 = \frac{1,5 \cdot 9,81}{6 \cdot 70} \cdot 10^3 = 35 \text{ м}.$$

**Відповідь:**  $V = 10,51$  м/с,  $S = 35$  м.

#### Задача №4

Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рухається на горизонтальній поверхні прямолінійно по осі  $Ox$  (рис.2.4). Точку відштовхує від нерухомого центра  $O$  сила  $\bar{P}$ , яка пропорційна масі  $m$  і відстані  $x$ , причому коефіцієнт пропорційності дорівнює  $k = 4$ .

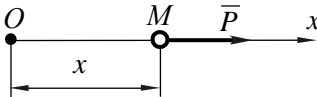


Рис. 2.4

**Визначити:** закон руху точки  $x = f(t)$ , якщо її початкове віддалення від центра  $O$  дорівнює  $x_0 = 5$  м, а початкова швидкість дорівнює  $V_0 = 2$  м/с.

**Розв'язок.** На точку  $M$  вздовж осі  $Ox$  діє одна сила – відштовхуюча сила  $\overline{P}$ .

Згідно до умови задачі  $P = ktx$  і диференціальне рівняння руху точки у проекції на вісь  $Ox$  буде мати вигляд:

$$ma_x = P_x = ktx, \quad \text{або} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = kx.$$

При  $k = 4$  маємо:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4x = 0. \quad (1)$$

Рівняння (1) – лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Для нього початкові умови при  $t = 0$  будуть мати вигляд:

$$x_0 = 5 \text{ м}, \quad V_0 = 2 \text{ м/с}.$$

Розв'язок диференціального рівняння будемо шукати у вигляді:

$$x = e^{\alpha t}. \quad (2)$$

Тоді перша похідна рівняння (2) буде:

$$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}. \quad (3)$$

Друга похідна:

$$\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}. \quad (4)$$

Якщо підставити (2) і (4) у рівняння (1), одержимо:

$$\alpha^2 e^{\alpha t} - 4e^{\alpha t} = 0, \quad \text{або} \quad e^{\alpha t}(\alpha^2 - 4) = 0.$$

Оскільки  $e^{\alpha t} \neq 0$ , то  $\alpha^2 - 4 = 0$ .

Розв'язками останнього рівняння є:

$$\alpha_{1,2} = \pm 2.$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (1) запишеться так:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (5)$$

Сталі інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  знайдемо із початкових умов руху. Для цього спочатку продиференціювавши останнє рівняння за часом  $t$  визначимо швидкість точки:

$$V = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}. \quad (6)$$

Підставивши в рівняння (5) початкову умову, що при  $t=0$   $x = x_0 = 5$  м, а в рівняння (6) – початкову умову, що при  $t=0$   $V = V_0 = 2$  м/с, отримаємо:

$$\begin{cases} 5 = C_1 e^0 + C_2 e^0; \\ 2 = 2C_1 e^0 - 2C_2 e^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = C_1 + C_2; \\ 2 = 2C_1 - 2C_2, \end{cases}$$

звідкіля:

$$C_1 = 3; \quad C_2 = 2.$$

Таким чином

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$$

**Відповідь:**  $x = f(t) = 3e^{2t} + 2e^{-2t}.$

### Задача №5

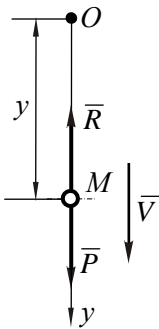


Рис. 2.5

Тіло  $M$  падає з деякої висоти без початкової швидкості (рис.2.5). На тіло діє сила опору повітря  $R = \mu V^2$ , де  $\mu$  – коефіцієнт опору, а  $V$  – швидкість тіла.

**Визначити** швидкість тіла як функцію часу  $V = f_1(t)$  і як функцію відстані  $y$ , що пролітає тіло  $V = f_2(y)$ .

**Розв’язування.** Зобразимо тіло  $M$  у довільному положенні на траєкторії і покажемо сили, які на нього діють: силу тяжіння  $\bar{P}$  і силу опору повітря  $\bar{R}$ .

Спрямуємо вісь  $Oy$  вертикально вниз і виберемо початок координат у початковому положенні тіла.

Запишемо векторне рівняння руху тіла:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{R}.$$

Спроекуємо векторне рівняння руху тіла на вісь  $Oy$ :

$$ma = P - R, \quad \text{або} \quad ma = P - \mu V^2 = mg \left( 1 - \frac{\mu}{mg} V^2 \right).$$

Позначимо  $\frac{\mu}{mg}$ , як  $\frac{1}{k^2}$  і, після скорочення на  $m$ , одержимо:

$$a = g \left( 1 - \frac{V^2}{k^2} \right) = \frac{g}{k^2} (k^2 - V^2).$$

Остаточо:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g}{k^2} (k^2 - V^2). \quad (1)$$

Початкові умови руху тіла при  $t=0$  будуть мати вигляд:

$$V = V_0 = 0; \quad y = y_0 = 0.$$

Рівняння (1) – диференціальне рівняння першого порядку зі змінними, які можна розділити. Розділивши змінні, будемо мати:

$$\frac{dV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2} dt.$$

Інтегруючи цей вираз, одержимо:

$$\int \frac{dV}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2} \int dt; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+V}{k-V} \right| = \frac{g}{k^2} t + C_1.$$

За початковими умовами (при  $t=0$   $V = V_0 = 0$ ) визначимо сталу інтегрування  $C_1$ :

$$\frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+0}{k-0} \right| = \frac{g}{k^2} \cdot 0 + C_1; \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2k} \ln 1 = C_1; \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

Тоді:

$$\frac{1}{2k} \ln \left| \frac{k+V}{k-V} \right| = \frac{g}{k^2} t \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{k+V}{k-V} \right| = \frac{2g}{k} t,$$

або

$$\frac{k+V}{k-V} = e^{(2g/k)t}. \quad (2)$$

Розв'язавши рівняння (2) відносно швидкості  $V$ , знаходимо:

$$\begin{aligned} k+V &= (k-V)e^{(2g/k)t}; \\ k+V &= ke^{(2g/k)t} - Ve^{(2g/k)t}; \\ V+Ve^{(2g/k)t} &= ke^{(2g/k)t} - k; \\ V[1+e^{(2g/k)t}] &= k[e^{(2g/k)t} - 1]. \end{aligned}$$

Остаточно для залежності швидкості тіла від часу  $V = f_1(t)$  одержимо:

$$V = k \frac{e^{(2g/k)t} - 1}{e^{(2g/k)t} + 1}. \quad (3)$$

Щоб знайти швидкість тіла, як функцію від пройденної відстані  $y$ , виключимо із диференціального рівняння (1) змінну  $t$ , для чого похідну від швидкості за часом подамо у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = V \frac{dV}{dy}. \quad (4)$$

Після підстановки в (1) одержимо диференціальне рівняння зі змінними, які можна розділити:

$$V \frac{dV}{dy} = \frac{g}{k^2} (k^2 - V^2). \quad (5)$$

Розділяємо змінні і інтегруємо:

$$\begin{aligned} \frac{VdV}{k^2 - V^2} &= \frac{g}{k^2} dy; \\ \int \frac{VdV}{k^2 - V^2} &= \frac{g}{k^2} \int dy; \end{aligned}$$



$$-\frac{1}{2} \int \frac{d(k^2 - V^2)}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2} \int dy;$$

$$-\frac{1}{2} \ln(k^2 - V^2) = \frac{g}{k^2} y + C_2. \quad (6)$$

Для визначення  $C_2$  скористаємося початковими умовами, а саме тим, що при  $y = y_0 = 0$   $V = V_0 = 0$ :

$$-\frac{1}{2} \ln(k^2 - 0) = \frac{g}{k^2} \cdot 0 + C_2; \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \ln k^2.$$

Тоді рівняння (6) буде мати вигляд:

$$-\frac{1}{2} \ln(k^2 - V^2) = \frac{g}{k^2} y - \frac{1}{2} \ln k^2;$$

$$\frac{1}{2} \ln k^2 - \frac{1}{2} \ln(k^2 - V^2) = \frac{g}{k^2} y;$$

$$\frac{1}{2} \ln \frac{k^2}{k^2 - V^2} = \frac{g}{k^2} y;$$

$$\ln \frac{k^2}{k^2 - V^2} = \frac{2g}{k^2} y. \quad (7)$$

Потенціюємо рівняння (7) і знаходимо швидкість  $V$  тіла як функцію відстані  $y$ :

$$\frac{k^2}{k^2 - V^2} = e^{(2g/k^2)y};$$

$$\frac{k^2}{e^{(2g/k^2)y}} = k^2 - V^2;$$

$$V^2 = k^2 - \frac{k^2}{e^{(2g/k^2)y}};$$

$$V = k \sqrt{1 - \frac{1}{e^{(2g/k^2)y}}},$$

$$V = k\sqrt{1 - e^{-(2g/k^2)y}}.$$

**Відповідь:**  $V = k \frac{e^{(2g/k)t} - 1}{e^{(2g/k)t} + 1}; \quad V = k\sqrt{1 - e^{-(2g/k^2)y}}.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 26.2; 27.5; 27.8; 27.27; 27.31; 27.32 [2].

## Тема 2. ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДИНАМІКИ (продовження)

### ЗАНЯТТЯ № 4

На цьому занятті розглядаються обернені задачі, які відносяться до криволінійного руху точки.

У випадках, коли траєкторія матеріальної точки невідома, рекомендується користуватись рівняннями руху точки у декартовій системі координат.

У випадку, коли траєкторію матеріальної точки задано, рекомендується розв'язувати задачу у проєкціях на осі природної системи координат.

#### Задача №1

Матеріальна точка масою  $m = 0,2 \text{ кг}$ , яка лежить на горизонтальній поверхні стола, прив'язана до нерухомої точки  $O$  ниткою довжиною  $OM = l = 0,35 \text{ м}$ . Точці перпендикулярно до

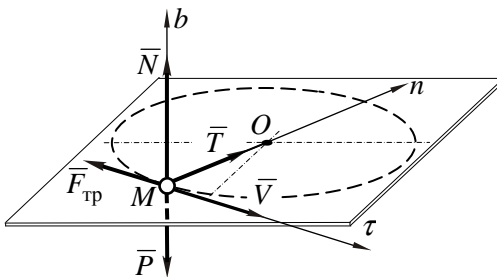


РИС. 2.6

натягнутої нитки була надана початкова швидкість  $V_0 = 4,9 \text{ м/с}$ , у наслідок чого точка почала описувати на столі коло радіусом  $OM$  (рис.2.6).

**Визначити** швидкість точки  $V$  і силу

натягу нитки  $T$  через  $1 \text{ с}$  після початку руху, якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,25$ .

**Розв'язок.** Зобразимо точку  $M$  у довільному положенні на траєкторії і покажемо сили, що діють на неї:

$\bar{P}$  – сила тяжіння точки;

$\bar{T}$  – натяг нитки, направлений до точки  $O$  закріплення нитки;

$\vec{F}_{\text{тр}}$  – сила тертя точки об поверхню стола, яка направлена у сторону, протилежну швидкості точки  $\vec{V}$ ;

$\vec{N}$  – нормальна реакція поверхні стола.

Оскільки траєкторія точки відома, то пов'яжемо з точкою  $M$  (рис.2.6) природну систему координат  $M\tau nb$ .

Рівняння руху точки  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{P} + \vec{F}_{\text{тр}} + \vec{N} + \vec{T}. \quad (1)$$

Спроекуємо рівняння (1) на осі обраної системи координат:

$$ma_{\tau} = -F_{\text{тр}}; \quad (2)$$

$$ma_n = T; \quad (3)$$

$$ma_b = N - P. \quad (4)$$

Оскільки бінормальне прискорення завжди дорівнює нулю  $a_b = 0$ , то з рівняння (4) витікає:

$$N = P = mg.$$

Враховуючи, що  $F_{\text{тр}} = fN$  і  $a_{\tau} = \frac{dV}{dt}$ , рівняння (2) набуде вигляду:

$$m \frac{dV}{dt} = -fN \Rightarrow m \frac{dV}{dt} = -fgm \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -fg.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, отримаємо:

$$dV = -fg dt \Rightarrow \int dV = -fg \int dt \Rightarrow V = -fg \cdot t + C.$$

Оскільки при  $t = 0$   $V = V_0$ , то:

$$V_0 = -fg \cdot 0 + C \Rightarrow C = V_0.$$

Таким чином, закон зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V = V_0 - fgt.$$

При  $t = 1$  с, швидкість точки  $M$  буде дорівнювати:

$$V = 4,9 - 0,25 \cdot 9,81 \cdot 1 = 2,45 \text{ м/с}.$$

Враховуючи, що  $a_n = \frac{V^2}{l}$ , з рівняння (3) знайдемо натяг нитки  $T$ :

$$T = m \frac{V^2}{l} = \frac{0,2 \cdot 2,45^2}{0,35} = 3,43 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $V = 2,45 \text{ м/с}$ ,  $T = 3,43 \text{ Н}$ .

### Задача № 2

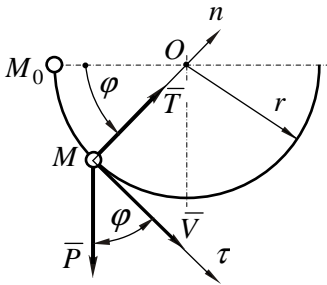


РИС. 2.7

Точка  $M$ , маса якої  $m$ , рухається під дією сили тяжіння по гладенькій внутрішній поверхні жолоба (рис.2.7). Поверхня жолоба являє собою частину бокової поверхні циліндра радіусом  $r$ . У початковий момент часу точка знаходиться в положенні  $M_0$ , а її швидкість дорівнює нулю.

**Визначити** швидкість  $V$  точки  $M$  і реакцію  $T$  поверхні жолоба в положенні, коли центральний кут  $\angle M_0OM = 60^\circ$ .

**Розв'язок.** Зобразимо точку  $M$  у довільному положенні на траєкторії, якою є внутрішня поверхня жолоба. Положення точки визначається кутом  $\varphi = \angle M_0OM$ .

Покажемо сили, які діють на точку  $M$ :  $\bar{P}$  – сила тяжіння точки;  $\bar{T}$  – реакція внутрішньої поверхні жолоба, яка спрямована по радіусу до центра кривини  $O$ .

Оскільки траєкторія точки відома (дуга з радіусом  $r$ ), то зв'яжемо з точкою  $M$  природну систему координат  $M\tau n$ .

Рівняння руху точки  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{T}. \quad (1)$$

Спроекуємо векторне рівняння (1) на координатні осі:

$$ma_\tau = P \cos \varphi = mg \cos \varphi$$

тобто

$$a_\tau = g \cos \varphi \Rightarrow \frac{dV}{dt} = g \cos \varphi; \quad (2)$$

$$ma_n = T - P \sin \varphi \Rightarrow m \frac{V^2}{r} = T - mg \sin \varphi. \quad (3)$$

У рівняннях (2) і (3) три змінні величини:  $V$ ,  $t$ ,  $\varphi$ . При розв'язуванні цих рівнянь необхідно одну зі змінних виразити через інші. Оскільки в умові задачі не вказаний час руху точки, а задається кут зміни положення точки, то виразимо в рівнянні (2) змінну  $t$  через змінну  $\varphi$ :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dV}{d\varphi} \omega = g \cos \varphi.$$

Оскільки  $\omega = V/r$ , то:

$$\frac{dV}{d\varphi} \cdot \frac{V}{r} = g \cos \varphi.$$

Розділимо змінні в останньому рівнянні і проінтегруємо:

$$VdV = gr \cos \varphi d\varphi \Rightarrow \int VdV = gr \int \cos \varphi \cdot d\varphi \Rightarrow$$

$$\frac{V^2}{2} = gr \sin \varphi + C.$$

Оскільки при  $t=0$  (коли точка знаходиться в положенні  $M_0$ )  $\varphi=0$  і  $V_0=0$ , то:

$$\frac{V_0^2}{2} = 0 = gr \sin 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Таким чином, закон зміни швидкості матеріальної точки буде мати вигляд:

$$V = \sqrt{2gr \sin \varphi}.$$

В положенні, коли  $\varphi = 60^\circ$ , швидкість точки  $M$  дорівнює:

$$V = \sqrt{2gr \sin \frac{\pi}{3}} = \sqrt{2gr \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{gr}.$$

Після визначення швидкості точки  $M$  з рівняння (3) знаходимо нормальну реакцію внутрішньої поверхні циліндра:

$$T = \frac{mV^2}{r} + mg \sin \varphi = m \left( \frac{V^2}{r} + g \sin \varphi \right).$$

При  $\varphi = \pi/3$  та  $V^2/r = g\sqrt{3}$ , одержимо:

$$T = m \left( g\sqrt{3} + g \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg.$$

**Відповідь** :  $V = \sqrt[4]{3} \sqrt{gr}$  ;  $T = \frac{3\sqrt{3}}{2} mg$  .

### Задача № 3

Матеріальна точка масою  $m$  рухається під дією сили  $\vec{F}$ , що направлена від точки  $M$  до деякого нерухомого центра  $O$ .

Модуль сили пропорційний відстані  $r = OM$  і дорівнює  $F = k^2 mr$ . У початковий момент точка знаходилась на відстані  $a$  від центра  $O$  і мала швидкість  $\vec{V}_0$ , яка була направлена перпендикулярно до прямої, що з'єднувала початкове положення точки  $M_0$  з центром  $O$  (рис.2.8).

**Визначити** рівняння руху матеріальної точки та її траєкторію. Силою тяжіння знехтувати.

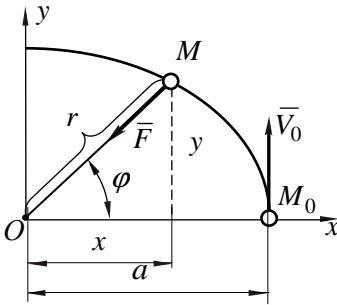


РИС. 2.8

**Розв'язок.** Оскільки траєкторія точки  $M$  невідома, то закон її руху будемо визначати в декартовій системі координат. Для цього візьмемо у якості початку координат центр  $O$ , вісь  $Ox$  проведемо через початкове положення точки, а вісь  $Oy$  спрямуємо в бік початкової швидкості  $\vec{V}_0$ .

Зобразимо матеріальну точку  $M$  у деякий момент часу в положенні, яке визначається координатами  $x, y$ , або радіусом  $r$  і кутом  $\varphi$ .

Початковими умовами руху точки при  $t=0$  будуть:

$$\begin{aligned} x_0 &= a; & y_0 &= 0; \\ \dot{x}_0 &= 0; & \dot{y}_0 &= V_0. \end{aligned}$$

Оскільки точка  $M$  у момент часу  $t$  знаходиться від початку координат на відстані  $r$  (рис.2.8), то на неї діє сила  $F = k^2mr$ , яка напрямлена до центра  $O$ .

Рівняння руху точки  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_k = \vec{F}.$$

Спроекуємо це рівняння на осі  $Ox$  і  $Oy$ :

$$ma_x = -F \cos \varphi \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mr \cos \varphi;$$

$$ma_y = -F \sin \varphi \Rightarrow m \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2mr \sin \varphi.$$

Скорочуючи на масу  $m$  та ураховуючи, що  $r \cos \varphi = x$ ,  $r \sin \varphi = y$ , одержимо диференціальні рівняння руху:



$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} = -k^2 x; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} = -k^2 y; \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0; \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Диференціальні рівняння системи (1) є лінійними, однорідними зі сталими коефіцієнтами.

Спочатку розв'яжемо перше диференціальне рівняння системи (1).

Розв'язок рівняння будемо шукати у вигляді:

$$x = e^{nt}.$$

Після підстановки отримаємо наступне характеристичне рівняння:

$$n^2 e^{nt} + k^2 e^{nt} = 0 \Rightarrow e^{nt} (n^2 + k^2) = 0 \Rightarrow n^2 + k^2 = 0,$$

корені якого є уявними:

$$n_{1,2} = \pm i k,$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця.

Таким чином, розв'язок першого диференціального рівняння запишеться у вигляді:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (2)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – довільні сталі.

Швидкість точки  $M$  вздовж осі  $Ox$  дорівнює:

$$V_x = \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (3)$$

Для визначення  $C_1$  і  $C_2$  скористаємося початковими умовами. Оскільки при  $t = 0$ :

$$x = x_0 = a; \quad V_{x_0} = \dot{x}_0 = 0,$$

то з рівнянь (2) і (3) отримаємо:

$$x_0 = a = C_1 \cos(k \cdot 0) + C_2 \sin(k \cdot 0) \Rightarrow C_1 = a;$$

$$V_{x_0} = 0 = -C_1 \sin(k \cdot 0) + C_2 k \cos(k \cdot 0) \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким чином, рівняння руху точки  $M$  у напрямку осі  $Ox$  має вигляд:

$$x = a \cos kt. \quad (4)$$

Аналогічно, для другого диференціального рівняння системи (1) одержимо:

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \quad (5)$$

$$V_y = \dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt, \quad (6)$$

де  $C_3$  і  $C_4$  – довільні сталі.

Для визначення довільних сталих  $C_3$  і  $C_4$  скористаємося тим, що при  $t=0$ :  $y = y_0 = 0$ ;  $V_{y0} = \dot{y}_0 = V_0$ .

Тоді, з рівнянь (5) та (6) випливає:

$$V_{y0} = V_0 = -0 \cdot C_3 k \sin(k \cdot 0) + C_4 k \cos(k \cdot 0) \Rightarrow C_4 = V_0 / k;$$

$$y_0 = 0 = C_3 \cos(k \cdot 0) + C_4 \cdot \sin(k \cdot 0) \Rightarrow C_3 = 0.$$

Таким чином, рівняння руху точки  $M$  у напрямку осі  $Oy$  має вигляд:

$$y = \frac{V_0}{k} \sin kt. \quad (7)$$

Визначимо траєкторію точки  $M$ . Для цього виключимо параметр  $t$  з рівнянь (4) і (7) та знайдемо функціональну залежність між координатами  $x$  і  $y$ . Спочатку рівняння (4) і

$$(7) \text{ приведемо до вигляду: } \frac{x}{a} = \cos kt; \quad \frac{k}{V_0} y = \sin kt.$$

Після чого піднесемо до квадратів ліві і праві частини одержаних рівнянь і складемо їх відповідно:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 = \cos^2 kt; \quad \left(\frac{ky}{V_0}\right)^2 = \sin^2 kt,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(V_0/k)^2} = \cos^2 kt + \sin^2 kt = 1.$$

Таким чином, траєкторією точки  $M$  є еліпс, піввісі якого по осям  $Ox$  і  $Oy$  дорівнюють  $a$  і  $V_0/k$ , відповідно.

**Відповідь:**  $x = a \cos kt$ ;  $y = \frac{V_0}{k} \sin kt$ ;  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(V_0/k)^2} = 1$ .

#### Задача № 4

Важке кільце  $M$  нанизане на горизонтальне гладке дрютяне коло (рис.2.9). Кільцю надають початкову швидкість  $V_0$ , яка

спрямована за дотичною до кола. Під час руху кільця на нього діє сила опору  $F = km\sqrt{V}$ , де  $m$  – маса кільця,  $V$  – його швидкість,  $k$  – сталий коефіцієнт.

**Визначити:** через який проміжок часу  $t_1$  кільце зупиниться, якщо  $V_0 = 16 \frac{M}{c}$ ,  $k = 0,5$ .

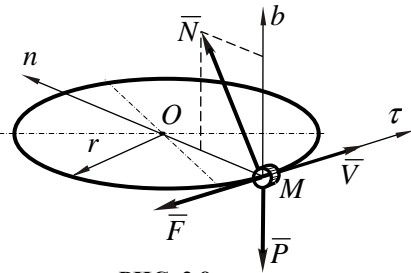


РИС. 2.9

**Розв'язок.** Оскільки траєкторія важкого кільця  $M$  відома – це коло радіуса  $r$ , то з кільцем пов'яжемо природну систему координат  $M\tau nb$ .

Покажемо сили, що діють на важке кільце  $M$ :

$\bar{P}$  – сила тяжіння кільця;

$\bar{F}$  – сила опору, яка спрямована у бік, протилежний швидкості  $\bar{V}$ ;

$\bar{N}$  – реакція поверхні дрютяного кола, яка лежить в площині  $Mnb$ , що перпендикулярна до кола.

Рівняння руху кільця  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{F} + \bar{N}.$$

Спроекуємо це рівняння на вісь  $M\tau$ :

$$ma_\tau = -F = -km\sqrt{V}, \quad \text{або} \quad \frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}.$$

Розділимо в останньому рівнянні змінні та проінтегруємо. При інтегруванні врахуємо, що швидкість кільця змінюється від  $V_0$  в початковий момент часу ( $t=0$ ) до  $V$  в деякий момент часу  $t$ :

$$\frac{dV}{\sqrt{V}} = -kdt \Rightarrow \int_{V_0}^V \frac{dV}{\sqrt{V}} = -k \int_0^t dt \Rightarrow 2\sqrt{V} \Big|_{V_0}^V = -kt \Big|_0^t \Rightarrow$$

$$2(\sqrt{V} - \sqrt{V_0}) = -kt \Rightarrow \sqrt{V} = \sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t.$$

Таким чином, закон зміни швидкості важкого кільця буде мати вигляд:

$$V = \left( \sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t \right)^2.$$

Визначимо час руху кільця. В момент часу  $t = t_1$ , коли кільце зупиняється, швидкість  $V = 0$ , тобто:

$$\sqrt{V_0} - \frac{k}{2}t_1 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{V_0} = kt_1 \Rightarrow t_1 = \frac{2\sqrt{V_0}}{k}.$$

Підставивши в останнє рівняння числові дані, одержимо:

$$t_1 = \frac{2\sqrt{16}}{0,5} = 16 \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $t_1 = 16 \text{ с}$ .

### Задача №5

Матеріальна точка масою  $m$ , яку кинуту з початковою швидкістю  $\bar{V}_0$  під кутом  $\alpha$  до горизонту, переборює під час руху силу опору повітря  $\bar{R} = -kmg\bar{V}$ , де  $k$  – сталий коефіцієнт.

**Визначити** найбільшу висоту  $H$  підйому точки, час  $T$ , необхідний для цього, і горизонтальне віддалення  $S$  від початкового положення у момент найбільшого підйому, якщо:

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2, k = 0,1 \text{ с/м}, \alpha = 30^\circ; V_0 = 30 \text{ м/с}.$$

**Розв'язок.** Скористаємося координатним методом, оскільки траєкторію матеріальної точки  $M$  не задано.

Виберемо початок координат у точці  $O$ , в якій починається рух точки (рис.2.10), і направимо вісь  $Oz$  паралельно силі тяжіння  $\bar{P}$  вертикально вгору. Тоді осі  $Ox$  і  $Oy$  розташуються в горизонтальній площині. При цьому вісь  $Oy$  направимо таким чином, щоб швидкість  $\bar{V}_0$  була розташована у площині  $Oyz$ .

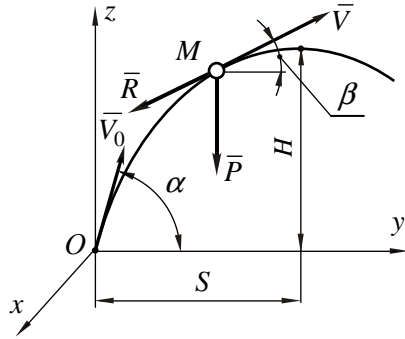


Рис. 2.10

На точку  $M$  діють дві сили: сила тяжіння  $\bar{P}$ , яка спрямована вертикально вниз, і сила опору  $\bar{R}$ , напрямком якої протилежний напрямку швидкості  $\bar{V}$  (рис.2.10).

Для обраної системи координат при  $t=0$  маємо наступні початкові умови:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0, & z_0 &= 0; \\ V_{x_0} &= 0, & V_{y_0} &= V_0 \cos \alpha, & V_{z_0} &= V_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Рівняння руху точки  $M$  у векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{P} + \bar{R}. \quad (1)$$

Спроекуємо вираз (1) на осі координат:

$$ma_x = 0; \quad (2)$$

$$ma_y = R_y; \quad (3)$$

$$ma_z = R_z - P. \quad (4)$$

Враховуючи, що:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt},$$

а проєкції сили опору  $\overline{R}$  на координатні осі дорівнюють

$$R_y = -R \cos \beta = -kmgV \cos \beta = -kmgV_y;$$

$$R_z = -R \sin \beta = -kmgV \sin \beta = -kmgV_z,$$

то система (2÷4) після скорочення на  $m$  зведеться до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dV_x}{dt} = 0; \quad (2')$$

$$\frac{dV_y}{dt} = -kgV_y, \quad (3')$$

$$\frac{dV_z}{dt} = -g(1 + kV_z). \quad (4')$$

Кожне диференціальне рівняння системи (2'÷4') можна інтегрувати окремо, незалежно від інших рівнянь.

Розділяючи змінні й інтегруючи кожне з рівнянь системи (2'÷4'), одержимо:

$$V_x = C_1; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_y}{V_y} = -kgdt &\Rightarrow \int \frac{dV_y}{V_y} = -\int kgdt \Rightarrow \\ \ln V_y &= -kgt + C_2; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{dV_z}{1 + kV_z} = -gdt, &\Rightarrow \int \frac{dV_z}{1 + kV_z} = -\int gdt \Rightarrow \\ \frac{1}{k} \ln(1 + kV_z) &= -gt + C_3. \end{aligned} \quad (7)$$

Підставляючи в рівняння (5), (6) і (7) початкові умови, визначимо сталі інтегрування.

$$V_{x_0} = C_1 \Rightarrow C_1 = 0; \quad \ln V_{y_0} = -kg \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = \ln(V_0 \cos \alpha);$$

$$\frac{1}{k} \ln(1 + kV_{z_0}) = -g \cdot 0 + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \sin \alpha).$$

З урахуванням отриманих значень  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  рівняння (5), (6) і (7) набудуть вигляду:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 0; \quad (8)$$

$$\ln V_y = -kgt + \ln(V_0 \cos \alpha) \Rightarrow \ln \frac{V_y}{V_0 \cos \alpha} = -kgt; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \ln(1 + kV_z) = -gt + \frac{1}{k} \ln(1 + kV_0 \sin \alpha) \Rightarrow \\ \frac{1}{k} \ln \left( \frac{1 + kV_z}{1 + kV_0 \sin \alpha} \right) = -gt. \end{aligned} \quad (10)$$

Потенціюємо рівняння (9) і (10) і знаходимо  $V_y$  й  $V_z$  як функції часу  $t$ .

З рівняння (9) знаходимо:

$$\frac{V_y}{V_0 \cos \alpha} = e^{-kgt},$$

або

$$V_y = \frac{dy}{dt} = V_0 e^{-kgt} \cos \alpha. \quad (11)$$

З рівняння (10) знаходимо:

$$\frac{1 + kV_z}{1 + kV_0 \sin \alpha} = e^{-kgt}; \quad 1 + kV_z = (1 + kV_0 \sin \alpha) e^{-kgt},$$

або

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k} \left[ (1 + kV_0 \sin \alpha) e^{-kgt} - 1 \right]. \quad (12)$$

Розділимо змінні в рівняннях (8), (11) і (12):

$$dx = 0;$$

$$dy = V_0 e^{-kgt} \cos \alpha dt;$$

$$dz = \frac{1}{k} \left[ (1 + kV_0 \sin \alpha) e^{-kgt} - 1 \right] dt,$$

і знайдемо після інтегрування:

$$x = C_4; \quad (13)$$

$$\int dy = V_0 \cos \alpha \int e^{-kgt} dt \Rightarrow y = -\frac{V_0 \cos \alpha}{kg} e^{-kgt} + C_5; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \int dz &= \frac{1}{k} \int \left[ (1 + kV_0 \sin \alpha) e^{-kgt} - 1 \right] dt = \\ &= \frac{1}{k} \left[ (1 + kV_0 \sin \alpha) \int e^{-kgt} dt - \int dt \right] \Rightarrow \\ z &= -\frac{1}{k} \left( \frac{1 + kV_0 \sin \alpha}{kg} e^{-kgt} + t \right) + C_6. \end{aligned} \quad (15)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_4$ ,  $C_5$  і  $C_6$  скористаємося початковими умовами. Оскільки при  $t = 0$ :

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 0; \quad z_0 = 0,$$

то з рівнянь (13), (14) і (15) випливає:

$$x_0 = C_4 \Rightarrow C_4 = 0;$$

$$y_0 = -\frac{V_0 \cos \alpha}{kg} e^{-kg \cdot 0} + C_5 \Rightarrow C_5 = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg};$$

$$z_0 = -\frac{1}{k} \left( \frac{1 + kV_0 \sin \alpha}{kg} e^{-kg \cdot 0} \right) + C_6 \Rightarrow C_6 = \frac{1 + kV_0 \sin \alpha}{k^2 g}.$$

Підставивши знайдені значення сталих інтегрування в (13), (14) і (15) отримаємо рівняння руху матеріальної точки  $M$  в декартовій системі координат:

$$x = 0; \quad (16)$$

$$y = -\frac{V_0 \cos \alpha}{kg} e^{-kgt} + \frac{V_0 \cos \alpha}{kg} = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgt}); \quad (17)$$



$$\begin{aligned}
 z &= -\frac{1}{k} \left( \frac{1+kV_0 \sin \alpha}{kg} e^{-kgt} + t \right) + \frac{1+kV_0 \sin \alpha}{k^2 g} = \\
 &= -\frac{1+kV_0 \sin \alpha}{k^2 g} e^{-kgt} - \frac{t}{k} + \frac{1+kV_0 \sin \alpha}{k^2 g}, \\
 z &= \frac{1+kV_0 \sin \alpha}{k^2 g} (1 - e^{-kgt}) - \frac{t}{k}. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Одним з висновків цієї задачі є те, що, оскільки руху в напрямі осі  $Ox$  нема, усі сили лежатимуть в площині  $yOz$ .

Визначимо час підйому точки  $M$  на максимальну висоту  $H$ . Підйом точки буде продовжуватися до моменту часу  $T$ , коли вертикальна проекція  $V_z$  швидкості стане рівною нулю, тобто  $V_z = 0$ .

Підставивши у рівняння (12) значення  $V_z = 0$ , одержимо:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{1}{k} \left[ (1+kV_0 \sin \alpha) e^{-kgT} - 1 \right], \\
 (1+kV_0 \sin \alpha) e^{-kgT} &= 1, \\
 1+kV_0 \sin \alpha &= \frac{1}{e^{-kgT}} = e^{kgT}, \\
 kgT &= \ln(1+kV_0 \sin \alpha).
 \end{aligned}$$

Остаточно:

$$T = \frac{1}{kg} \ln(1+kV_0 \sin \alpha).$$

Підставивши у цей вираз вихідні дані

$$k = 0,1 \text{ с/м}; \quad g = 10 \text{ м/с}^2; \quad V = 30 \text{ м/с}; \quad \alpha = 30^\circ,$$

одержимо час підйому  $T$  матеріальної точки  $M$  на максимальну висоту:

$$T = \frac{1}{0,1 \cdot 10} \ln(1 + 0,1 \cdot 30 \cdot 0,5) = \ln 2,5 = 0,92 \text{ с}.$$

Визначимо максимальну висоту підйому  $H$  точки з виразу (18) при  $T = 0,92 \text{ с}$ :

$$H = \frac{1 + kV_0 \sin \alpha}{k^2 g} (1 - e^{-kgT}) - \frac{T}{k} =$$

$$= \frac{1 + 0,1 \cdot 30 \cdot 0,5}{0,1^2 \cdot 10} (1 - 2,72^{-0,1 \cdot 10 \cdot 0,92}) - \frac{0,92}{0,1} = 5,8 \text{ м.}$$

Горизонтальне віддалення  $S$  у момент найбільшого підйому  $H$  знайдемо з рівняння (17):

$$S = \frac{V_0 \cos \alpha}{kg} (1 - e^{-kgT}) = \frac{30 \cdot 0,866}{0,1 \cdot 10} \left(1 - \frac{1}{2,5}\right) = 15,6 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $T = 0,92 \text{ с}$ ;  $H = 5,8 \text{ м}$ ;  $S = 15,6 \text{ м}$ .

### Задача №6

Точка масою  $m = 0,1 \text{ кг}$  рухається під дією сили, яка притягує її до нерухомого центра  $O$  і пропорційна відстані від точки до цього центра, причому коефіцієнт пропорційності  $c = 5,89 \text{ Н/м}$ . Опір руху в середовищі є пропорційним швидкості, причому коефіцієнт пропорційності  $\mu = 4,9 \text{ Н} \cdot \text{с/м}$ .

Початкові умови руху при  $t = 0$ :

$$x_0 = 0; y_0 = 30 \text{ м}; V_{x_0} = \dot{x}_0 = 20 \text{ м/с}; V_{y_0} = \dot{y}_0 = 10 \text{ м/с}.$$

Силу тяжіння при розв'язуванні задачі не враховувати.

**Визначити** рівняння руху точки:  $x = f_1(t)$ ,  $y = f_2(t)$ .

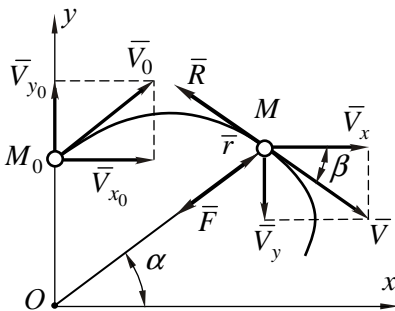


РИС. 2.11

**Розв'язок.** Зобразимо точку  $M$  у довільному положенні на траєкторії (рис.2.11) і покажемо сили, які на неї діють:

$\bar{F}$  – яка притягує точку  $M$  до центра  $O$ , і  $\bar{R}$  – опір середовища, який спрямований протилежно швидкості  $\bar{V}$  точки  $M$ .

Як витікає із умови задачі:

$$\bar{F} = -c\bar{r} \quad \text{і} \quad \bar{R} = -\mu\bar{V}.$$

Оскільки траєкторія точки заздалегідь невідома, то з центром  $O$  пов'яжемо прямокутну систему координат  $Oxy$ . Тоді положення точки  $M$  на траєкторії буде визначатися координатами  $x$  і  $y$ .

Рівняння руху точки у векторній формі має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{R} + \bar{F}.$$

Спроекуємо це рівняння на осі координат. Позначивши через  $\alpha$  і  $\beta$  кути, які відповідно утворюють радіус-вектор  $\bar{r}$  і швидкість  $\bar{V}$  точки  $M$  з віссю  $Ox$ , одержимо:

$$ma_x = m\ddot{x} = -F \cos \alpha - R \cos \beta;$$

$$ma_y = m\ddot{y} = -F \sin \alpha + R \sin \beta,$$

або

$$m\ddot{x} = -cr \cos \alpha - \mu V \cos \beta;$$

$$m\ddot{y} = -cr \sin \alpha + \mu V \sin \beta.$$

Оскільки:

$$r \cos \alpha = x; \quad V \cos \beta = V_x = \dot{x};$$

$$r \sin \alpha = y; \quad -V \sin \beta = V_y = \dot{y},$$

то:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0;$$

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + cy = 0.$$

Підставивши в ці рівняння  $m = 0,1 \text{ кг}$ ,  $c = 5,89 \text{ Н/м}$ ,  $\mu = 4,9 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$ , одержимо:

$$\ddot{x} + 49\dot{x} + 58,9x = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + 49\dot{y} + 58,9y = 0. \quad (2)$$

Одержано два незалежних одне від одного лінійних диференціальних рівняння другого порядку.

Розглянемо розв'язування першого рівняння. Розв'язок будемо шукати у вигляді:

$$x = e^{nt}.$$

Тоді:

$$\dot{x} = ne^{nt}; \quad \ddot{x} = n^2 e^{nt}.$$

Підставивши  $x$ ,  $\dot{x}$  і  $\ddot{x}$  у рівняння (1), одержимо характеристичне рівняння:

$$n^2 e^{nt} + 49ne^{nt} + 58,9e^{nt} = 0,$$

або

$$n^2 + 49n + 58,9 = 0. \quad (3)$$

Звідкіля:

$$n_{1,2} = \frac{-49 \pm \sqrt{2401 - 235,6}}{2}; \quad n_{1,2} = \frac{-49 \pm 46,5}{2};$$

$$n_1 = -1,25; \quad n_2 = -47,75.$$

Оскільки корені характеристичного рівняння (3) дійсні і різні, то в цьому випадку частковими розв'язками будуть функції  $x_1 = e^{n_1 t} = e^{-1,25t}$  і  $x_2 = e^{n_2 t} = e^{-47,75t}$ , а загальним розв'язком буде:

$$x = C_1 e^{-1,25t} + C_2 e^{-47,75t}, \quad (4)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – довільні сталі.

Тоді залежність проекції швидкості  $V_x$  від часу буде

$$V_x = \dot{x} = -1,25 C_1 e^{-1,25t} - 47,75 C_2 e^{-47,75t}. \quad (5)$$

Враховуючи, що в рівняннях (1) і (2) коефіцієнти збігаються, то для другого диференціального рівняння можна записати:

$$y = C_3 e^{-1,25t} + C_4 e^{-47,75t}; \quad (6)$$

$$V_y = \dot{y} = -1,25 C_3 e^{-1,25t} - 47,75 C_4 e^{-47,75t}. \quad (7)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  скористаємося початковими даними.

Оскільки при  $t = 0$

$$x_0 = 0; \quad y_0 = 30 \text{ м}; \quad V_{x_0} = \dot{x}_0 = 20 \text{ м/с}; \quad V_{y_0} = \dot{y}_0 = 10 \text{ м/с},$$

то рівняння (4), (5), (6) і (7) набудуть вигляду:

$$0 = C_1 e^0 + C_2 e^0, \quad C_1 + C_2 = 0; \quad (4')$$

$$20 = -1,25C_1 e^0 - 47,75C_2 e^0, \quad 1,25C_1 + 47,75C_2 = -20; \quad (5')$$

$$30 = C_3 e^0 + C_4 e^0, \quad C_3 + C_4 = 30; \quad (6')$$

$$10 = -1,25C_3 e^0 - 4,775C_4 e^0, \quad 1,25C_3 + 4,775C_4 = -10. \quad (7')$$

Розв'язуючи разом рівняння (4') і (5') та (6') і (7'), одержимо:

$$C_1 = 0,43; \quad C_2 = -0,43; \quad C_3 = 30,12; \quad C_4 = -0,12.$$

Підставляючи знайдені сталі в рівняння (4) і (6), одержимо:

$$x = 0,43e^{-1,25t} - 0,43e^{-47,75t};$$

$$y = 30,12e^{-1,25t} - 0,12e^{-47,75t}.$$

**Відповідь:**  $x = 0,43e^{-1,25t} - 0,43e^{-47,75t}, (м);$

$y = 30,12e^{-1,25t} - 0,12e^{-47,75t}, (м).$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 27.42; 27.44; 27.52; 27 [2].

## ТЕМА 3. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### ЗАНЯТТЯ № 5

#### Зміст

- 3.1. Вільні коливання матеріальної точки.
- 3.2. Вплив сталої сили на вільні коливання.
- 3.3. Контрольні запитання.
- 3.4. Порядок розв'язування задач на вільні коливання.
- 3.5. Приклади розв'язування задач.

### 3.1. Вільні гармонічні коливання матеріальної точки

Вільні гармонічні коливання матеріальної точки відбуваються під дією *відновлювальної сили*, яка намагається повернути точку у положення рівноваги. Прикладом такої сили може бути сила пружності пружини.

Відновлювальна сила змінюється за лінійним законом. Якщо на матеріальну точку діє сила пружності пружини  $\vec{F}$ , то:

$$F = c \cdot \Delta,$$

де  $\Delta$  – деформація пружини,  
 $c$  – коефіцієнт жорсткості.

*Коефіцієнт жорсткості*  $c$  чисельно дорівнює силі, яку необхідно прикласти до пружини для того, щоб деформувати її на одиницю довжини.

Одиницею вимірювання коефіцієнта жорсткості  $c$  у системі одиниць  $SI$  є  $H/m$ . У практиці частіше застосовується одиниця  $H/cm$ .

Рух матеріальної точки  $M$  з масою  $m$  по горизонтальній осі (рис.3.1) під дією відновлювальної сили  $\vec{F}$ , яка дорівнює за модулем  $F = c|x|$ , описується диференціальним рівнянням:

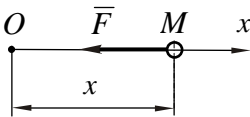


Рис. 3.1

$$\ddot{x} + \kappa^2 x = 0, \quad \text{де } \kappa^2 = c/m. \quad (3.1)$$

Розв'язок цього рівняння, або закон зміни координати  $x$  від часу  $t$ , має вигляд:

$$x = C_1 \cos \kappa t + C_2 \sin \kappa t, \quad (3.2)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами.

У амплітудній формі рівняння руху записується наступним чином:

$$x = a \sin (\kappa t + \alpha), \quad (3.3)$$

де  $a$  – амплітуда коливань, тобто найбільше відхилення точки, яка коливається, від положення рівноваги;

$(\kappa t + \alpha)$  – фаза коливань;

$\alpha$  – початкова фаза коливань;

$\kappa$  – кругова частота коливань, тобто кількість коливань матеріальної точки за  $2\pi$  секунд:

$$\kappa = \sqrt{\frac{c}{m}}. \quad (3.4)$$

Якщо початкові умови руху матеріальної точки при  $t = 0$  мають вигляд  $x = x_0$ ;  $\dot{x} = \dot{x}_0$ , то:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\kappa^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa x_0}{\dot{x}_0}. \quad (3.5)$$

**Періодом коливань  $T$  матеріальної точки називається найменший проміжок часу, після закінчення якого точка буде мати ту ж саму координату:**

$$T = \frac{2\pi}{\kappa} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (3.6)$$

Із наведених залежностей витікає, що амплітуда  $a$  і початкова фаза  $\alpha$  залежать від початкових умов, а період  $T$  і кругова частота  $\kappa$  – не залежать від початкових умов.

### 3.2. Вплив сталої сили на вільні коливання

У цьому випадку початок відліку вибирається у положенні статичної рівноваги, тобто на відстані  $\delta_{cm}$ , яка відкладається у напрямку сталої сили і визначається із співвідношення:

$$\delta_{cm} = \frac{P}{c}, \quad (3.7)$$

де  $P$  – модуль сталої сили.

Диференціальне рівняння руху при наявності сталої сили співпадає за формою з диференціальним рівнянням вільних коливань. Звідси виходить, що

*стала сила  $\bar{P}$  не змінює характеру коливань, які здійснює точка під дією відновлювальної сили  $\bar{F}$ , а тільки зміщує центр цих коливань у бік дії сили  $\bar{P}$  на величину статичного відхилення  $\delta_{cm}$ .*

Період коливань та кругова частота дорівнюють:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P} \delta_{cm}}. \quad (3.8)$$

$$k = \sqrt{\frac{P}{\delta_{cm} m}}. \quad (3.9)$$

### 3.3. Контрольні запитання

1. Під дією якої сили відбуваються вільні гармонічні коливання?
2. Який вигляд має диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань?
3. Що називається амплітудою, періодом та частотою вільних коливань матеріальної точки?
4. Від яких факторів залежить частота та період вільних коливань?



5. Від яких факторів залежать амплітуда та початкова фаза вільних коливань?
6. Як впливає стала сила на вільні коливання?
7. Як визначається величина статичного відхилення точки?

### 3.4. Порядок розв'язування задач на вільні коливання

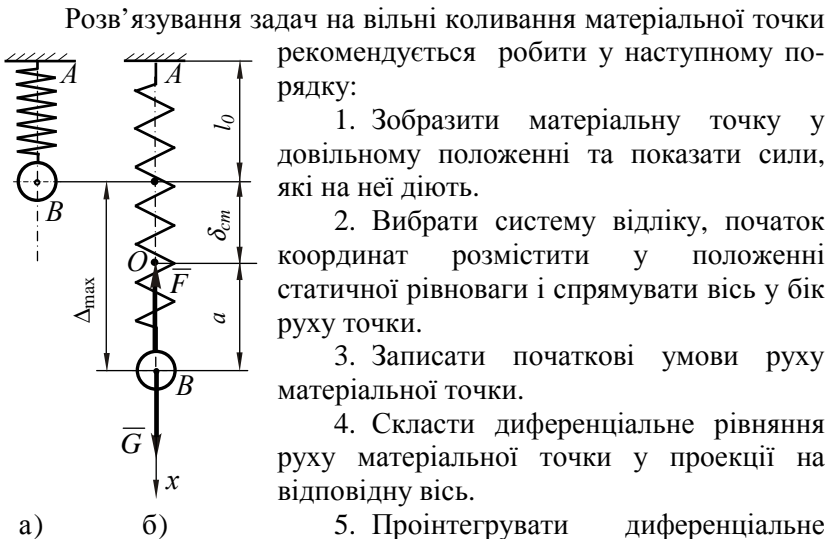


Рис. 3.2

### 3.5. Приклади розв'язування задач

#### Задача № 1

**Визначити** максимальне подовження  $\Delta_{\max}$  пружини  $AB$  (рис. 3.2,а) у сантиметрах при вільних вертикальних коливаннях вантажу, якщо він прикріплений у точці  $B$  до недеформованої пружини та відпущений зі стану спокою. Статична деформація пружини під дією вантажу дорівнює  $\delta_{cm} = 2\text{ см}$ .

**Розв'язок.** Зобразимо вантаж у довільному положенні (рис.3.2,б) та покажемо сили, що на нього діють: силу пружності пружини  $\overline{F}$ , яка є відновлювальною силою, і силу тяжіння вантажу  $\overline{G}$ .

Оскільки на вантаж крім відновлювальної сили  $\overline{F}$ , діє і стала сила – сила тяжіння вантажу  $\overline{G}$ , то центр коливань змістимо відносно кінця недеформованої пружини в напрямі сили тяжіння на  $\delta_{cm}$  (точка  $O$ ). Вісь  $Ox$  спрямуємо в напрямі руху вантажу.

Коли вантаж буде знаходитися у крайньому нижньому положенні (рис.3.2,б), то максимальне подовження пружини буде складатися з статичної деформації  $\delta_{cm}$  та амплітуди  $a$  вільних коливань:

$$\Delta_{\max} = \delta_{cm} + a.$$

Величину амплітуди можна визначити з виразу:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}, \quad (1)$$

де  $x_0$  – початкове положення вантажу;

$\dot{x}_0$  – початкова швидкість вантажу.

За умовою задачі при  $t = 0$   $x_0 = -\delta_{cm}$ ;  $\dot{x}_0 = 0$ .

Підставляючи значення  $x_0$  та  $\dot{x}_0$  у рівняння (1), дістанемо:

$$a = \sqrt{(-\delta_{cm})^2 + \frac{0}{k^2}} = \delta_{cm}.$$

Таким чином, максимальне подовження пружини дорівнює:

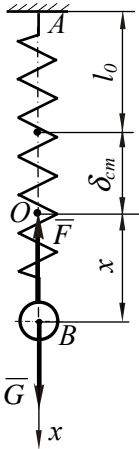
$$\Delta_{\max} = \delta_{cm} + \delta_{cm} = 2\delta_{cm} = 2 \cdot 2 = 4 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $\Delta_{\max} = 4 \text{ см}$ .

### Задача № 2

Вантаж масою  $m = 25 \text{ кг}$  підвішений до пружини з коефіцієнтом жорсткості  $c = 800 \text{ Н/м}$  і знаходиться у вільному прямолінійному коливальному русі.

**Визначити** модуль прискорення  $a_B$  вантажу у момент часу, коли його центр тяжіння знаходиться на відстані  $5 \text{ см}$  від положення статичної рівноваги.



**Розв'язок.** При вивченні вільних коливань під дією відновлювальної (сила  $\bar{F}$  пружності пружини) та сталої сили (у даному випадку - сили тяжіння  $\bar{G}$ ) початок координат краще усього вибрати у положенні статичної рівноваги (точка  $O$ ) (рис.3.3), тобто зміщеним на  $\delta_{cm}$  відносно недеформованого стану в напрямі сили  $\bar{G}$ . Тоді рівняння руху вантажу буде мати вигляд:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (1)$$

Для знаходження прискорення вантажу два рази продиференціюємо це рівняння за часом:

Рис. 3.3

$$V_B = \dot{x} = ak \cos(kt + \alpha),$$

$$a_B = \ddot{x} = -ak^2 \sin(kt + \alpha).$$

Останній вираз представимо у вигляді:

$$a_B = -k^2 [a \sin(kt + \alpha)] = -k^2 x, \quad (2)$$

оскільки  $a \cdot \sin(kt + \alpha) = x$ .

Визначимо кругову частоту коливань, яка входить у праву частину рівняння (2):

$$k^2 = \frac{c}{m} = \frac{800}{25} = 32 \text{ 1/с}^2;$$

За умовами задачі необхідно визначити модуль прискорення вантажу, коли його центр тяжіння знаходиться на відстані  $5 \text{ см}$  від положення статичної рівноваги, тобто  $x = 5 \text{ см}$ .

Остаточно

$$a_B = -32 \cdot 5 = -160 \text{ см/с}^2 = -1,6 \text{ м/с}^2.$$

**Відповідь:**  $a_B = -1,6 \text{ м/с}^2$ .

### Задача № 3

**Визначити** еквівалентний коефіцієнт жорсткості  $c_{екв}$  двох пружин та період коливань вантажу  $P$  вагою  $18 \text{ Н}$ , підвішеного до цих пружин, якщо пружини з'єднані послідовно (рис. 3.4,а) і паралельно (рис. 3.5). Коефіцієнти жорсткості пружин:  $c_1 = 2 \text{ Н/м}$ ;  $c_2 = 18 \text{ Н/м}$ .

**Розв'язок:** У випадку послідовного з'єднання пружин загальне статичне подовження  $\delta_{ст}$  буде дорівнювати сумі статичних подовжень першої та другої пружини:

$$\delta_{ст} = \delta_{1ст} + \delta_{2ст}. \quad (1)$$

Оскільки кожна з пружин у статичному положенні розтягується силою  $P$ , то згідно з (3.7):

$$\delta_{1ст} = \frac{P}{c_1}, \quad \delta_{2ст} = \frac{P}{c_2}.$$

З урахуванням останніх співвідношень формула (1) набуде вигляду:

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c_1} + \frac{P}{c_2} = \frac{P(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2}.$$

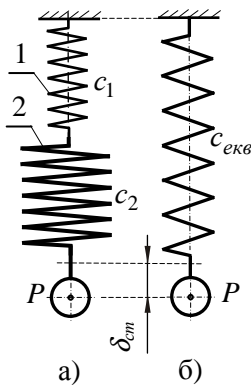


Рис. 3.4

Для еквівалентної розрахункової схеми з однією пружиною (рис. 3.4,б):

$$\delta_{ст} = \frac{P}{c_{екв}^{нос}},$$

де  $c_{екв}^{noc}$  – коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, яка заміняє дві послідовно з'єднані пружини.

Оскільки статичне подовження заданої (рис. 3.4,а) і еквівалентної (рис. 3.4,б) схем повинно бути рівним, то:

$$\frac{P}{c_{екв}^{noc}} = \frac{P(c_1 + c_2)}{c_1 \cdot c_2} \Rightarrow c_{екв}^{noc} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2}.$$

З урахуванням числових даних:

$$c_{екв}^{noc} = \frac{2 \cdot 18}{2 + 18} = 1,8 \text{ Н/м}.$$

Період коливань за формулою (3.8):

$$\begin{aligned} T_{noc} &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{P} \delta_{cm}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g \cdot c_{екв}^{noc}}} = \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{18}{9,81 \cdot 1,8}} = 6,34 \text{ с}. \end{aligned}$$

У випадку паралельного з'єднання пружин (рис. 3.5) їх статичне подовження буде однаковим:

$$\delta_{1cm} = \delta_{2cm} = \delta_{cm}.$$

Виходячи з формули (3.7) пружини будуть розтягнуті зусиллями:

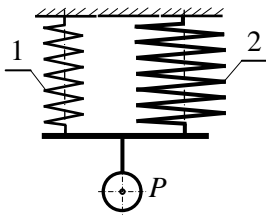


Рис. 3.5

$$P_1 = \delta_{cm} \cdot c_1; \quad P_2 = \delta_{cm} \cdot c_2.$$

Таким чином, сила тяжіння вантажу  $P$  буде зрівноважуватися двома вертикальними зусиллями  $P_1$  і  $P_2$  пружин, тобто,  $P = P_1 + P_2$ ,  
або:

$$P = \delta_{cm} c_1 + \delta_{cm} c_2.$$

З іншого боку, для еквівалентної розрахункової схеми з однією пружиною (рис. 3.4,б):

$$P = \delta_{cm} c_{екв}^{nap},$$

де  $c_{екв}^{нар}$  – коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини, яка заміняє дві паралельні пружини.

Звідси

$$c_{екв}^{нар} = c_1 + c_2.$$

З урахуванням числових даних:

$$c_{екв}^{нар} = 2 + 18 = 20 \text{ Н / м}.$$

Період коливань за формулою (3.8):

$$T_{нар} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{P} \delta_{ст}} = 2\pi \sqrt{\frac{P}{g \cdot c_{екв}^{нар}}} = 2\pi \sqrt{\frac{18}{9,81 \cdot 20}} = 1,9 \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $c_{екв}^{нос} = 1,8 \text{ Н / м}, \quad T_{нос} = 6,34 \text{ с};$

$$c_{екв}^{нар} = 20 \text{ Н / м}, \quad T_{нар} = 1,9 \text{ с}.$$

#### Задача № 4

Пружина  $AB$ , яка закріплена одним кінцем у точці  $A$ , є такою, що для подовження її на  $\Delta l = 1 \text{ см}$  необхідно прикласти у точці  $B$  при статичному навантаженні силу  $P = 0,196 \text{ Н}$ . У деякий момент часу до нижнього кінця  $B$  недеформованої пружини підвішують гирю  $G$ , масою  $100 \text{ г}$  і відпускають її без початкової швидкості. Нехтуючи масою пружини, написати рівняння подальшого руху гирі і визначити амплітуду  $a$  та період  $T$  її коливань, відносячи рух гирі до осі, яка проведена униз із положення статичної рівноваги гирі.

**Визначити:**  $x = f(t); a; T$ .

**Розв'язок.** Зобразимо гирю  $G$  у проміжному положенні (рис.3.6). На неї діють сила тяжіння  $\bar{G}$  і сила пружності  $\bar{F}$ . Вісь  $x$  спрямуємо вертикально донизу, а початок відліку візьмемо у точці  $O$ , яка віддалена від кінця  $B$  недеформованої пружини на величину  $\delta_{ст}$ .

Початкові умови при  $t = 0$  мають вигляд:

$$x_0 = -\delta_{ст}; \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Рівняння руху гирі  $G$  запишемо у диференціальній формі:

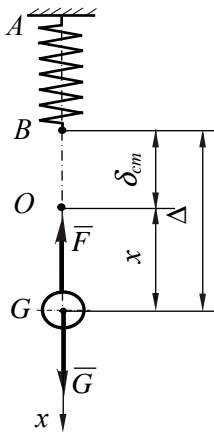


Рис. 3.6

Підставивши в (1) вираз для  $G$ ,  
отримаємо:

$$m\ddot{x} = c\delta_{cm} - c\delta_{cm} - cx \Rightarrow m\ddot{x} + cx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0.$$

Розв'язок цього диференціального рівняння у амплітудній формі має вигляд:

$$x = a \sin(kt + \alpha). \quad (1)$$

Колова частота  $k$  коливань гирі  $G$  визначається залежністю (3.4):

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

$$\text{де } c = \frac{P}{\Delta l} = \frac{0,196}{1} = 0,196 \text{ Н/см} = 19,6 \text{ Н/м}.$$

Тоді

$$k = \sqrt{\frac{19,6}{0,1}} = 14 \text{ с}^{-1}.$$

Визначимо амплітуду коливань гирі за формулою (3.5):

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}},$$

$$m\ddot{x} = G - F_x.$$

З іншого боку

$$F_x = c\Delta = c(\delta_{cm} + x).$$

Тоді

$$m\ddot{x} = G - c\delta_{cm} - cx. \quad (1)$$

Статичне відхилення дорівнює:

$$\delta_{cm} = G/c, \quad \text{або} \quad G = c \cdot \delta_{cm}.$$

де  $x_0 = -\delta_{cm}$ ,  $\dot{x}_0 = 0$ .

Тоді,

$$a = \sqrt{\delta_{cm}^2 + \frac{0}{k^2}} = \delta_{cm},$$

а оскільки

$$\delta_{cm} = \frac{G}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{0,1 \cdot 9,81}{19,6} = 0,05 \text{ м},$$

то амплітуда коливань гирі

$$a = 0,05 \text{ м}.$$

Початкову фазу коливань  $\alpha$  знайдемо за формулою (3.5):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{\dot{x}_0} = \frac{k(-\delta_{cm})}{0} = -\infty \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

З урахуванням знайдених величин  $a$ ,  $k$  та  $\alpha$  рівняння (1) руху гирі має вигляд:

$$x = 0,05 \sin\left(14t - \frac{\pi}{2}\right) = -0,05 \cos 14t \text{ м}.$$

Період вільних коливань гирі дорівнює (3.8):

$$T = 2\pi \sqrt{\delta_{cm} \frac{m}{G}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{cm}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,05}{9,81}} = 0,45 \text{ с}.$$

**Відповідь:**  $x = -0,05 \cos 14t$ ;  $a = 0,05 \text{ м}$ ;  $T = 0,45 \text{ с}$ .

### Задача № 5

Під час рівномірного опускання вантажу вагою  $Q = 2 \text{ кН}$  із швидкістю  $V = 5 \text{ м/с}$ , від затиснення троса у обоймі блока (рис.3.7), трапилася раптова затримка верхнього кінця троса, наякому опускався вантаж.



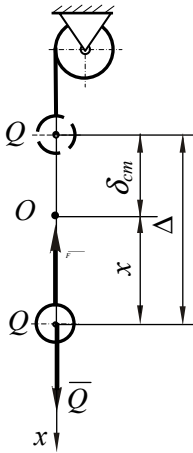


Рис. 3.7

**Визначити** найбільший натяг  $F_{\max}$  троса під час коливання вантажу, якщо коефіцієнт жорсткості троса  $c = 400 \text{ кН/м}$ . Вагою троса нехтувати.

**Розв'язок.** Початок координат вибираємо у положенні статичної рівноваги на відстані  $\delta_{cm}$  від початкового стану (точка  $O$ ).

Із умови задачі витікає, що максимальний натяг троса буде при крайньому нижньому положенні вантажу  $Q$ . У цьому випадку деформація буде дорівнювати сумі статичного відхилення і амплітуди коливань вантажу  $Q$ . Таким чином:

$$F_{\max} = c(\delta_{cm} + a).$$

Отже, задача зводиться до визначення амплітуди коливань.

Амплітуда коливань визначається за допомогою початкових умов:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}},$$

де  $x_0$  – початкове положення вантажу  $Q$ ;

$\dot{x}_0$  – початкова швидкість вантажу  $Q$ .

У даній задачі початкові умови при  $t = 0$  мають вигляд:

$$x_0 = -\delta_{cm}; \quad \dot{x}_0 = 5 \text{ м/с}.$$

Визначаємо кругову частоту коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{Q}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 9,81}{2}} = 44,3 \text{ с}^{-1}$$

та величину статичного відхилення:

$$\delta_{cm} = \frac{Q}{c} = \frac{2}{400} = 0,005 \text{ м}.$$

Тоді

$$a = \sqrt{0,005^2 + \frac{5^2}{44,3^2}} = 0,113 \text{ м.}$$

Максимальний натяг троса дорівнює:

$$F_{\max} = c(\delta_{cm} + a) = 400(0,005 + 0,113) = 47,2 \text{ кН.}$$

Треба звернути увагу на те, що вантаж вагою  $Q = 2 \text{ кН}$  при затисненні троса викликає в ньому зусилля у 23 рази більше, ніж його вага, що може призвести до розриву троса та аварії.

**Відповідь:**  $F_{\max} = 47,2 \text{ кН.}$

### Задача № 6

Вантаж  $Q$ , який падає з висоти  $h = 1 \text{ м}$  без початкової швидкості, б'ється об середину пружної горизонтальної балки, кінці якої  $A$  і  $B$  закріплені (рис.3.8).

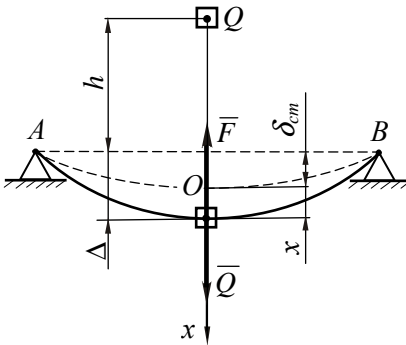


Рис. 3.8

**Визначити** рівняння  $x = f(t)$  подальшого руху вантажу разом з балкою відносно осі, яка проведена вертикально вниз із положення статичної рівноваги балки разом з вантажем. При статичному навантаженні балки в середній її частині силою, рівною силі тяжіння вантажу  $Q$ , прогин складає  $\delta_{cm} = 0,5 \text{ см}$ . Масою балки знехтувати.

*Розв'язок.* Зобразимо вантаж у проміжному положенні. На вантаж діє: сила тяжіння  $\bar{Q}$  і сила пружності балки  $\bar{F}$ . Вісь  $x$  спрямуємо вниз, початок відліку беремо у точці  $O$ , яка знаходиться на відстані  $\delta_{cm}$  від горизонтального положення балки.

Запишемо початкові умови руху.

Координата  $x_0$  вантажу на початку коливального руху дорівнює  $-\delta_{cm}$ . Швидкість середньої точки балки, яка коливається разом з вантажем, на початку руху буде дорівнювати швидкості вантажу при його падінні з висоти  $h = 1\text{ м}$ :

$$V_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 1} = 4,43 \text{ м/с} = 443 \text{ см/с}.$$

Таким чином, при  $t = 0$ :

$$x_0 = -\delta_{cm} = -0,5 \text{ см}; \quad V_0 = 443 \text{ см/с}.$$

Якщо початок відліку співпадає з положенням статичної рівноваги, то рівняння руху має вигляд:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \quad (1)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  нам крім закону руху треба мати і закон зміни швидкості:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \quad (2)$$

Для визначення кругової частоти коливань  $k$  знайдемо коефіцієнт жорсткості балки.

$$\text{Оскільки } \delta_{cm} = \frac{Q}{c}, \text{ то } c = \frac{Q}{\delta_{cm}} = \frac{mg}{\delta_{cm}}.$$

$$\text{Тоді } k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{mg}{m\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{0,5}} = 44,3 \text{ с}^{-1}.$$

Із початкових умов (при  $t = 0$ :  $x_0 = -\delta_{cm}$ ) і закону руху (1) знаходимо сталу інтегрування  $C_1$ :

$$-\delta_{cm} = C_1 \cos 0 \Rightarrow C_1 = -0,5.$$

Із рівняння (2) і початкових умов (при  $t = 0$ :  $\dot{x}_0 = 443 \text{ см/с}$ ) знаходимо сталу інтегрування  $C_2$ :

$$443 = C_2 k \cos 0 \Rightarrow C_2 = \frac{443}{k} = \frac{443}{44,3} = 10.$$

Остаточно, рівняння руху вантажу набуде вигляду

$$x = (-0,5 \cos 44,3t + 10 \sin 44,3t) \text{ см.}$$

**Відповідь:**  $x = (-0,5 \cos 44,3t + 10 \sin 44,3t) \text{ см.}$

### Задача № 7

В клапанному механізмі (рис. 3.9,а) закон руху штоухачу 2 задається профілем кулачка 1 і передається на клапан 3. На клапані 3 встановлена пружина 4, яка забезпечує постійний контакт між робочими поверхнями кулачка 1 і штоухача 2. При проєкт-туванні швидкохідних кулачкових механізмів доводиться

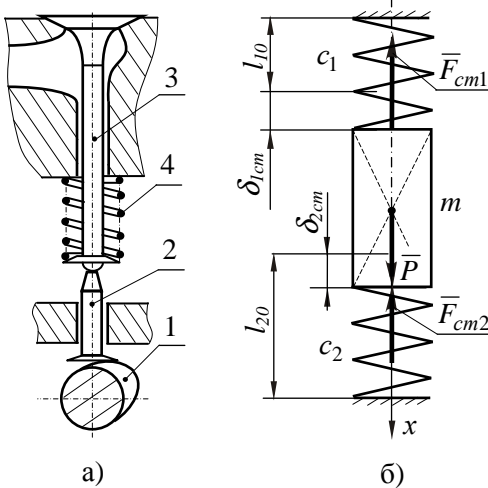


Рис. 3.9

враховувати характеристики реальних деталей, які відрізняються від характеристик абсолютно твердих тіл. Наприклад, низька жорсткість, значні маси і великі прискорення при русі деталей газорозподільних механізмів двигунів внутрішнього згорання приводять до виникнення пружних коливань, які накладаються на заданий рух деталей.

Вважається, що податливість мають кулачок 1, штоухач 2 і клапан 3 з пружиною 4. При створенні динамічної моделі механізму, яка відображає вплив пружності деталей реального механізму, використовують одномасову модель (рис. 3.9,б). Маса  $m$  враховує маси кулачка, штоухача і клапана, пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c_1$  клапанну пружину 4, а пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c_2$  жорсткість кулачка, штоухача і клапана.

**Визначити** коефіцієнт жорсткості  $c_2$  і частоту коливань  $k$  деталей такого механізму, якщо:  $m = 0,4 \text{ кг}$ ; коефіцієнт жорсткості клапанної пружини  $c_1 = 25 \text{ кН/м}$  і статичне навантаження величиною  $P = 2 \text{ кН}$  викликає деформацію  $\delta_{cm} = 0,005 \text{ м}$ . Силами тертя в напрямних штовхача і клапана знехтувати.

**Розв'язок.** При статичному навантаженні на тіло масою  $m$  (рис. 3.9) діють три сили: статичне навантаження  $\bar{P}$  і сили пружності пружин  $\bar{F}_{cm1}$  та  $\bar{F}_{cm2}$ .

Сила пружності пружини  $\bar{F}_{cm2}$ , довжина якої в недеформованому стані  $l_{20}$ , пропорційна статичному подовженню  $\delta_{2cm}$ :

$$F_{cm2} = c_2 \cdot \delta_{2cm},$$

і направлена вгору, оскільки пружина стиснута.

Сила пружності пружини  $\bar{F}_{cm1}$ , довжина якої в недеформованому стані  $l_{10}$ , пропорційна статичному подовженню  $\delta_{1cm}$ :

$$F_{cm1} = c_1 \cdot \delta_{1cm},$$

і направлена вгору, оскільки пружина розтягнута.

Спроектуювавши ці сили  $\bar{P}$ ,  $\bar{F}_{cm1}$  і  $\bar{F}_{cm2}$  на вісь  $Ax$ , отримаємо:

$$\sum F_{kx} = P - F_{cm1} - F_{cm2} = 0,$$

або

$$P = F_{cm1} + F_{cm2} = c_1 \cdot \delta_{1cm} + c_2 \cdot \delta_{2cm}.$$

Виходячи з умови сумісності деформації системи маємо:

$$\delta_{1cm} = \delta_{2cm} = \delta_{cm}.$$

Тоді

$$P = \delta_{cm} (c_1 + c_2). \quad (1)$$

З рівняння (1) визначаємо коефіцієнт жорсткості пружини  $c_2$ :

$$c_2 = P / \delta_{cm} - c_1 = 2 / 0,005 - 25 = 375 \text{ кН/м}.$$

Для еквівалентної розрахункової схеми з однією пружиною (рис. 3.4,б):

$$P = \delta_{ст} \cdot c_{екв}, \quad (2)$$

де  $c_{екв}$  – коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини.

Прирівнявши рівняння (1) і (2) отримаємо коефіцієнт жорсткості еквівалентної пружини:

$$c_{екв} = c_1 + c_2 = 375 + 25 = 400 \text{ кН/м}.$$

Кругова частота коливань (3.4):

$$k = \sqrt{\frac{c_{екв}}{m}} = \sqrt{\frac{400 \cdot 10^3}{0.4}} = 1000 \text{ с}^{-1}.$$

**Відповідь:**  $k = 1000 \text{ с}^{-1}$ ,  $c_2 = 375 \text{ кН/м}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 32.11; 32.15; 32.24 [2].

## Тема 3. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ (продовження)

### ЗАТУХАЮЧІ КОЛИВАННЯ ТА АПЕРІОДИЧНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

#### ЗАНЯТТЯ № 6

##### Зміст

- 3.6. Затухаючі коливання та аперіодичний рух матеріальної точки.
- 3.7. Контрольні запитання.
- 3.8. Приклади розв'язування задач.

#### 3.6. Затухаючі коливання матеріальної точки

Матеріальна точка, яка коливається за реальних умов, зазнає опір руху (сили тертя, опір повітря і т.п.). Це значить, що крім відновлювальної сили, яка спрямована до центра коливань, діє сила опору, яка спрямована завжди у бік, протилежну напрямку руху точки.

Розглянемо коливання матеріальної точки (рис.3.10) під дією відновлювальної сили  $\bar{F}$  і сили опору  $\bar{R}$ , яка пропорційна модулю швидкості точки  $\bar{V}$ .

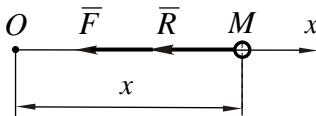


Рис. 3.10

Векторне рівняння руху точки в цьому випадку має вигляд:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k = \bar{F} + \bar{R}. \quad (3.10)$$

У проекції на вісь  $Ox$ :

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}, \quad (3.11)$$

оскільки  $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ , де  $\mu$  – коефіцієнт опору середовища.

Після перетворень, рівняння (3.11) набере вигляду:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{t} \dot{x} + \frac{c}{t} x = 0.$$

Якщо позначити:  $\frac{\mu}{m} = 2b$ ;  $\frac{c}{m} = k^2$ , то

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0. \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) є диференціальним рівнянням руху матеріальної точки під дією відновлюючої сили і сили опору, що пропорційна швидкості точки.

Розв'язування рівняння (3.12) має різний вигляд у залежності від співвідношення коефіцієнтів „ $b$ ” та „ $k$ ”.

### а) Випадок малого опору ( $b < k$ )

У цьому випадку розв'язок рівняння (3.12) має вигляд:

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1t + \alpha). \quad (3.13)$$

Рух, який відповідає рівнянню (3.13), має коливальний характер, тому що координата  $x$  періодично змінює свій знак, що залежить від знаку синусу, який входить у рівняння. Множник  $e^{-bt}$  показує на те, що амплітуда коливань з плином часу зменшується. Коливання такого вигляду називаються *затухаючими*.

У рівнянні (3.13):

$a$ ,  $\alpha$  – сталі інтегрування (визначаються за початковими умовами);

$b$  – коефіцієнт затухання;

$k_1$  – частота затухаючих коливань,  $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}$ .

Графік затухаючих коливань показано на рис.3.11.

Оскільки:

$$-1 \leq \sin(k_1t + \alpha) \leq 1,$$

то координата  $x$  затухаючих коливань розміщується між двома симетричними відносно осі абсцис кривими, які відповідають рівнянню

$$x = \pm a \cdot e^{-bt}.$$



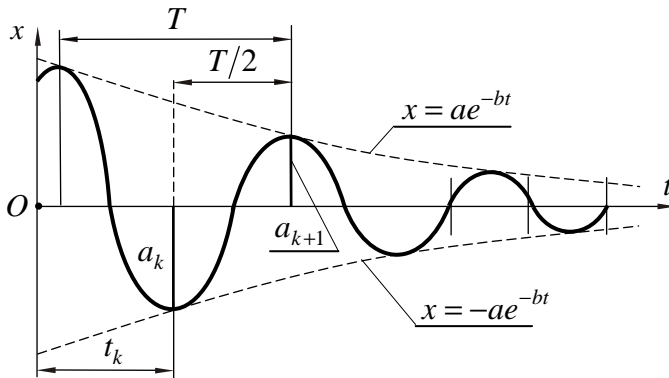


Рис. 3.11

Проміжок  $T_1$  часу, який дорівнює

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}} \quad (3.14)$$

називається періодом затухаючих коливань, тобто, це є час, за який точка здійснює повне коливання.

Вираз (3.14) можна представити у вигляді:

$$T_1 = \frac{2\pi}{k\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}} = \frac{T}{\sqrt{1 - \frac{b^2}{k^2}}}, \quad (3.15)$$

де  $T = \frac{2\pi}{k}$  – період вільних коливань.

**Амплітудою затухаючих коливань** називають найбільше відхилення точки у той чи інший бік від положення рівноваги.

На рис.3.11 показані амплітуда  $a_k$  і  $a_{k+1}$  у проміжок половини одного періоду:

$$a_k = ae^{-bt_k}; \quad a_{k+1} = ae^{-b\left(t_k + \frac{T_1}{2}\right)}.$$

Відношення наступної амплітуди до попередньої являє собою знаменник геометричної прогресії, який не змінюється під час усього коливального процесу, і називається **декрементом коливань**.

$$D = \frac{a_{\kappa+1}}{a_{\kappa}} = e^{-b \frac{T_1}{2}}. \quad (3.16)$$

Модуль натурального логарифма декремента коливань називається **логарифмічним декрементом**.

$$\eta = |\ln D| = \left| \ln e^{-b \frac{T_1}{2}} \right| = \left| -\frac{b T_1}{2} \ln e \right| = \frac{b T_1}{2}. \quad (3.17)$$

### б) Граничний випадок ( $b = k$ )

У цьому випадку рівняння руху точки має вигляд

$$x = e^{-bt} \left[ x_0 + (\dot{x} + bx_0)t \right]. \quad (3.18)$$

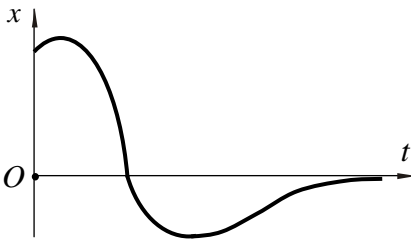


Рис. 3.12

Рух точки, який відповідає рівнянню (3.18), називається **апериодичним** і не є коливальним. Точка з будь якого положення наближається до положення  $x = 0$ . Графік цього руху наведено на рисунку 3.12.

### в) Випадок великого опору ( $b > k$ )

Розв'язок диференціального рівняння (3.12) в цьому випадку має вигляд:

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}, \quad (3.19)$$

$$\text{де} \quad r = \sqrt{b^2 - k^2}. \quad (3.20)$$

Оскільки функції  $e^{-(b+r)t}$  і  $e^{-(b-r)t}$  з плином часу монотонно зменшуються, наближаючись до нуля, то рух точки у цьому випадку не буде коливальним і вона під дією відновлювальної сили буде поступово наближатися до положення рівноваги. Рух також буде **апериодичним**.

У залежності від початкових умов матеріальна точка може здійснювати один із аперіодичних рухів, графіки яких показані на рис. 3.13.

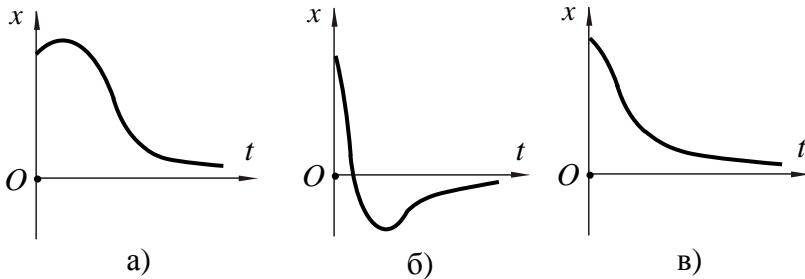


Рис. 3.13

Рис. 3.13,а характеризує рух точки з початковою швидкістю  $\bar{V}_0$ , яка співпадає з додатним напрямком осі  $Ox$ . Спочатку точка віддаляється від положення рівноваги, а потім під дією відновлювальної сили поступово наближається до цього положення.

Графіки, наведені на рис. 3.13,б і рис 3.13,в, відповідають рухові точки з початковою швидкістю  $\bar{V}_0$ , яка спрямована протилежно позитивному напрямку осі  $Ox$ . При достатньо великій початковій швидкості точка може здійснити перехід через положення рівноваги і після цього при зворотному русі наблизитися до цього положення (рис 3.13,б).

### 3.7. Контрольні запитання

1. Як записується диференціальне рівняння руху матеріальної точки під дією відновлюючої сили і сили опору, пропорційній швидкості точки?

2. Як визначається сила опору за модулем і напрямком?

3. Від яких параметрів залежить коефіцієнт “ $b$ ”, який характеризує опір середовища?

4. При яких значеннях коефіцієнта опору “ $b$ ” рух точки буде коливальним, а при яких - аперіодичним?

5. Записати рівняння затухаючих коливань в амплітудній формі.
6. Що називається періодом затухаючих коливань?
7. Як визначається амплітуда затухаючих коливань?
8. Про що свідчить декремент коливань?

### 3.8. Приклади розв'язування задач

Розв'язування задач на затухаючі коливання складається із 2-х частин. У першій частині основна увага відводиться ознайомленню з найважливішими поняттями і характеристиками затухаючого коливального процесу. Друга частина заняття присвячена складанню і розв'язуванню рівнянь затухаючих коливань.

#### Задача №8

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд  $m\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$ .

**Визначити** максимальне значення маси точки, при якому рух буде аперіодичним.

**Розв'язок.** Рух точки буде аперіодичним, якщо виконується умова:

$$b \geq k, \quad (1)$$

де  $b = \frac{\mu}{2m}$  – коефіцієнт опору,

$k = \sqrt{\frac{c}{m}}$  – частота вільних незатухаючих коливань.

Задане диференціальне рівняння  $m\ddot{x} + 4\dot{x} + 2x = 0$  приведемо до канонічного вигляду, розділивши на масу:

$$\ddot{x} + \frac{4}{m}\dot{x} + \frac{2}{m}x = 0.$$

Звідси:

$$2b = \frac{4}{m}; \quad b = \frac{2}{m}; \quad k^2 = \frac{2}{m}; \quad k = \sqrt{\frac{2}{m}}.$$

З урахуванням одержаних значень  $b$  і  $k$ , умова (1) набуде вигляду:

$$\frac{2}{m} \geq \sqrt{\frac{2}{m}}. \quad (2)$$

Вирішуємо нерівність (2) відносно маси  $m$ :

$$\frac{4}{m^2} \geq \frac{2}{m} \Rightarrow 4 \geq 2m \Rightarrow m \leq 2 \text{ кг}.$$

**Відповідь:** максимальне значення маси  $m = 2$  кг.

### Задача №9

Диференціальне рівняння руху матеріальної точки має вигляд:  $3\ddot{x} + 12\dot{x} + cx = 0$ , де  $x$  в см.

**Визначити** максимальне значення коефіцієнта жорсткості „ $c$ ”, при якому рух буде **апериодичним**.

**Розв'язування.** Рух точки буде апериодичним, якщо виконується умова:

$$b \geq k. \quad (1)$$

Вихідне диференціальне рівняння руху матеріальної точки приводимо до вигляду:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + \frac{cx}{3} = 0.$$

Тоді:

$$2b = 4; \quad b = 2; \quad k^2 = \frac{c}{3}; \quad k = \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Таким чином, умова (1) має вигляд:

$$2 \geq \sqrt{\frac{c}{3}}.$$

Звідки

$$4 \geq \frac{c}{3} \quad \text{і} \quad c \leq 12 \text{ Н/см}.$$

**Відповідь:** максимальне значення коефіцієнта жорсткості  $c = 12$  Н/см.

**Задача № 10**

Тіло вагою  $P = 19,6 \text{ Н}$ , що підвішене на пружині, яку сила  $P_1 = 10 \text{ Н}$  розтягує на  $\Delta l = 20 \text{ см}$ , при русі зустрічає опір, величина якого пропорційна першому ступеню швидкості. Сила опору при швидкості  $V = 1 \text{ см/с}$  дорівнює  $R = 0,2 \text{ Н}$ . У початковий момент пружина була розтягнута відносно положення рівноваги на  $\Delta = 5 \text{ см}$ , і тіло почало рухатися без початкової швидкості, тобто,  $V_0 = 0$ .

**Визначити** рівняння руху тіла  $x = f(t)$ .

**Розв'язок.** Перед тим, як записати загальне рівняння руху точки, необхідно з'ясувати, при якому опорі відбувається рух, тобто порівняти значення коефіцієнта  $b$  і кругової частоти  $k$ :

$$b = \frac{\mu}{2m}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

З умови задачі витікає:

$$c = \frac{P_1}{\Delta l} = \frac{10}{20} = 0,5 \text{ Н/см}.$$

$$b = \frac{\mu}{2 \cdot m} = \frac{R}{V \cdot 2m} = \frac{0,2 \cdot g}{2 \cdot P} = \frac{0,2 \cdot 981}{2 \cdot 19,6} = 5 \text{ с}^{-1},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{0,5 \cdot 981}{19,6}} = 5 \text{ с}^{-1}.$$

Таким чином,  $b = k$ , тобто коефіцієнт опору дорівнює круговій частоті, і рух точки буде аперіодичним.

У цьому випадку закон руху точки визначається залежністю (3.18):

$$x = e^{-bt} [x_0 + (\dot{x}_0 + bx_0)t] \quad (1)$$

Початкові умови:  $x_0 = \Delta = 5 \text{ см}$ ;  $\dot{x}_0 = V_0 = 0$ .

Підставляючи їх у рівняння (1), одержимо:

$$x = e^{-5t} [5 + (0 + 5 \cdot 5)t] = 5e^{-5t} (5t + 1). \quad (2)$$

**Відповідь:**  $x = 5e^{-5t} (5t + 1)$ , см.

Знайшовши за формулою (2) значення  $x$  в залежності від часу  $t$  (табл. 3.1), побудуємо графік  $x = f(t)$  (рис.3.14).

Таблиця 3.1

$t$ (с)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$x$ (см)	5	3,68	2,0	0,99	0,46	0,2

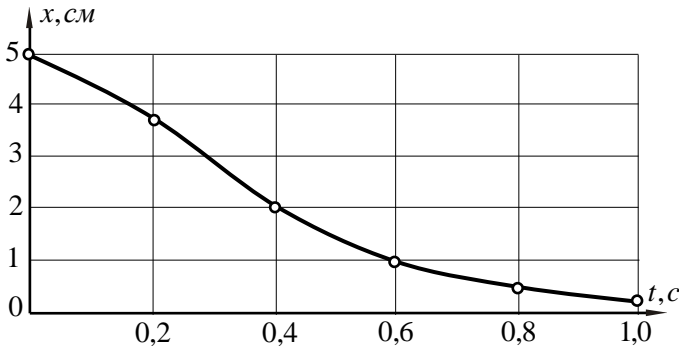


Рис. 3.14

Із графіка видно, що при  $b = k$  точка не коливається і швидко наближається до положення рівноваги ( $x = 0$ ). З'ясуємо тепер, чи переходить вантаж положення статичної рівноваги. Для цього прирівняємо  $x$  у рівнянні (2) до нуля:

$$x = 5e^{-5t}(5t + 1) = 0.$$

Моменти часу, у які вантаж знаходиться у положенні статичної рівноваги, визначаються із рівнянь:

$$5e^{-5t} = 0 \quad \text{і} \quad 5t + 1 = 0.$$

Із першого рівняння витікає:  $t_1 = \infty$ .

Із другого рівняння:  $t_2 = -0,2$  с.

Значення  $t_1 = \infty$  відповідає згасанню руху, від'ємне значення  $t_2 = -0,2$  с показує на відсутність переходу тіла через положення статичної рівноваги.

### Задача № 11

Вантажі вагою  $P_1 = 20 \text{ Н}$  і  $P_2 = 30 \text{ Н}$  підвішені (рис.3.15,а) у положенні статичної рівноваги до пружини 1, коефіцієнт жорсткості якої  $c = 4 \text{ Н/см}$ , і масляного демпфера 2, яка спричиняє пропорційну першому ступеню швидкості силу опору, що дорівнює  $\bar{R} = -\mu\bar{V}$ , де  $\mu = 1 \text{ Н} \cdot \text{с/см}$ . Вантаж  $P_2$  раптом зняли.

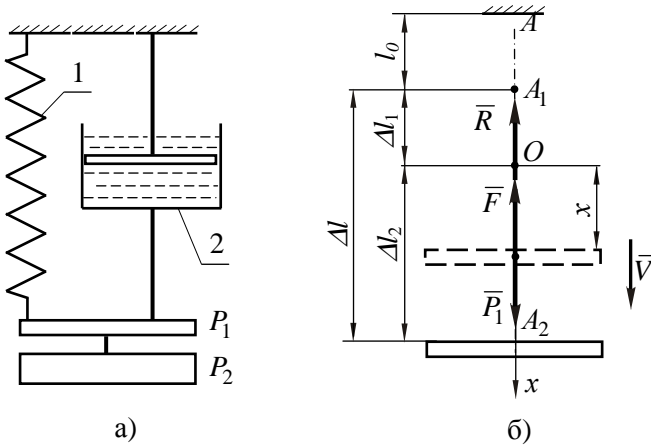


Рис. 3.15

**Визначити** рівняння  $x = f(t)$  руху вантажу  $P_1$  після зняття вантажу  $P_2$ .

**Розв'язок.** Зобразимо розрахункову схему для руху вантажу  $P_1$  (рис.3.15,б).

На схемі позначено:

$AA_1 = l_0$  – довжина недеформованої пружини;

$A_1O = \Delta l_1$  – деформація пружини під дією сили тяжіння вантажу  $P_1$ ;

$OA_2 = \Delta l_2$  – деформація пружини під дією сили тяжіння вантажу  $P_2$ ,



$A_1 A_2 = \Delta l$  – деформація пружини під дією сил тяжіння вантажів  $P_1$  і  $P_2$ .

Вісь коливань спрямуємо вниз (вісь  $Ox$ ). Початок відліку візьмемо у точці  $O$ , в положенні статичної рівноваги пружини під дією сили тяжіння вантажу  $P_1$ , оскільки під час руху вантаж  $P_2$  відсутній.

Виходячи з прийнятої схеми, початкові умови будуть: початкове положення вантажу  $P_1$ :

$$OA_2 = \frac{P_2}{c} = \frac{30}{4} = 7,5 \text{ см};$$

початкова швидкість вантажу  $P_1$ :

$$V_0 = 0.$$

Для визначення виду руху вантажу  $P_1$  необхідно порівняти значення коефіцієнта затухання  $b$  і кругової частоти вільних коливань  $k$ .

$$b = \frac{\mu}{2m_1}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m_1}},$$

де  $m_1$  – маса вантажу  $P_1$ ;

$c$  – коефіцієнт жорсткості пружини;

$\mu$  – коефіцієнт опору середовища.

Після підстановки числових даних отримаємо:

$$b = \frac{\mu}{2m_1} = \frac{1 \cdot g}{2P_1} = \frac{1 \cdot 981}{2 \cdot 20} = 24,5 \text{ c}^{-1},$$

$$k = \sqrt{\frac{c}{m_1}} = \sqrt{\frac{c \cdot g}{P_1}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 981}{20}} = 14 \text{ c}^{-1}.$$

Отже,  $b > k$ .

Таким чином, у задачі розглядається випадок великого опору ( $b > k$ ) і рівняння руху вантажу  $P_1$  має вигляд (3.20):

$$x = C_1 e^{-(b+r)t} + C_2 e^{-(b-r)t}, \quad (1)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  – сталі інтегрування, які визначаються за початковими умовами.

Підрахуємо величину коефіцієнта  $r$ :

$$r = \sqrt{b^2 - \kappa^2} = \sqrt{24,5^2 - 14^2} = 20,1 \text{ c}^{-1}.$$

З урахуванням того, що  $b = 45 \text{ c}^{-1}$ ,  $r = 20,1 \text{ c}^{-1}$ , рівняння (1) набуде вигляду:

$$x = C_1 e^{-44,6t} + C_2 e^{-4,4t}. \quad (2)$$

Для визначення сталих інтегрування  $C_1$  і  $C_2$  виразимо залежність швидкості вантажу  $P_1$  від часу:

$$\dot{x} = -44,6C_1 e^{-44,6t} - 4,4C_2 e^{-4,4t}. \quad (3)$$

Підставимо у рівняння (2)  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 7,5 \text{ см}$ , а у рівняння (3)  $t_0 = 0$ ,  $\dot{x}_0 = V_0 = 0$ .

Одержимо:

$$7,5 = C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2, \quad (2')$$

$$0 = -44,6C_1 e^0 - 4,4C_2 e^0 = 44,6C_1 + 4,4C_2. \quad (3')$$

З рівнянь (2') і (3') знаходимо:

$$C_1 = -0,82; \quad C_2 = 8,32.$$

Остаточо, рівняння руху вантажу  $P_1$  має вигляд:

$$x = 8,32e^{-4,4t} - 0,82e^{-44,6t}. \quad (4)$$

Як і у попередній задачі, побудуємо графік зміни координати  $x$  (табл. 3.2) в залежності від часу (рис.3.16).

Таблиця 3.2

$t$ (с)	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$x$ (см)	7,5	3,45	1,43	0,59	0,25	0,1

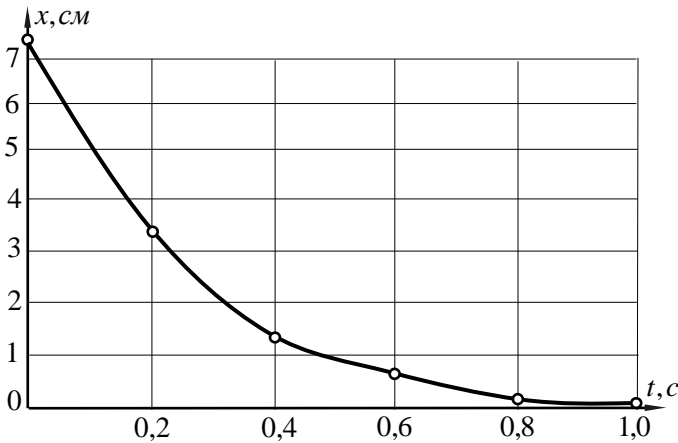


Рис. 3.16

**Відповідь:**  $x = 8,32e^{-4,4t} - 0,82e^{-44,6t}$ , см.

### Задача № 12

Тіло, вагою  $P = 57,7$  Н, яке підвішене до пружини, за відсутності сили опору коливається з періодом  $T = 0,4\pi$ , с, а якщо діє сила опору, пропорційна швидкості, то з періодом  $T_1 = 0,5\pi$ , с.

**Визначити** силу опору  $R$  при швидкості  $V = 1$  см/с, та визначити рівняння руху  $x = f(t)$ , якщо у початковий момент пружина була розтягнута із положення статичної рівноваги на  $x_0 = 4$  см.

**Розв'язок.** Якщо швидкість тіла  $V = 1$  см/с, то сила опору чисельно буде дорівнювати коефіцієнту сили опору, оскільки  $R = \mu \cdot V = \mu \cdot 1 = \mu$ .

Коефіцієнт пропорційності  $\mu$  пов'язаний з коефіцієнтом затухання залежністю:

$$\frac{\mu}{m} = 2b, \Rightarrow \mu = 2bm.$$

Отже, для визначення  $\mu$  необхідно знайти значення коефіцієнту затухання  $b$ , який можна визначити із виразу:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{k^2 - k_1^2},$$

де  $k$  – частота вільних коливань при відсутності опору,

$k_1$  – частота затухаючих коливань.

Оскільки

$$T = \frac{2\pi}{k}; \quad \text{а} \quad T_1 = \frac{2\pi}{k_1},$$

то

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,4\pi} = 5 \text{ c}^{-1}$$

і

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{0,5\pi} = 4 \text{ c}^{-1}$$

та

$$b = \sqrt{k^2 - k_1^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 \text{ c}^{-1}.$$

Отже, сила опору  $R = \mu$  при швидкості руху  $V = 1 \text{ см/с}$  дорівнює:

$$R = \mu = 2bm = 2 \cdot 3 \cdot \frac{57,7}{981} = 0,352 \text{ Н}.$$

Переходимо до визначення закону руху тіла. Складемо розрахункову схему (рис.3.17).

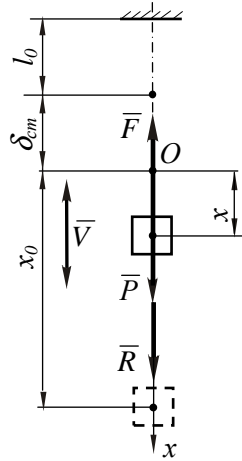


Рис. 3.17

На схемі:

$l_0$  – довжина недеформованої пружини,

$\delta_{cm}$  – статичне подовження пружини під дією сили тяжіння тіла,

$x$  – змінна координата положення тіла,

$x_0$  – початкове положення тіла.

Вісь коливань спрямовується вниз (вісь  $Ox$ ), а початок координат (точка  $O$ ) вибирається у положенні статичної рівноваги.

Оскільки  $b < k$  (випадок малого опору), то закон руху тіла під дією сили тяжіння  $\bar{P}$ , відновлюючої сили  $\bar{F}$  та сили опору  $\bar{R}$  виражається рівнянням:

$$x = ae^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (1)$$

Враховуючи, що  $b = 3$ ,  $k_1 = 4$ , то:

$$x = ae^{-3t} \sin(4t + \alpha). \quad (2)$$

Для визначення сталих інтегрування  $a$  і  $\alpha$ , крім рівняння (2), запишемо рівняння залежності швидкості від часу:

$$V = \dot{x} = -a3e^{-3t} \sin(4t + \alpha) + a4e^{-3t} \cos(4t + \alpha). \quad (3)$$

У рівняння (2) і (3) підставимо початкові умови:  
при  $t = 0$ ,  $x_0 = 4$  см,  $V_0 = 0$ :

$$4 = ae^0 \sin(0 + \alpha) = a \sin \alpha, \quad (2')$$

$$0 = 4ae^0 \cos(0 + \alpha) - 3ae^0 \sin(0 + \alpha),$$

$$0 = 4 \cos \alpha - 3 \sin \alpha. \quad (3')$$

З рівняння (3') визначаємо сталу  $\alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}, \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} = 0,925 \text{ рад}.$$

З рівняння (2') знаходимо сталу  $a$ :

$$a = \frac{4}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin 0,925} = 5 \text{ см}.$$

З урахуванням одержаних значень  $a = 5$  см,  $\alpha = 0,925$  рад, рівняння руху тіла буде:

$$x = 5e^{-3t} \sin(4t + 0,925).$$

Побудуємо графік залежності  $x = f(t)$  (рис.3.18)

Таблиця 3.3

$t$ (с)	0	0,1	0,25	0,4	0,5	0,6	1,0	1,2
$x$ (см)	4	3,39	2,21	0,87	0,24	-0,15	-0,24	-0,072

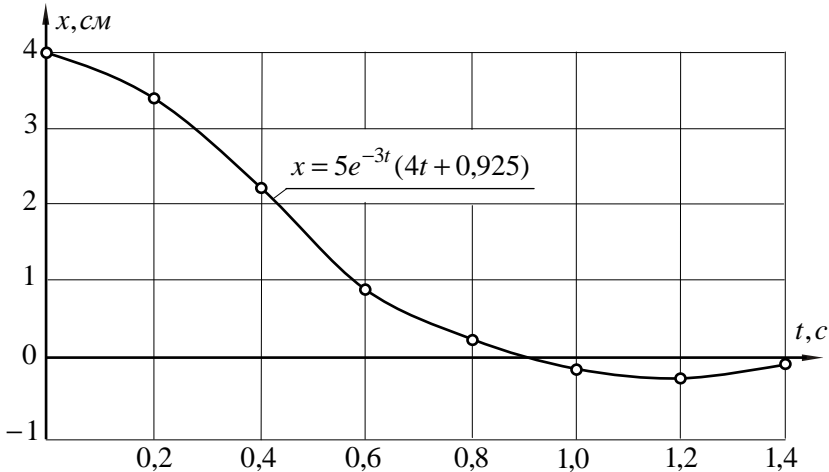


Рис. 3.18

### Задача № 13

Матеріальна точка  $M$  здійснює прямолінійні коливання під дією відновлювальної сили, модуль якої пропорційний відстані від точки до деякого нерухомого центра  $O$ , і сили опору середовища, модуль якої пропорційний швидкості точки. В початковий момент часу зміщення точки  $x_0=0$  і її швидкість  $V_0 = 1$  м/с.

**Визначити** закон руху точки, якщо період коливань дорівнює  $T_1 = 2$  сек, а декремент коливань –  $D = 0,5$ .

**Розв'язок.** Виберемо початок координат у нерухомому центрі  $O$ , а вісь  $Ox$  спрямуємо вздовж прямолінійної траєкторії точки  $M$ . Покажемо сили, що діють на матеріальну точку (рис.3.19):

$\bar{F}$  – відновлювальна сила, модуль якої пропорційний відхиленню точки від положення рівноваги  $F = cx$ , де  $c$  – коефіцієнт жорсткості;

$\bar{R}$  – сила опору середовища, модуль якої пропорційний швидкості точки  $R = \mu\dot{x}$ , де  $\mu$  – коефіцієнт опору середовища.

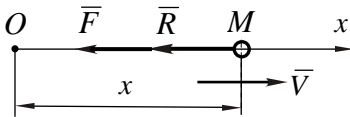


Рис. 3.19

Диференціальне рівняння руху точки  $M$  масою  $m$  буде мати наступний вигляд:

$$m\ddot{x} = -F_x - R_x,$$

або

$$m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}.$$

Зведемо записане рівняння до вигляду:

$$m\ddot{x} + \mu\dot{x} + cx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\mu}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

або

$$\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2x = 0, \quad (1)$$

де

$$2b = \frac{\mu}{m}; \quad k^2 = \frac{c}{m}.$$

Ми отримали диференціальне рівняння (3.12) затухаючих коливань.

Рішення диференціального рівняння (1) буде мати вигляд:

$$x = at^{-bt} \sin(k_1 t + \alpha). \quad (2)$$

Щоб знайти коефіцієнти  $k_1$  та  $b$ , скористаємося формулами (3.14) і (3.16):

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1}; \quad D = e^{-\frac{bT_1}{2}}.$$

З першої з цих формул знайдемо  $k_1$ :

$$k_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

З другої формули знайдемо  $b$ :

$$\begin{aligned} D = e^{-\frac{b \cdot 2}{2}} = 0,5 &\Rightarrow e^{-b} = 0,5 \Rightarrow -b \ln e = \ln 0,5 \Rightarrow \\ &\Rightarrow b = -\ln(1/2) \Rightarrow b = \ln 2. \end{aligned}$$

З урахуванням знайдених значень  $k_1$  та  $b$  рівняння (2) набуде вигляду:

$$x = a e^{-t \ln 2} \sin(\pi t + \alpha).$$

Враховуючи, що

$$e^{-t \ln 2} = 2^{-t},$$

то рівняння руху точки буде мати вигляд:

$$x = a 2^{-t} \sin(\pi t + \alpha). \quad (3)$$

Сталі  $a$  та  $\alpha$  визначимо з початкових умов. При  $t = 0$  початкова швидкість  $V_0 = \dot{x}_0 = 1$  м/с і початкова координата  $x_0 = 0$ .

Після попереднього диференціювання рівняння (2) за часом  $t$ :

$$\begin{aligned} V = \dot{x} &= a [(-\ln 2) \cdot 2^{-t} \sin(\pi t + \alpha) + 2^{-t} \cdot \pi \cdot \cos(\pi t + \alpha)] = \\ &= a \cdot 2^{-t} [-\ln 2 \cdot \sin(\pi t + \alpha) + \pi \cos(\pi t + \alpha)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки при  $t = 0$   $x_0 = 0$ ;  $\dot{x}_0 = 1$  м/с, то:

$$0 = a 2^{-0} \sin(\pi \cdot 0 + \alpha) \Rightarrow a \cdot \sin \alpha = 0; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} 1 &= a 2^{-0} [-\ln 2 \cdot \sin(\pi \cdot 0 + \alpha) + \pi \cos(\pi \cdot 0 + \alpha)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow a [-\ln 2 \cdot \sin \alpha + \pi \cos \alpha] = 1. \end{aligned} \quad (5)$$



З рівняння (4) визначимо постійну  $\alpha$ . Оскільки  $a \neq 0$ , то  $\sin \alpha = 0$ , тобто  $\alpha = 0$ .

З рівняння (5) після підстановки  $\alpha = 0$  знайдемо  $a$ :

$$a\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\pi}.$$

З урахуванням знайдених значень  $\alpha$  та  $a$ , рівняння (2) руху точки набуде вигляду:

$$x = \frac{1}{\pi} 2^{-t} \sin \pi t.$$

**Відповідь:**  $x = \frac{1}{\pi} 2^{-t} \sin \pi t.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 32.55; 32.58; 32.59; 32.64 [2].

### Тема 3. КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ (продовження)

#### ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ БЕЗ УРАХУВАННЯ ОПОРУ

##### ЗАНЯТТЯ № 7

##### Зміст

- 3.9. Вимушені коливання матеріальної точки без урахування опору.
- 3.10. Контрольні запитання.
- 3.11. Приклади розв'язування задач на вимушені коливання точки.

#### 3.9. Вимушені коливання матеріальної точки без урахування опору

Вимушені коливання здійснює матеріальна точка (рис.3.20), на яку разом з *відновлювальною силою*  $\bar{F}$  діє *збуджуюча сила*  $\bar{Q}$ , що періодично змінюється.

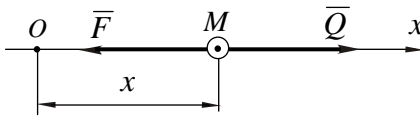


Рис. 3.20

Нехай проекція збуджуючої сили на вісь, що співпадає з напрямком руху точки, змінюється за законом:

$$Q_x = H \sin(pt + \delta), \quad (3.21)$$

де  $H$  – максимальне значення збуджуючої сили;  
 $p$  – частота зміни збуджуючої сили;  
 $pt + \delta$  – фаза зміни збуджуючої сили;  
 $\delta$  – початкова фаза зміни збуджуючої сили.

Диференціальне рівняння руху точки  $M$  у проекції на вісь  $Ox$  має вигляд:

$$m\ddot{x} = -F_x + Q_x = -cx + H \sin(pt + \delta),$$

або

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{H}{m} \sin(pt + \delta).$$

Якщо позначити

$$\frac{c}{m} = k^2; \quad \frac{H}{m} = h,$$

то одержимо диференціальне рівняння вимушених коливань матеріальної точки:

$$\ddot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta). \quad (3.22)$$

Рішення рівняння (3.22) в амплітудній формі, тобто, залежність координати  $x$  від часу  $t$ , має вигляд:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + A \sin(pt + \delta), \quad (3.23)$$

де  $A$  – амплітуда вимушених коливань має вигляд:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}. \quad (3.24)$$

Із рівняння (3.22) витікає, що рух точки являє собою накладення двох коливальних рухів.

Коливання, які визначаються першим доданком:

$$x_1 = a \sin(kt + \alpha),$$

мають частоту  $k$  вільних гармонічних коливань і називаються **власними коливаннями матеріальної точки**.

Коливання, які визначаються другим доданком

$$x_2 = A \sin(pt + \delta), \quad (3.25)$$

мають частоту  $p$  збуджуючої сили  $\bar{Q}$  і називаються **вимушеними коливаннями матеріальної точки**.

Таким чином, при одночасній дії відновлюючої та збуджуючої сил точка здійснює складний коливальний рух, який являє собою результат накладення вільних і вимушених коливань точки.

Із рівняння (3.24) витікає, що вимушені коливання не залежать від початкових умов.

Необхідно підкреслити, що частота  $p$  і період  $\tau = \frac{2\pi}{p}$  вимушених коливань є також **частотою і періодом збуджуючої сили**.

Вимушені коливання, частота яких менша за частоту вільних коливань точки, називають **вимушеними коливаннями малої частоти**.

Вимушені коливання, частота яких більша за частоту вільних коливань, називають **вимушеними коливаннями великої частоти**.

### Фаза вимушених коливань

Якщо  $p < k$  (випадок вимушених коливань малої частоти), то  $k^2 - p^2 > 0$ , і фаза вимушених коливань співпадає з частотою збуджуючої сили. У цьому випадку:

$$A = \frac{h}{k^2 - p^2}.$$

Якщо вимушені коливання відбуваються з великою частотою ( $p > k$ ), то  $k^2 - p^2 < 0$ , і для того, щоб амплітуда коливань була додатною, її записують у вигляді:

$$A = \frac{h}{p^2 - k^2}.$$

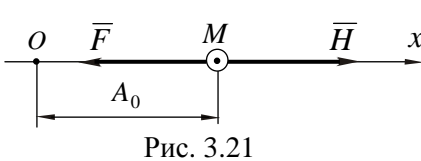
При цьому, фаза вимушених коливань великої частоти дорівнює  $pt + \delta - \pi$  і відрізняється від фази збуджуючої сили  $pt + \delta$  на величину  $\pi$ , тобто фази збуджуючої сили і вимушених коливань протилежні.

У випадку вимушених коливань малої частоти точка  $M$  завжди відхилена від початку координат  $O$  у той бік, в якому спрямована у даний момент збуджуюча сила  $\bar{Q}$ .

У випадку вимушених коливань великої частоти відхилення точки  $M$  від початку координат  $O$  завжди протилежне на-

прямку збуджуючої сили  $\bar{Q}$ . При цьому в обох випадках максимальне відхилення точки від початку координат відбувається в той момент часу, коли модуль збуджуючої сили досягає максимуму.

### Амплітуда вимушених коливань



Статичним відхиленням точки називається величина  $A_0$  (рис.3.21), яка визначається із умови:

$$F = c \cdot A_0 = H.$$

Звідси

$$A_0 = \frac{H}{c} = \frac{H/m}{c/m} = \frac{h}{k^2},$$

де  $H$  – максимальне значення збуджуючої сили.

Відношення амплітуди вимушених коливань  $A$  до статичного відхилення  $A_0$  називається **коефіцієнтом динамічності**.

При  $p < k$ :

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{k^2 - p^2}}{\frac{h}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}}. \quad (3.25)$$

При  $p > k$ :

$$\eta = \frac{A}{A_0} = \frac{\frac{h}{p^2 - k^2}}{\frac{h}{k^2}} = \frac{1}{\frac{p^2}{k^2} - 1}. \quad (3.27)$$

Графік зміни коефіцієнта динамічності в залежності від зміни частоти збуджуючої сили (рис.3.22) має розрив при значенні  $\frac{p}{k} = 1$ .

У цьому випадку коефіцієнт динамічності  $\eta$  збільшується до нескінченності і настає так зване явище резонансу.

### Явище резонансу

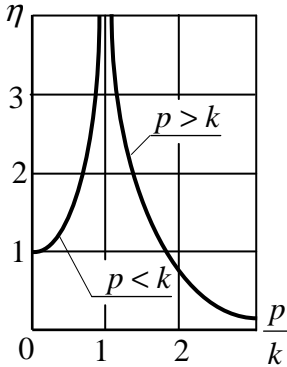


Рис. 3.22

Явище резонансу виникає коли частоти вимушених і вільних коливань точки збігаються, тобто:

$$p = k.$$

При цьому амплітуда  $A$  вимушених коливань точки дорівнює нескінченності і більшість рівнянь вимушених коливань, одержаних за умови  $p = k$ , втрачають сенс.

Диференціальне рівняння руху при  $p = k$ , набуде вигляду:

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(kt + \delta). \quad (3.28)$$

Рівняння (3.28) відрізняється від рівняння (3.22) тим, що у правій частині стоїть частота  $k$ , яка дорівнює частоті власних коливань точки.

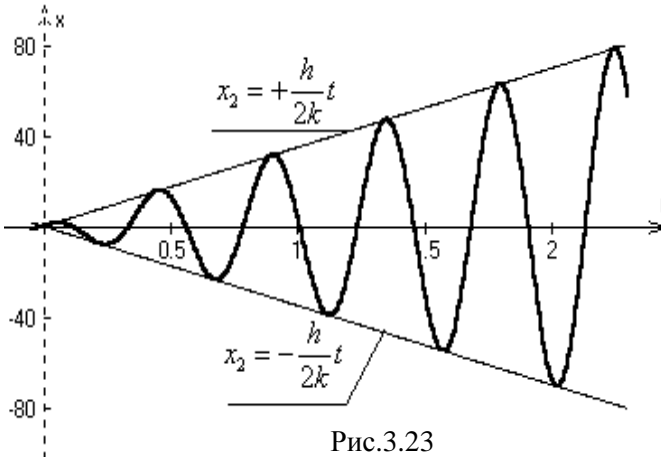
Розв'язок диференціального рівняння (3.28) має вигляд:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (3.29)$$

При резонансі частота і період вимушених коливань дорівнюють, відповідно, частоті  $k$  і періоду  $T$  вільних коливань точки, а фаза вимушених коливань  $(kt + \delta - \pi/2)$  відстає від фази збуджуючої сили  $(kt + \delta)$  на величину  $\pi/2$ .

Графіком відхилень для вимушених коливань під час резонансу є періодична крива, яка нагадує синусоїду (рис.3.23), що вписується в область, обмежену прямими  $x = \frac{h}{2k} t$  і  $x = -\frac{h}{2k} t$ , оскільки  $\sin(kt + \delta - \pi/2)$  не більший за одиницю. При  $\sin(kt + \delta - \pi/2) = \pm 1$  точки графіка лежать на цих прямих.

Із графіка видно, що амплітуди коливань збільшуються з часом.



### 3.10. Контрольні запитання

1. За яким законом може змінюватися збуджуюча сила?
2. Як визначається період збуджуючої сили?
3. Чому дорівнює амплітуда вимушених коливань?
4. Як визначається фаза вимушених коливань у випадках вимушених коливань великої і малої частот?
5. Що називається коефіцієнтом динамічності?
6. При яких умовах виникає явище резонансу?
7. Як визначається амплітуда вимушених коливань при резонансі?

### 3.11. Приклади розв'язування задач на вимушені коливання точки

Задачі на вимушені коливання точки рекомендується розв'язувати у наступній послідовності:

1. Вибрати систему координат, узявши за початок положення статичної рівноваги точки;
2. Записати початкові умови руху точки;
3. Зобразити на рисунку сили, прикладені до точки;
4. Скласти диференціальне рівняння руху в проекції на відповідну вісь;
5. Проінтегрувати диференціальне рівняння руху, використавши початкові умови для визначення сталих інтегрування, визначити шукані величини.

При розв'язуванні задачі матеріальну точку рекомендується зображати у проміжному положенні, де її координата на осі буде додатною.

Якщо складене диференціальне рівняння руху точки тотожне з одним із вище записаних рівнянь, то не інтегруючи це рівняння, можна зразу одержати розв'язок за наведеними формулами.

#### Задача № 14

На тіло, яке підвішене до пружини, діє вертикальна збуджуюча сила  $Q = 30 \sin 20t$ .

**Визначити** коефіцієнт динамічності, якщо кругова частота вільних коливань тіла  $k = 25 \text{ c}^{-1}$ .

**Розв'язок.** Порівнюючи задане в умовах значення для збуджуючої сили з виразом (3.21):

$$Q = H \sin(pt + \delta),$$

отримаємо, що частота її зміни  $p = 20 \text{ c}^{-1}$ .

Оскільки  $p < k$ , то в даній задачі маємо вимушені коливання малої частоти.



Коефіцієнт динамічності  $\eta$  у цьому випадку відповідно з (3.26) дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{20^2}{25^2}} = 2,78.$$

**Відповідь:**  $\eta = 2,78$ .

### Задача № 15

Диференціальне рівняння коливального руху матеріальної точки має вигляд:  $\ddot{x} + 36x = 50 \sin(5t + 0,8)$ .

**Визначити** коефіцієнт динамічності  $\eta$ .

**Розв'язок.** Порівнюючи задане в умовах задачі рівняння коливального руху з (3.22):

$$\ddot{x} + k^2 x = H \sin(pt + \delta),$$

отримаємо:

$$k = 6 \text{ c}^{-1}; \quad p = 5 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки  $p < k$ , то маємо вимушені коливання малої частоти і коефіцієнт динамічності  $\eta$  дорівнює:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{25}{36}} = 3,27.$$

**Відповідь:**  $\eta = 3,27$ .

### Задача № 16

Статичне подовження пружини  $\delta_{cm} = 9,81 \text{ см}$ .

**Визначити** коефіцієнт динамічності, якщо на вантаж діє вертикальна збуджуюча сила  $Q = 15 \sin 5t$ .

**Розв'язок.** Порівнюючи заданий в умовах задачі вираз для збуджуючої сили з (3.21):

$$Q = H \sin(pt + \delta),$$

отримаємо:  $p = 5 \text{ c}^{-1}$ .

Для визначення коефіцієнта динамічності  $\eta$  необхідно знайти частоту власних коливань  $k$ .

Враховуючи, що

$$k^2 = \frac{c}{m},$$

а статичне подовження пружини

$$\delta_{cm} = \frac{P}{c} = \frac{mg}{c} = \frac{g}{\frac{c}{m} k^2},$$

то

$$k^2 = \frac{g}{\delta_{cm}} = \frac{981}{9,81} = 100 \text{ c}^{-2}, \quad \text{або} \quad k = 10 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки  $p < k$ , то із (3.26) отримаємо:

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{k^2}} = \frac{1}{1 - \frac{5^2}{10^2}} = 1,33.$$

**Відповідь:**  $\eta = 1,33$ .

### Задача №17

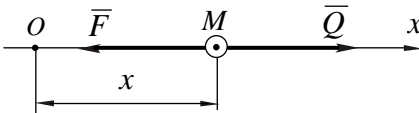


Рис. 3.24

Матеріальна точка  $M$  масою  $m = 2 \text{ кг}$  здійснює прямолінійні коливання вздовж осі  $Ox$  (рис.3.24) під дією збуджуючої сили

$Q = 4 \cos t \text{ (H)}$  та відновлювальної сили  $\bar{F}$ , модуль якої пропорційний відстані точки від початку координат (коефіцієнт пропорційності дорівнює  $8 \text{ кг/с}^2$ ).

**Визначити** закон руху точки, якщо в початковий момент  $x_0 = 0$  та  $V_0 = 0$ .

**Розв'язок.** Диференціальне рівняння руху матеріальної точки  $M$  у даному випадку має вигляд:

$$2\ddot{x} = -8x + 4\cos t,$$

або

$$\ddot{x} + 4x = 2\cos t = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1)$$

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням вимушених коливань (3.22), у якому:  $k^2 = 4$  (тобто  $k = 2$ );  $h = 2$ ;  $p = 1$  та  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .

Оскільки  $p \neq k$ , то загальне рішення рівняння (1) знаходимо з формули (3.23):

$$x = a \sin(kt + \alpha) + A \sin(pt + \delta).$$

У нашому випадку це рівняння матиме вигляд:

$$x = a \sin(2t + \alpha) + A \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right),$$

або

$$x = a \sin(2t + \alpha) + A \cos t.$$

Враховуючи, що  $k > p$ , то  $A = \frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{2}{4 - 1} = \frac{2}{3}$ .

Остаточно,

$$x = a \sin(2t + \alpha) + \frac{2}{3} \cos t. \quad (2)$$

Перейдемо до знаходження сталих  $a$  та  $\alpha$ . Для цього продиференціюємо рівняння (2) за часом  $t$ :

$$V = \dot{x} = 2a \cos(2t + \alpha) - \frac{2}{3} \sin t. \quad (3)$$

Підставимо у рівняння (2) та (3) початкові умови: при  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $V_0 = \dot{x}_0 = 0$ .

Тоді

$$0 = a \sin(2 \cdot 0 + \alpha) - \frac{2}{3} \cos 0, \quad (2')$$

$$0 = 2a \cos(2 \cdot 0 + \alpha) - \frac{2}{3} \sin 0, \quad (3')$$

або

$$0 = a \sin \alpha + \frac{2}{3},$$

$$0 = 2a \cos \alpha.$$

З другого рівняння знаходимо сталу  $\alpha$ . Оскільки  $a \neq 0$ , то нулю дорівнює  $\cos \alpha$ , тобто  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

З першого рівняння знаходимо сталу  $a$ :

$$0 = a \sin \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}, \quad a = -\frac{2}{3}.$$

Таким чином, шуканий закон руху точки  $M$  буде мати вигляд:

$$x = -\frac{2}{3} \sin \left( 2t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{3} \cos t = \frac{2}{3} (\cos t - \cos 2t).$$

**Відповідь:**  $x = \frac{2}{3} (\cos t - \cos 2t).$

### Задача № 18

Точка  $M$  масою  $m = 0,05$  кг рухається прямолінійно та притягується до нерухомого центру  $O$  силою, що пропорційна відстані точки до цього центра, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює  $c = 0,2$  Н/м. Крім того, на точку діє збуджуюча сила  $Q = 2 \sin 2t$ , яка виражена у Ньютонах (рис.3.24).

**Визначити** закон руху точки  $M$ , якщо в початковий момент  $x_0 = 0$  та  $V_0 = 1$  м/с.

**Розв'язок.** Складемо диференціальне рівняння руху матеріальної точки  $M$ , вибравши при цьому початок координат у центрі  $O$  та спрямувавши вісь  $Ox$  (рис.3.24) вздовж траєкторії точки:

$$0,05\ddot{x} = -0,2x + 2 \sin 2t ,$$

$$\ddot{x} + 4x = 40 \sin 2t . \quad (1)$$

Одержимо диференціальне рівняння у вигляді (3.22), в якому:

$$k^2 = 4; \quad h = 40; \quad p = 2; \quad \delta = 0.$$

Оскільки частота вільних коливань  $k = 2 \text{ c}^{-1}$  та частота вимушених коливань  $p = 2 \text{ c}^{-1}$  збігаються, то має місце явище резонансу. Закон руху точки  $M$  визначимо з формули (3.29):

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{2k} t \sin\left(kt + \delta - \frac{\pi}{2}\right).$$

У нашому випадку ця формула набуде вигляду:

$$\begin{aligned} x &= a \sin(2t + \alpha) + \frac{40}{2 \cdot 2} t \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= a \sin(2t + \alpha) - 10 \cdot t \cos 2t . \end{aligned} \quad (2)$$

Сталі  $a$  та  $\alpha$  знайдемо з початкових умов. Продиференціювавши рівняння (2) за часом  $t$ , одержимо:

$$V = \frac{dx}{dt} = 2a \cos(2t + \alpha) - 10 \cos 2t + 20t \sin 2t . \quad (3)$$

Підставимо у рівняння (2) та (3) початкові умови: при  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $V_0 = \dot{x}_0 = 0$ .

Тоді

$$0 = a \sin \alpha - 10 \cdot 0 \cos(2 \cdot 0),$$

$$0 = 2a \cos(2 \cdot 0 + \alpha) - 10 \cos(2 \cdot 0) + 20 \cdot 0 \cdot \sin(2 \cdot 0),$$

або

$$0 = a \cdot \sin \alpha ,$$

$$0 = 2a \cdot \cos \alpha - 10 .$$

З першого рівняння знаходимо сталу  $\alpha$ . Оскільки  $a \neq 0$ , то нулю дорівнює  $\sin \alpha$ , тобто  $\alpha = 0$ .

З другого рівняння знаходимо сталу  $a$ :

$$0 = 2 \cdot a \cdot \cos 0 - 10, \quad a = 5.$$

Таким чином, закон руху точки  $M$  буде мати вигляд:

$$x = 5 \sin 2t - 10t \cos 2t.$$

**Відповідь:**  $x = 5 \sin 2t - 10t \cos 2t$ .

### Задача № 19

До вертикальної пружини, верхній кінець якої закріплено, підвішений вантаж вагою  $P = 20 \text{ Н}$ , який надає статичне подовження пружині  $\delta_{\text{ст}} = 5 \text{ см}$ . На вантаж діє вертикальна збуджуюча сила  $S = 20 \sin 14t \text{ (Н)}$ . При  $t_0 = 0$  пружина була розтягнута на  $\Delta l = 6 \text{ см}$  і вантажу надана вниз швидкість  $V_0 = 10 \text{ см/с}$ .

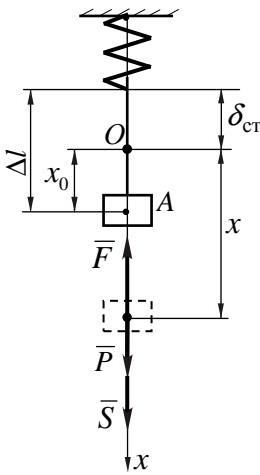


Рис. 3.25

**Визначити:** закон руху вантажу  $x = f(t)$ .

**Розв'язок.** Зобразимо схему руху вантажу (рис.3.25).

Вертикаль, за якою рухається вантаж, приймаємо за вісь  $x$ , додатним обираємо напрямком донизу. Початок координат збігається з положенням статичної рівноваги вантажу (точка  $O$ ). В початковий момент часу тіло знаходилося у точці  $A$ , тобто на відстані  $\Delta l = 6 \text{ см}$  від кінця недеформованої пружини.

Початкові умови для точки  $A$  (при  $t_0 = 0$ ) будуть мати наступний вигляд:

$$x_0 = \Delta l - \delta_{\text{ст}} = 6 - 5 = 1 \text{ см};$$

$$V_0 = 10 \text{ см/с}.$$

Для визначення закону руху вантажу необхідно порівняти значення частоти власних коливань  $k$  і частоти збуджуючої сили  $p$ .

Із рівняння збуджуючої сили  $S = 20 \sin 14t$  витікає, що  $p = 14 \text{ c}^{-1}$ .

Обчислимо значення частоти власних коливань  $k$ , виходячи з того, що

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}.$$

Оскільки  $m = \frac{P}{g}$ , а  $P = \delta_{\text{ст}} \cdot c$ , то  $c = \frac{P}{\delta_{\text{ст}}}$ .

Тоді

$$k = \sqrt{\frac{P \cdot g}{\delta_{\text{ст}} \cdot P}} = \sqrt{\frac{981}{5}} = 14 \text{ c}^{-1}.$$

Отже,  $p = k$ , тобто має місце резонанс, і рівняння руху тіла записується у вигляді:

$$x = a \sin(kt + \alpha) - \frac{h}{2k} t \cos kt, \quad (1)$$

де

$$k = 14 \text{ c}^{-1},$$

$$h = \frac{H}{m} = \frac{Hg}{P} = \frac{20 \cdot 981}{20} = 981 \text{ см/с}^2.$$

Отже,

$$x = a \sin(14t + \alpha) - \frac{981}{2 \cdot 14} t \cos 14t,$$

або

$$x = a \sin(14t + \alpha) - 35t \cos 14t. \quad (2)$$

Для визначення сталих інтегрування  $a$  і  $\alpha$  необхідно мати два рівняння. Одне рівняння одержано – це залежність (2) координати точки  $x$  від часу  $t$ .

Друге рівняння одержимо, продиференціювавши рівняння (2) за часом:

$$V = \dot{x} = 14a \cos(14t + \alpha) - 35 \cos 14t + 35 \cdot 14 \cdot t \cdot \sin 14t,$$

або

$$V = \dot{x} = 14a \cos(14t + \alpha) - 35 \cos 14t + 490t \sin 14t. \quad (3)$$

Підставимо у рівняння (2) і (3) початкові умови: при  $t_0 = 0$ ,  $x_0 = 1$  см,  $V_0 = 10$  см/с:

$$1 = a \cdot \sin(14 \cdot 0 + \alpha) - 35 \cdot 0 \cdot \cos(14 \cdot 0),$$

$$10 = 14a \cos(14 \cdot 0 + \alpha) - 35 \cdot \cos(14 \cdot 0) + 490 \cdot 0 \cdot \sin(14 \cdot 0).$$

Після спрощень:

$$1 = a \sin \alpha;$$

$$3,2 = a \cos \alpha.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо:

$$a = \sqrt{1^2 + 3,2^2} = 3,35 \text{ см},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,312; \quad \alpha = \operatorname{arctg} 0,312 = 0,303 \text{ рад}.$$

Таким чином, закон руху вантажу має вигляд:

$$x = 3,35 \sin(14t + 0,303) - 35t \cos 14t. \quad (4)$$

Побудуємо графік  $x = f(t)$  (рис.3.26) за рівнянням (4) відповідно з координатами  $t$  і  $x$ , які наводяться у таблиці.

$t, \text{ с}$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$x, \text{ см}$	1	2.73	6.72	-8.44	-12.1	-10.3	13.1

$t, \text{ с}$	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
$x, \text{ см}$	20.7	-8.61	-30.4	-1.48	36.7	16.1	-37.4

**Відповідь:**  $x = 3,35 \sin(14t + 0,303) - 35t \cos 14t.$



## Задача № 20

**Визначити**, яка повинна бути величина статичного прогину ресор залізничного вагона, щоб при швидкості  $V$  до  $40 \text{ м/с}$  вагон не потрапив у резонанс з поштовхами на стиках колії, відстань між якими  $l = 12 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Резонанс настає тоді, коли період вільних коливань вагона збігається з періодом збуджуючої сили, якою будуть поштовхи на стиках рейок.

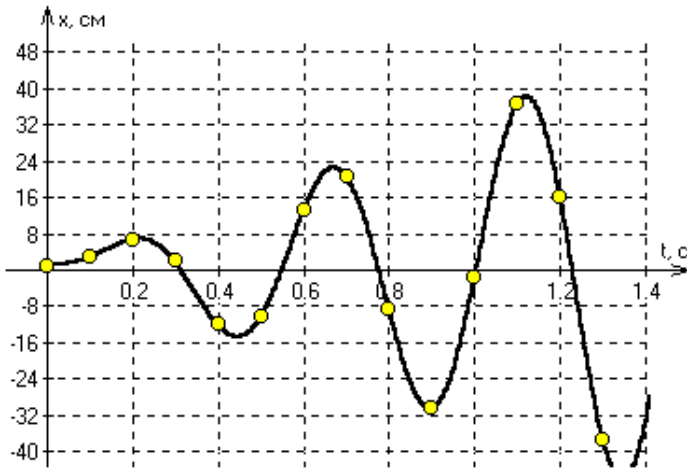


Рис.3.26

Період власних коливань вагона дорівнює

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

Знайдемо кругову частоту вільних коливань:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad m = \frac{P}{g}, \quad c = \frac{P}{\delta_{\text{ст}}}, \quad k = \sqrt{\frac{P \cdot g}{\delta_{\text{ст}} \cdot P}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{\text{ст}}}}.$$

Отже, період власних коливань дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}},$$

де  $g = 9,81 \text{ м/с}^2 = 981 \text{ см/с}^2$ .

Обчислимо період  $\tau$  збуджуючої сили, який дорівнює часу проходження вагоном довжини рейки ( $l = \tau \cdot V$ ):

$$\tau = \frac{l}{V}.$$

Визначимо  $\delta_{\text{ст}}$ , при якому буде явище резонансу, тобто, коли  $T = \tau$ :

$$2\pi \sqrt{\frac{\delta_{\text{ст}}}{g}} = \frac{l}{V}, \quad \text{або} \quad 4\pi^2 \frac{\delta_{\text{ст}}}{g} = \frac{l^2}{V^2}.$$

Звідки

$$\delta_{\text{ст}} = \frac{g \cdot l^2}{4\pi^2 \cdot V^2} = \frac{981 \cdot (1200^2)}{4 \cdot 3,14^2 (4000)^2} = 2,23 \text{ см}.$$

Таким чином, для уникнення резонансу вагона необхідно, щоб виконувалася нерівність:

$$\delta_{\text{ст}} < 2,23 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $\delta_{\text{ст}} < 2,23 \text{ см}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 32.76; 32.86; 32.87 [2].

## Тема 4. ВІДНОСНИЙ РУХ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

### ЗАНЯТТЯ № 8

#### Зміст

- 4.1. Відносний рух матеріальної точки.
- 4.2. Контрольні запитання.
- 4.3. Порядок розв'язування задач динаміки відносного руху матеріальної точки.
- 4.4. Приклади розв'язування задач.

#### 4.1. Відносний рух матеріальної точки

Закон руху Ньютона не може бути справедливим у неінерціальній системі відліку (тобто у такій, що рухається нерівномірно, на відміну від інерціальної, або абсолютної, системи відліку), оскільки при переході від одної до іншої неінерціальної системи відліку прискорення точки змінюється, а сила, як міра взаємодії тіл, від вибору системи відліку не залежить.

В абсолютній системі відліку другий закон Ньютона має вигляд:

$$m\bar{a}_{abc} = \bar{F}; \quad \bar{F} = \sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k,$$

де  $\bar{F}_k$  - активні сили,  $\bar{N}_k$  - реакції в'язей.

Щоб записати рівняння руху по відношенню до іншої системи відліку, яка рухається відносно абсолютної, застосуємо *теорему Коріоліса*.

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{від} + \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{кор},$$

тоді

$$m\bar{a}_{abc} = m\bar{a}_{від} + m\bar{a}_{пер} + m\bar{a}_{кор},$$

де  $\bar{a}_{від}$  - відносне прискорення,  
 $\bar{a}_{пер}$  - переносне прискорення,  
 $\bar{a}_{кор}$  - коріолісове прискорення.

Для надання рівнянню руху у рухомій системі координат такої ж самої форми, як і в абсолютній, вводяться так звані переносна і коріолісова сили інерції, відповідно:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -m\bar{a}_{пер}, \quad \bar{\Phi}_{кор} = -m\bar{a}_{кор},$$

тоді

$$m\bar{a}_{від} = m\bar{a}_{абс} + (-m\bar{a}_{пер}) + (-m\bar{a}_{кор}),$$

або

$$m\bar{a}_{від} = \bar{F} + \bar{\Phi}_{пер} + \bar{\Phi}_{кор}. \quad (4.1)$$

Таким чином, для того, щоб закон руху матеріальної точки у будь-якій системі відліку мав таку ж саму форму, як і в інерціальній системі, до точки, крім рівнодіючої заданих сил і реакцій в'язей, прикладають переносну і коріолісову сили інерції.

Коріолісова сила інерції за визначенням дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{кор} = -m\bar{a}_{кор}.$$

Оскільки

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{від}),$$

то

$$\bar{\Phi}_{кор} = -2m(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{від}). \quad (4.2)$$

Модуль коріолісової сили інерції дорівнює:

$$\Phi_{кор} = 2m\omega_{пер} V_{від} \sin(\bar{\omega}_{пер}, \bar{V}_{від}). \quad (4.3)$$

Напрямок коріолісової сили інерції є зворотнім напрямку коріолісового прискорення.

Якщо переносний рух являє собою рух з обертальною складовою (плоский або сферичний), то переносне прискорення можна представити у вигляді суми нормального і дотичного прискорень точки:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{пер}^{\tau}.$$

Отже, переносна сила інерції у цьому випадку складається з двох складових:

$$\overline{\Phi}_{пер} = \overline{\Phi}_{пер}^n + \overline{\Phi}_{пер}^\tau, \quad (4.4)$$

де

$$\overline{\Phi}_{пер}^n = -m\overline{a}_{пер}^n, \quad \overline{\Phi}_{пер}^\tau = -m\overline{a}_{пер}^\tau.$$

За модулем:

$$\Phi_{пер}^n = m\omega_{пер}^2 \cdot h, \quad \Phi_{пер}^\tau = m\varepsilon_{пер} \cdot h, \quad (4.5)$$

де  $h$  - відстань від точки до осі обертання;

$\omega_{пер}$ ,  $\varepsilon_{пер}$  - переносні кутові швидкість та прискорення.

У цьому випадку відносний рух матеріальної точки описується рівняннями:

$$m\overline{a}_{від} = \overline{F} + \overline{\Phi}_{пер}^n + \overline{\Phi}_{пер}^\tau + \overline{\Phi}_{кор}. \quad (4.6)$$

У випадку рівномірного обертання  $\varepsilon = 0$ , тобто

$$\overline{\Phi}_{пер}^\tau = 0.$$

Тоді

$$m\overline{a}_{від} = \overline{F} + \overline{\Phi}_{пер}^n + \overline{\Phi}_{кор}. \quad (4.7)$$

Якщо переносний рух є поступальним, то коріолісова сила інерції дорівнює нулю:

$$\overline{\Phi}_{кор} = 0.$$

Тоді

$$m\overline{a}_{від} = \overline{F} + \overline{\Phi}_{пер}^n. \quad (4.8)$$

Якщо переносний рух рівномірний і прямолінійний, то

$$\overline{\Phi}_{кор} = 0, \quad \overline{\Phi}_{пер}^n = 0.$$

У цьому випадку рівняння відносного руху матеріальної точки має вигляд:

$$m\overline{a}_{від} = \overline{F}. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.9) має той же вигляд, що і другий закон Ньютона, тобто відносне прискорення є у той же час і абсолютним. Цей випадок має назву **принципу відносності класичної механіки** і полягає у тому, що *ніяким фізичним експериментом не можна визначити, чи тіло знаходиться у спокої, чи воно рухається рівномірно та прямолінійно.*

У випадку відносного спокою ( $\bar{V}_{від} = 0$ ) матеріальної точки маємо:

$$\bar{a}_{від} = 0, \quad \bar{a}_{кор} = 0.$$

Тоді рівняння відносного спокою матеріальної точки має вигляд:

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_{пер} = 0. \quad (4.10)$$

## 4.2. Контрольні запитання

Який модуль і який напрямок мають переносна і коріолісова сили інерції?

У чому полягає різниця між диференціальними рівняннями відносного і абсолютного руху матеріальної точки?

У чому полягає принцип відносності класичної механіки?

Які системи відліку називаються інерціальними ?

## 4.3. Порядок розв'язування задач динаміки відносного руху матеріальної точки

Зобразити матеріальну точку у проміжному положенні.

Розкласти абсолютний рух матеріальної точки на відносний і переносний, вибрати нерухому систему координат, пов'язану з тілом, яке здійснює переносний рух.

Записати початкові умови відносного руху матеріальної точки.

Зобразити на рисунку активні сили, які прикладені до точки.

Визначити переносне і коріолісове прискорення і переносну та коріолісову сили інерції, додати їх до активних сил, які діють на матеріальну точку.

Записати рівняння відносного руху у векторній формі.

Спроекувати векторне рівняння на осі вибраної рухомої системи координат.

Проінтегрувати одержані диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування за допомогою початкових умов.

Визначити величини, які шукаються.

## Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

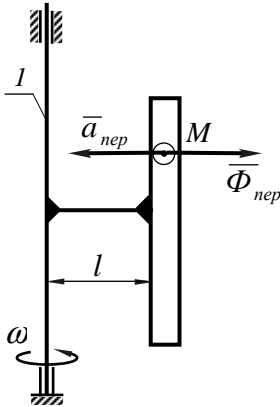


Рис.4.1

Куля  $M$  масою  $m = 0,2$  кг рухається зі швидкістю  $V_{від} = 19,62$  м/с відносно вертикальної трубки, яка на відстані  $l = 0,5$  м прикріплена до вертикального валу 1 (рис.4.1). Вал обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega = 5$  рад/с.

**Визначити** переносну силу інерції кулі.

**Розв'язок.** Спочатку визначимо, що відносним рухом точки  $M$  буде її рух відносно труби, а переносним рухом буде обертання вертикального валу 1, тобто, можна позначити його кутову швидкість  $\omega_{пер}$  замість  $\omega$ . У загальному випадку переносна сила інерції дорівнює:

$$\vec{\Phi}_{пер} = -m\vec{a}_{пер},$$

де  $m$  - маса матеріальної точки,

$\vec{a}_{пер}$  - переносне прискорення.

Оскільки рухома система координат, яка пов'язана з тілом, здійснює обертальний рух, то переносне прискорення складається з нормального та тангенціального прискорень:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{пер}^\tau .$$

У цьому випадку

$$\bar{\Phi}_{пер} = \bar{\Phi}_{пер}^n + \bar{\Phi}_{пер}^\tau ,$$

де

$$\Phi_{пер}^n = m a_{пер}^n = m \omega_{пер}^2 \cdot l ,$$

$$\Phi_{пер}^\tau = m a_{пер}^\tau = m \varepsilon_{пер} \cdot l ,$$

а  $l$  - відстань від точки до осі обертання.

Оскільки вал 1 обертається зі сталою кутовою швидкістю, то  $\varepsilon_{пер}$  дорівнює нулю і  $\bar{\Phi}_{пер}^\tau = 0$ .

Таким чином, у даній задачі переносне прискорення точки складається тільки з нормального:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^n .$$

Нормальне прискорення точки  $M$  спрямовано ліворуч, до центру обертання точки (рис.4.1), а переносна сила інерції  $\bar{\Phi}_{пер}$  - у сторону, протилежну  $\bar{a}_{пер}^n$ .

За модулем переносна сила інерції дорівнює:

$$\Phi_{пер}^n = -m a_{пер}^n = m \omega_{пер}^2 \cdot l = 0,2 \cdot 5^2 \cdot 0,5 = 2,5 \text{ Н} .$$

**Відповідь :**  $\Phi_{пер}^n = 2,5 \text{ Н} .$

## Задача № 2

Трубка обертається навколо осі  $O$  (рис.4.2) за законом  $\varphi = t^2$ . У трубці рухається куля  $M$  масою  $m = 0,1 \text{ кг}$  за законом  $OM = S = 0,2t^3$ .



**Визначити** модуль коріолісової сили інерції кулі у момент часу  $t_1 = 1$  с .

**Розв'язок.** Коріолісова сила інерції за визначенням дорівнює:

$$\vec{\Phi}_{кор} = -m\vec{a}_{кор}, \quad (1)$$

де  $\vec{a}_{кор}$  - коріолісове прискорення точки.

Спрямована  $\vec{\Phi}_{кор}$  у бік, протилежний коріолісову прискоренню.

В загальному випадку  $a_{кор}$  за величиною дорівнює:

$$a_{кор} = 2\omega_{пер} \cdot V_{від} \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\omega}_{пер}, \vec{V}_{від}}\right). \quad (2)$$

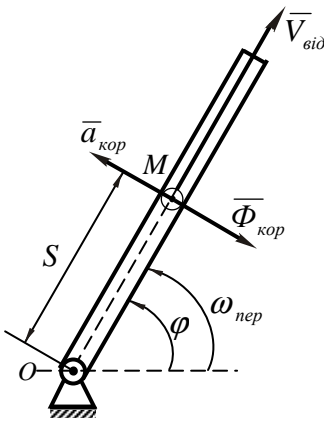


Рис.4.2

Обчислимо модуль коріолісового прискорення відповідно до умов даної задачі.

Обертання трубки навколо осі  $O$  є переносним рухом для кулі  $M$ . Закон обертального руху заданий:

$$\varphi = t^2,$$

отже, закон зміни кутової швидкості має вигляд:

$$\omega_{пер} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2) = 2t.$$

$$\text{При } t_1 = 1 \text{ с } \quad \omega_{пер} = 2 \text{ рад/с}.$$

Оскільки значення кутової швидкості додатне, то обертання трубки збігається з напрямом кута відліку  $\varphi$  (рис.4.2).

Переміщення кулі вздовж трубки є відносним рухом, рівняння якого задано у вигляді:

$$S = 0,2t^3.$$

Тоді, швидкість відносного руху кулі визначиться із виразу:

$$V_{\text{від}} = \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}(0,2t^3) = 0,6t^2.$$

При  $t_1 = 1 \text{ с}$        $V_{\text{від}} = 0,6 \text{ м/с}$ .

Оскільки вектор кутової швидкості  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  є перпендикулярний площині, в якій обертається трубка, то кут між векторами  $\bar{\omega}_{\text{пер}}$  і  $\bar{V}_{\text{від}}$  дорівнює  $90^\circ$ .

Таким чином, модуль коріолісового прискорення згідно з (2) дорівнює:

$$a_{\text{кор}} = 2 \cdot 2 \cdot 0,6 \cdot \sin 90^\circ = 2,4 \text{ м/с}^2,$$

а величина коріолісової сили інерції:

$$\Phi_{\text{кор}} = m \cdot a_{\text{кор}} = 0,1 \cdot 2,4 = 0,24 \text{ Н}.$$

Переходимо до визначення напрямку  $\bar{\Phi}_{\text{кор}}$ .

Згідно з (1)  $\bar{\Phi}_{\text{кор}}$  спрямована у бік, протилежний коріолісову прискоренню  $\bar{a}_{\text{кор}}$ . Якщо (за правилом Жуковського) повернути вектор відносної швидкості  $\bar{V}_{\text{від}}$  навколо точки  $M$  на  $90^\circ$  у бік переносного обертання (тобто, проти руху годинникової стрілки), то повернутий вектор укаже нам напрям  $\bar{a}_{\text{кор}}$  (рис. 4.2) і, таким чином, напрям коріолісової сили інерції  $\bar{\Phi}_{\text{кор}}$ .

**Відповідь:**  $\Phi_{\text{кор}} = 0,24 \text{ Н}$ .

### Задача №3

Тіло вагою  $2 \text{ Н}$  покладене на гладку грань тригранної призми, друга грань якої лежить на горизонтальній площині.

**Визначити**, яке горизонтальне прискорення повинна мати призма, щоб тіло не рухалось відносно призми, і який тиск спричиняє тіло на призму у цьому випадку, якщо  $\alpha = 30^\circ$ .

**Розв'язок.** Якщо тіло знаходиться у стані відносного спокою по відношенню до призми, яка рухається, то геометрична сума прикладених до тіла сил і переносної сили інерції дорівнює нулю.

До тіла прикладені сила тяжіння  $\vec{G}$  і реакція гладенької поверхні  $\vec{N}$  (рис.4.3). Умовно прикладемо до тіла переносну силу інерції  $\vec{\Phi}_{nep}$  (модуль якої  $\Phi_{nep} = ma_{nep}$ , де  $m$  - маса тіла), спрямовану протилежно переносному прискоренню  $\vec{a}_{nep}$ , яке являє собою прискорення призми.

Тоді

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{\Phi}_{nep} = 0.$$

Спроекуємо це рівняння на осі  $Ox$  і  $Oy$ , які пов'язані з рухомою призмою:

$$G \sin \alpha - \Phi_{nep} \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$N - G \cos \alpha - \Phi_{nep} \sin \alpha = 0. \quad (2)$$

З першого рівняння знайдемо модуль прискорення  $\vec{a}_{nep}$ :

$$mg \sin \alpha - ma_{nep} \cos \alpha = 0,$$

$$a_{nep} = g \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = g \operatorname{tg} \alpha.$$

З урахуванням числових значень:

$$a_{nep} = 9,81 \operatorname{tg} 30^\circ = 5,66 \text{ м/с}^2.$$

Визначимо переносну силу інерції:

$$\Phi_{nep} = ma_{nep} = mg \operatorname{tg} \alpha = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Із другого рівняння визначимо модуль реакції призми:

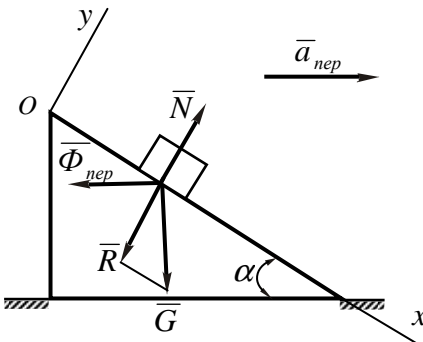


Рис.4.3

$$N = G \cos \alpha + \Phi_{\text{неп}} \sin \alpha = G \cos \alpha + G \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha = G \cos \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha).$$

З урахуванням числових значень:

$$N = 2 \cos 30^\circ (1 + \operatorname{tg}^2 30^\circ) = 2,3 \text{ Н.}$$

Тиск  $R$  тіла на призму за модулем дорівнює реакції  $N$ , але спрямований у протилежний бік.

**Відповідь:**  $a_{\text{неп}} = 5,66 \text{ м/с}^2$ ,  $R = 2,3 \text{ Н}$ .

#### Задача № 4

Горизонтальна трубка  $CD$  рівномірно обертається навколо вертикальної осі  $AB$  з кутовою швидкістю  $\omega$ . Посередині трубки знаходиться тіло  $M$ .

**Визначити** швидкість  $V$  тіла відносно трубки у момент його виліту з трубки, якщо у початковий момент  $V_0 = 0$ ,  $x = x_0$ , довжина трубки  $l$ . Тертям знехтувати.

**Розв'язок.** Зобразимо тіло  $M$  у поточному положенні у трубці (рис.4.4).

Рух тіла  $M$  розкладемо на відносний (по відношенню до

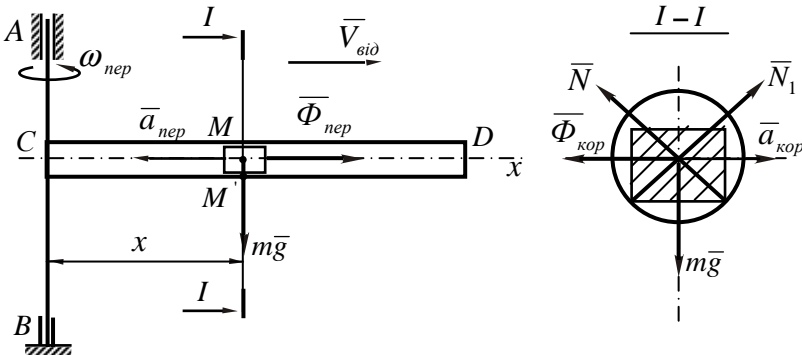


Рис.4.4

трубки  $CD$ ) і переносний (разом з трубкою.) З трубкою пов'яжемо рухому систему координат: вісь  $x$  спрямуємо вздовж трубки  $CD$ , вісь  $y$  спрямуємо уздовж осі обертання.

Початкові умови руху по відношенню до рухомої системи координат мають вигляд:

$$\text{при } t_0 = 0, \quad V_{0x} = 0, \quad x = x_0 > 0.$$

До тіла  $M$  прикладені наступні сили: сила тяжіння  $m\bar{g}$  і реакції трубки  $\bar{N}$  та  $\bar{N}_1$ , які лежать у площині I-I.

Використаємо теорію відносного руху, для чого необхідно до цих сил додати переносну і коріолісову сили інерції.

Переносна сила інерції  $\bar{\Phi}_{пер}$  дорівнює:

$$\bar{\Phi}_{пер} = -m\bar{a}_{пер}.$$

Переносне прискорення  $\bar{a}_{пер}$  тіла  $M$  дорівнює прискоренню тієї точки  $M'$  рухомої системи координат, з якою співпадає у даний момент тіло  $M$ .

Переносне прискорення точки  $M'$  у загальному випадку дорівнює:

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^n + \bar{a}_{пер}^\tau.$$

Оскільки трубка  $CD$  обертається зі сталою кутовою швидкістю, тобто  $\varepsilon_{пер} = 0$ , то

$$a_{пер}^\tau = \varepsilon_{пер}x = 0; \quad \bar{a}_{пер} = \bar{a}_{пер}^n.$$

За модулем  $a_{пер}^n = \omega^2 x$  і спрямоване до осі обертання. Отже, переносна сила інерції дорівнює:

$$\Phi_{пер} = m\omega_{пер}^2 x$$

і спрямована у сторону додатного напрямку осі  $x$ .

Коріолісове прискорення дорівнює:

$$\bar{a}_{кор} = 2(\bar{\omega}_{пер} \times \bar{V}_{від}).$$

Спрямоване  $\bar{a}_{кор}$  перпендикулярно до площини рисунка від нас. Отже, коріолісова сила інерції спрямована до нас. На рис.4.4 праворуч показано переріз 1–1, перпендикулярний до осі  $x$ , на якому зображені реакції  $\bar{N}$  і  $\bar{N}_1$  та коріолісова сила інерції  $\bar{\Phi}_{кор}$ .

За модулем

$$\Phi_{кор} = 2m \omega_{неп} V_{від} \sin 90^\circ = 2m\omega_{неп} V_{від}.$$

Рівняння відносного руху з урахуванням сил  $m\bar{g}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_1$  і складових сили інерції має вигляд:

$$m\bar{a}_{від} = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{N}_1 + \bar{\Phi}_{неп} + \bar{\Phi}_{кор}.$$

Для визначення швидкості тіла  $M$  відносно трубки  $CD$  споектуємо це рівняння на вісь  $x$ :

$$m \frac{dV_x}{dt} = (\bar{\Phi}_{неп})_x = m\omega_{неп}^2 x; \quad \text{або} \quad \frac{dV_x}{dt} = \omega_{неп}^2 x.$$

Сили  $m\bar{g}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{N}_1$  та  $\bar{\Phi}_{кор}$  перпендикулярні до осі  $x$  і проєктуються у точку. Для розв'язання останнього диференціального рівняння зробимо перетворення:

$$\frac{dV_x}{dt} \cdot \frac{dx}{dx} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dV_x}{dx} = V_x \frac{dV_x}{dx} = \omega_{неп}^2 x.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$V_x dV_x = \omega_{неп}^2 x dx, \quad \int V_x dV_x = \omega_{неп}^2 \int x dx + C_1'$$

$$\frac{V_x^2}{2} = \omega_{неп}^2 \frac{x^2}{2} + C_1' \Rightarrow V_x^2 = \omega_{неп}^2 x^2 + C_1.$$

Сталу інтегрування  $C_1$  визначаємо за початковими умовами: при  $x = x_0$   $V_{0x} = 0$ .

$$0 = \omega_{неп}^2 x_0^2 + C_1, \Rightarrow C_1 = -\omega_{неп}^2 x_0^2.$$

Тоді

$$V_x^2 = \omega_{неп}^2 x^2 - \omega_{неп}^2 x_0^2 = \omega_{неп}^2 (x^2 - x_0^2),$$

звідки

$$V_x = \omega_{\text{пер}} \sqrt{x^2 - x_0^2}.$$

У момент вильоту тіла  $M$  з трубки (при цьому  $x=l$ ), швидкість тіла дорівнює:

$$V = \omega_{\text{пер}} \sqrt{l^2 - x_0^2}.$$

**Відповідь:**  $V = \omega_{\text{пер}} \sqrt{l^2 - x_0^2}.$

### Задача № 5

Напівколо  $BCD$  радіусом  $R=0,5$  м обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю  $\omega_{\text{пер}} = 2$  рад/с. По ньому із точки  $B$ , яка зміщена вправо від осі  $Oy$  на малу величину, починає сковзати без тертя кільце  $M$ .

**Визначити** відносну швидкість  $V_{\text{від}}$  у точці  $C$ , якщо початкова швидкість кільця  $V_0 = 0$ .

**Розв'язок.** Зобразимо кільце у проміжному положенні на дузі  $BCD$ , яке визначається кутом  $\alpha$ . Кільце  $M$  здійснює складний рух, який можна розкласти на відносний - по напівколу  $BCD$ , і переносний обертальний разом з напівколом  $BCD$  навколо вертикальної осі  $Oy$  (рис.4.5).

Початкові умови відносного руху кільця  $M$  мають вигляд: при  $t_0 = 0$   $V_0 = 0$ .

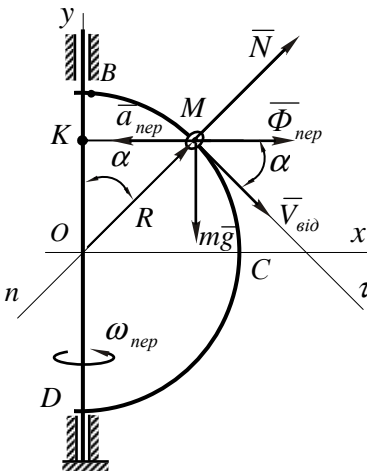


Рис.4.5

На кільце діють наступні сили: сила тяжіння кільця  $\overline{mg}$ , нормальна реакція напівкола -  $\overline{N}$ . Додамо силу інерції у переносному русі  $\overline{\Phi}_{пер}$  і коріолісову силу інерції  $\overline{\Phi}_{кор}$ . Переносна сила інерції дорівнює:

$$\overline{\Phi}_{пер} = \overline{\Phi}_{пер}^n + \overline{\Phi}_{пер}^\tau.$$

$$\Phi_{пер}^n = ma_{пер}^n = m\omega_{пер}^2 \cdot KM = m\omega_{пер}^2 R \sin \alpha,$$

$$\Phi_{пер}^\tau = ma_{пер}^\tau = m\varepsilon_{пер} \cdot KM = m\varepsilon_{пер} R \sin \alpha,$$

де  $\omega_{пер}$ ,  $\varepsilon_{пер}$  - кутова швидкість і кутове прискорення переносного обертання;

$KM$  - радіус обертання точки  $M$  навколо осі  $Oy$ .

Оскільки обертання рівномірне, то  $\varepsilon_{пер} = 0$ , і  $\Phi_{пер}^\tau = 0$ . Отже, переносна сила інерції  $\overline{\Phi}_{пер}$  буде мати тільки одну складову -  $\overline{\Phi}_{пер}^n$ , яка спрямована у сторону, протилежну нормальному прискоренню  $\overline{a}_{пер}^n$ , і за модулем дорівнює:

$$\Phi_{пер} = m\omega_{пер}^2 R \sin \alpha.$$

Коріолісова сила інерції спрямована у бік, протилежний коріолісовому прискоренню  $\overline{a}_{кор}$ :

$$\overline{\Phi}_{кор} = -m\overline{a}_{кор}, \quad \overline{a}_{кор} = 2(\overline{\omega}_{пер} \times \overline{V}_{від}).$$

Відносна швидкість  $\overline{V}_{від}$  спрямована за дотичною до дуги  $BC$  у бік руху. Тоді прискорення  $\overline{a}_{кор}$  спрямоване перпендикулярно до площини рисунка від нас,  $\overline{\Phi}_{кор}$  у протилежний бік, тобто, до нас.

Запишемо рівняння відносного руху кільця  $M$ :

$$m\overline{a}_{від} = \overline{mg} + \overline{N} + \overline{\Phi}_{пер} + \overline{\Phi}_{кор}.$$



Оскільки траєкторія кільця  $M$  відома (коло), то з кільцем пов'яжемо природну систему координат  $\tau Mn$ .

Складемо диференціальне рівняння відносного руху у проекції на дотичну  $\tau$  до дуги  $BC$  у точці  $M$ :

$$ma_{\text{від}}^{\tau} = mg \sin \alpha + \Phi_{\text{неп}}^n \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

Проекція  $\bar{\Phi}_{\text{кор}}$  на вісь  $\tau$  дорівнює нулю, оскільки коріолісова сила інерції перпендикулярна до площини, у якій лежить вісь  $\tau$ .

Визначимо відносну швидкість  $V_{\text{від}}$  з рівняння (1).

$$ma_{\text{від}}^{\tau} = mg \sin \alpha + m\omega_{\text{неп}}^2 R \sin \alpha \cdot \cos \alpha,$$

$$a_{\text{від}}^{\tau} = g \sin \alpha + \frac{\omega_{\text{неп}}^2 R}{2} \sin 2\alpha,$$

$$\frac{dV_{\text{від}}}{dt} = g \sin \alpha + \frac{\omega_{\text{неп}}^2 R}{2} \sin 2\alpha.$$

Перейдемо від змінної  $t$  до змінної  $\alpha$  наступним чином:

$$\frac{dV_{\text{від}}}{dt} = \frac{dV_{\text{від}}}{dt} \frac{d\alpha}{d\alpha} = \frac{dV_{\text{від}}}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dt},$$

Оскільки

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \frac{V_{\text{від}}}{R},$$

то

$$\frac{V_{\text{від}}}{R} \cdot \frac{dV_{\text{від}}}{d\alpha} = g \sin \alpha + \frac{\omega_{\text{неп}}^2 R}{2} \sin 2\alpha. \quad (2)$$

Розділимо змінні у рівнянні (2) і проінтегруємо:

$$V_{\text{від}} \cdot dV_{\text{від}} = Rg \sin \alpha \cdot d\alpha + \frac{\omega_{\text{неп}}^2 R^2}{2} \sin 2\alpha \cdot d\alpha,$$

$$\int V_{\text{від}} \cdot dV_{\text{від}} = Rg \int \sin \alpha \cdot d\alpha + 0,5 \omega_{\text{неп}}^2 R^2 \int \sin 2\alpha \cdot d\alpha + C_1,$$

$$\frac{V_{\text{від}}^2}{2} = -Rg \cos \alpha - \frac{1}{4} \omega_{\text{неп}}^2 R^2 \cdot \cos 2\alpha + C_1.$$

Визначимо сталу інтегрування  $C_1$ . Оскільки при  $t_0 = 0$   
 $\alpha_0 = 0$ ,  $V_{\text{від}} = 0$ , то

$$0 = -Rg - \frac{1}{4} \omega_{\text{неп}}^2 R^2 + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = Rg + \frac{1}{4} \omega_{\text{неп}}^2 R^2.$$

Остаточно,

$$V_{\text{від}}^2 = 2Rg + \frac{1}{2} \omega_{\text{неп}}^2 R^2 - 2Rg \cos \alpha - \frac{1}{2} \omega_{\text{неп}}^2 R^2 \cos 2\alpha,$$

$$V_{\text{від}} = \sqrt{2Rg(1 - \cos \alpha) + 0,5 \omega_{\text{неп}}^2 R^2 (1 - \cos 2\alpha)}.$$

Підрахуємо  $V_{\text{від}}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ :

$$V_{\text{від}} = \sqrt{2Rg + \omega_{\text{неп}}^2 R^2} = \sqrt{2Rg \left( 1 + \frac{\omega_{\text{неп}}^2 R}{2g} \right)}.$$

Підставляємо  $\omega_{\text{неп}} = 2c^{-1}$ ;  $R = 0,5$  м.

$$V_{\text{від}} = \sqrt{2 \cdot 0,5 \cdot 9,81 \left( 1 + \frac{2^2 \cdot 0,5}{2 \cdot 9,81} \right)} = 3,3 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_{\text{від}} = 3,3$  м/с.

### Задача №6

Порожня трубка  $AB$  (рис. 4.6) обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$  навколо вертикальної осі  $CD$  та складає з нею незмінний кут  $\alpha = 60^\circ$ . В трубці знаходиться куля  $M$  вагою  $G = 4$  Н.

**Визначити** закон руху кулі  $M$  відносно трубки  $AB$ , якщо початкова швидкість кулі дорівнює нулю, початкова відстань від точки  $O$  дорівнює  $l = 5$  см, кутова швидкість трубки  $\omega = 3,14$  рад/с. Тертям кулі об стінки трубки знехтувати.

**Розв'язок.** Зобразимо кулю, яку приймаємо за матеріальну точку, в довільному положенні в трубці  $AB$  (рис.4.6).

Виберемо початок рухомої системи відліку, яку пов'яжемо з трубкою  $AB$ , в точці  $O$  та ось  $Ox$  спрямуємо вздовж трубки від точки  $O$  до точки  $B$ .

Обертання цієї системи навколо осі  $CD$  є переносним рухом для кулі  $M$ .

Відносним рухом кулі  $M$  є її рух вздовж трубки. На кулю  $M$  діє сила тяжіння  $\vec{G}$  та реакція трубки  $\vec{N}$ , яка перпендикулярна осі  $Ox$ . До цих сил треба додати переносну  $\vec{\Phi}_{пер}$  та коріолісову  $\vec{\Phi}_{кор}$  сили інерції. З рівняння (4.2) витікає, що сила інерції  $\vec{\Phi}_{кор}$  спрямована до нас перпендикулярно до площини рисунка (на рис.4.6 силу  $\vec{\Phi}_{кор}$  не показано).

Оскільки переносне обертання рівномірне, то переносне прискорення складається тільки з нормального  $\vec{a}_{пер}^n$ , спрямованого до осі обертання  $CD$ , тобто  $\vec{a}_{пер} = \vec{a}_{пер}^n$ . Отже, переносна сила інерції спрямована праворуч, перпендикулярно  $CD$ .

За модулем  $\vec{\Phi}_{пер}$  дорівнює:

$$\Phi_{пер} = ma_{пер}^n = m\omega^2 x \sin \alpha,$$

де  $x \sin \alpha$  - відстань від точки  $M$  до осі обертання  $CD$ ,

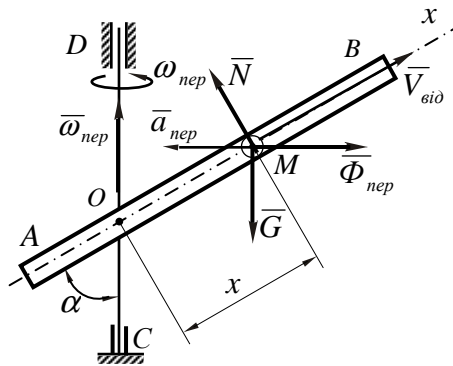


Рис.4.6

$$\Phi_{\text{пер}} = \frac{G}{g} \omega^2 x \sin 60^\circ = \frac{4}{9,81} (3,14)^2 \cdot 0,866x = 3,5x. \quad (1)$$

Запишемо рівняння відносного руху кулі  $M$  у векторній формі:

$$m\bar{a}_{\text{від}} = \bar{G} + \bar{N} + \bar{\Phi}_{\text{пер}} + \bar{\Phi}_{\text{кор}}, \quad (2)$$

та споектуємо вираз (2) на вісь  $Ox$ :

$$ma_{\text{від}} = -G \cos \alpha + \Phi_{\text{пер}} \sin \alpha.$$

Одержане рівняння можна переписати у вигляді:

$$m\ddot{x} = -mg \cdot \cos 60^\circ + 3,5x \sin 60^\circ,$$

або

$$\ddot{x} - 7,43x = -4,9. \quad (3)$$

Загальне рішення одержаного диференціального рівняння має вигляд:

$$x = x_1 + x_2,$$

де  $x_1$  - загальне рішення відповідного однорідного рівняння;

$x_2$  - часткове рішення рівняння (3).

Складемо характеристичне рівняння та знайдемо його корені:

$$n^2 - 7,43 = 0, \Rightarrow n_{1,2} = \pm\sqrt{7,43} \approx \pm 2,7.$$

Таким чином, загальне рішення однорідного диференціального рівняння є:

$$x_1 = C_1 e^{2,7t} + C_2 e^{-2,7t}.$$

Часткове рішення рівняння (3) знайдемо у формі:

$$x_2 = B.$$

Із диференціального рівняння (3):

$$-7,43 \cdot B = -4,9, \quad \text{звідки} \quad B = 0,66.$$

Рішення диференціального рівняння (3) відносного руху кулі  $M$  має вигляд:

$$x = C_1 e^{2,7t} + C_2 e^{-2,7t} + 0,66. \quad (4)$$

Швидкість цього руху:

$$\dot{x} = 2,7C_1 e^{2,7t} - 2,7C_2 e^{-2,7t}. \quad (5)$$

Сталі  $C_1$  та  $C_2$  знайдемо, використавши початкові умови:

при  $t_0 = 0$  с  $x_0 = l = 0,05$  м,  $\dot{x}_0 = 0$ .

Запишемо рівняння (4) та (5) при  $t_0 = 0$  с :

$$0,05 = C_1 + C_2 + 0,66, \quad (4')$$

$$0 = 2,7C_1 - 2,7C_2. \quad (5')$$

Вирішуємо рівняння (4') і (5'), та знаходимо

$$C_1 = C_2 = -0,305.$$

Остаточно, рівняння відносного руху кулі  $M$  приймає вигляд:

$$x = -0,305e^{2,7t} - 0,305e^{-2,7t} + 0,66.$$

**Відповідь:**  $x = -0,305e^{2,7t} - 0,305e^{-2,7t} + 0,66$  м.

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 33.11; 33.17 [2].

## РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

В попередньому розділі розглядалися задачі, пов'язані з рухом матеріальної точки, яка знаходиться під дією прикладених до неї сил. Однак часто доводиться зустрічатися з такими випадками, коли рух однієї точки неможливо розглядати ізольовано від руху інших матеріальних точок. Це змушує нас перейти до вивчення руху сукупності матеріальних точок, або механічних систем.

*У механіці під механічною системою матеріальних точок або тіл мають на увазі таку їх сукупність, в якій положення або рух кожної точки (або тіла) залежить від положення або руху усіх інших.*

Сукупність тіл, між якими відсутні сили взаємодії та рух яких ніяким чином не пов'язаний один з одним, механічну систему не створюють. Механічні системи бувають **вільними** та **невільними**.

*Система матеріальних точок, рух яких не обмежений ніяким в'язями, а визначається тільки діючими на ці точки силами, називається системою вільних точок.*

*Система матеріальних точок, рух яких обмежується накладеними на точки в'язями, називається системою невільних точок.*

Розв'язування задач динаміки механічної системи базується на теоремах динаміки та деяких принципах, які будуть розглянуті у даному розділі.

## Тема 5. ГЕОМЕТРІЯ МАС

### ЗАНЯТТЯ №9

#### Зміст

- 5.1. Механічна система. Центр мас механічної системи.
- 5.2. Порядок розв'язування задач на визначення центра мас механічної системи.
- 5.3. Приклади розв'язування задач.

#### 5.1. Механічна система.

##### Центр мас механічної системи

В механіці під *механічною системою* мають на увазі сукупність взаємодіючих між собою матеріальних точок або тіл.

Частковим випадком механічної системи є абсолютно тверде тіло.

*Масою механічної системи* називається сума мас усіх точок, що входять до системи:

$$M = \sum_1^n m_k ,$$

де:  $m_k$  - маса матеріальної точки з номером  $k$ ,

$n$  - число усіх точок системи.

*Центром мас (центром інерції)* механічної системи називається точка  $C$  (рис.5.1), радіус - вектор  $\bar{r}_C$  якої визначається за формулою:

$$\bar{r}_C = \frac{1}{M} \sum m_k \bar{r}_k ,$$

де  $M$  - маса системи матеріальних точок;

$\bar{r}_k$  - радіус - вектор точки з масою  $m_k$ .

Декартові координати центра мас системи матеріальних точок визначаються за залежностями:

$$\left. \begin{aligned} x_C &= \frac{1}{M} \sum m_k x_k; \\ y_C &= \frac{1}{M} \sum m_k y_k; \\ z_C &= \frac{1}{M} \sum m_k z_k. \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

Тут  $x_k, y_k, z_k$  - координати  $k$ -ої матеріальної точки.

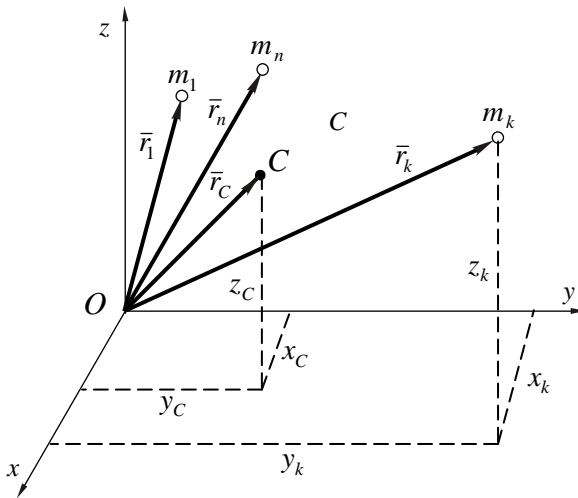


Рис.5.1

Для *твердого тіла* центр мас співпадає з центром тяжіння.

### Порядок розв'язування задач на визначення центра мас механічної системи

Розв'язування задач, у яких необхідно визначити положення центра мас і рівняння його траєкторії, рекомендується проводити у наступній послідовності:



Вибрати систему координат.

Записати координати центрів тяжіння кожної із мас системи, виразивши їх у вигляді функцій часу:

$$x_k = \varphi_k(t), \quad y_k = \psi_k(t), \quad z_k = \chi_k(t).$$

Визначити координати центра мас системи за формулами (5.1), при цьому  $x_C$ ,  $y_C$ ,  $z_C$  будуть функціями часу, тобто, одержані вирази будуть параметричними рівняннями руху центра мас.

Для знаходження рівнянь траєкторії центра мас треба із останніх виразів (пункт 3) виключити час.

### Приклади розв'язування задач

#### Задача № 1

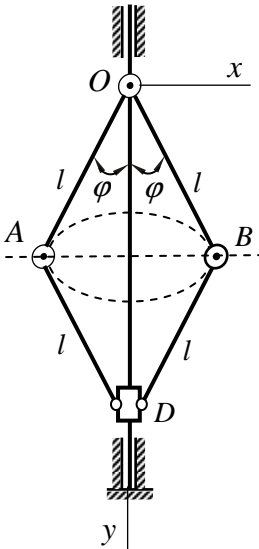


Рис.5.2

**Визначити** положення центра мас відцентрового регулятора, зображеного на рис.5.2, якщо вага кожної із куль  $A$  і  $B$  дорівнює  $P_1$ , вага муфти  $D$  дорівнює  $P_2$ . Кулі  $A$  і  $B$  вважати матеріальними точками. Масою стержнів знехтувати.

**Розв'язок.** Система координат, відносно якої необхідно визначити положення центра мас, зображена на рис.5.2.

Для визначення положення центра мас системи треба визначити його координати за формулами (5.1):

$$x_C = \frac{1}{M} \sum_1^3 m_k x_k,$$

$$y_C = \frac{1}{M} \sum_1^3 m_k y_k,$$

де  $M = m_1 + m_2 + m_3 = m_A + m_B + m_D$ ,

$x_k$ ,  $y_k$  - координати центра мас куль  $A$ ,  $B$  і муфти  $D$ .

Отже

$$x_C = \frac{1}{m_A + m_B + m_D} (m_A x_A + m_B x_B + m_D x_D),$$

$$y_C = \frac{1}{m_A + m_B + m_D} (m_A y_A + m_B y_B + m_D y_D).$$

Знаходимо координати центрів мас:

кулі А:  $x_A = -l \sin \varphi$ ,  $y_A = l \cos \varphi$ ;

кулі В:  $x_B = l \sin \varphi$ ,  $y_B = l \cos \varphi$ ;

муфти D :  $x_D = 0$ ,  $y_D = 2l \cos \varphi$ .

Тоді

$$x_C = \frac{1}{m_A + m_B + m_D} (-m_A l \sin \varphi + m_B l \sin \varphi + m_D \cdot 0) = 0,$$

оскільки

$$m_A = m_B.$$

$$y_C = \frac{1}{m_A + m_B + m_D} (m_A l \cos \varphi + m_B l \cos \varphi + 2m_D l \cos \varphi) =$$

$$= \frac{g}{P_1 + P_1 + P_2} \left( \frac{P_1}{g} l \cos \varphi + \frac{P_1}{g} l \cos \varphi + \frac{P_2}{g} 2l \cos \varphi \right) =$$

$$= \frac{2}{2P_1 + P_2} l \cos \varphi (P_1 + P_2) = 2 \frac{P_1 + P_2}{2P_1 + P_2} l \cos \varphi.$$

**Відповідь:**  $x_C = 0$ ,  $y_C = 2 \frac{P_1 + P_2}{2P_1 + P_2} l \cos \varphi$ .

## Задача № 2

**Знайти** рівняння руху центра мас шарнірного паралелограма  $OABO_1$ , а також рівняння траєкторії його центра мас при обертанні кривошипа  $OA$  зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ . Ланки паралелограма – однорідні стержні (рис.5.3), і  $OA = O_1B = 0,5AB = a$ .

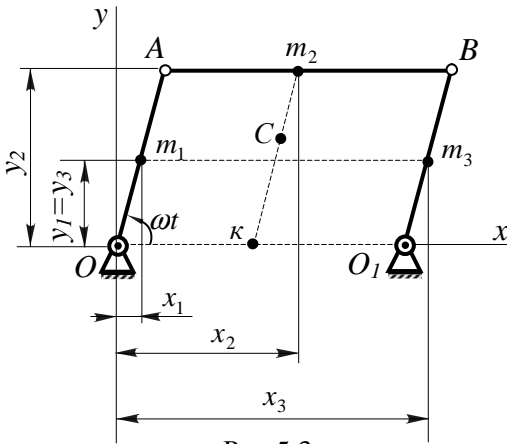


Рис.5.3

**Розв'язок.** Початок системи координат пов'яжемо з шарніром  $O$  кривошипа  $OA$ . Вісь  $Ox$  спрямуємо праворуч по лінії  $OO_1$ , а вісь  $Oy$  - перпендикулярно до лінії  $OO_1$ .

Оскільки ланки 1,2,3 паралелограма однорідні, то центри мас їх лежать посе-

редині ланок (точки  $m_1, m_2, m_3$ ).

Із розмірів ланок витікає:  $m_1 = m_3 = m$ ,  $m_2 = 2m$ .

Визначимо координати центрів мас ланок механізму як функції кута повороту  $\varphi = \omega t$  (рис.5.3):

$$x_1 = \frac{1}{2} a \cos \omega t,$$

$$x_2 = OA \cos \omega t + \frac{AB}{2} = a \cos \omega t + a,$$

$$x_3 = \frac{1}{2} OA \cos \omega t + AB = \frac{1}{2} a \cos \omega t + 2a.$$

$$y_1 = y_3 = \frac{1}{2} a \sin \omega t, \quad y_2 = a \sin \omega t.$$

Для визначення координат центра мас шарнірного паралелограма  $OABO_1$  скористаємося залежністю (5.1):

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3},$$

$$\begin{aligned}
 x_C &= \frac{m_1 \frac{1}{2} a \cos \omega t + m_2 (a \cos \omega t + a) + m_3 \left( \frac{1}{2} a \cos \omega t + 2a \right)}{m_1 + m_2 + m_3} = \\
 &= \frac{3ma \cos \omega t + 4ma}{4m} = \frac{a(3 \cos \omega t + 4)}{4}. \\
 x_C &= a + \frac{3}{4} a \cos \omega t, \tag{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_C &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}. \\
 y_C &= \frac{m_1 \frac{1}{2} a \sin \omega t + 2ma \sin \omega t + m \frac{1}{2} a \sin \omega t}{4m} = \frac{3a \sin \omega t}{4}, \\
 y_C &= \frac{3}{4} a \sin \omega t. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Для визначення рівняння траєкторії центру мас (точки  $C$ ) виключимо параметр  $t$  з рівнянь (1) і (2). З цією метою виконаємо наступні перетворення:

$$\begin{aligned}
 x_C - a &= \frac{3}{4} a \cos \omega t, & y_C &= \frac{3}{4} a \sin \omega t, \\
 (x_C - a)^2 &= \left( \frac{3}{4} a \right)^2 \cos^2 \omega t, & y_C^2 &= \left( \frac{3}{4} a \right)^2 \sin^2 \omega t.
 \end{aligned}$$

Додамо, відповідно, ліві та праві частини цих рівнянь:

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left( \frac{3}{4} a \right)^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \left( \frac{3}{4} a \right)^2.$$

Таким чином, траєкторією центра мас шарнірного паралелограма є коло:

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left( \frac{3}{4} a \right)^2$$

з радіусом, який дорівнює  $\frac{3}{4}a$ , з центром у точці  $K$  з координатами  $x_K = a$ ,  $y_K = 0$ .

**Відповідь:** 
$$x_C = a + \frac{3}{4} \cos \omega t, \quad y_C = \frac{3}{4} a \sin \omega t,$$

$$(x_C - a)^2 + y_C^2 = \left(\frac{3}{4}a\right)^2.$$

### Задача № 3

**Визначити** траєкторію центра мас механізму еліпсографа (рис.5.4), який складається із муфт  $A$  і  $B$  вагою  $Q$  кожна, кривошипа  $OD$  вагою  $P$  і лінійки  $AB$  вагою  $2P$ , якщо

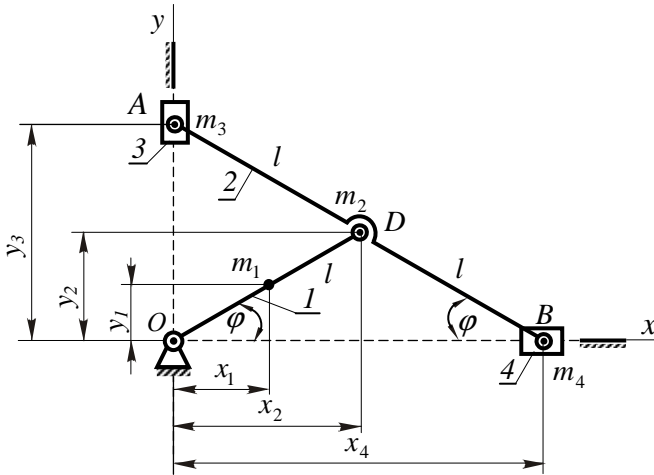


Рис.5.4

$$OD = AD = DB = l.$$

Вважати, що лінійка і кривошип є однорідні стержні, а муфти - точкові маси.

**Розв'язок.** Механізм складається з 4 рухомих ланок. Для зручності розв'язування задачі пронумеруємо ланки відповідно рис.5.4.

Система координат, відносно якої буде визначатися траєкторія центра мас механізму показана на рисунку.

Спочатку визначимо координати центрів мас усіх ланок механізму:

$$x_1 = 0, 5l \cos \varphi, x_2 = l \cos \varphi, x_3 = 0, x_4 = 2l \cos \varphi, y_1 = 0, 5l \sin \varphi, \\ y_2 = l \sin \varphi, y_3 = 2l \sin \varphi, y_4 = 0.$$

Для визначення координат центра мас механізму еліпсографа скористуємося формулою (5.1):

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \\ = \frac{\frac{P}{g} 0, 5l \cos \varphi + \frac{2P}{g} l \cos \varphi + \frac{Q}{g} \cdot 0 + \frac{Q}{g} 2l \cos \varphi}{\frac{P}{g} + \frac{2P}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{Q}{g}} = \\ = \frac{2, 5Pl \cos \varphi + 2Ql \cos \varphi}{2Q + 3P}.$$

$$x_C = l \cos \varphi \left( \frac{2, 5P + 2Q}{2Q + 3P} \right).$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = \\ = \frac{\frac{P}{g} 0, 5l \sin \varphi + \frac{2P}{g} l \sin \varphi + \frac{Q}{g} 2l \sin \varphi + \frac{Q}{g} \cdot 0}{\frac{P}{g} + \frac{2P}{g} + \frac{Q}{g} + \frac{Q}{g}} = \\ = \frac{2, 5Pl \sin \varphi + Q2l \sin \varphi}{2Q + 3P}.$$

$$y_C = l \sin \varphi \left( \frac{2, 5P + 2Q}{2Q + 3P} \right).$$

Отже, координати центра мас еліпсографа мають значення:

$$x_C = l \cos \varphi \left( \frac{2,5P + 2Q}{2Q + 3P} \right), \quad y_C = l \sin \varphi \left( \frac{2,5P + 2Q}{2Q + 3P} \right).$$

Для знаходження рівняння траєкторії центра мас у явному вигляді необхідно з цих рівнянь виключити кут  $\varphi$ . Розв'язавши обидва рівняння відносно  $\cos \varphi$  і  $\sin \varphi$ , підносячи їх потім до квадрату і склавши, одержимо:

$$x_C^2 + y_C^2 = \left( \frac{2,5P + 2Q}{3P + 2Q} l \right)^2.$$

Траєкторією центра мас є коло з центром у точці  $O$  і радіусом  $R$ , який дорівнює:

$$R = \frac{2,5P + 2Q}{3P + 2Q} l.$$

**Відповідь:**  $x_C^2 + y_C^2 = \left( \frac{2,5P + 2Q}{3P + 2Q} l \right)^2.$

#### Задача № 4

**Визначити** залежність від кута повороту кривошипа  $\varphi$  координат центру мас кривошипно-повзунного механізму, що зображено на рис.5.5. Довжина кривошипа  $OA=l$ , його вага  $P_1 = P$ , довжина шатуна  $AB=l$ , його вага  $P_2 = 2P$ , вага повзуна  $P_3 = 3P$ .

**Розв'язок.** Виберемо систему координат  $xOy$ , як показано на рис.5.5. Розглянемо механізм у довільному положенні, яке визначається кутом  $\varphi$  (для будь-якого положення  $\varphi = \beta$ , оскільки  $OA=AB$ ).

Застосовуючи формулу (5.1), одержимо:

$$x_C = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3), \quad (1)$$

$$y_C = \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3), \quad (2)$$

де  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$  - координати центрів ваги тіл, що складають систему,

$M$  – маса усієї системи.

З рис.5.5 находимо:

$$x_1 = \frac{OA}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} \cos \varphi;$$

$$x_2 = OK + KM = OA \cos \varphi + \frac{AB}{2} \cos \beta = l \cos \varphi + \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{3}{2} l \cos \varphi,$$

$$x_3 = OK + KB = OA \cos \varphi + AB \cos \beta = 2l \cos \varphi,$$

$$y_1 = y_2 = \frac{OA}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin \varphi,$$

$$y_3 = 0.$$

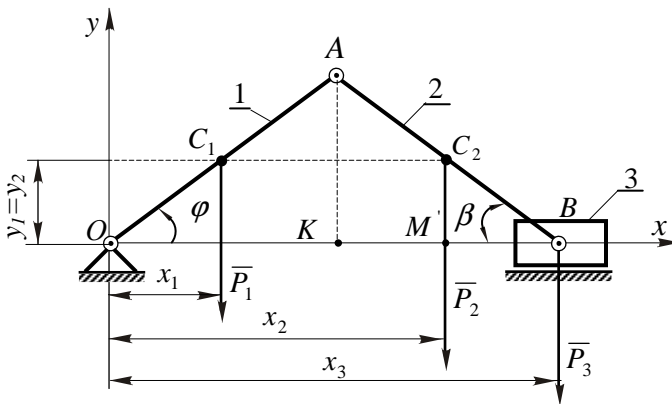


Рис.5.5



Маса усієї системи у даному випадку дорівнює:

$$M = \sum_{k=1}^3 m_k = m_1 + m_2 + m_3 = \frac{P}{g} + \frac{2P}{g} + \frac{3P}{g} = \frac{6P}{g}.$$

Підставляючи у вирази (1) і (2) значення координат центрів мас тіл механічної системи і величину маси системи  $M$ , одержимо:

$$x_C = \frac{g}{6P} \left( \frac{P \cdot l}{2g} \cos \varphi + \frac{2P \cdot 3l}{2g} \cos \varphi + \frac{3P \cdot 2l}{g} \cos \varphi \right) = \frac{19}{12} l \cos \varphi;$$

$$y_C = \frac{g}{6P} \left( \frac{P \cdot l}{2g} \sin \varphi + \frac{2P \cdot l}{2g} \sin \varphi + \frac{3P}{g} \cdot 0 \right) = \frac{l}{4} \sin \varphi.$$

**Відповідь:**  $x_C = \frac{19 \cdot l}{12} \cos \varphi, \quad y_C = \frac{l}{4} \sin \varphi.$

### Задача № 5

**Визначити** рівняння траєкторії центра мас кулісного механізму (рис.5.6), якщо вага кривошипа  $OA$  дорівнює  $P_1$ , вага повзуна  $A$  дорівнює  $P_2$ , а вага куліси і штанги  $BD$  дорівнює  $P_3$ . Кривошип, який обертається зі сталою кутовою швидкістю  $\omega$ , вважати тонким однорідним стержнем, а повзун  $A$  – точковою масою. Центр тяжіння куліси і штанги розташовано у точці  $C_3$ , причому  $OA = l$ ,  $BC = 2l$ . При розрахунках прийняти:

$$P_1 = 16 \text{ Н}, \quad P_2 = 12 \text{ Н}, \quad P_3 = 100 \text{ Н}, \quad \omega = 2 \text{ рад/с}, \quad l = 0,5 \text{ м}, \quad g = 10 \text{ м/с}^2.$$

Будемо вважати, що у початковий момент повзун  $A$  займав крайнє праве положення.

**Розв'язок.** Виберемо осі декартових координат, як показано на рисунку, де положення кулісного механізму відповідає моменту часу  $t$ . Оскільки кривошип обертається рівномірно, то його кут повороту дорівнює  $\varphi = \angle BOA = \omega t$ .

Для визначення положення центра мас системи  $C$  необхідно знайти його координати  $x_C$  і  $y_C$  за формулою (5.1).

Оскільки механічна система складається із трьох тіл - кривошипа  $OA$ , повзуна  $A$  і куліси зі штангою  $BD$ , то:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Індекс 1 відповідає кривошипу, індекс 2 - повзуну  $A$ , індекс 3 - кулісі зі штангою.

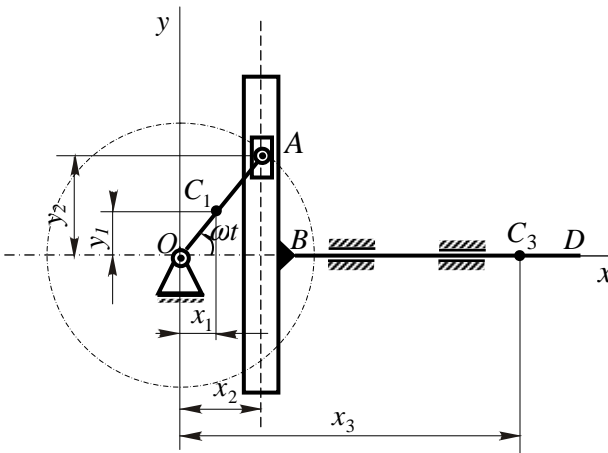


Рис.5.6

Із рисунка видно:

$$x_1 = \frac{l}{2} \cos \omega t = 0,25 \cos 2t, \quad y_1 = \frac{l}{2} \sin \omega t = 0,25 \sin 2t,$$

$$x_2 = l \cos \omega t = 0,5 \cos 2t, \quad y_2 = l \sin \omega t = 0,5 \sin 2t.$$

$$x_3 = x_2 + BC = l \cos \omega t + 2l = 0,5 \cos 2t + 1, \quad y_3 = 0.$$

$$m_1 = \frac{P_1}{g} = \frac{16}{10} = 1,6 \text{ кг}, \quad m_2 = \frac{P_2}{g} = \frac{12}{10} = 1,2 \text{ кг},$$

$$m_3 = \frac{P_3}{g} = \frac{100}{10} = 10 \text{ кг}.$$

Підставимо значення  $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, m_1, m_2, m_3$  у формули для визначення  $x_C$  і  $y_C$ .

$$\begin{aligned} x_C &= \frac{1,6 \cdot 0,25 \cos 2t + 1,2 \cdot 0,5 \cos 2t + 10(0,5 \cos 2t + 1)}{1,6 + 1,2 + 10} = \\ &= \frac{0,4 \cos 2t + 0,6 \cos 2t + 5 \cos 2t + 10}{12,8} = \frac{10 + 6 \cos 2t}{12,8} = \\ &= 0,78 + 0,469 \cos 2t. \\ y_C &= \frac{1,6 \cdot 0,25 \sin 2t + 1,2 \cdot 0,5 \sin 2t + 10 \cdot 0}{1,6 + 1,2 + 10} = \\ &= \frac{0,4 \sin 2t + 0,6 \sin 2t}{12,8} = \frac{\sin 2t}{12,8} = 0,078 \sin 2t. \end{aligned}$$

Виключимо час  $t$  у рівняннях, які визначають рух центра мас.

Для цього розв'яжемо обидва рівняння відносно  $\cos 2t$  і  $\sin 2t$ :

$$\cos 2t = \frac{x_C - 0,78}{0,469}, \quad \sin 2t = \frac{y_C}{0,078}.$$

Піднесемо ці рівняння до квадрату і додамо:

$$\left( \frac{x_C - 0,78}{0,469} \right)^2 + \left( \frac{y_C}{0,078} \right)^2 = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1.$$

Таким чином, траєкторією центра мас кулісного механізму є еліпс з напівосями  $0,467 \text{ м}$  і  $0,078 \text{ м}$ .

Центр еліпса лежить на осі  $x$  і віддалений від початку координат  $O$  праворуч на відстань  $0,78 \text{ м}$ .

**Відповідь:** 
$$\left( \frac{x_C - 0,78}{0,469} \right)^2 + \left( \frac{y_C}{0,078} \right)^2 = 1.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 34.1, 34.3, 34.6 [2].

## Тема 5. ГЕОМЕТРІЯ МАС (продовження)

### ЗАНЯТТЯ № 10

#### Зміст

- 5.4. Момент інерції твердого тіла відносно осі.
- 5.5. Моменти інерції деяких однорідних тіл.
- 5.6. Контрольні запитання.
- 5.7. Приклади розв'язування задач.

#### 5.4. Моменти інерції твердого тіла відносно осі

Вплив власних властивостей тіла на обертальний рух значно складніший, ніж у поступальному русі.

Також як маса тіла є мірою інертності тіла при його поступальному русі, так і *момент інерції тіла відносно даної осі є мірою інертності тіла при його обертальному русі.*

Як міра інертності тіла момент інерції входить в усі формули обертального руху. Не знаючи моменту інерції тіла, не вміючи його визначити, не можна розв'язувати задачі, які пов'язані з обертальним або складним рухом тіла, частиною якого є обертальний рух.

Момент інерції тіла (системи) відносно осі, наприклад  $z$ , позначимо  $I_z$  (індекс указує на вісь, відносно якої визначається момент інерції).

*Моментом інерції тіла відносно осі, наприклад  $z$ , називається скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас точок тіла на квадрати їх відстаней до осі:*

$$I_z = m_1 h_1^2 + m_2 h_2^2 + \dots + m_n h_n^2 = \sum_{k=1}^n m_k h_k^2.$$

Якщо тіло суцільне, то під  $m_k$  необхідно розуміти масу елементарної частки тіла  $dm$ , тоді момент інерції буде виражатися інтегралом:

$$I_z = \int_{(M)} h^2 dm ,$$

де  $h$  - відстань частки  $dm$  від осі.

Цей інтеграл береться за всією масою тіла. Очевидно, що величина моменту інерції залежить від розмірів і форми тіла, а також від закону розподілу маси у тілі.

Момент інерції вимірюється у системі СІ - в  $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ , в технічній системі - в  $\text{кгм} / \text{с}^2$ .

Для тіл правильної геометричної форми визначення моментів інерції робиться за допомогою інтегрального обчислення. Якщо тіло має неправильну форму, то момент інерції його визначається або приблизно, шляхом розбиття тіла на декілька тіл, які мають правильну геометричну форму, або експериментально.

*Для однорідного тіла, при густині  $\rho = \text{const}$  :*

$$I_z = \int_{(M)} h^2 dm = \int_{(V)} h^2 \rho dV = \rho \int_{(V)} h^2 dV ,$$

де інтеграл береться по всьому об'єму тіла.

*Для однорідної матеріальної поверхні:*

$$I_z = \rho \int_{(S)} h^2 dS ,$$

де  $\rho$  - маса одиниці площини поверхні і інтеграл береться за усією площиною поверхні.

*Для однорідної матеріальної лінії:*

$$I_z = \rho \int_{(l)} h^2 dl ,$$

де  $\rho$  - маса одиниці довжини лінії. Інтеграл береться по довжині  $l$ .

*Для однієї матеріальної точки, яка знаходиться на відстані  $h$  від осі, момент інерції дорівнює:*

$$I_z = mh^2 .$$

Іноді при визначенні моменту інерції тіла користуються поняттям радіуса інерції. **Радіусом інерції тіла** відносно осі, на-

приклад  $Oz$ , називається лінійна величина  $\rho_i$ , яка визначається рівністю:

$$I_z = M \rho_i^2,$$

де  $M$  - маса тіла.

Отже, радіус інерції визначає відстань від осі  $Oz$  до точки, в якій необхідно зосередити всю масу  $M$  тіла, щоб момент інерції точки відносно цієї осі дорівнював моменту інерції тіла.

Момент інерції системи відносно початку координат дорівнює

$$I_0 = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (5.2)$$

Моменти інерції відносно координатних осей (осьові моменти) виражаються залежностями:

$$\left. \begin{aligned} I_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2), \\ I_y &= \sum m_k (x_k^2 + z_k^2), \\ I_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Існує проста залежність між моментами інерції тіла відносно паралельних осей, одна з яких проходить через його центр мас (теорема Гюйгенса-Штейнера).

*Момент інерції тіла відносно будь-якої осі дорівнює моменту інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас тіла паралельно даній осі, плюс добуток маси тіла на квадрат відстані між осями:*

$$I_0 = I_c + Md^2, \quad (5.4)$$

де  $I_c$  - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас і паралельна даної;

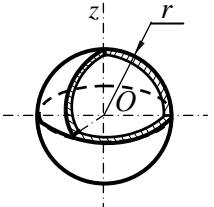
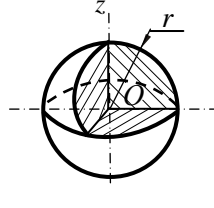
$I_0$  - момент інерції тіла відносно даної осі;

$d$  - відстань між осями.

З виразу (5.4) витікає, що найменшим момент інерції тіла буде відносно тієї осі, яка проходить через центр його мас.

## 5.5. Моменти інерції деяких однорідних тіл.

Форма тіла.	Схема тіла.	Момент інерції.
Тонкий прямолінійний стержень		$I_z = \frac{Ml^2}{12}$
—,—		$I_z = \frac{Ml^2}{3}$
Кругла пластинка малої товщини		$I_z = \frac{Mr^2}{2}$ $I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}$
Кільце(матеріальне коло)		$I_z = Mr^2$
Круглий циліндр		$I_z = \frac{Mr^2}{2}$
Прямокутний паралелепіпед		$I_z = M \frac{a^2 + b^2}{12}$

Порожниста куля зі стінками малої товщини		$I_z = \frac{2}{3}Mr^2$
Куля		$I_z = \frac{2}{5}Mr^2$

### 5.6. Контрольні запитання

Що називається моментом інерції твердого тіла відносно осі ?

Яку величину називають радіусом інерції?

Яка залежність між моментами інерції тіла відносно паралельних осей?

Відносно якої осі момент інерції тіла має найменше значення?

### 5.7. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

Маятник, який зображено на рис. 5.7, складається з тонкого однорідного стержня довжиною  $l=0,4\text{ м}$  і масою  $m_1=1\text{ кг}$  та круглого однорідного диска з радіусом  $R=0,2\text{ м}$  і масою  $m_2=0,5\text{ кг}$ .

**Визначити** момент інерції  $I_z$  відносно осі його обертання  $Oz$  (вісь  $Oz$  направлена перпендикулярно до площини рисунку).



**Розв'язок.** Маятник складається з двох тіл: стержня і диска, тому

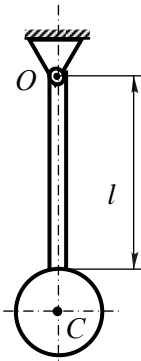


Рис.5.7

$$I_z = I_z^{cm} + I_z^{\partial}, \quad (1)$$

де  $I_z^{cm}$  і  $I_z^{\partial}$  моменти інерції відносно осі  $Oz$  стержня та диска, відповідно.

Момент інерції стержня дорівнює (див. 5.5):

$$I_z^{cm} = \frac{1}{3} m_1 l^2. \quad (2)$$

Момент інерції диска знайдемо за формулою (5.4):

$$I_z^{\partial} = I_c^{\partial} + m_2 d^2,$$

де  $I_c^{\partial} = \frac{1}{2} m_2 R^2$  - момент інерції диска відносно осі, яка проходить паралельно осі  $Oz$  через його центр мас, точку  $C$ , а відстань від центра мас до осі  $Oz$  -  $d = l + R$ .

Отже

$$I_z^{\partial} = \frac{1}{2} m_2 R^2 + m_2 (l + R)^2. \quad (3)$$

Користуючись виразами для моментів інерції стержня (2) і диска (3), знайдемо момент інерції маятника відносно осі  $Oz$ :

$$I_z = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m_2 \left[ \frac{1}{2} R^2 + (l + R)^2 \right]. \quad (4)$$

Після підстановки у вираз (4) числових даних, одержимо:

$$I_z = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 0,4^2 + 0,5 \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot 0,2^2 + (0,4 + 0,2)^2 \right] = 0,243 \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

**Відповідь:**  $I_z = 0,243 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ .

**Задача №2.**

**Визначити** момент інерції  $I_{z_1}$  сталюого вала радіуса  $r=5$  см і масою  $m=100$  кг відносно його твірної. Вал вважати однорідним суцільним циліндром.(рис.5.8).

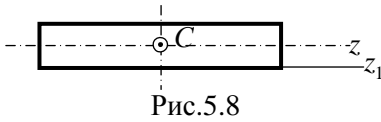


Рис.5.8

**Розв'язок.** Для визначення моменту інерції сталюого вала відносно осі  $z_1$ , треба скористатися формою Гюйгенса-Штейнера

$$I_{z_1} = I_c + mr^2,$$

де  $I_c$  - момент інерції відносно осі  $z$ , яка проходить через центр мас тіла.,

$m$  - маса вала,

$r$  - відстань між осями, яка дорівнює радіусу вала.

$$I_c = \frac{mr^2}{2}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} I_{z_1} &= \frac{mr^2}{2} + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2 = \frac{3}{2} \cdot 100 \cdot 5^2 = \\ &= 3750 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 = 0,375 \text{ кгм}^2. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $I_{z_1} = 3750 \text{ кг} \cdot \text{см}^2 = 0,375 \text{ кгм}^2$ .

**Задача № 3**

**Визначити** осьові моменти інерції  $I_x$  та  $I_y$  зображеної на рис.5.9 однорідної прямокутної пластинки вагою  $P$ .

**Розв'язок.** Визначимо момент інерції пластинки відносно осі  $x$ . Для цього виділимо на відстані  $y_i$  смужку шириною  $\Delta y$ .

Момент інерції цієї тонкої смужки відносно осі  $x$  дорівнює:

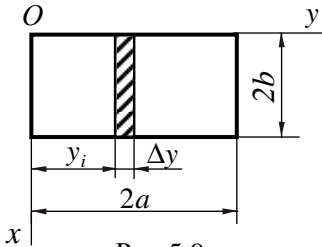


Рис.5.9

$$I_{xi} = m_i y_i^2,$$

де  $m_i$  - маса смужки.

Маса смужки дорівнює:

$$m_i = S_i \cdot \gamma = 2b\gamma\Delta y,$$

де  $S_i$  - площа смужки;

$\gamma$  - маса одиниці площі поверхні пластинки.

Тоді:

$$I_{xi} = 2b\gamma y_i^2 \Delta y,$$

а момент інерції усієї пластинки буде дорівнювати сумі моментів інерції усіх смужок, на які можна розбити пластинку:

$$I_x = \sum I_{xi} = \sum 2b\gamma y_i^2 \Delta y = 2b\gamma \sum y_i^2 \Delta y.$$

При граничному переході, тобто, коли  $\Delta y \rightarrow 0$

$$\sum y_i^2 \Delta y = \int y^2 dy.$$

Отже,

$$I_x = 2b\gamma \int_0^{2a} y^2 dy = 2b\gamma \frac{y^3}{3} \Big|_0^{2a} = 2b\gamma \frac{8a^3}{3} = \frac{16a^3 b\gamma}{3}.$$

Обчислимо масу пластинки:

$$m = 2a \cdot 2b \cdot \gamma = 4ab\gamma = \frac{P}{g}.$$

Таким чином

$$I_x = \frac{16a^3 b\gamma}{3} = 4ab\gamma \frac{4a^2}{3} = m \frac{4a^2}{3} = \frac{4P}{3g} a^2.$$

Момент інерції пластинки відносно осі  $y$  знаходимо аналогічним шляхом і одержимо:

$$I_y = \frac{4P}{3g} b^2.$$

**Відповідь:**  $I_x = \frac{4P}{3g}a^2, \quad I_y = \frac{4P}{3g}b^2.$

#### Задача №4

**Визначити** момент інерції відносно осі  $z$   $I_z$  однорідного прямокутного паралелепіпеда вагою  $P$  (рис.5.10).

**Розв'язок.** Виділимо елементарний паралелепіпед зі сторонами основи  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  і висотою  $2c$ . Відстань елементарного паралелепіпеда від осей  $x$  і  $y$  дорівнює  $x_i$  та  $y_i$ , відповідно.

Момент інерції елементарного паралелепіпеда відносно осі  $z$  дорівнює:

$$I_{zi} = m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

де:  $m_i$  - маса елементарного паралелепіпеда, яка дорівнює:

$$m_i = \Delta V_i \cdot \gamma = \gamma \cdot \Delta x \cdot \Delta y \cdot 2c.$$

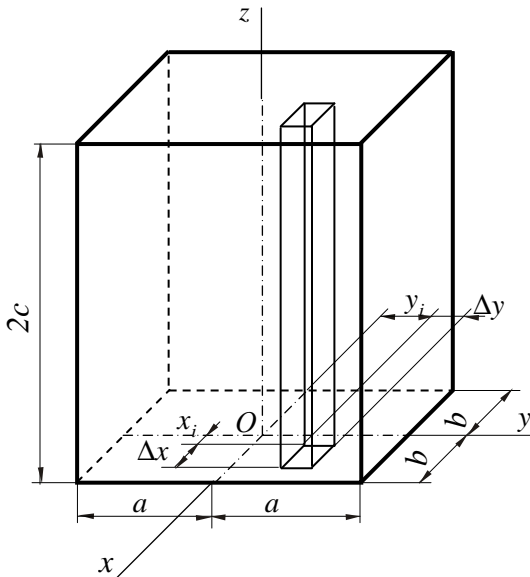


Рис.5.10

Тоді,  $I_{zi} = 2c\gamma(x_i^2 + y_i^2)\Delta x\Delta y$ ,

а момент інерції усього паралелепіпеда

$$I_z = \sum I_{zi} = \sum 2c\gamma(x_i^2 + y_i^2)\Delta x\Delta y.$$

При граничному переході, тобто, при  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , сума, яка стоїть праворуч, переходить у подвійний інтеграл:

$$I_z = 2c\gamma \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Обчислимо подвійний інтеграл:

$$\begin{aligned} I_z &= 2c\gamma \int_{-b}^b dx \int_{-a}^a (x^2 + y^2) dy = 2c\gamma \int_{-b}^b dx \left( x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_{-a}^a = \\ &= 2c\gamma \int_{-b}^b dx \left[ x^2 a + \frac{1}{3} a^3 - x^2 (-a) - \frac{1}{3} (-a^3) \right] = \\ &= 2c\gamma \int_{-b}^b dx \left[ ax^2 + \frac{1}{3} a^3 + ax^2 + \frac{1}{3} a^3 \right] = 2c\gamma \int_{-b}^b \left( 2ax^2 + \frac{2}{3} a^3 \right) dx = \\ &= 2c\gamma \left[ 2a \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{3} a^3 x \right] \Big|_{-b}^b = \\ &= 2c\gamma \left[ \frac{2}{3} ab^3 + \frac{2}{3} a^3 b - \frac{2}{3} a(-b)^3 - \frac{2}{3} a^3 (-b) \right] = \\ &= 2c\gamma \left( \frac{4}{3} ab^3 + \frac{4}{3} a^3 b \right) = \frac{8}{3} \gamma abc (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Маса паралелепіпеда:

$$m = 2a2b2c\gamma = 8abc\gamma.$$

Отже,

$$I_z = \frac{8}{3} \gamma abc (a^2 + b^2) = \frac{m}{3} (a^2 + b^2) = \frac{1}{3} P (a^2 + b^2).$$

**Відповідь:** 
$$I_z = \frac{1}{3} P (a^2 + b^2).$$

## Задача №5

**Визначити** момент інерції відносно осі  $y$  у тонкої однорідної параболічної пластинки (рис.5.11) масою  $M$ . Гранична пряма пластинки паралельна осі  $y$  і віддалена від неї на відстань  $a$ . Рівняння параболи, яка обмежує пластинку, має вигляд  $y^2 = 4x$ .

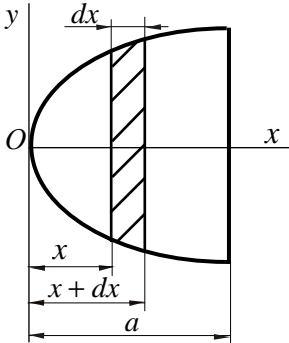


Рис.5.11

**Розв'язок.** Проведемо на пластинці (рис.5.11) дві прямі, паралельні осі  $y$  і віддалені від неї на відстані  $x$  та  $(x + dx)$ .

Обчислимо момент інерції відносно осі  $y$  елементарної смужки, яка обмежена цими прямими і параболічним контуром пластинки (заштрихована на рисунку):

$$dI_y = x^2 dm,$$

де  $dm$  - елементарна маса площини, яка дорівнює:

$$dm = \gamma dS.$$

Тут  $\gamma$  - густина пластинки,

$dS$  - площа пластинки.

Отже,

$$dm = 2\gamma y dx, \quad dI_y = 2\gamma x^2 y dx.$$

Із рівняння  $y^2 = 4x$  витікає  $y = 2\sqrt{x}$ .

Таким чином

$$dI_y = 4\gamma x^2 \sqrt{x} dx.$$

Момент інерції пластинки відносно осі  $y$  дорівнює:

$$I_y = \int_S dI_y = \int_0^a 4\gamma x^2 \sqrt{x} dx = \frac{8}{7} \gamma a^3 \sqrt{a}.$$

Маса пластинки  $M = \gamma S$ ,

де площа пластинки  $S = \int_0^a 2y dx = 4 \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{8}{3} a \sqrt{a}$ .

Тоді

$$M = \frac{8}{3} \gamma a \sqrt{a}.$$

Отже,

$$I_y = \frac{3}{7} M a^2.$$

**Відповідь:**  $I_y = \frac{3}{7} M a^2$ .

### Задача №6

**Визначити** для тонкого рівнобедренного трикутника  $ABC$ , основа якого дорівнює  $a$ , висота  $h$  і маса  $M$  (рис.5.12), його моменти інерції відносно основи і відносно висоти.

**Розв'язок.** З серединою  $D$  основи рівнобедренного трикутника пов'яжемо початок системи координат  $Dxy$ ; вісь  $x$  проведемо по основі  $AC$ , а вісь  $y$  – перпендикулярно до основи.

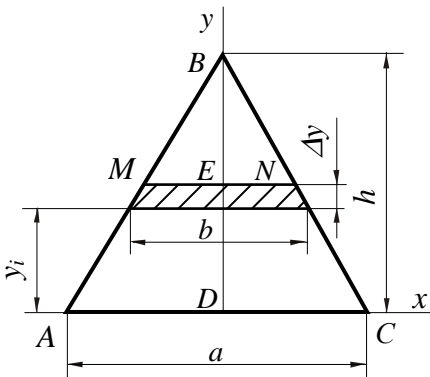


Рис.5.12

Для визначення моменту інерції трикутника відносно основи (відносно осі  $x$ ) виділимо на відстані  $y_i$  елементарну смужку шириною  $\Delta y$ .

Момент інерції цієї смужки відносно осі  $x$  складе:

$$I_{xi} = m_i y_i^2, \quad (1)$$

де  $m_i$ , маса смужки довжиною  $b$ , дорівнює:

$$m_i = \gamma \cdot S_i = \gamma \cdot b \cdot \Delta y.$$

Тоді момент інерції елементарної смужки відносно основи буде дорівнювати:

$$I_{xi} = \gamma \cdot b \cdot y_i^2 \cdot \Delta y. \quad (1)$$

Знайдемо залежність між координатою  $y$  і довжиною смужки  $b$ . Із подібності трикутників  $ABC$  та  $MBN$  (рис.5.12) витікає:

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BE}{MN}, \quad \text{або} \quad \frac{h}{a} = \frac{h - y_i}{b},$$

звідки

$$b = \frac{a}{h} (h - y_i). \quad (2)$$

Підставивши (2) у (1'), одержимо:

$$I_{xi} = \gamma \cdot \frac{a}{h} \cdot (h - y_i) \cdot y_i^2 \cdot \Delta y,$$

а момент інерції трикутника  $ABC$  відносно основи визначиться як

$$I_x = \sum I_{xi} = \gamma \frac{a}{h} \sum (h - y_i) y_i^2 \Delta y,$$

або

$$I_x = \gamma \frac{a}{h} \int_0^h (h - y) y^2 dy. \quad (3)$$

В інтегралі (3) межі координати  $y$  змінюються від 0 до  $h$ .

Виразуємо інтеграл (3):

$$\begin{aligned} I_x &= \gamma \frac{a}{h} \left( \int_0^h h y^2 dy - \int_0^h y^3 dy \right) = \gamma \frac{a}{h} \left( h \frac{y^3}{3} \Big|_0^h - \frac{y^4}{4} \Big|_0^h \right) = \\ &= \gamma \frac{a}{h} \left( \frac{h^4}{3} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{\gamma a h^3}{12}. \end{aligned} \quad (4)$$

Виразимо момент інерції  $I_x$  через масу  $M$  трикутника  $ABC$ :

$$M = S \cdot \gamma = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \cdot \gamma.$$



Перетворимо вираз (4):

$$I_x = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot a \cdot h \cdot \frac{h^2}{6},$$

або

$$I_x = \frac{Mh^2}{6}.$$

Перейдемо до визначення моменту інерції трикутника  $ABC$  відносно його висоти  $BD$ .

Оскільки у трикутника  $ABC$  висота  $BD$  є віссю симетрії, то достатньо визначити момент інерції відносно цієї осі для прямокутного трикутника  $DBC$ , тоді

$$I_y = 2I_{y1},$$

де  $I_y$  - момент інерції трикутника  $ABC$ ;

$I_{y1}$  - момент інерції трикутника  $DBC$ .

Розрахункова схема для визначення моменту інерції  $I_{y1}$  наведена на рис.5.13.

Виділимо елементарну смужку на відстані  $x_i$  від осі  $y$ , ширина смужки -  $\Delta x$ , довжина -  $l$ .

Визначимо момент інерції цієї смужки відносно осі  $y$ :

$$I_{y1} = m_i \cdot x_i^2 = \gamma \cdot l \cdot \Delta x \cdot x_i^2, \quad (5)$$

де  $\gamma \cdot l \cdot \Delta x = m_i$  - маса елементарної смужки.

Визначимо залежність між довжиною смужки  $l$  і координатою  $x$ . Із подібності трикутників  $LCK$  і  $DBC$  виходить:

$$\frac{DC}{CK} = \frac{DB}{KL},$$

або

$$\frac{0,5a}{0,5a - x_i} = \frac{h}{l},$$

звідки

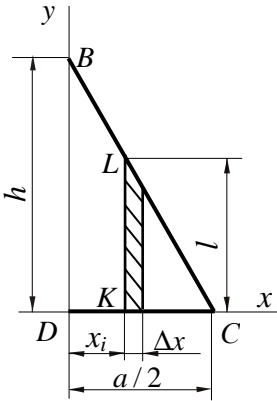


Рис.5.13

$$l = \frac{h(0,5a - x_i)}{0,5a}. \quad (6)$$

Підставивши (6) у (5), одержимо:

$$I_{yi} = \gamma \cdot h \left( 1 - \frac{x_i}{0,5a} \right) \Delta x \cdot x_i^2.$$

Момент інерції трикутника  $DBC$  відносно осі  $y$  (відносно висоти  $DB$ ), дорівнює:

$$I_{y1} = \sum I_{iy} = \gamma \cdot h \sum \left( 1 - \frac{x_i}{0,5a} \right) \Delta x \cdot x_i^2,$$

або

$$I_{y1} = \gamma \cdot h \int_0^{0,5a} \left( 1 - \frac{x}{0,5a} \right) x^2 dx. \quad (7)$$

Визначимо інтеграл (7):

$$\begin{aligned} I_{y1} &= \gamma \cdot h \left( \int_0^{0,5a} x^2 dx - \frac{1}{0,5a} \int_0^{0,5a} x^3 dx \right) = \gamma \cdot h \left[ \frac{(0,5a)^3}{3} - \frac{(0,5a)^4}{0,5a \cdot 4} \right] = \\ &= \gamma \cdot h \left[ \frac{(0,5a)^3}{3} - \frac{(0,5a)^3}{4} \right] = \frac{\gamma \cdot h (0,5a)^3}{12}. \end{aligned}$$

Остаточно:

$$I_{y1} = \frac{\gamma \cdot h \cdot a^3}{96}.$$

Тоді, момент інерції трикутника  $ABC$  відносно висоти  $BD$  буде дорівнювати:

$$I_y = 2I_{y1} = \frac{\gamma \cdot h \cdot a^3}{48} = \frac{1}{2} \gamma \cdot a \cdot h \frac{a^2}{24} = \frac{Ma^2}{24}.$$

**Відповідь:**  $I_x = \frac{Mh^2}{6}$ ;  $I_y = \frac{Ma^2}{24}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 34.9, 34.12, 34.16 [2].

## Тема 6. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### ЗАНЯТТЯ № 11

#### Зміст

- 6.1. Теорема про рух центра мас механічної системи.
- 6.2. Закон збереження руху центра мас.
- 6.3. Контрольні запитання.
- 6.4. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про рух центра мас.
- 6.5. Приклади розв'язування задач.

#### Теорема про рух центра мас механічної системи

Сили, які діють на механічну систему, можна умовно поділити на **зовнішні** і **внутрішні**.

Сили, які діють на точки даної механічної системи з боку точок або тіл, що не входять у цю систему, називаються **зовнішніми**.

Сили, які діють на точки механічної системи з боку точок даної системи, називаються **внутрішніми**.

Зовнішні сили позначаються верхнім індексом “*e*”, внутрішні – “*i*”:  $\bar{F}^e$  - зовнішня сила,  $\bar{F}^i$  - внутрішня сила.

**Внутрішні** сили мають наступні **властивості**:

а) геометрична сума (головний вектор) внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\bar{R}^i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^i = 0. \quad (6.1)$$

б) геометрична сума моментів (головний момент) усіх внутрішніх сил відносно будь-якого центра *O* або осі дорівнює нулю:

$$\bar{M}_0^i = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0 (\bar{F}_k^i) = 0. \quad (6.2)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x^i &= \sum m_x (\bar{F}_k^i) = 0, \\ M_y^i &= \sum m_y (\bar{F}_k^i) = 0, \\ M_z^i &= \sum m_z (\bar{F}_k^i) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

**Теорема про рух центра мас механічної системи** формулюється наступним чином:

*Добуток маси системи на прискорення її центра мас дорівнює геометричній сумі всіх зовнішніх сил, які діють на систему.*

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e, \quad (6.4)$$

де  $M$  - маса системи;

$\bar{a}_C$  - прискорення центра мас;

$\sum \bar{F}_k^e$  - сума зовнішніх сил, які діють на систему.

З порівняння наведеної вище формули з другим законом динаміки, який, як відомо, записано для матеріальної точки:

$$m\bar{a} = \bar{F},$$

можна зробити наступний висновок:

*Центр мас механічної системи рухається як матеріальна точка, у якій зосереджено масу всієї системи і до якої прикладені ті ж самі зовнішні сили, що діють на систему.*

Теорема про рух центра мас системи, якщо її записати у проєкціях на осі декартової системи координат, має вигляд:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad M \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum F_{kz}^e, \quad (6.5)$$

де  $x_C, y_C, z_C$  - координати центра мас механічної системи.

З наведених рівнянь витікає, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас. Теорема дозволяє виключити із розгляду всі попередньо невідомі внутрішні сили.

Задачі динаміки поступального руху твердого тіла вирішуються за допомогою теореми про рух центра мас системи матеріальних точок.

Дійсно, застосувавши цю теорему, ми визначимо рівняння траєкторії, швидкість і прискорення центра ваги твердого тіла. При поступальному русі твердого тіла траєкторії усіх його точок однакові, однакові і їх швидкості та прискорення.

### Закон збереження руху центра мас

З теореми про рух центра мас витікає декілька наслідків:

*а) якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, які діють на систему, дорівнює нулю, то центр мас механічної системи знаходиться у спокої або рухається рівномірно і прямолінійно.*

Нехай  $\sum \bar{F}_k^e = 0$ , тоді

$$M\bar{a}_C = \sum \bar{F}_k^e = 0, \text{ або } \bar{a}_C = \frac{d\bar{V}_C}{dt} = 0, \text{ тому } \bar{V}_C = \text{const}.$$

Якщо спочатку центр мас був у спокої, то він і залишиться у спокої. Якщо ж початкова швидкість не дорівнює нулю, то центр мас рухається прямолінійно і рівномірно з цією швидкістю;

*б) якщо геометрична сума зовнішніх сил, які діють на систему, не дорівнює нулю, але сума їх проєкцій на яку-небудь вісь (наприклад, вісь  $x$ ) дорівнює нулю, то центр мас системи вздовж цієї осі або не рухається, або рухається рівномірно.*

Якщо  $\sum F_{kx}^e = 0$ , то:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0, \text{ або } M \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0, \text{ тому } V_{Cx} = \text{const}.$$

Якщо при цьому дорівнює нулю початкова швидкість, тобто  $V_{Cx_0} = 0$ , то  $\frac{dx_C}{dt} = 0$ , тобто  $x_C = \text{const}$ .

Таким чином бачимо, що у цьому випадку координата центра мас  $x_C$  механічної системи під час її руху зостається незмінною.

При  $V_{Cx_0} \neq 0$  проекція центра мас на вісь  $x$  рухається рівномірно.

Усі ці результати виражають *закони збереження руху центра мас системи*.

### Контрольні запитання

Сформулюйте теорему про рух центра мас системи.

Який рух твердого тіла можна розглядати як рух матеріальної точки, яка має масу даного тіла і чому?

За яких умов центр мас знаходиться у стані спокою, і за яких умов він рухається рівномірно і прямолінійно?

За яких умов центр мас системи не переміщується вздовж будь-якої осі?

Яку дію на вільне тверде тіло справляє прикладена до нього пара сил?

### Порядок розв'язування задач на застосування теорему про рух центра мас

Рекомендується така послідовність розв'язування задач:  
Зобразити на рисунку усі зовнішні сили, які діють на систему;

Вибрати систему координат;

Записати теорему про рух центра мас у векторній формі;

Спроекувати це векторне рівняння на осі координат;

Вирахувати суми проекцій усіх зовнішніх сил на осі координат і підставити їх у проекції рівняння руху;

Розв'язати отримані рівняння та визначити шукані величини.

## 6.5. Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

**Визначити** головний вектор зовнішніх сил, що діють на коло вагою  $P$ , яке скочується без ковзання з похилої площини, якщо його центр мас  $C$  рухається за законом  $x_C = 0,5at^2$  (рис.6.1).

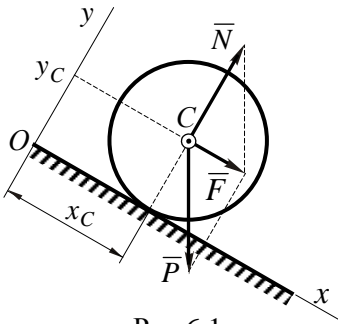


Рис.6.1

**Розв'язок.** Покажемо зовнішні сили, які діють на колесо: силу тяжіння  $\bar{P}$  і реакцію поверхні  $\bar{N}$ , які проходять через центр мас колеса  $C$ .

Запишемо теорему про рух центра мас у векторній формі:

$$Ma_C = \sum \bar{F}_k^e = \bar{P} + \bar{N}. \quad (1)$$

Вибираємо систему координат  $xOy$  та спроектуємо рівняння

(1) на осі  $Ox$  і  $Oy$ :

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{P}{g} \ddot{y}_C = \sum F_{ky}^e.$$

Оскільки  $y_C = const$ , то  $\dot{y}_C = \ddot{y}_C = 0$  і  $\sum F_{ky}^e = 0$ . Тобто, головний вектор зовнішніх сил є паралельним осі  $Ox$ :

$$R = R_x = \sum F_{kx}^e.$$

Знайдемо проекцію прискорення центра мас на вісь  $Ox$ :

$$a_{C_x} = \dot{V}_{C_x} = \ddot{x}_C = \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (0,5at^2) = a.$$

Отже,

$$R = \frac{P}{g} \ddot{x}_C = \frac{P}{g} a.$$

**Відповідь:** 
$$R = \frac{P}{g} a.$$

### Задача №2

Колесо вагою  $P$  і радіусом  $r$  котиться з ковзанням по прямолінійній горизонтальній рейці внаслідок дії сталої сили  $\bar{F}$ , яка прикладена до його центра тяжіння  $C$  (рис.6.2).

**Визначити** швидкість центра мас колеса, якщо у початковий момент воно знаходилось у спокою. Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

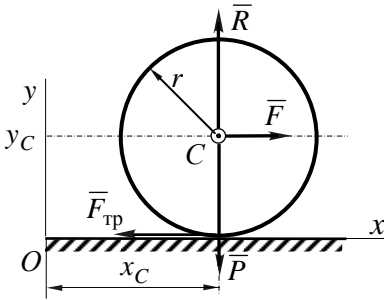


Рис.6.2

**Розв'язок.** На колесо діють зовнішні сили:  $\vec{P}$  - сила тяжіння колеса,  $\vec{F}$  - рушійна сила,  $\vec{R}$  - нормальна реакція рейки,  $\vec{F}_{\text{тр}}$  - сила тертя ковзання, яка спрямована вздовж рейки у бік, протилежний силі  $\vec{F}$ .

Запишемо теорему про рух центра мас колеса у векторній формі:

$$M\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e = \vec{P} + \vec{F} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{тр}},$$

де  $\vec{a}_C$  - прискорення центра мас колеса.

Спроектуємо це рівняння на осі координат  $xOy$ :

$$Ma_{C_x} = F - F_{\text{тр}}, \quad Ma_{C_y} = R - P. \quad (1)$$

Під час руху колеса  $y_C = r = \text{const}$ . Отже,  $\ddot{y}_C = a_{C_y} = 0$ , і з другого рівняння (1) одержуємо:

$$R = P. \quad (2)$$

Оскільки при коченні колеса з ковзанням сила тертя досягає свого максимального значення, то

$$F_{\text{тр}} = f \cdot R = f \cdot P. \quad (3)$$

Підставимо (3) у перше з рівнянь (1) і одержимо:

$$a_{C_x} = \frac{F - F_{\text{тр}}}{M} = g \frac{F - F_{\text{тр}}}{P} = g \frac{F - f \cdot P}{P}. \quad (4)$$

Оскільки

$$a_{C_x} = \frac{dV_{C_x}}{dt},$$

то



$$V_{C_x} = \int g \frac{F - fP}{P} dt = g \frac{F - fP}{P} t + C_1. \quad (5)$$

Згідно з початковими умовами при  $t = 0$   $V_{C_x} = 0$  і відтоді знаходимо, що довільна стала  $C_1 = 0$ .

Отже, закон зміни швидкості центра мас колеса  $C$  має вигляд:

$$V_{C_x} = g \frac{F - fP}{P} t.$$

**Відповідь:**  $V_{C_x} = g \frac{F - fP}{P} t.$

### Задача №3

На однорідну призму  $A$ , яка лежить на горизонтальній площині, поклали однорідну призму  $B$  (рис.6.3,а), поперечні перерізи призм – прямокутні трикутники, вага призми  $A$  утричі більша за вагу призми  $B$ . Необхідні розміри показані на рисунку.

**Визначити** довжину  $l$ , на яку пересунеться призма  $A$ , коли призма  $B$ , спускаючись по поверхні призми  $A$ , дійде до горизонтальної площини. Припустити, що усі поверхні, які стикаються, ідеально гладкі.

**Розв'язок.** Розглянемо рух механічної системи, яка складається з 2-х призм  $A$  і  $B$ . Призма  $B$ , спускаючись по призмі  $A$  праворуч, неначе витискає її, відсовує ліворуч (рис.6.3,б).

Для розв'язування цієї задачі застосуємо теорему про рух центра мас.

На систему діють зовнішні сили: тяжіння  $\bar{P}_B$  призми  $B$ , тяжіння  $\bar{P}_A$  призми  $A$ , нормальна реакція площини  $\bar{N}$  (рис.6.3). Зовнішня сила тертя призм по ідеально гладкій поверхні дорівнює нулю.

Таким чином, усі зовнішні сили системи вертикальні. Внутрішні сили системи (тиск призми  $B$  на призму  $A$ , реакція на цей тиск, а також сили тертя між призмами  $A$  і  $B$ ), нас не цікавлять.

Введемо систему координат  $xOy$ , вісь  $x$  спрямуємо по горизонталі праворуч і запишемо теорему про рух центра мас системи у проекції на вісь  $x$ :

$$M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e.$$

Оскільки зовнішні сили перпендикулярні до осі  $x$ , то

$$\sum F_{kx}^e = 0.$$

Тоді

$$M\ddot{x}_C = 0, \implies \dot{x}_C = 0, \implies x_C = C_1,$$

де  $C_1$  – стала інтегрування.

У початковий момент часу система знаходилася у стані спокою, тобто швидкість центра мас  $V_C = \dot{x}_C = 0$ . Отже,  $C_1 = 0$ .

Із цього витікає, що  $x_C = const$ , тобто, абсциса центра мас, незалежно від переміщення призми, залишається сталою.

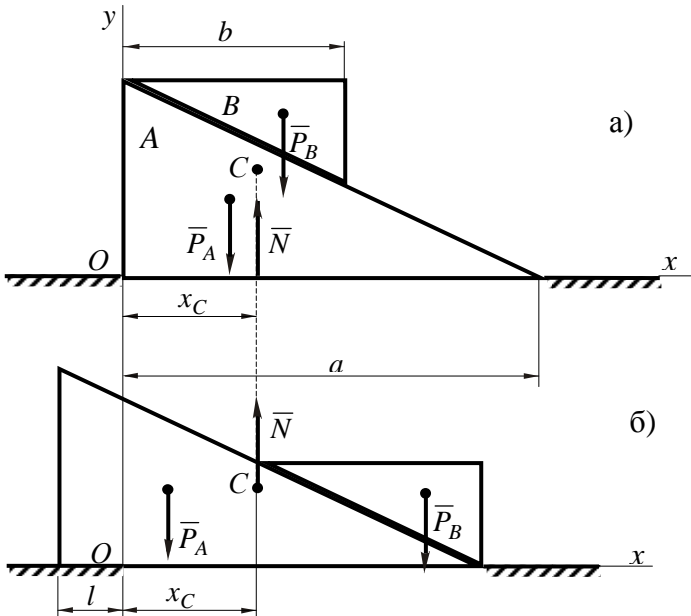


Рис.6.3

Запишемо вираз для визначення координати центра мас на початку руху:

$$x_{C1} = \frac{x_{1A}P_A + x_{1B}P_B}{P_A + P_B},$$

де  $x_{1A}$  - абсциса центра мас призми  $A$ ,

$x_{1B}$  - абсциса центра мас призми  $B$ .

Вираз для визначення координати центра мас системи, коли призма  $B$  опускається по боковій грані призми  $A$  до горизонтальної площини:

$$x_{C2} = \frac{x_{2A}P_A + x_{2B}P_B}{P_A + P_B},$$

де  $x_{2A}$  - нове значення абсциси центра мас призми  $A$ ,

$x_{2B}$  - нове значення абсциси центра мас призми  $B$ .

Оскільки  $x_{C1} = x_{C2}$ , то

$$\frac{x_{1A}P_A + x_{1B}P_B}{P_A + P_B} = \frac{x_{2A}P_A + x_{2B}P_B}{P_A + P_B},$$

або

$$x_{1A}P_A + x_{1B}P_B = x_{2A}P_A + x_{2B}P_B.$$

Перепишемо це рівняння таким чином:

$$v(x_{2A} - x_{1A}) \cdot P_A + (x_{2B} - x_{1B}) \cdot P_B = 0. \quad (1)$$

Знайдемо переміщення центрів мас призм  $A$  та  $B$ :

$$x_{2A} - x_{1A} = -l, \quad x_{2B} - x_{1B} = (a-b) - l.$$

Присутність доданка  $(-l)$  в останньому рівнянні враховує переміщення призми  $B$  разом з призмою  $A$  ліворуч на величину  $l$ .

Підставимо значення переміщень у рівняння (1):

$$[(a-b) - l]P_B - l \cdot P_A = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння відносно  $l$ , маючи на увазі, що  $P_A = 3P_B$ :

$$l = \frac{a-b}{4}.$$

**Відповідь:** 
$$l = \frac{1}{4}(a-b).$$

#### Задача №4

Три вантажі (рис.6.4), вагою  $P_1 = 20 \text{ H}$ ,  $P_2 = 15 \text{ H}$ ,  $P_3 = 10 \text{ H}$ , з'єднані невагомою ниткою, що не розтягується, та яка перекинута через нерухомі блоки  $M$  і  $N$ . Під час опускання вантажу 1 униз вантаж 2 переміщується по верхній основі чотирикутної зрізаної піраміди  $ABED$  вагою  $P = 100 \text{ H}$  праворуч, а вантаж 3 піднімається по боковій грані  $AB$  уверх. Нехтуючи тертям між зрізаною пірамідою  $ABED$  і підлогою, **визначити** переміщення  $\Delta$  зрізаної піраміди  $ABED$  відносно підлоги, якщо вантаж  $P_1$  опуститься на  $l = 1 \text{ м}$ .

**Розв'язок.** Зобразимо усі зовнішні сили, які прикладені до матеріальної системи, яка складається із піраміди і трьох вантажів (рис.6.4). Зовнішніми силами є:  $\bar{P}$  - сила тяжіння піраміди;  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  - сили тяжіння вантажів;  $\bar{N}$  - нормальна реакція

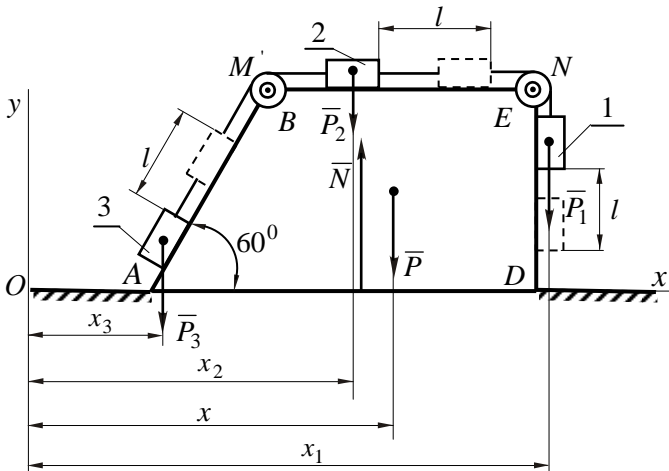


Рис.6.4

горизонтальної площини. Спрямуємо вісь  $x$  по горизонталі праворуч і запишемо теорему про рух центра мас системи матеріальних точок в проекції на цю вісь:

$$Ma_{Cx} = \sum F_{kx}^e.$$

Оскільки усі зовнішні сили перпендикулярні до осі  $x$ , то  $\sum F_{kx}^e = 0$ .

Отже,  $Ma_{Cx} = 0$ ,

тоді

$$Ma_{Cx} = M \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0, \implies \frac{dV_{Cx}}{dt} = 0 \implies V_{Cx} = \text{const} = C_1.$$

У початковий момент часу система була у стані спокою, тобто  $V_{Cx} = 0$ , тому  $C_1 = 0$ .

Оскільки

$$V_{Cx} = \frac{dx_C}{dt} = 0,$$

то

$$x_C = \text{const}.$$

Таким чином, абсциса центра мас системи не залежить від переміщень вантажів, які входять до системи, і залишається незмінною відносно нерухомої системи координат  $xOy$ .

Запишемо вираз для визначення  $x_C$  для початкового моменту часу, коли вантажі знаходилися у стані спокою:

$$x_C = \frac{x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + xP}{P_1 + P_2 + P_3 + P},$$

де  $x, x_1, x_2, x_3$  - абсциси центрів мас піраміди  $ABED$  і вантажів 1, 2 та 3.

Якщо вантаж 1 опуститься на величину  $l$  при нерухомої піраміді, то координата  $x_1$  при цьому не зміниться. Тоді вантаж 2 переміститься праворуч на величину  $l$  і координата його центра мас буде дорівнювати  $(x_2 + l)$ . Вантаж 3 теж посунеться по похилій поверхні  $AM$  на величину  $l$ , при цьому у напрямку

осі  $x$  його положення зміниться на величину  $l \cos 60^0$  і координата центра мас буде  $(x_3 + l \cos 60^0)$ . Тобто, відносно піраміди центр мас системи змінить своє положення, але не змінить його відносно нерухомої системи координат, оскільки повинен виконуватися закон збереження руху центра мас. І тоді піраміда повинна переміститися ліворуч на деяку величину  $\Delta$ .

Вантажі 1,2 та 3 разом з пірамідою також перемістяться ліворуч на відстань  $\Delta$ , і нові координати усіх центрів мас будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned}x' &= x - \Delta, & x'_2 &= x_2 + l - \Delta, \\x'_1 &= x_1 - \Delta, & x'_3 &= x_3 + l \cos 60^0 - \Delta.\end{aligned}$$

Запишемо вираз для визначення положення абсциси центра мас для нового положення системи:

$$\begin{aligned}x'_C &= \frac{x'_1 P_1 + x'_2 P_2 + x'_3 P_3 + x' P}{P_1 + P_2 + P_3 + P} = \\&= \frac{(x_1 - \Delta) P_1 + (x_2 + l - \Delta) P_2 + (x_3 + l \cos 60^0 - \Delta) P_3 + (x - \Delta) P}{P_1 + P_2 + P_3 + P}.\end{aligned}$$

Оскільки  $x_C = x'_C$ , то

$$\begin{aligned}x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x P &= (x_1 - \Delta) P_1 + (x_2 + l - \Delta) P_2 + \\&+ (x_3 + l \cos 60^0 - \Delta) P_3 + (x - \Delta) P,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 P_1 + x_2 P_2 + x_3 P_3 + x P &= x_1 P_1 - \Delta P_1 + x_2 P_2 + l P_2 - \Delta P_2 + \\&+ x_3 P_3 + l \cos 60^0 \cdot P_3 - \Delta \cdot P_3 + x P - \Delta \cdot P.\end{aligned}$$

Після приведення подібних одержимо:

$$0 = -\Delta \cdot P_1 - \Delta \cdot P_2 + l P_2 - \Delta \cdot P_3 + l \cos 60^0 \cdot P_3 - \Delta \cdot P,$$

або

$$\Delta \cdot (P_1 + P_2 + P_3 + P) = l P_2 + l \cos 60^0 \cdot P_3.$$

Остаточно

$$\Delta = \frac{l(P_2 + P_3 \cos 60^\circ)}{P_1 + P_2 + P_3 + P}.$$

Після підстановки числових величин, одержимо:

$$\Delta = \frac{1(15 + 10 + 0,5)}{20 + 15 + 10 + 100} = 0,138 \text{ м} = 13,8 \text{ см}.$$

**Відповідь:**  $\Delta = 13,8 \text{ см}.$

### Задача № 5

Електричний двигун вагою  $P_1$  з горизонтальним валом без усяких кріплень установлено на гладкому горизонтальному фундаменті.

На валу електродвигуна (рис.6.5) під прямим кутом закріплено одним кінцем однорідний стержень  $OB$  довжиною  $2l$  і вагою  $P_2$ , на другий кінець стержня насаджено точковий вантаж  $B$  вагою  $P_3$ ; кутова швидкість вала дорівнює  $\omega$ .

**Визначити:**

Закон горизонтального руху електродвигуна;

Кутову швидкість вала електродвигуна, при якій електродвигун буде «підскакувати» над фундаментом;

Найбільше горизонтальне зусилля  $R_{\max}$ , яке діє на болти, якщо ними закріплено корпус електродвигуна на фундаменті.

**Розв'язок.** Будемо розглядати електромотор, стержень і вантаж як одну механічну систему. Зовнішніми силами, які діють на цю систему, є: сила тяжіння електродвигуна  $\bar{P}_1$ , сила тяжіння стержня  $\bar{P}_2$ , сила тяжіння вантажу  $\bar{P}_3$ , а також реакції фундаменту  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$ . Усі ці сили вертикальні.

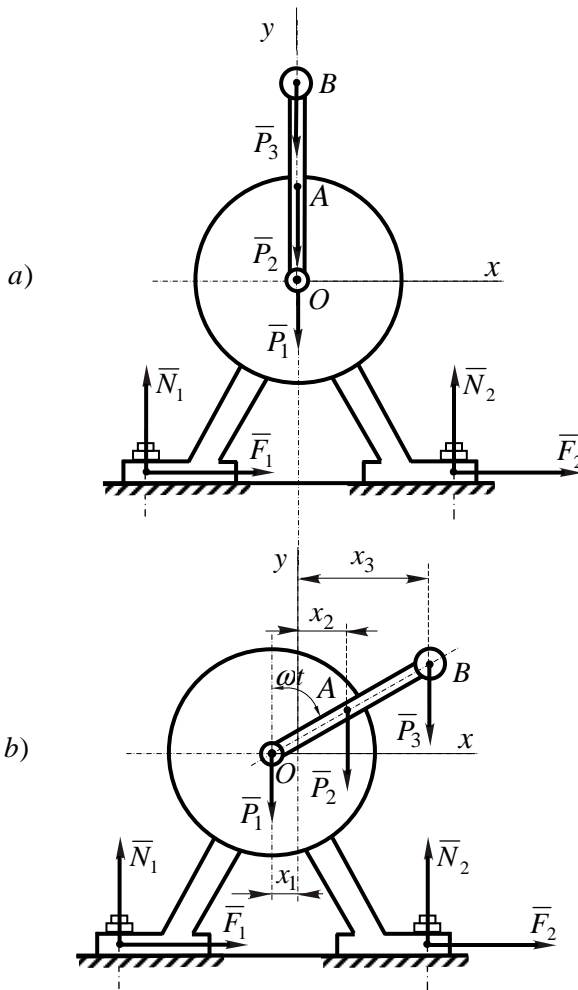


Рис.6.5

Початок нерухомої системи координат візьмемо у точці  $O$ , яка відповідає положенню центра вала електродвигуна, коли стержень направлений вертикально вгору (рис.6.5, а).



Оскільки проекція на вісь  $Ox$  головного вектора діючих на систему зовнішніх сил дорівнює нулю, то диференціальне рівняння руху центра мас системи вздовж осі  $Ox$  має вигляд:

$$Ma_{C_x} = M\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^e = 0, \quad (1)$$

де  $M$  - маса системи.

У нашому випадку  $M = m_1 + m_2 + m_3$ , або

$$M = \frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g} + \frac{P_3}{g} = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g}.$$

Тоді диференціальне рівняння руху центра мас (1) приводиться до вигляду:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \cdot \ddot{x}_C = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \cdot \frac{dV_{C_x}}{dt} = 0,$$

звідки  $\frac{dV_{C_x}}{dt} = \ddot{x}_C = 0, \quad V_{C_x} = \dot{x}_C = const.$

Припускаючи, що у початковий момент швидкість центра мас системи дорівнювала нулю, тобто, при пуску електродвигуна він був нерухомим, одержимо  $V_{C_x} = \dot{x}_C = 0$ .

Отже,  $x_C = const$ , тобто, центр мас системи не переміщується вздовж осі  $x$ .

Оскільки в початковий момент часу центр мас системи знаходиться на осі  $y$  (тобто,  $x_{C_0} = 0$ ), то і у будь-який момент часу  $x_C = 0$ .

При обертанні стержня координати центрів мас електричного двигуна, стержня і вантажу  $B$  будуть змінюватись.

Припустимо, що у деякий момент часу  $t$  координата центра мас мотора стане рівною  $x_1$ , тоді координати центрів мас стержня і вантажу  $B$  будуть дорівнювати  $x_2$  і  $x_3$  (рис.6.5,b).

Оскільки весь час  $\sum F_{kx}^e = 0$ , то

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = 0,$$

де  $x_2 = x_1 + l \sin \omega t$ ,  $x_3 = x_1 + 2l \sin \omega t$ . На рисунку 6.5, *b* показано момент, коли координата  $x_1$  від'ємна.

Тоді

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 (x_1 + l \sin \omega t) + P_3 (x_1 + 2l \sin \omega t)}{P_1 + P_2 + P_3} = 0,$$

відкіля

$$P_1 x_1 + P_2 (x_1 + l \sin \omega t) + P_3 (x_1 + 2l \sin \omega t) = 0,$$

і, отже:

$$x_1 = -\frac{l(P_2 + 2P_3)}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t.$$

Таким чином, центр електродвигуна здійснює гармонічні коливання вздовж осі  $Ox$  з амплітудою, яка дорівнює:

$$A = \frac{l(P_2 + 2P_3)}{P_1 + P_2 + P_3},$$

і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Визначимо кутову швидкість вала, при якій електродвигун буде «підсакувати» над фундаментом.

Для цього складемо диференціальне рівняння руху центра мас системи вздовж осі  $Oy$ :

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{y}_C = N_1 + N_2 - P_1 - P_2 - P_3,$$

або

$$M \ddot{y}_C = N - P_1 - P_2 - P_3, \quad (2)$$

де  $N = N_1 + N_2$  - сумарна реакція фундаменту.

Значення  $y_C$  знайдемо з виразу для координати центру мас:

$$y_C = \frac{P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{P_2 l \cos \omega t + P_3 2l \cos \omega t}{P_1 + P_2 + P_3},$$

оскільки

$$y_1 = 0, \quad y_2 = l \cos \omega t, \quad y_3 = 2l \cos \omega t.$$

Останнє рівняння перепишемо у вигляді:

$$y_C = \frac{P_2 l + 2P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3} \cos \omega t.$$

Візьмемо з обох частин рівності другу похідну за часом

$$\dot{y}_C = -\omega \frac{P_2 l + 2P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t.$$

$$\ddot{y}_C = -\omega^2 \frac{P_2 l + 2P_3 l}{P_1 + P_2 + P_3} \cos \omega t = -\frac{(P_2 + 2P_3) l \omega^2}{P_1 + P_2 + P_3} \cos \omega t. \quad (3)$$

Із рівнянь (2) і (3) витікає, що

$$N - P_1 - P_2 - P_3 = -\frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2 \cos \omega t,$$

отже,

$$N = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2 \cos \omega t.$$

Мінімальне значення реакції фундаменту буде при  $\cos \omega t = 1$ :

$$N_{\min} = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2.$$

Якщо  $N_{\min} = 0$ , то це значить, що електродвигун не притискається до фундаменту. Отже, шукане значення кутової швидкості, при якій електродвигун починає «підскакувати» над фундаментом, знайдемо із умови

$$0 = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2,$$

звідки

$$\omega = \sqrt{\frac{(P_1 + P_2 + P_3)g}{(P_2 + 2P_3)l}}.$$

На завершення визначимо найбільше горизонтальне зусилля  $R_{\max}$ , яке діє на болти, якщо ними буде закріплено корпус електродвигуна на фундаменті.

На рис.6.5 штрих-пунктирними лініями показані вісі болтів і горизонтальні реакції болтів  $\bar{F}_1$  і  $\bar{F}_2$ .

У цьому випадку диференціальне рівняння руху центра мас системи вздовж осі  $Ox$  буде:

$$\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \ddot{x}_C = F_1 + F_2 = R. \quad (4)$$

Значення  $x_C$  знайдемо за формулою:

$$x_C = \frac{P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3}{P_1 + P_2 + P_3} = \frac{P_2 l \sin \omega t + P_3 2l \sin \omega t}{P_1 + P_2 + P_3},$$

або

$$x_C = \frac{l(P_2 + 2P_3)}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t.$$

Тоді

$$\dot{x}_C = \frac{(P_2 + 2P_3)\omega l}{P_1 + P_2 + P_3} \cos \omega t,$$

$$\ddot{x}_C = -\frac{(P_2 + 2P_3)\omega^2 l}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t.$$

При цьому рівняння (4) приймає вигляд:

$$-\frac{P_1 + P_2 + P_3}{g} \cdot \frac{(P_2 + 2P_3)\omega^2 l}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t = R.$$

Із останнього рівняння виходить:

$$R = -\frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2 \sin \omega t.$$

Таким чином, максимальне горизонтальне зусилля, яке діє на болти, буде при  $\sin \omega t = \pm 1$ :

$$|R_{\max}| = \frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2.$$

**Відповідь:**

$$x_1 = \frac{l(P_2 + 2P_3)}{P_1 + P_2 + P_3} \sin \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{(P_1 + P_2 + P_3)g}{(P_2 + 2P_3)l}},$$

$$|R_{\max}| = \frac{P_2 + 2P_3}{g} l \omega^2.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 35.1; 35.6; 35.10; 35.20 [2].

## Тема 7. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ТОЧКИ І МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### ЗАНЯТТЯ № 12

#### Зміст

- 7.1. Імпульс сили.
- 7.2. Теорема про зміну кількості руху точки і системи.
- 7.3. Закон збереження кількості руху системи.
- 7.4. Контрольні запитання.
- 7.5. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки і механічної системи.
- 7.6. Приклади розв'язування задач.

#### 7.1. Імпульс сили

Для характеристики дії сили за деякий проміжок часу вводиться поняття *імпульсу сили*.

Якщо сила  $\vec{F}$  - стала, то *імпульс сили*  $\vec{S}$  дорівнює

$$\vec{S} = \vec{F} \cdot t.$$

Напрямок імпульсу сили  $\vec{S}$  співпадає з напрямком  $\vec{F}$ .

Одиниця вимірювання імпульсу у системі СІ -  $\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}$ , у системі МкГс -  $\text{кг}\cdot\text{с}$ .

Якщо сила  $\vec{F}$  змінна, то *імпульс сили* за кінцевий проміжок часу  $t_1$  визначається як інтеграл:

$$\vec{S} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt.$$

Імпульс сили – складна фізична величина, яка одночасно враховує вплив модуля, напрямку і часу дії сили на зміну стану руху тіла.

Модуль імпульсу сили можна визначити через його проекції на осі координат:

$$S_x = \int_0^{t_1} F_x dt, \quad S_y = \int_0^{t_1} F_y dt, \quad S_z = \int_0^{t_1} F_z dt.$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2},$$

де  $F_x, F_y, F_z$  - проекції сили;

$S_x, S_y, S_z$  - проекції імпульсу на осі координат.

Кути між вектором  $\vec{S}$  та осями координат визначаються з таких співвідношень:

$$\cos(\vec{S}, \vec{i}) = \frac{S_x}{S}, \quad \cos(\vec{S}, \vec{j}) = \frac{S_y}{S}, \quad \cos(\vec{S}, \vec{k}) = \frac{S_z}{S}.$$

## 7.2. Теорема про зміну кількості руху точки і системи

Однією з мір руху точки є кількість її руху.

*Кількістю руху точки називається вектор  $\vec{q}$ , який дорівнює добутку маси  $m$  точки на її швидкість  $\vec{V}$  та направлений за вектором швидкості:*

$$\vec{q} = m\vec{V}.$$

Поняття кількості руху було введено у механіку Декартом і покладено в основу механіки Ньютоном.

Одиниця вимірювання кількості руху у системі СІ -  $\text{кгм/с}$ , у системі МкГс -  $\text{кгГс}$ .

Якщо спроектувати вектор кількості руху на осі координат, то її проекції визначаються наступним чином:

$$q_x = mV_x, \quad q_y = mV_y, \quad q_z = mV_z.$$

Теорема про зміну кількості руху точки у диференціальній формі має вигляд:

$$\frac{d(m\vec{V})}{dt} = \sum \vec{F}_k = \vec{R}.$$

*Похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює геометричній сумі усіх сил, які діють на цю точку.*

Теорема про зміну кількості руху точки в інтегральній формі:

$$m\bar{V}_1 - m\bar{V}_0 = \int_0^{t_1} \bar{F}_k dt = \sum \bar{S}_k. \quad (7.1)$$

*Зміна кількості руху точки за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів усіх сил, які прикладені до точки.*

Векторному рівнянню (7.1) відповідають три рівняння у проєкціях на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} mV_{1x} - mV_{0x} &= \sum S_{kx}, \\ mV_{1y} - mV_{0y} &= \sum S_{ky}, \\ mV_{1z} - mV_{0z} &= \sum S_{kz}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Більшість практичних задач вирішується з використанням виразу (7.2).

**Кількістю руху механічної системи** називається векторна величина  $\bar{Q}$ , яка дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількостей руху усіх точок цієї системи.

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{V}_k. \quad (7.3)$$

Знайти  $\bar{Q}$  можна шляхом побудови багатокутника кількостей руху усіх точок системи (рис.7.1).

Замикаюча сторона векторного багатокутника буде являти собою вектор  $\bar{Q}$ .



Величина  $\bar{Q}$  може бути якою завгодно, навіть дорівнювати нулю, коли многокутник, побудований із векторів  $m_k \bar{V}_k$ , виявляється замкнутим.

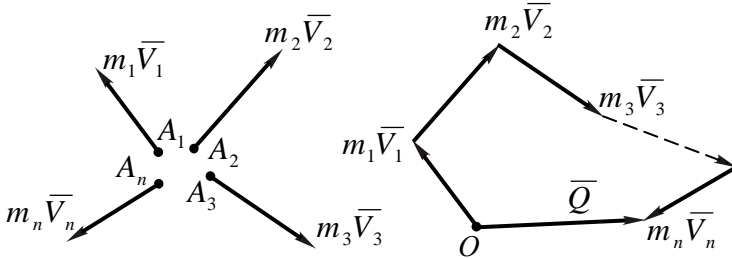


Рис.7.1

Формулу (7.3) можна записати у вигляді:

$$\bar{Q} = M\bar{V}_C, \quad (7.4)$$

де  $M$  - маса усієї системи;

$\bar{V}_C$  - швидкість центра мас системи.

З цієї формули виходить, що кількість руху системи дорівнює нулю, коли швидкість центра мас дорівнює нулю. Наприклад, якщо тіло обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через його центр мас, то кількість руху тіла дорівнює нулю.

У випадку, коли колесо котиться, вектор  $\bar{Q} = M\bar{V}_C$  характеризує тільки поступальну частину плоского руху колеса.

Теорема про зміну кількості руху системи у диференціальній формі виразиться формулою:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e, \quad (7.5)$$

де  $\bar{F}_k^e$  - головний вектор усіх зовнішніх сил, які діють на механічну систему.

*Похідна за часом від кількості руху механічної системи дорівнює геометричній сумі всіх діючих на точки системи зовнішніх сил.*

У проєкціях на осі координат рівняння (7.5) відповідає рівнянням:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (7.6)$$

В інтегральній формі теорема про зміну кількості руху системи має вигляд:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \quad (7.7)$$

де  $\bar{Q}_0$  - кількість руху системи у початковий момент часу.

$\bar{Q}_1$  - кількість руху системи у кінцевий момент часу.

*Зміна кількості руху механічної системи за деякий проміжок часу дорівнює геометричній сумі імпульсів зовнішніх сил, які діють на систему за той же проміжок часу.*

Векторному рівнянню (7.7) відповідають три рівняння у проєкціях на осі координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_{1x} - Q_{0x} &= \sum S_{kx}^e, \\ Q_{1y} - Q_{0y} &= \sum S_{ky}^e, \\ Q_{1z} - Q_{0z} &= \sum S_{kz}^e. \end{aligned} \right\} \quad (7.8)$$

Практична цінність теореми полягає в тому, що вона дозволяє виключити із розглядання невідомі внутрішні сили.

### 7.3. Закон збереження кількості руху системи

Висновки із теореми про зміну кількості руху системи, які ще мають назву законів збереження кількості руху:

1. Якщо головний вектор зовнішніх сил, які діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи не змінюється:

якщо 
$$\sum \bar{F}_k^e = 0,$$

то 
$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{Q} = const . \quad (7.9)$$

2. Якщо сума проєкцій зовнішніх сил на яку-небудь вісь, наприклад  $Ox$ , дорівнює нулю, то проєкція кількості руху системи на цю вісь зберігається сталою:

якщо 
$$\sum F_{kx}^e = 0,$$

то 
$$\frac{dQ_x}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad Q_x = const . \quad (7.10)$$

Ці результати виражають закони збереження кількості руху системи. З них витікає, що *внутрішні сили не можуть змінити кількість руху системи.*

### 7.4. Контрольні запитання

Як визначається імпульс змінної сили за кінцевий проміжок часу?

Чому дорівнює імпульс рівнодіючої?

Що називається кількістю руху системи ?

Сформулюйте теорему про зміну кількості руху точки і системи у диференціальній формі.

Сформулюйте теорему про зміну кількості руху точки і системи в інтегральній формі.

Чому дорівнює кількість руху маховика, який обертається навколо нерухомої осі?

### **7.5. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки і механічної системи**

*Для матеріальної точки:*

Зобразити на рисунку усі сили, які прикладені до матеріальної точки, тобто активні сили і реакції в'язей.

Вибрати систему координат.

Записати теорему про зміну кількості руху точки у векторній формі.

Спроекувати це векторне рівняння на осі обраної системи координат.

Розв'язати одержані рівняння і визначити шукані величини.

*Для механічної системи:*

Зобразити на рисунку усі зовнішні сили.

Вибрати систему координат.

Записати теорему про зміну кількості руху системи у векторній формі.

Спроекувати це векторне рівняння на осі обраної системи координат.

Розв'язати одержані рівняння і визначити шукані величини.

### **7.6. Приклади розв'язування задач**

#### **Задача № 1**

Залізничний потяг рухається по горизонтальній і прямолінійній ділянці колії (рис.7.2). Під час гальмування до повної зупинки розвивається сила опору, яка дорівнює  $R = 0,1$  ваги потяга. У момент початку гальмування швидкість  $V$  потяга становила  $72 \text{ км/год}$ .

**Визначити** час  $t$  і шлях  $L$  гальмування.

**Розв'язок.** Зобразимо сили, які діють на потяг під час гальмування: сила тяжіння потяга  $\vec{P}$ , нормальна реакція колії  $\vec{N}$ , сила опору  $\vec{R}$ , яка за величиною дорівнює  $R = 0,1P$ .

Виберемо систему координат. Оскільки рух прямолінійний і горизонтальний, досить розглянути рух у напрямку осі  $x$ .

Запишемо теорему про зміну кількості руху потяга (розглядаючи його як матеріальну точку) в інтегральній формі:

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum \vec{S}_k = \vec{S}_P + \vec{S}_R + \vec{S}_N, \quad (1)$$

де  $m$  - маса потяга,

$\vec{V}_1, \vec{V}_0$  - кінцева і початкова швидкість потяга,

$\sum \vec{S}_k$  - сума імпульсів сил  $\vec{R}, \vec{P}, \vec{N}$ , які діють на потяг під час гальмування.

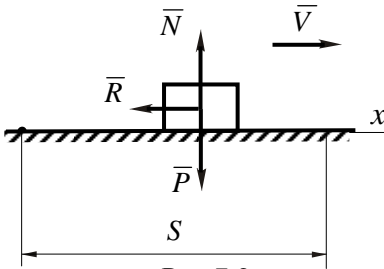


Рис.7.2

Спроектуємо векторне рівняння (1) на вісь  $x$ :

$$mV_{1x} - mV_{0x} = -S_R. \quad (2)$$

Проекції імпульсів сил  $\vec{S}_P$  і  $\vec{S}_N$  на вісь  $x$  дорівнюють нулю, оскільки вектори  $\vec{P}$  і  $\vec{N}$  перпендикулярні до осі.

Сила опору  $\vec{R}$  під час гальмування за величиною не змінюється, отже, її імпульс дорівнює:

$$S_R = R \cdot t = 0,1P \cdot t.$$

Швидкість у кінці ділянки гальмування дорівнює нулю, тобто  $V_1 = 0$ .

Остаточно, рівняння імпульсів (2) у проекції на вісь  $x$  набуває вигляду:

$$-mV_0 = -S_R = -0,1Pt,$$

або

$$\frac{P}{g}V_0 = 0,1Pt,$$

звідки

$$t = \frac{V_0}{0,1g}.$$

З урахуванням числових значень величин  $V_0$  і  $g$  маємо:

$$t = \frac{20}{0,1 \cdot 9,81} = 20,4 \text{ с.}$$

Шлях гальмування визначимо з формули для рівнозмінного руху:

$$L = V_0t + \frac{at^2}{2}.$$

В цьому випадку прискорення потяга визначається з формули:

$$V_1 = V_0 + at,$$

тобто,

$$a = \frac{V_1 - V_0}{t} = \frac{0 - 20}{20,4} = -0,98 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$L = V_0t - \frac{at^2}{2} = 20 \cdot 20,4 - \frac{0,98(20,4)^2}{2} = 204 \text{ м.}$$

**Відповідь:**  $t = 20,4 \text{ с, } L = 204 \text{ м.}$

### Задача № 2

По шорсткій похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha = 30^\circ$ , спускається важке тіло без початкової швидкості.

**Визначити** час  $T$ , за який тіло пройде шлях довжиною  $l = 39,2 \text{ м}$ , якщо коефіцієнт тертя  $f = 0,2$  і  $V_0 = 0$ .

**Розв'язок.** Під час руху на тіло діють сила тяжіння тіла  $\vec{G}$ , нормальна реакція поверхні  $\vec{N}$  та сила тертя  $\vec{F}_{mp}$ , яка спрямована у бік, що протилежний руху (рис.7.3).

Спрямуємо вісь  $x$  вздовж похилої поверхні вниз і запишемо теорему про зміну кількості руху у векторній формі:

$$m\vec{V}_1 - m\vec{V}_0 = \sum \vec{S}_k = \vec{S}_G + \vec{S}_N + \vec{S}_{mp}. \quad (1)$$

Спроекуємо рівність (1) на вісь  $x$ :

$$mV_{1x} - mV_{0x} = S_G \sin \alpha - S_{mp}. \quad (2)$$

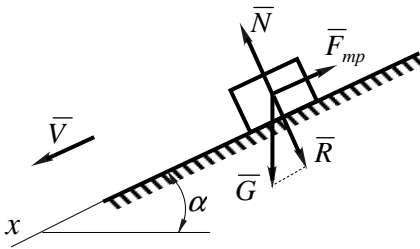


Рис.7.3

Проекція імпульсу нормальної реакції  $\vec{N}$  на вісь  $x$  дорівнює нулю, оскільки сила  $\vec{N}$  перпендикулярна  $Ox$ .

Ураховуючи, що під час руху сила тяжіння  $\vec{G}$  і сила тертя  $\vec{F}_{mp}$  не змінюються, то

$$S_G = G \cdot T,$$

$$S_{mp} = F_{mp} \cdot T.$$

Окрім того:

$$V_{0x} = V_0 = 0, \quad V_{1x} = V_1.$$

Отже, рівняння імпульсу (2) прийме вигляд:

$$mV_1 = G \cdot T \sin \alpha - F_{mp} \cdot T. \quad (3)$$

Вирахуємо силу тертя:

$$F_{mp} = fR = fG \cdot \cos \alpha.$$

Тоді рівняння (3) прийме вигляд:

$$\frac{G}{g} V_1 = GT \sin \alpha - fGT \cos \alpha,$$

або 
$$\frac{V_1}{g} = T \sin \alpha - Tf \cos \alpha ,$$

звідки

$$T = \frac{V_1}{(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cdot g} .$$

Оскільки

$$\sin 30^\circ = 0,5; \quad f = 0,2; \quad \cos 30^\circ = 0,866; \quad g = 9,8 \text{ м/с}^2 ,$$

то

$$T = \frac{V_1}{3,2} .$$

Використовуючи одержану залежність, спочатку підрахуємо прискорення тіла, а після цього - час руху.

Оскільки

$$V_1 = V_0 + aT = aT ,$$

то:

$$T = \frac{aT}{3,2} , \quad \text{і} \quad a = 3,2 \text{ м/с}^2 .$$

З формули  $S = V_0 t + \frac{at^2}{2}$ , враховуючи, що при  $t=T$   $S=l$ ,

одержимо 
$$l = V_0 T + \frac{1}{2} a T^2 = \frac{1}{2} a T^2 .$$

З цієї формули знаходимо час руху  $T$  :

$$T = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 39,5}{3,2}} = 5 \text{ с} .$$

**Відповідь:**  $T = 5 \text{ с} .$

### Задача № 3

На полігоні гармата, яка нахилена під кутом  $\alpha$  до горизонту, робить постріл у мішень. Сила тяжіння ствола гармати -  $P_{ст} = 11000 \text{ Н}$ . Сила тяжіння снаряду дорівнює  $P_{сн} = 54 \text{ Н}$ . Швидкість снаряду біля дульного зрізу  $V_0 = 900 \text{ м/с}$ .



**Визначити** швидкість  $V_{cm}$  вільного відкату ствола гармати у момент вильоту снаряда.

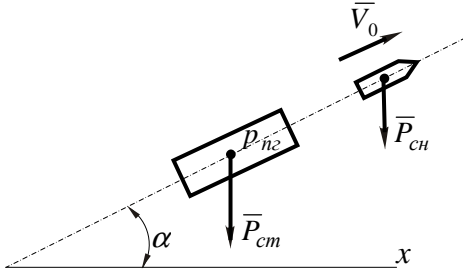


Рис.7.4

**Розв'язок.** У задачі розглядається рух матеріальної системи, яка складається із ствола і снаряда (рис.7.4).

На систему діють зовнішні сили: тяжіння ствола  $\vec{P}_{cm}$  і тяжіння снаряда  $\vec{P}_{cn}$ . Внутрішні

сили визначаються тиском порохових газів  $p_{nz}$ . Ці сили необхідно виключити з розгляду, відповідно до теореми про кількість руху механічної системи.

Застосуємо теорему про зміну кількості руху системи:

$$\vec{Q}_2 - \vec{Q}_1 = \sum \vec{S}(\vec{F}_k^e), \quad (1)$$

де  $\vec{Q}_2$  - кількість руху системи у кінцевий момент часу;

$\vec{Q}_1$  - кількість руху системи у початковий момент часу;

$\sum \vec{S}(\vec{F}_k^e)$  - сума імпульсів усіх зовнішніх сил ( $\vec{P}_{cm}, \vec{P}_{cn}$ ).

Вісь  $x$  спрямуємо перпендикулярно до векторів зовнішніх сил  $\vec{P}_{cm}$  і  $\vec{P}_{cn}$ .

Спроєкуємо рівняння (1) на вісь  $x$ :

$$Q_{2x} - Q_{1x} = S_x(\vec{P}_{cn}) + S_x(\vec{P}_{cm}).$$

Оскільки проєкції сил  $\vec{P}_{cm}$  і  $\vec{P}_{cn}$  на вісь  $x$  дорівнюють нулю, то і проєкції імпульсів  $\vec{S}(\vec{P}_{cn})$  і  $\vec{S}(\vec{P}_{cm})$  також дорівнюють нулю. Отже:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0, \quad \text{або} \quad Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Таким чином, проекція кількості руху системи на вісь  $x$  у кінцевий момент часу дорівнює проекції кількості руху системи у початковий момент часу.

У початковий момент часу (до пострілу) снаряд і ствол були нерухомі, отже, їх кількості руху дорівнювали нулю і

$$Q_{1x} = (m_{cm} \cdot 0 + m_{cn} \cdot 0) = 0.$$

У момент вильоту снаряда проекція кількості руху системи на вісь дорівнює:

$$Q_{2x} = (m_{cm} \cdot V_{cm} + m_{cn} \cdot V_0) \cos \alpha,$$

або

$$Q_{2x} = \left( \frac{P_{cm}}{g} \cdot V_{cm} + \frac{P_{cn}}{g} \cdot V_0 \right) \cos \alpha.$$

Оскільки

$$Q_{1x} = 0,$$

то

$$(P_{cm} \cdot V_{cm} + P_{cn} \cdot V_0) \frac{\cos \alpha}{g} = 0,$$

звідки

$$P_{cm} \cdot V_{cm} = -P_{cn} \cdot V_0, \quad \text{і} \quad V_{cm} = -\frac{P_{cn}}{P_{cm}} V_0.$$

З урахуванням числових значень:

$$V_{cm} = -\frac{54}{11000} 900 = -4,4 \text{ м/с}.$$

Знак мінус показує, що швидкість ствола спрямована у бік, протилежний швидкості снаряда.

**Відповідь:**  $V_{cm} = -4,4 \text{ м/с}.$

#### Задача № 4

Буксирний пароплав вагою  $P_n = 600 \text{ кН}$  набрав швидкість  $V_{0n} = 1,5 \text{ м/с}$ , після чого натягнувся буксирний канат і баржа вагою  $P_b = 400 \text{ кН}$  рушила слідом за пароплавом.

**Визначити** спільну швидкість пароплава і баржі  $V_1$ , рахуючи, що рушійна сила і сила опору води зрівноважуються, тобто,  $F_{руш} = F_{он}$ .

**Розв'язок.** Для визначення швидкості  $V_1$  застосуємо теорему про зміну кількості руху системи.

На систему, яка складається з пароплава і баржі, діють зовнішні сили: сили тяжіння  $\bar{P}_б$  і  $\bar{P}_н$ , сили виштовхування  $\bar{N}_б$  та  $\bar{N}_н$ , які прикладені до баржі та буксиру, а також рушійна сила  $\bar{F}_{руш}$  і сила опору води  $\bar{F}_{он}$  (рис.7.5).

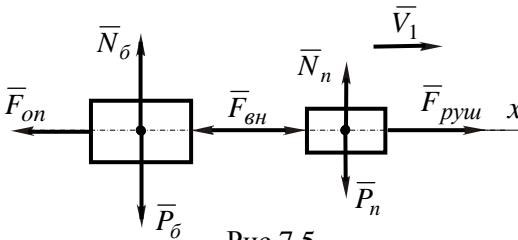


Рис.7.5

Внутрішня сила - натяг буксирного канату  $\bar{F}_{вн}$  - невідома.

Вісь  $x$  спрямуємо горизонтально, праворуч.

Запишемо теорему про зміну кількості руху даної системи

в інтегральній формі:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_2 - \bar{Q}_1 &= \sum \bar{S}(\bar{F}_k^e) = \\ &= \bar{S}(\bar{P}_н) + \bar{S}(\bar{P}_б) + \bar{S}(\bar{N}_б) + \bar{S}(\bar{N}_н) + \bar{S}(\bar{F}_{руш}) + \bar{S}(\bar{F}_{он}), \quad (1) \end{aligned}$$

де  $\bar{Q}_2$  - кількість руху системи баржа-буксир у той момент часу, коли вони починають рухатися з однаковою швидкістю;

$\bar{Q}_1$  - кількість руху цієї системи у початковий момент часу;

$\sum \bar{S}(\bar{F}_k^e)$  - сума імпульсів усіх зовнішніх сил.

Спроектуємо рівняння (1) на вісь  $x$ :

$$\begin{aligned} Q_{2x} - Q_{1x} &= \\ &= S_x(\bar{P}_н) + S_x(\bar{P}_б) + S_x(\bar{N}_б) + S_x(\bar{N}_н) + S_x(\bar{F}_{руш}) + S_x(\bar{F}_{он}). \end{aligned}$$

Оскільки за умовами  $F_{он} = F_{руш}$ , а направлені вони у різні боки, то

$$S_x(\bar{F}_{пуш}) = -S_x(\bar{F}_{он}).$$

Крім того, проекції на вісь  $x$  сил тяжіння пароплава і баржі, а також виштовхуючих сил  $\bar{N}_\sigma$  та  $\bar{N}_n$ , дорівнюють нулю. Отже, проекції імпульсів цих сил на вісь  $x$  теж дорівнюють нулю. Таким чином рівняння проекцій приймає вигляд:

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0, \quad \text{або} \quad Q_{2x} = Q_{1x}.$$

Підрахуємо кількість руху пароплава і баржі у початковий момент часу, коли швидкість пароплава дорівнює  $V_{0n} = 1,5 \text{ м/с}$ , а швидкість баржі  $V_{0\sigma} = 0$ .

$$Q_{1x} = m_n V_{0n} + m_\sigma V_{0n} = m_n V_{0n}.$$

Сумісний рух пароплава і баржі відбувається з однаковою швидкістю  $V_1$ , тому кількість руху системи у цей час

$$Q_{2x} = m_n V_1 + m_\sigma V_1 = (m_n + m_\sigma) V_1.$$

Оскільки

$$Q_{2x} - Q_{1x} = 0,$$

то

$$(m_n + m_\sigma) V_1 = m_n V_{0n}.$$

Звідси маємо

$$V_1 = \frac{m_n V_{0n}}{m_n + m_\sigma} = \frac{600}{600 + 400} \cdot 1,5 = 0,9 \text{ м/с}.$$

**Відповідь:**  $V_1 = 0,9 \text{ м/с}$ .

### Задача № 5

Механічна система складається з вантажів 1 і 2 масами  $m_1 = 2 \text{ кг}$  та  $m_2 = 3 \text{ кг}$ , відповідно, а також прямокутної вертикальної плити 3 масою  $m_3 = 10 \text{ кг}$ , яка рухається вздовж горизонтальних напрямних (рис.7.6). У момент часу  $t = t_0 = 0$ , коли швидкість плити  $V_{03} = 2 \text{ м/с}$ , вантажі під дією внутрішніх сил починають рухатися по жолобах плити. Вантаж 1 рухається по

дузі кола з радіусом  $R=0,1$  м за законом  $\varphi = 2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}$ , де  $\varphi$  виражено у радіанах,  $t$  – у секундах (вісь, від якої ведеться позитивний напрям відліку кута  $\varphi$ , показано на рисунку). Вантаж 2 рухається від точки  $C_3$  прямолінійно за законом  $S = 0,4 \cos(\pi^2 / 4)$ , де  $S$  виражено у метрах,  $t$  – у секундах (на рисунку вантаж 2 зображено в положенні позитивного відліку координати  $S$ ), кут  $\alpha = 60^\circ$ .

**Визначити** залежність  $V_3 = f(t)$ , тобто, швидкість руху плити як функцію часу, вважаючи вантажі матеріальними точками і нехтуючи всіма силами опору руху.

**Розв'язок.** Розглянемо механічну систему у довільному положенні (рис.7.6). Зобразимо усі зовнішні сили, що діють на систему: сили тяжіння  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  та реакцію направляючої  $\bar{N}$ .

Проведемо координатні осі  $xOy$  так, щоб вісь  $Oy$  проходила через точку  $C_{30}$ , де знаходиться центр мас плити  $C_3$  у початковий момент часу  $t = t_0 = 0$ .

Визначимо  $V_3 = f(t)$  за допомогою теореми про зміну кількості руху  $\bar{Q}$  механічної системи в проекції на вісь  $x$ .

Оскільки усі зовнішні сили, що діють на систему, вертикальні, то  $\sum F_{kx}^e = 0$  і, згідно з (7.10), маємо:

$$Q_x = const, \quad \text{або} \quad Q_x^I = Q_x^{II}, \quad (1)$$

де  $Q_x^I = (m_1 + m_2 + m_3) \cdot V_{03} = MV_{03}$  - проекція кількості руху системи в момент часу  $t_0=0$ ;

$Q_x^{II} = m_1V_{1x} + m_2V_{2x} + m_3V_{3x}$  - проекція кількості руху системи в довільний момент часу  $t$ .

Визначимо кількості руху  $Q_x^I$  і  $Q_x^{II}$ :

$$Q_x^I = MV_{03} = (2 + 3 + 10) \cdot 2 = 30 \text{ кгм/с}, \quad (2)$$

$$Q_x^{II} = m_1V_{1x} + m_2V_{2x} + m_3V_{3x}, \quad (3)$$

де  $V_{3x} = V_3 = \dot{x}_3$ ,  $V_{1x} = \dot{x}_1$ ,  $V_{2x} = \dot{x}_2$ .

Виразимо координати  $x_1$  та  $x_2$  через координату  $x_3$ .

З рис.7.6 видно, що в довільний момент часу абсциса першого вантажу

$$x_1 = x_3 - R \cos \varphi = x_3 - 0,1 \cos \left( 2\pi t^2 - \frac{\pi}{2} \right),$$

а абсциса другого вантажу

$$\begin{aligned} x_2 &= x_3 + S \cos \alpha = x_3 + 0,4 \cos \left( \frac{\pi t^2}{4} \right) \cdot \cos 60^\circ = \\ &= x_3 + 0,5 \cdot 0,4 \cdot \cos \left( \frac{\pi t^2}{4} \right) = x_3 + 0,2 \cdot \cos \left( \frac{\pi t^2}{4} \right). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} V_{1x} = \dot{x}_1 &= \left[ x_3 - 0,1 \cos \left( 2\pi t^2 - \frac{\pi}{2} \right) \right]' = \\ &= \dot{x}_3 + 0,1 \cdot 4\pi t \sin \left( 2\pi t^2 - \frac{\pi}{2} \right) = V_3 + 1,3t \sin \left( 2\pi t^2 - \frac{\pi}{2} \right); \end{aligned}$$

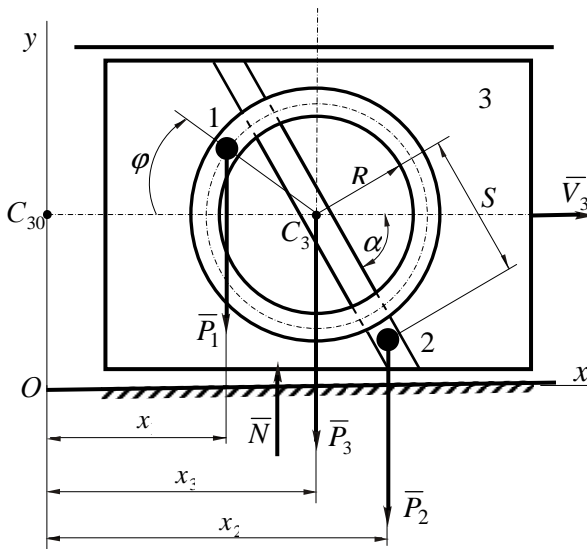


Рис.7.6

$$V_{2x} = \dot{x}_2 = \left[ x_3 + 0, 2 \cos(2\pi t^2 / 4) \right]' = \\ = \dot{x}_3 - 0, 2 \cdot \pi t / 2 \cdot \sin(2\pi t^2 / 4) = V_3 - 0, 3t \sin(2\pi t^2 / 4).$$

Підставляючи отримані вирази для  $V_{1x}$ ,  $V_{2x}$  та  $V_{3x}$  в (3), отримуємо:

$$Q_x'' = m_3 V_3 + m_1 \left[ V_3 + 1, 3t \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) \right] + \\ + m_2 \left[ V_3 - 0, 3t \sin(2\pi t^2 / 4) \right] = (m_1 + m_2 + m_3) V_3 + \\ + m_1 \cdot 1, 3t \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) - m_2 \cdot 0, 3t \sin(2\pi t^2 / 4).$$

Оскільки  $m_1 = 2 \text{ кг}$ ,  $m_2 = 3 \text{ кг}$ ,  $m_3 = 10 \text{ кг}$ , то

$$Q_x'' = (2 + 3 + 10) V_3 + 2 \cdot 1, 3t \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) - 3 \cdot 0, 3t \sin(2\pi t^2 / 4).$$

$$Q_x'' = 15 \cdot V_3 + 2, 6 \cdot t \cdot \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) - 0, 9 \cdot t \cdot \sin(\frac{\pi t^2}{4}). \quad (4)$$

У відповідності з (1), вирази (2) та (4) рівні, тобто:

$$30 = 15 V_3 + 2, 6 t \cdot \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) - 0, 9 \cdot t \cdot \sin(\frac{\pi t^2}{4}).$$

Звідси остаточно отримуємо:

$$V_3 = \frac{30}{15} - \frac{2, 6}{15} t \cdot \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) + \frac{0, 9}{15} \cdot t \cdot \sin(\frac{\pi t^2}{4}) = \\ = 2 - 0, 17 t \cdot \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) + 0, 06 \cdot t \cdot \sin(\frac{\pi t^2}{4}).$$

**Відповідь:**

$$V_3 = 2 - 0, 17 t \cdot \sin(2\pi t^2 - \frac{\pi}{2}) + 0, 06 \cdot t \cdot \sin(\frac{\pi t^2}{4}), \text{ м/с.}$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 28.3; 28.7; 36.9; 36.11; 36.16 [2].

## Тема 8. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ТОЧКИ І МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### ЗАНЯТТЯ № 13

#### Зміст

- 8.1. Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи.
- 8.2. Диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі.
- 8.3. Контрольні запитання.
- 8.4. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну моменту кількості руху точки і механічної системи.
- 8.5. Приклади розв'язування задач.

#### 8.1. Теорема про зміну моменту кількості руху механічної системи

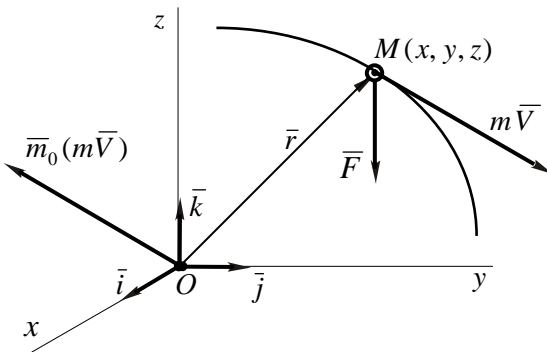


Рис.8.1

кількості руху  $\vec{m}_0(m\vec{V})$  відносно будь-якого центра O визначається із виразу (рис.8.1):

Нарівні з *кількістю руху*, як векторної міри поступального руху, для обертального руху можна ввести **момент кількості руху**.

Для матеріальної точки масою  $m$ , яка має швидкість  $\vec{V}$ , момент



$$\bar{m}_0 (m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (8.1)$$

Вектор моменту кількості руху прикладається у точці  $O$ , відносно якої він вираховується. Якщо спроектувати обидві частини рівняння (8.1) на осі декартової системи координат, одержимо моменти кількості руху точки відносно осей координат:

$$\left. \begin{aligned} m_x (m\bar{V}) &= m(yV_z - zV_y), \\ m_y (m\bar{V}) &= m(zV_x - xV_z), \\ m_z (m\bar{V}) &= m(xV_y - yV_x). \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

**Кінетичним моментом**  $\bar{K}_0$  або **головним моментом** кількості руху механічної системи відносно даного центра називається вектор, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху усіх матеріальних точок системи відносно цього ж центру:

$$\bar{K}_0 = \sum \bar{m}_0 (m_k \bar{V}_k) = \sum (\bar{r}_k \times m_k \bar{V}_k). \quad (8.3)$$

Подібно до того, як кількість руху системи є характеристикою поступального руху, кінетичний момент є характеристикою обертального руху системи.

Кінетичний момент твердого тіла, яке обертається відносно осі  $z$  з кутовою швидкістю  $\omega$ , дорівнює добутку кутової швидкості тіла на його момент інерції відносно осі обертання:

$$K_z = I_z \omega. \quad (8.4)$$

Похідна за часом від моменту кількості руху точки, взятого відносно будь-якого нерухомого центру  $O$ , дорівнює моменту сили, яка діє на цю точку, відносно того ж центру:

$$\frac{d}{dt} [\bar{m}_0 (m\bar{V})] = \bar{M}_0 (\bar{F}). \quad (8.5)$$

Спроектувавши це рівняння на осі координат, отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} [m_x (m\bar{V})] &= M_x(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt} [m_y (m\bar{V})] &= M_y(\bar{F}), \\ \frac{d}{dt} [m_z (m\bar{V})] &= M_z(\bar{F}). \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Якщо розглядати рух системи, на яку діють зовнішні  $\bar{F}_k^e$  і внутрішні сили  $\bar{F}_k^i$ , то похідна за часом від кінетичного моменту механічної системи відносно деякого центра дорівнює геометричній сумі моментів усіх зовнішніх сил відносно того ж центра:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e). \quad (8.7)$$

Проектуючи обидві частини рівняння на нерухомі осі  $Oxyz$  і враховуючи, що проекція вектора, який зображає момент сили відносно точки, на вісь, дорівнює моменту сили відносно цієї осі, одержимо:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \sum m_x (\bar{F}_k^e), \\ \frac{dK_y}{dt} &= \sum m_y (\bar{F}_k^e), \\ \frac{dK_z}{dt} &= \sum m_z (\bar{F}_k^e). \end{aligned} \right\} \quad (8.8)$$

Теорема про зміну кінетичного моменту дозволяє вивчати обертальний рух твердого тіла навколо осі і точки, або обертальну частину руху тіла у загальному випадку руху вільного твердого тіла.

Практична цінність теореми полягає ще і в тому, що вона дозволяє під час вивчення руху системи виключити із розгляду невідомі внутрішні сили.

Із теорем про зміну кінетичного моменту системи (8.7)-(8.8) витікають важливі висновки:

*Якщо сума моментів відносно центра  $O$  усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кінетичний момент системи  $\bar{K}_0$  відносно цієї ж точки є сталим за величиною і напрямком, тобто,*

$$\text{якщо} \quad \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e) = 0, \quad \text{то} \quad \frac{d\bar{K}_0}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \bar{K}_0 = \text{const}.$$

*Якщо сума моментів усіх зовнішніх сил, що діють на систему, відносно деякої осі, наприклад  $z$ , дорівнює нулю, то проекція кінетичного моменту на цю ж вісь є сталою за величиною, тобто,*

$$\text{якщо} \quad \sum m_z(\bar{F}_k^e) = 0, \quad \text{то} \quad \frac{dK_z}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad K_z = \text{const}.$$

## 8.2. Диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі

Кінетичний момент тіла відносно осі обертання за рівнянням (8.4), якщо вісь  $z$  є віссю обертання тіла, дорівнює:

$$K_z = I_z \omega.$$

Отже,

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e).$$

Сума моментів зовнішніх сил  $\sum m_z(\bar{F}_k^e)$  відносно осі обертання називається **обертальним моментом** і позначається

$$\sum m_z(\bar{F}_k^e) = M_z^e.$$

Таким чином, диференціальне рівняння обертального руху тіла має вигляд:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e, \quad \text{або} \quad I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^e. \quad (8.9)$$

Із (8.9) витікає, що *добуток моменту інерції тіла відносно осі обертання на кутове прискорення тіла дорівнює обертальному моменту*

$$I_z \varepsilon = M_z^e. \quad (8.10)$$

Це рівняння дозволяє вирішувати наступні задачі:

- якщо задані рівняння обертання тіла  $\varphi = f(t)$  і його момент інерції  $I_z$ , то можна визначити обертальний момент:

$$M_z^e = I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2};$$

- якщо задані зовнішні сили, що прикладені до тіла, початкові умови обертання  $\varphi_0$  та  $\omega_0$ , момент інерції  $I_z$  тіла, то можна знайти рівняння обертання тіла  $\varphi = f(t)$ :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{M_z^e}{I_z};$$

- визначити момент інерції тіла  $I_z$  відносно осі обертання, якщо відомі величини  $M_z^e$  і  $\varepsilon$ :

$$I_z = \frac{M_z^e}{\varepsilon}.$$

Із рівняння  $I_z \varepsilon = M_z^e$  витікають окремі випадки:

1. Якщо  $M_z^e = 0$ , то  $I_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = I_z \frac{d\omega}{dt} = 0$ , а якщо

$I_z = \text{const}$  то і  $\omega = \text{const}$ . У цьому випадку *тіло обертається рівномірно*.

2. Якщо  $M_z^e = \text{const} \neq 0$ , то  $I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \cdot \varepsilon = \text{const}$ , а якщо

$I_z = \text{const}$  то і  $\varepsilon = \text{const}$ . Отже, *тверде тіло обертається рівнозмінно*.

### 8.3. Контрольні запитання

Як визначаються моменти кількості руху матеріальної точки відносно центра і відносно осі?

При якому розташуванні вектора кількості руху матеріальної точки його момент відносно осі дорівнює нулю?

Сформулюйте теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки відносно осі.

Що називається кінетичним моментом відносно центра або осі?

Сформулюйте теорему про зміну кінетичного моменту відносно центра і відносно осі.

### 8.4. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну моменту кількості руху точки і механічної системи

Задачі, які відносяться до цієї теми, можна розділити на наступні чотири основні типи:

Обчислення кінетичного моменту.

Вивчення руху конкретної точки механічної системи, якщо ця точка бере участь в обертовому русі системи.

Вивчення обертального руху твердого тіла.

Вивчення руху механічної системи, до якої входять тіла, які здійснюють як поступальні, так і обертальні рухи.

**Задачі першого типу** можуть бути розв'язані за допомогою загальних формул (8.4), (8.5).

Порядок розв'язування задач **другого типу** може бути наступним:

Вибрати систему координат.

Зобразити всі зовнішні сили, які прикладені до матеріальної точки; у випадку довільної точки до цих сил додати реакції зовнішніх в'язей.

Записати у скалярній формі вираз теореми про зміну моменту кількості руху точки.

Вирахувати суму моментів сил, які прикладені до матеріальної точки.

Визначити кількість руху матеріальної точки і його момент відносно осей.

Підставити дані пунктів 4 і 5 у рівняння (8.6) теореми про зміну моменту кількості руху матеріальної точки.

Вирішити, відповідно до умови, пряму або обернену задачу динаміки точки.

При розв'язуванні **задач третього типу** зберігати рекомендації перших двох пунктів, а далі робити наступним чином:

Записати диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі (8.9).

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e).$$

Визначити момент інерції твердого тіла відносно нерухомої осі.

Підрахувати суму моментів усіх зовнішніх сил відносно осі обертання.

Величини, одержані в п.п. 4 і 5, підставити у рівняння (8.9).

Записати початкові умови.

Розв'язати рівняння п.6 в залежності від умови, як пряму або обернену задачу.

При розв'язуванні **задач четвертого типу** необхідно попередньо розчленувати задану систему на окремі тверді тіла, і до кожного з них, у залежності від характеру руху, застосувати одну із теорем: про зміну кількості руху – у випадку поступального руху тіл розчленованої системи; про зміну кінетичного моменту – при наявності тіл, які здійснюють обертальні рухи.

## 8.5. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Однорідний круглий диск вагою  $P = 50 \text{ Н}$  і з радіусом  $R = 30 \text{ см}$  котиться без ковзання по горизонтальній площині, роблячи навколо власної осі  $60 \text{ об/хв}$  (рис.8.2).

**Визначити** головний момент кількостей руху диска  $K_C$  відносно осі  $C$ , яка проходить через центр диска перпендикулярно до площини руху.

**Розв'язок.** Головний момент кількостей руху системи (кінетичний момент) відносно осі обертання дорівнює (8.6):

$$K_z = I_z \omega,$$

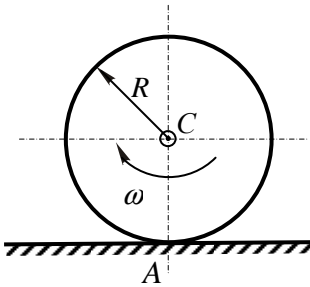


Рис.8.2

де  $I_z$  - момент інерції тіла відносно осі обертання,  $\omega$  - кутова швидкість обертання.

У даному випадку кінетичний момент відносно осі, що проходить через центр диска  $C$ , дорівнює:

$$K_C = I_C \omega = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{\pi n}{30} = \frac{P}{g} R^2 \frac{\pi n}{60},$$

$$K_C = \frac{50}{9,81} \cdot 0,3^2 \cdot \frac{3,14 \cdot 60}{60} = 1,44 \text{ кгм}^2/\text{с}.$$

**Відповідь :**  $K_C = 1,44 \text{ кгм}^2/\text{с}.$

## Задача №2

Під час обертання барабана 1 вагою  $P_1$  і радіусом  $r_1$  навколо нерухомої осі  $z$  на його бокову поверхню намотується невагома та нерозтяжна нитка, що викликає рух вантажу 2 вагою  $P_2$ , який ковзає по нерухомій гладенькій горизонтальній площині (рис.8.3).

**Визначити** головний момент кількості руху (кінетичний момент) системи відносно осі  $z$  і виразити його як залежність від кутової швидкості. Барабан вважати однорідним круглим циліндром. Вісь  $z$  направлена перпендикулярно до рисунка.

**Розв'язок.** До складу механічної системи входять два твердих тіла: барабан 1 і вантаж 2.

Отже, кінетичний момент системи дорівнює:

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)},$$

де  $K_z^{(1)}$  - кінетичний момент барабана;

$K_z^{(2)}$  - кінетичний момент вантажу відносно нерухомої осі  $z$ .

Кінетичний момент барабана дорівнює (8.5):

$$K_z^{(1)} = I_z \cdot \omega,$$

де

$$I_z = \frac{m_1 r_1^2}{2} = \frac{P_1 r_1^2}{2g},$$

тоді

$$K_z^{(1)} = \frac{P_1 r_1^2}{2g} \omega.$$

Головний момент кількості руху вантажу, який рухається поступально, визначається як момент кількості руху матеріальної точки, тобто:

$$K_z^{(2)} = m_2 V_2 r_1,$$

оскільки

$$V_2 = r_1 \omega,$$

то

$$K_z^{(2)} = m_2 r_1^2 \omega = \frac{P_2}{g} r_1^2 \omega.$$

Остаточно

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)} = \frac{P_1 r_1^2}{2g} \omega + \frac{P_2}{g} r_1^2 \omega = \frac{P_1 + 2P_2}{2g} r_1^2 \omega.$$

**Відповідь:** 
$$K_z = \frac{P_1 + 2P_2}{2g} r_1^2 \omega.$$

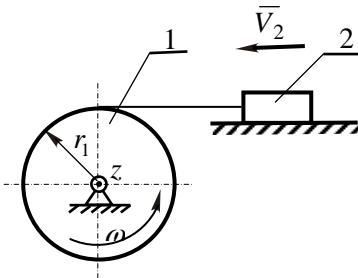


Рис.8.3



## Задача №3

Кулька  $A$ , яка знаходиться у посудині з рідиною і прикріплена до кінця стержня  $AB$  довжиною  $l$ , приводиться до обертання навколо вертикальної осі  $O_1O_2$  з початковою кутовою швидкістю  $\omega_0$  (рис.8.4,а). Сила опору рідини пропорційна кутовій швидкості обертання  $\omega$ :  $R = \alpha t \omega$ , де  $m$  - маса кульки,  $\alpha$  - коефіцієнт пропорційності.

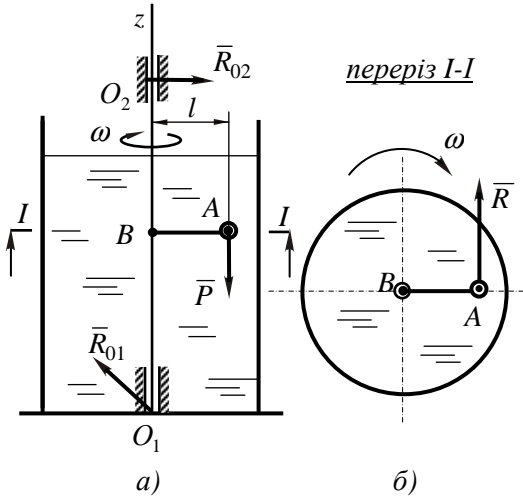


Рис.8.4

**Визначити,** через який проміжок часу  $T$  кутова швидкість обертання стане вдвічі меншою за початкову, а також число обертів  $N$ , яке зробить стержень з кулькою за цей проміжок часу. Маса кульки рахувати зосередженою у її центрі, масою стержня знехтувати.

**Розв'язок.**

Вісь  $z$  спрямуємо вздовж осі обертання  $O_1O_2$  і покажемо сили, які діють на вал з кулькою: силу опору  $\bar{R}$ , яка направлена у бік, протилежний обертанню (рис.8.4,б), силу тяжіння кульки  $\bar{P}$ , реакції  $\bar{R}_{O_2}$  підшипника  $O_2$  і  $\bar{R}_{O_1}$  підп'ятника  $O_1$ .

Усі сили вказані на рисунках, напрямки сил  $\bar{R}_{O_2}$  і  $\bar{R}_{O_1}$  зображені довільно.

Запишемо диференціальне рівняння обертального руху кульки відносно осі  $z$ :

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e) = M_z^e,$$

де момент інерції кульки

$$I_z = ml^2.$$

Оскільки момент сили тяжіння  $\bar{P}$  відносно осі  $z$  дорівнює нулю ( $\bar{P}$  паралельна осі  $z$ ), то обертаючий момент  $M_z^e$  дорівнює моменту сили опору  $\bar{R}$  відносно осі  $z$  (як відомо, момент сили опору завжди від'ємний):

$$M_z^e = -Rl = -\alpha m \omega l.$$

Отже, диференціальне рівняння обертального руху має вигляд:

$$ml^2 \frac{d\omega}{dt} = -\alpha m \omega l,$$

або

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\alpha}{l} \omega.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{\alpha}{l} dt, \quad \int \frac{d\omega}{\omega} = -\int \frac{\alpha}{l} dt, \quad \ln \omega = -\frac{\alpha}{l} t + C_1.$$

Довільну сталу  $C_1$  визначимо за початковими умовами: при  $t = 0$   $\omega = \omega_0$ .

$$\ln \omega_0 = -\frac{\alpha}{l} \cdot 0 + C_1, \quad C_1 = \ln \omega_0.$$

Отже,

$$\ln \omega = -\frac{\alpha}{l} \cdot t + \ln \omega_0; \quad \ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} \cdot t.$$

Виразуємо, через який проміжок часу  $T$  кутова швидкість обертання стане вдвічі меншою від початкової, тобто,  $\omega = 0,5\omega_0$ .

$$\ln \frac{\omega_0}{2\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} \cdot T, \quad \ln \frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{l} \cdot T.$$

Звідки:

$$T = -\frac{l}{\alpha} \ln 0,5, \quad T = \frac{l}{\alpha} \ln 2.$$

Для визначення числа обертів, які зробить стержень з кулькою за проміжок часу  $T$ , необхідно знайти залежність кута повороту  $\varphi$  від часу  $t$  :

$$\ln \frac{\omega}{\omega_0} = -\frac{\alpha}{l} \cdot t, \quad \frac{\omega}{\omega_0} = e^{-\frac{\alpha}{l}t},$$

Отже,

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t}.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо це диференціальне рівняння:

$$d\varphi = \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t} dt, \quad \int d\varphi = \omega_0 \int e^{-\frac{\alpha}{l}t} dt,$$

$$\varphi = -\frac{l}{\alpha} \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t} + C_2.$$

Довільну сталу  $C_2$  визначимо за початковими умовами: при  $t=0$   $\varphi=0$ .

$$0 = -\frac{l}{\alpha} \omega_0 e^0 + C_2, \quad C_2 = \frac{l}{\alpha} \omega_0.$$

Отже закон зміни кута повороту  $\varphi$  за часом має вигляд:

$$\varphi = -\frac{l}{\alpha} \omega_0 e^{-\frac{\alpha}{l}t} + \frac{l}{\alpha} \omega_0,$$

або

$$\varphi = \frac{l}{\alpha} \omega_0 \left( 1 - e^{-\frac{\alpha}{l}t} \right), \quad \varphi = \frac{l}{\alpha} \omega_0 \left( 1 - \frac{1}{e^{\frac{\alpha}{l}t}} \right).$$

При  $t=T = \frac{l}{\alpha} \ln 2$ , кут повороту  $\varphi_1$  дорівнює

$$\varphi_1 = \frac{l}{\alpha} \omega_0 (1 - e^{-\ln 2}) = \frac{l\omega_0}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{l\omega_0}{2\alpha}.$$

Оскільки за 1 оберт кулька повернеться на  $2\pi$ , то кількість обертів  $N$  складе

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{l\omega_0}{4\alpha\pi}.$$

$$\text{Відповідь: } T = \frac{l}{\alpha} \ln 2, \quad N = \frac{l\omega_0}{4\alpha\pi}.$$

#### Задача №4

Для визначення моменту тертя у цапфах, на вал насаджено маховика вагою  $P = 500 \text{ Н}$ , радіус інерції маховика  $\rho = 1,5 \text{ м}$ . Маховику надано кутову швидкість, яка відповідає  $n = 240 \text{ об/хв}$ . Без зовнішньої дії на нього, він зупинився через  $t = 10 \text{ хв}$ .

**Визначити** момент тертя  $M_{\text{тр}}$ , вважаючи його сталим.

**Розв'язок.** Спрямуємо ось  $z$  вздовж нерухомої осі обертання. Зобразимо на рис.8.5 зовнішні навантаження, які діють на вал і маховик: силу тяжіння маховика  $\bar{P}$ , реакції опор  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  та момент сил тертя  $M_{\text{тр}}$ .

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту відносно осі обертання:

$$\frac{dK_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e).$$

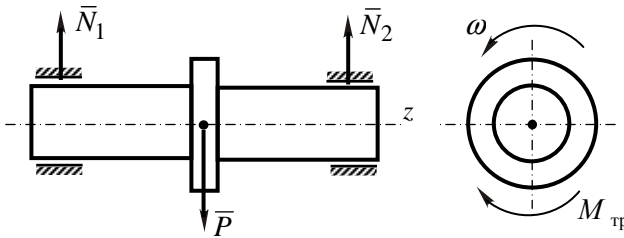


Рис.8.5

Оскільки ми розглядаємо обертання твердого тіла, то

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e.$$

Знайдемо обертаючий момент зовнішніх сил відносно осі обертання  $z$ , якщо врахуємо, що момент сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{N}_1$  та  $\bar{N}_2$  відносно осі  $z$  дорівнюють нулю, оскільки ці сили перетинають вісь. Отже, обертальний момент дорівнює моменту сил тертя і направлений у бік, протилежний обертанню маховика.

Таким чином

$$I_z \varepsilon = -M_{\text{тр}}.$$

Виразуємо величини, які входять у це рівняння:

$$I_z = m\rho^2 = \frac{P}{g}\rho^2, \quad \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \quad \varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t},$$

де  $\omega$  - кутова швидкість маховика у момент зупинки,  $\omega=0$ ,  
 $\omega_0$  - кутова швидкість у початковий момент часу.

Оскільки  $\omega_0 = \frac{\pi n}{30}$ , то  $\varepsilon = -\frac{\pi n}{30t}$ .

З урахуванням значень  $I_z$  та  $\varepsilon$  отримаємо:

$$M_{\text{тр}} = -\frac{P}{g}\rho^2 \left( -\frac{\pi n}{30t} \right) = \frac{500}{9,81} \cdot 1,5^2 \frac{3,14 \cdot 240}{30 \cdot 600} = 4,81 \text{ Нм}.$$

**Відповідь :**  $M_{\text{тр}} = 4,81 \text{ Нм}.$

### Задача №5

Однорідний циліндр (рис.8.6) радіусом  $R$  обертається навколо своєї геометричної осі  $A_0B_0$  з кутовою швидкістю  $\omega_0$ .

**Визначити**, як зміниться кутова швидкість  $\omega_1$  циліндра, якщо вісь обертання перейде у положення  $AB$ , яке співпадає з твірною циліндра?

**Розв'язок.** На циліндр діє сила тяжіння  $\bar{P}$ , яка направлена вертикально вниз.

Запишемо теорему про зміну кінетичного моменту циліндра:

$$I \frac{d\omega}{dt} = \sum m_{A_0B_0} (F_k^e) = m_{A_0B_0} (\bar{P}),$$

де  $I$  - момент інерції циліндра,

$\sum m_{A_0B_0} (\bar{F}_k^e)$  - сума моментів зовнішніх сил відносно осі обертання.

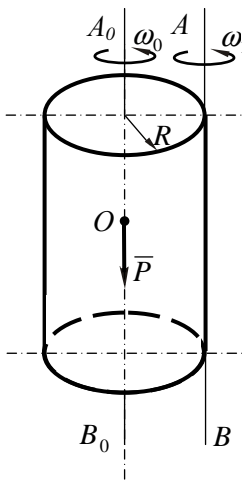


Рис.8.6

Оскільки сила  $\bar{P}$  паралельна осі обертання, то  $m_{A_0B_0} (\bar{P}) = 0$  та  $I \frac{d\omega}{dt} = 0$ .

Отже,  $I\omega = const$ , тоді

$$I_{A_0B_0} \cdot \omega_0 = I_{AB} \cdot \omega_1, \quad (1)$$

де  $I_{A_0B_0}$  - момент інерції циліндра відносно осі  $A_0B_0$ ,

$I_{AB}$  - момент інерції циліндра відносно осі  $AB$ ,

За теоремою Гюйгенса-Штейнера

$$I_{AB} = I_{A_0B_0} + m \cdot R^2,$$

де  $m$  - маса циліндра.

Із формули (1) отримаємо:

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{I_{A_0B_0}}{I_{AB}}.$$

Виразуємо  $I_{A_0B_0}$  та  $I_{AB}$ :

$$I_{A_0B_0} = \frac{mR^2}{2}; \quad I_{AB} = \frac{mR^2}{2} + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Отже,

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{\frac{mR^2}{2}}{\frac{3}{2}mR^2} = \frac{1}{3}\omega_0.$$

Кутова швидкість зменшилася у три рази, оскільки у три рази збільшився момент інерції.

**Відповідь :**  $\omega_1 = \frac{1}{3} \omega_0$ .

### Задача №6

Молотильний барабан починає обертатися із стану спокою ( $\omega_0 = 0$ ) під дією постійного моменту  $M = 400 \text{ Нм}$ .

**Визначити**, нехтуючи тертям, частоту обертання барабану після того, як він почне обертатися і зробить  $N = 10$  обертів (рис.8.7), знаючи, що момент інерції барабана відносно осі обертання  $I_z = 31,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ .

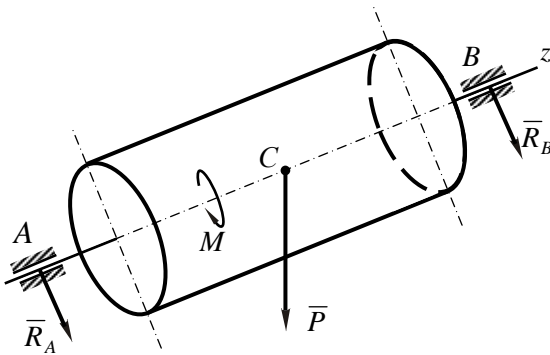


Рис.8.7

**Розв'язок.** Для визначення кутової швидкості барабану скористаємося формулою:

$$\varepsilon = \frac{\omega_1^2 - \omega_0^2}{2\varphi}, \quad (1)$$

де  $\omega_0 = 0$  - початкова кутова швидкість обертання,  
 $\omega_1$  - кінцева

кутова швидкість обертання,

$\varphi$  - кут, на який повертається барабан.

З (1) витікає:

$$\omega_1 = \sqrt{2\varphi \cdot \varepsilon}, \quad \text{де} \quad \varphi = 2\pi N.$$

Отже,

$$\omega_1 = \sqrt{2 \cdot 2\pi N \cdot \varepsilon}.$$

Таким чином, для визначення кутової швидкості необхідно знати кутове прискорення  $\varepsilon$ .

Для визначення  $\varepsilon$  скористаємося теоремою про зміну кінетичного моменту:

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = \sum m_z (\bar{F}_k^e), \quad (2)$$

де  $\sum m_z (\bar{F}_k^e) = M$  - сума моментів усіх зовнішніх сил відносно осі обертання.

На барабан діють такі зовнішні навантаження:  $\bar{P}$  - сила тяжіння барабана;  $\bar{R}_A, \bar{R}_B$  - реакції підшипників  $A$  та  $B$ ;  $M$  - обертаючий момент.

З врахуванням діючих сил рівняння (2) буде мати вигляд:

$$I_z \cdot \varepsilon = M + m_z (\bar{P}) + m_z (\bar{R}_B) + m_z (\bar{R}_A),$$

При цьому  $m_z (\bar{P}) = 0$ ;  $m_z (\bar{R}_B) = 0$ ,  $m_z (\bar{R}_A) = 0$ , оскільки сили  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}_A$  та  $\bar{R}_B$  перетинають вісь  $z$  і моментів не утворюють. Отже,

$$I_z \cdot \varepsilon = M, \quad \varepsilon = \frac{M}{I_z}.$$

Тоді,

$$\omega_1 = \sqrt{2 \cdot 2\pi N \frac{M}{I_z}} = \sqrt{4 \cdot 3,14 \cdot 10 \frac{400}{31,4}} = 40 \text{ рад/с}.$$

**Відповідь:**  $\omega_1 = 40 \text{ рад/с}$ .

### Задача №7

Вантаж вагою  $P = 100 \text{ Н}$  підвішено на канаті, який навитий на циліндричний барабан, вісь обертання якого горизонтальна (рис.8.8).

**Визначити** кутове прискорення барабана  $\varepsilon$  під час опускання вантажу  $P$ , нехтуючи вагою каната, опором повітря, тертям у підшипниках. Барабан вважати однорідним циліндром вагою  $Q = 200 \text{ Н}$  та радіусом  $r = 0,1 \text{ м}$ .



**Розв'язок.** Для визначення кутового прискорення  $\varepsilon$  барабана будемо розглядати рух системи, в яку включимо наступні тіла: барабан вагою  $Q$ , вантаж вагою  $P$  та канат, натяг якого наперед невідомий.

Якщо застосувати теорему про зміну кінетичного моменту системи відносно осі, то натяг каната, який є внутрішньою силою, в рівняння не увійде.

Відносно осі, яка проходить через точку  $O$ , ця теорема має вигляд:

$$\frac{dK_0}{dt} = \sum m_0 (\bar{F}_k^e). \quad (1)$$

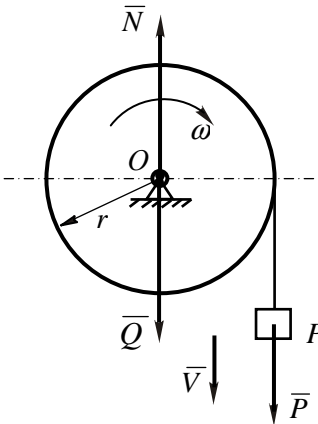


Рис.8.8

На систему діють такі зовнішні сили:  $\bar{P}$  - вага вантажу,  $\bar{Q}$  - вага барабана,  $\bar{N}$  - реакція опори  $O$ .

Сили  $\bar{Q}$  та  $\bar{N}$  не створюють моментів відносно осі  $O$ , бо вони її перетинають. Тільки сила  $\bar{P}$  створює момент відносно осі  $O$ , який дорівнює:

$$m_0(\bar{P}) = P \cdot r.$$

Отже,

$$\sum m_0 (\bar{F}_k^e) = P \cdot r.$$

Визначимо кінетичний момент системи відносно осі обертання  $O$ :

$$K_0 = K_6 + K_в,$$

де  $K_6$  - кінетичний момент барабана,

$K_в$  - кінетичний момент вантажу.

$$K_6 = I_0 \cdot \omega = m_6 \frac{r^2}{2} \omega = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \omega,$$

де  $I_0$  - момент інерції барабана відносно осі обертання  $O$ ;

$$K_в = m_в V r = \frac{P}{g} V r = \frac{P}{g} r^2 \omega,$$

оскільки  $V = \omega \cdot r$ .

Тоді кінетичний момент системи дорівнює:

$$K_0 = \frac{Q}{g} \cdot \frac{r^2}{2} \omega + \frac{P}{g} r^2 \omega = \omega \frac{r^2}{2g} (Q + 2P).$$

Підставимо одержані результати у рівняння (1):

$$\frac{d}{dt} K_0 = \frac{d}{dt} \left[ \omega \frac{r^2}{2g} (Q + 2P) \right] = P \cdot r. \quad (2)$$

Знак моменту сили  $P$  взято позитивним, оскільки напрямок обертання барабана співпадає з напрямком моменту сили  $\bar{P}$ .

Розв'язуємо рівняння (2) та визначаємо кутове прискорення  $\varepsilon$ .

Виносимо з під знака диференціала у лівій частині рівняння (2) сталі величини:

$$\frac{r^2}{2g} (Q + 2P) \frac{d\omega}{dt} = P \cdot r,$$

або

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2Pg}{r(Q + 2P)}.$$

З врахуванням числових значень кутове прискорення  $\varepsilon$  дорівнює:

$$\varepsilon = \frac{2 \cdot 100 \cdot 9,8}{0,1(200 + 2 \cdot 100)} = 49 \text{ рад/с}^2.$$

**Відповідь :**  $\varepsilon = 49 \text{ рад/с}^2$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 37.4; 37.6; 37.7; [2].

## Тема 9. РОБОТА І ПОТУЖНІСТЬ СИЛИ

### ЗАНЯТТЯ № 14

#### Зміст

- 9.1. Робота сили.
- 9.2. Потужність сили.
- 9.3. Контрольні запитання.
- 9.4. Порядок розв'язування задач на визначення роботи і потужності сили.
- 9.5. Приклади розв'язування задач.

#### 9.1. Робота сили

Робота сили на будь-якому переміщенні є однією з основних характеристик, яка оцінює дію сили на цьому переміщенні.

Робота сталої сили  $\vec{F}$  (рис.9.1) на деякому прямолінійному переміщенні  $\vec{S}$  точки прикладення сили  $\vec{F}$  визначається за виразом :

$$A = F \cdot S \cdot \cos \alpha = F \cdot S \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{S}}), \quad (9.1)$$

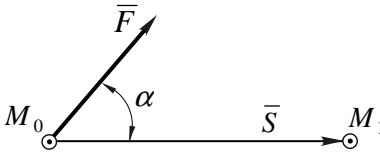


Рис.9.1

Якщо кут  $\alpha$  - гострий, то робота - додатня,  $A > 0$ .

При  $\alpha = 0$  робота дорівнює:

$$A = F \cdot S. \quad (9.2)$$

Якщо кут  $\alpha$  - тупий, то робота - від'ємна,  $A < 0$ .

При  $\alpha = 180^\circ$  робота дорівнює:

$$A = -F \cdot S. \quad (9.3)$$

Якщо кут  $\alpha = 90^\circ$ , тобто сила направлена перпендикулярно до переміщення, то робота дорівнює нулю:  $A = 0$ .

Знак роботи має такий сенс: робота - додатня, коли сила прискорює рух; робота - від'ємна, коли сила гальмує рух.

Вираз для обчислення роботи можна представити як скалярний добуток векторів:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos(\vec{F}, \vec{S}).$$

*Робота сталої за модулем і напрямком сили при прямолінійному переміщенні визначається скалярним добутком вектора сили на вектор переміщення точки її прикладення.*

### Елементарна робота

У загальному випадку, коли матеріальна точка рухається по криволінійній траєкторії під дією змінної сили, вводиться поняття елементарної роботи.

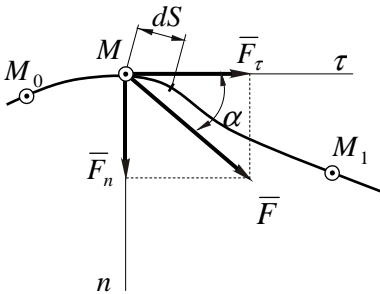


Рис.9.2

Елементарна робота  $\delta A$  сили  $\vec{F}$  на елементарному переміщенні  $dS$  (рис.9.2) визначається наступним чином:

$$\delta A = F_{\tau} dS,$$

де  $F_{\tau}$  - проекція сили  $\vec{F}$  на тангенціальну вісь, яку направлено у бік переміщення точки;  $dS$  - нескінченно мале переміщення точки.

Оскільки

$$F_{\tau} = F \cos \alpha, \quad \text{то} \quad \delta A = F dS \cos \alpha.$$

### Аналітичний вираз елементарної роботи сили. Робота сили на кінцевому переміщенні

Елементарну роботу сили можна представити у вигляді скалярного добутку векторів  $\vec{F}$  і  $d\vec{r}$  (рис.9.3):

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

де  $d\vec{r}$  - вектор елементарного переміщення точки  $M$ .

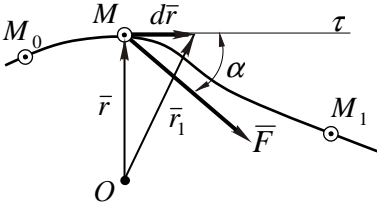


Рис.9.3

Вираз елементарної роботи змінної сили через проекції сили на осі декартових координат має вигляд:

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz,$$

де  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  - проекції сили на координатні осі, а  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  - проекції вектора елементарного переміщення на координатні осі.

Робота сили  $\vec{F}$  на будь-якому кінцевому переміщенні  $M_0M_1$  визначається інтегралом:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_\tau dS, \quad (9.4)$$

або

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (9.5)$$

### Роботи сил тяжіння і пружності

*Робота сили тяжіння дорівнює взятому зі знаком плюс або мінус добутку сили тяжіння на вертикальне переміщення точки її прикладення*

$$A = \pm P \cdot h, \quad (9.6)$$

де  $P$  – сила тяжіння;

$h$  – вертикальне переміщення точки прикладення сили.

З цієї формули витікає, що робота сили тяжіння не залежить від форми траєкторії між початковою і кінцевою точками

руху, а залежить тільки від відстані між горизонтальними площинами, які проходять через початкове та кінцеве положення точки.

Якщо початкова точка розташована вище кінцевої, то робота сили тяжіння додатня, у протилежному випадку – від’ємна.

*Робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості пружини на різницю квадратів початкового та кінцевого видовжень (або стискань) пружини*

$$A_{(M_0M_1)} = \frac{c}{2} \left[ (\Delta l_{\text{поч}})^2 - (\Delta l_{\text{кін}})^2 \right]. \quad (9.7)$$

Робота сили пружності від’ємна у тому випадку, коли деформація збільшується, тобто коли  $|\Delta l_{\text{поч}}| < |\Delta l_{\text{кін}}|$ . Це відповідає переміщенню кінця пружини від положення рівноваги. Якщо  $|\Delta l_{\text{поч}}| > |\Delta l_{\text{кін}}|$ , робота буде додатня. У цьому випадку кінець пружини переміщується до положення рівноваги.

### **Робота сили, що прикладена до тіла, яке обертається**

*Елементарна робота сили, прикладеної до будь-якої точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, наприклад z, дорівнює добутку моменту сили відносно осі обертання на диференціал кута повороту:*

$$\delta A = M_z d\varphi.$$

Для того, щоб визначити роботу сили, яка діє на тіло при його повороті на кут від  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , необхідно проінтегрувати рівняння у цих межах, виразивши момент сили як функцію кута повороту:

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi. \quad (9.8)$$

У окремому випадку, коли момент сили є сталим, тобто  $M_z = const$ , робота дорівнює добутку моменту сили на кут повороту тіла:

$$A = M_z(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (9.9)$$

Одиницею вимірювання роботи у системі СІ є Джоуль (1 Дж = 1 Нм = 1 кгм<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>), а в системі МКГС - кГсМм.

## 9.2. Потужність сили

*Потужністю називається величина, що визначає роботу, яку виконує сила за одиницю часу:*

$$N = \frac{A}{t}. \quad (9.10)$$

Цей вираз справедливий, якщо робота виконується рівномірно. У загальному випадку

$$N = \frac{\delta A}{dt}.$$

Оскільки  $\delta A = F_\tau dS$ , то:

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau \cdot V. \quad (9.11)$$

*Таким чином, потужність дорівнює добутку величини дотичної складової сили на швидкість руху.*

При обертовому русі тіла:

$$\delta A = M_z \cdot d\varphi.$$

Тоді

$$N = \frac{\delta A}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \cdot \omega. \quad (9.12)$$

*Потужність виражається добутком обертового моменту на кутову швидкість.*

Одиницею вимірювання потужності у системі СІ є Ватт ( $1\text{Вт} = 1\text{ Дж/с}$ ), у системі МкГС –  $1\text{ кГсм/с}$ .

### 9.3. Контрольні запитання

Як визначається робота сталої за модулем і напрямком сили на прямолінійному переміщенні точки прикладення сили?

Як записується вираз для елементарної роботи у загальному вигляді?

Як визначається елементарна робота сили через проекції сили на осі координат?

Як вираховується робота сил тяжіння і пружності?

На яких переміщеннях робота сили тяжіння: додатня, від'ємна, дорівнює нулю?

У якому випадку робота сили пружності додатня і в якому від'ємна?

### 9.4. Порядок розв'язування задач на визначення роботи і потужності сили

При визначенні роботи необхідно розрізняти наступні випадки:

Прямолінійний рух під дією сталої сили; у цьому випадку застосовуються формули (9.2) та (9.3).

Прямолінійний рух під дією сили, яка є функцією відстані; у цьому випадку використовують формулу (9.5), яка, якщо спрямувати вісь  $x$  за траєкторією точки, приймає вигляд:

$$A = \int_{x_0}^x F_x dx.$$

Криволінійний рух під дією сталої за модулем і напрямком сили; у цьому випадку можна використати формулу (9.4) або (9.5).

Криволінійний рух під дією сили, що визначається функцією координат точки прикладення сили; у цьому випадку ви-



значення роботи зводиться до обчислення криволінійного інтегралу за формулою (9.5).

Обертальний рух твердого тіла під дією сталого моменту або моменту, який є функцією кута повороту тіла; у цьому випадку для обчислення роботи використовуються формули (9.8) або (9.9).

Для обчислення потужності у залежності від характеру руху користуються формулою (9.11), якщо має місце прямолінійний, або криволінійний рух точки прикладення сили, або формулою (9.12) – у випадку обертального руху твердого тіла.

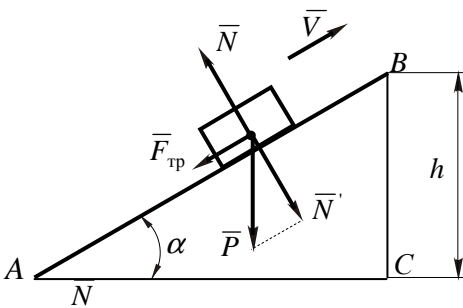
У всіх цих випадках перед обчисленням роботи або потужності необхідно зобразити всі зовнішні сили, які прикладені до тіла або механічної системи, що розглядається.

## 9.5. Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

**Визначити** найменшу роботу  $A$ , яку необхідно виконати, щоб підняти на висоту  $h = 5$  м вантаж  $P = 2$  кН, пересуваючи його по похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha = 30^\circ$ ; коефіцієнт тертя  $f = 0,5$ .

**Розв'язок:** Зобразимо вантаж у довільному положенні на похилій площині і покажемо всі діючі на нього сили (рис.9.4): силу тяжіння  $\vec{P}$ , силу тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  і нормальну реакцію  $\vec{N}$ .



Робота, яка витрачається на підняття вантажу на висоту  $h = 5$  м, дорівнює сумі робіт сили тертя вздовж довжини  $AB$  та сили тяжіння на переміщенні  $BC$  точки її прикладення. Нормальна реакція роботи не виконує,

Рис.9.4

оскільки вона перпендикулярна переміщенню.

Обчислимо роботу сили тертя:

$$A_{\text{тр}} = F_{\text{тр}} \cdot AB \cdot \cos 180^\circ = -fN'AB.$$

Оскільки  $N' = P \cos \alpha$ , та  $AB = \frac{BC}{\sin \alpha}$ , то

$$A_{\text{тр}} = -fP \cos \alpha \cdot \frac{BC}{\sin \alpha} = -0,5 \cdot 2000 \cdot \cos 30^\circ \frac{5}{\sin 30^\circ} = -8660 \text{ Дж}.$$

Робота сили тяжіння у нашому випадку від'ємна, оскільки вантаж рухається вгору, і дорівнює:

$$A_p = -P \cdot h = -2000 \cdot 5 = -10000 \text{ Дж}.$$

Повна робота, витрачена на підйом вантажу, дорівнює:

$$A = A_p + A_{\text{тр}} = -8660 - 10000 = -18660 \text{ Дж} = -18,7 \text{ кДж}.$$

**Відповідь:**  $A = -18,7 \text{ кДж}$ .

## Задача № 2

Тіло  $A$  (рис.9.5) утримується в рівновазі на гладенькій похилій поверхні, розташованій під кутом  $\alpha$  до горизонту, за допомогою пружини. Внаслідок одержаного поштовху тіло перемістилося вниз по похилій поверхні на відстань  $L$ .

**Визначити** суму робіт  $A$  усіх сил, прикладених до тіла на цьому переміщенні, якщо сила тяжіння тіла  $P = 80 \text{ Н}$ , кут  $\alpha = 30^\circ$ ,  $L = 0,3 \text{ м}$ , жорсткість пружини  $c = 4,0 \text{ Н/см}$ .

**Розв'язок.** До тіла прикладені наступні сили: сила тяжіння  $\bar{P}$ , нормальна реакція поверхні  $\bar{R}$  та сила пружності розтягнутої пружини  $\bar{F}$  (рис.9.5).

Вісь  $x$  спрямуємо паралельно похилій поверхні, а початок відліку  $O$  сполучимо з кінцем недеформованої пружини.

Тоді тіло під дією поштовху почне рухатись із положення  $A$ , яке характеризується координатою  $x_1$ , що дорівнює:

$$x_1 = \delta_{ст},$$

де  $\delta_{ст}$  - статичне відхилення пружини.

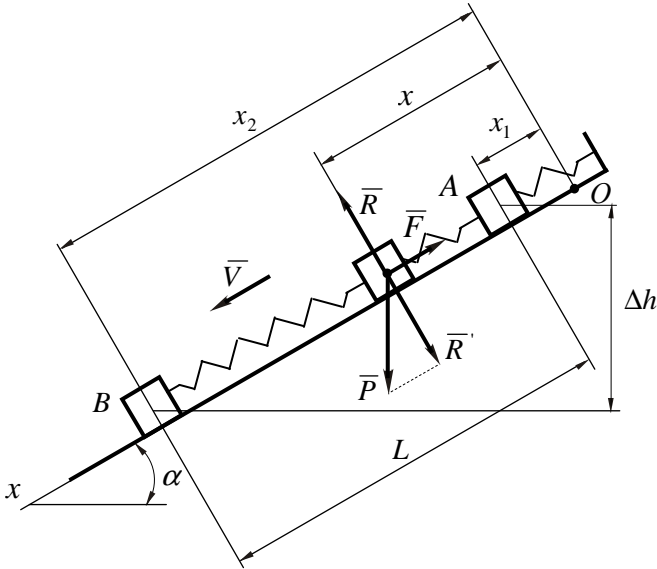


Рис.9.5

Обчислимо суму робіт сил  $\bar{P}$ ,  $\bar{R}$ ,  $\bar{F}$  на переміщенні  $L = x_2 - x_1$ :

$$\sum A_k = A(\bar{P}) + A(\bar{F}) + A(\bar{R}),$$

де  $A(\bar{P})$  - робота сили тяжіння на перепаді висот  $\Delta h$  між точками  $A$  та  $B$ ,

$A(\bar{F})$  - робота сили пружності пружини,

$A(\bar{R})$  - робота нормальної реакції.

Робота сили тяжіння дорівнює:

$$A(\bar{P}) = P \cdot \Delta h = P \cdot L \cdot \sin \alpha = 80 \cdot 0,3 \cdot 0,5 = 12 \text{ Дж.}$$

Робота сили пружності пружини визначається за формулою:

$$A(\bar{F}) = -\frac{c}{2}(x_2^2 - x_1^2),$$

де

$$x_2 = x_1 + L = \delta_{cm} + L.$$

Отже,

$$A(\bar{F}) = -\frac{c}{2}[(\delta_{cm} + L)^2 - \delta_{cm}^2] = -\frac{c}{2}(\delta_{cm}^2 + 2\delta_{cm} \cdot L + L^2 - \delta_{cm}^2).$$

Остаточо

$$A(\bar{F}) = -\frac{c}{2}L(2\delta_{cm} + L).$$

Обчислимо  $\delta_{cm}$  - статичне відхилення пружини, яке має місце у положенні рівноваги тіла (точка  $A$ ), коли пружина розтягнута сталою силою тяжіння. Для цього положення запишемо у проекції на вісь  $x$  рівняння рівноваги для сил тяжіння  $\bar{P}$  та сили пружності пружини  $F_{cm}$ , які діють на тіло:

$$P \sin \alpha - F_{cm} = 0.$$

Оскільки

$$F_{cm} = c \cdot \delta_{cm}, \quad \text{то} \quad P \sin \alpha - c \delta_{cm} = 0.$$

Тоді

$$\delta_{cm} = \frac{P \cdot \sin \alpha}{c} = \frac{80 \cdot 0,5}{4} = 10 \text{ см} = 0,1 \text{ м}.$$

Остаточо,

$$A(\bar{F}) = -\frac{c}{2}L(2\delta_{cm} + L) = -\frac{400}{2} \cdot 0,3(2 \cdot 0,1 + 0,3) = -30 \text{ Дж}.$$

Робота нормальної реакції  $\bar{R}$  дорівнює нулю, оскільки ця сила перпендикулярна до переміщення тіла, тобто  $A(\bar{R}) = 0$ .

Отже,

$$\sum A_k = A(\bar{P}) + A(\bar{F}) = 12 - 30 = -18 \text{ Дж}.$$

**Відповідь:**  $A = -18 \text{ Дж}$ .

## Задача № 3

Матеріальна точка  $M$  масою  $m$  рухається прямолінійно по горизонтальній площині за законом  $S = t^4$  під дією сили  $F = 12t^2$  (рис.9.6).

**Визначити** роботу цієї сили при переміщенні точки її прикладення з початкового положення ( $S_0 = 0$ ) у положення, де  $S_1 = 4$  м.

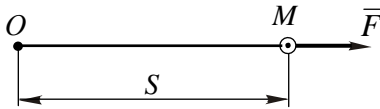


Рис.9.6

**Розв'язок.** Сила, яка діє на матеріальну точку  $M$ , змінюється з плином часу. Отже, для визначення роботи цієї сили необхідно скористатися рівнянням (9.4):

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_{\tau} dS, \quad (1)$$

де  $F_{\tau}$  - проекція сили на елементарне переміщення точки прикладення сили.

У нашому випадку задана сила  $\vec{F}$  співпадає за напрямком з переміщенням точки  $M$ , а роботу  $A$  необхідно враховувати на переміщенні від  $S_0$  до  $S_1$ .

Таким чином, рівняння (1) набуде вигляду:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{M_0}^{M_1} F_{\tau} dS = \int_{S_0}^{S_1} 12t^2 \cdot dS. \quad (2)$$

Знайдемо залежність між силою  $F$  та переміщенням  $S$ , виключивши параметр  $t$ , який входить у вирази для значення сили та переміщення:

$$S = t^4, \quad t^2 = \sqrt{S}, \quad F = 12t^2 = 12\sqrt{S}.$$

Підставивши новий вираз для сили  $F$  у рівняння (2), одержимо:

$$A = \int_{S_0}^{S_1} 12\sqrt{S} dS = \int_0^4 12\sqrt{S} dS. \quad (3)$$

Обчислимо цей визначений інтеграл:

$$A = 12 \int_0^4 \sqrt{S} dS = \frac{12 \cdot 2}{3} S^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = 8\sqrt{4^3} = 64 \text{ Дж.}$$

**Відповідь:**  $A = 64 \text{ Дж.}$

#### Задача № 4

Шліфувальний камінь радіусом  $R = 30 \text{ см} = 0,3 \text{ м}$ , робить  $n = 120 \text{ об/хв}$ . Потужність, яка споживається, дорівнює  $N = 1,5 \text{ кВт} = 1500 \text{ Дж/с}$ . Коефіцієнт тертя шліфувального каменю дорівнює  $f = 0,2$ .

**Визначити**, з якою силою  $F$  притискає камінь деталь, яка шліфується?

**Розв'язок.** Деталь (рис.9.7) притискається до шліфувального каменю з силою  $\vec{F}$ . Виникаюча при цьому сила тертя  $\vec{F}_{\text{тр}}$  розвиває потужність  $N$ , яка дорівнює спожитій потужності  $1,5 \text{ кВт}$ , тобто

$$N = F_{\text{тр}} \cdot V_A,$$

де  $V_A$  - швидкість точки на ободі каменю, до якого прикладена сила  $\vec{F}$ .

Сила тертя між каменем та деталлю складатиме:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot F = 0,2 \cdot F,$$

кутова швидкість каменю буде:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 120}{30} = 12,6 \text{ рад/с},$$

а швидкість точки на ободі каменю дорівнює:

$$V_A = \omega \cdot R = 12,6 \cdot 0,3 = 3,8 \text{ м/с},$$

Тоді

$$N = F_{\text{тр}} \cdot V_A = 0,2F \cdot 3,8 = 0,76F,$$

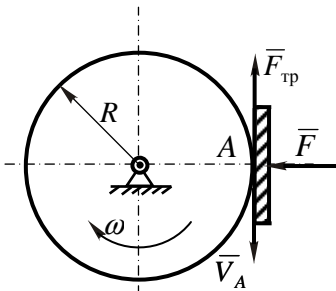


Рис.9.7

Звідки:

$$F = \frac{N}{0,76} = \frac{1500}{0,76} = 1974 \text{ Н.}$$

**Відповідь:**  $F = 1974 \text{ Н.}$

### Задача № 5

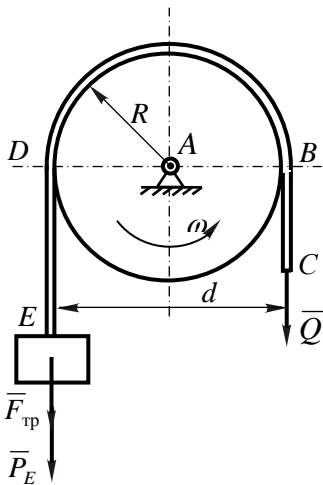


Рис.9.8

*Примітка:* Різниця натягів частин  $BC$  і  $DE$  стрічки дорівнює силі, яка гальмує шків.

**Розв'язок.** Оскільки шків обертається рівномірно, то сила тертя, яка виникає між шківом і дерев'яними колодками, разом із силою  $\bar{P}_E$  зрівноважують силу  $\bar{Q}$  (рис.9.8), отже

$$P_E + F_{\text{тр}} = Q,$$

$$F_{\text{тр}} = Q - P_E = 40 - 10 = 30 \text{ Н.}$$

Для вимірювання потужності двигуна на його шків надіта стрічка з дерев'яними колодками (рис.9.8). Права частина стрічки утримується пружними вагами силою  $\bar{Q}$ , а ліва її частина  $DE$  натягується вантажем  $E$ .

**Визначити** потужність двигуна  $N$ , якщо його вал при рівномірному обертанні робить  $n = 120$  об/хв, при цьому пружинні ваги показують натяг стрічки  $Q = 40 \text{ Н}$ , вага вантажу  $P_E = 10 \text{ Н}$ , діаметр шківа  $d = 65 \text{ см}$ .

Потужність сили тертя дорівнює потужності двигуна за умови, що шків обертається рівномірно:

$$N_{\text{тр}} = N_{\text{дв}} = F_{\text{тр}} V,$$

де  $V$  - швидкість точки обода шківа, на який діє сила тертя і яка дорівнює:

$$V = \omega R = \frac{\pi n}{30} R,$$

$$N_{\text{дв}} = F_{\text{тр}} \frac{\pi n}{30} R = 30 \frac{3,14 \cdot 120}{30} \cdot 0,325 = 122,5 \text{ Вт}.$$

**Відповідь:**  $N_{\text{дв}} = 122,5 \text{ Вт}.$

### Задача № 6

Вантаж  $A$  вагою  $P_A$ , який опускається по похилій площині, призводить до обертання барабана  $B$  вагою  $P_B$ , на який намотана нитка (рис.9.9). Прийняти за механічну систему сукупність тіл  $A$  та  $B$ , які з'єднані між собою невагомою ниткою, що не розтягується.

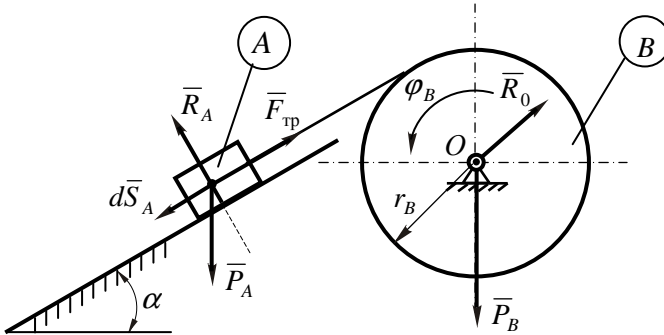


Рис.9.9

**Визначити** суму робіт  $A$  усіх сил, що прикладені до цієї системи за один оберт барабана  $B$ , якщо  $r_B$  - радіус барабана,  $f$  - коефіцієнт тертя ковзання вантажу  $A$  по похилій площині, яка складає кут  $\alpha$  з горизонтом.



**Розв'язок.** Дана механічна система є незмінною. На неї накладені такі в'язі: похила площина і шарнірна опора барабану  $B$  у точці  $O$ .

Реакція похилої площини складається з нормальної реакції  $\bar{R}_A$  та сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$ , яка направлена у бік, протилежний переміщенню вантажу  $A$ .

Реакція ( $\bar{R}_O$ ) шарніра  $O$  лежить у площині, перпендикулярній до осі шарніра, проходить через вісь шарніра і може займати у цій площині будь-яке положення.

Оскільки дана система є незмінною, то робота усіх сил, які прикладені до неї, визначається тільки роботою зовнішніх сил: сили тяжіння  $\bar{P}_A$  вантажу  $A$ ; нормальної реакції  $\bar{R}_A$  похилої площини; сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  вантажу  $A$  по похилій площині; сили тяжіння  $\bar{P}_B$  барабану  $B$ ; реакції  $\bar{R}_O$  шарніра  $O$ .

Обчислимо елементарну роботу зовнішніх сил системи

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \delta A_i = \delta A_A + \delta A_B, \quad (1)$$

де  $\delta A_A$ ,  $\delta A_B$  - елементарні роботи зовнішніх сил, прикладених, відповідно, до тіл  $A$  і  $B$ .

Тіло  $A$  рухається поступально. Елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до цього тіла, дорівнює

$$\delta A_A = \delta A(\bar{P}_A) + \delta A(\bar{R}_A) + \delta A(\bar{F}_{\text{тр}}),$$

де  $\delta A(\bar{P}_A)$ ,  $\delta A(\bar{R}_A)$ ,  $\delta A(\bar{F}_{\text{тр}})$  - елементарні роботи сили тяжіння  $\bar{P}_A$ , нормальної реакції  $\bar{R}_A$  та сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$ .

Елементарна робота реакції  $\bar{R}_A$  дорівнює нулю, оскільки  $\bar{R}_A$  перпендикулярна до переміщення тіла.

Елементарна робота сили тяжіння  $\bar{P}_A$  дорівнює

$$\delta A(\bar{P}_A) = P_A dS_A \sin \alpha.$$

Елементарна робота сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  визначається із виразу:

$$\delta A(\bar{F}_{\text{тр}}) = F_{\text{тр}} dS_A \cdot \cos 180^\circ = -F_{\text{тр}} dS_A.$$

Оскільки

$$F_{\text{тр}} = f \cdot R_A = f \cdot P_A \cos \alpha,$$

то

$$\delta A(F_{\text{тр}}) = -f \cdot P_A \cdot dS_A \cos \alpha.$$

Отже,

$$\delta A_A = P_A dS_A \cdot \sin \alpha - f \cdot P_A dS_A \cdot \cos \alpha = P_A (\sin \alpha - f \cos \alpha) dS_A. \quad (2)$$

Тіло  $B$  обертається навколо нерухомої осі, яка проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини рисунка. Елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до тіла  $B$ , визначиться з виразу:

$$\delta A_B = M_0 d\varphi_B,$$

де  $M_0$  - головний момент зовнішніх сил ( $\bar{R}_0$  та  $\bar{P}_B$ ) відносно осі обертання;

$d\varphi_B$  - елементарне кутове переміщення тіла відносно осі обертання.

Оскільки лінії дії сил  $\bar{P}_B$  та  $\bar{R}_0$  перетинають вісь обертання, то  $M_0 = 0$  і

$$\delta A_B = 0. \quad (3)$$

Підставляючи (2) і (3) у (1), одержимо

$$\delta A = \delta A_A = P_A (\sin \alpha - f \cos \alpha) dS_A.$$

Переміщення вантажу пов'язано з кутом повороту барабану рівністю  $dS_A = r_B d\varphi_B$ , тоді останнє рівняння дає вираз елементарної роботи усіх сил, прикладених до даної механічної системи, на елементарному переміщенні  $d\varphi_B$  барабану  $B$ :

$$\delta A = P_A r_B (\sin \alpha - f \cos \alpha) d\varphi_B.$$

Для визначення роботи сил за один оберт барабану візьмо-мо визначений інтеграл у межах від 0 до  $2\pi$ :

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} P_A r_B (\sin \alpha - f \cos \alpha) d\varphi = P_A r_B (\sin \alpha - f \cos \alpha) \varphi \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2P_A r_B \pi (\sin \alpha - f \cos \alpha). \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $A = 2P_A r_B \pi (\sin \alpha - f \cos \alpha)$ .

### Задача № 7

Колесо радіусом  $r$  котиться без ковзання по прямолінійній горизонтальній рейці (рис.9.10) під дією сталої сили  $\bar{F}$ , яка прикладена у центрі ваги колеса  $C$  і паралельна рейці, та сталого обертового моменту  $m$ .

**Визначити** суму робіт  $A$  усіх зовнішніх сил, якщо вісь колеса  $C$  перемістилася на відстань  $S$ . Тертям кочення знехтувати.

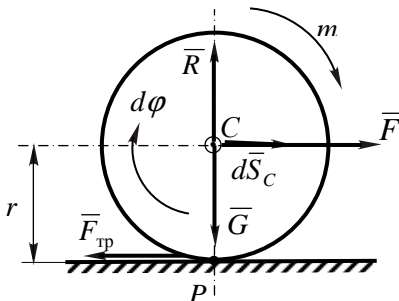


Рис.9.10

**Розв'язок.** До колеса прикладені зовнішні сили і момент:  $\bar{G}$  - сила тяжіння колеса,  $\bar{F}$  - рушійна сила,  $m$  - обертовий момент,  $\bar{R}$  - нормальна реакція рейки,  $\bar{F}_{\text{тр}}$  - сила тертя.

Роботи реакції  $\bar{R}$  і сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}}$  дорівнюють нулю, оскільки ці сили прикладені у миттєвому центрі обертання колеса  $P$ , елементарне переміщення якого дорівнює нулю. Робота сили тяжіння колеса  $\bar{G}$  теж дорівнює нулю, у зв'язку з тим, що елементарне переміщення  $dS_C$  точки  $C$  перпендикулярне до лінії дії сили тяжіння  $\bar{G}$ .

Отже необхідно обчислити тільки роботу рушійної сили  $\bar{F}$  і моменту  $m$  :

$$\delta A = \delta A(\bar{F}) + \delta A(m), \quad (1)$$

де

$$\delta A(\bar{F}) = F \cdot dS_C \cos(\bar{F}, \hat{d\bar{S}}_C) = F dS_C,$$

$$\delta A(m) = m d\varphi.$$

Згідно з умовою задачі, колесо котиться без ковзання, тому

$$dS_C = r d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dS_C}{r}.$$

Відповідно, рівняння (1) запишеться таким чином:

$$\delta A = F dS_C + m \frac{dS_C}{r} = \left( F + \frac{m}{r} \right) dS_C.$$

Для визначення суми робіт усіх сил на переміщенні осі колеса на відстань  $S$  проінтегруємо останнє рівняння у межах від 0 до  $S$  :

$$A = \int_0^S \left( F + \frac{m}{r} \right) dS_C = \left( F + \frac{m}{r} \right) S.$$

**Відповідь:**  $A = \left( F + \frac{m}{r} \right) S.$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 29.1; 29.6; 29.12; 29.18 [2].

## ТЕМА 10. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

### ЗАНЯТТЯ № 15

#### Зміст

- 10.1. Кінетична енергія механічної системи.
- 10.2. Визначення кінетичної енергії твердого тіла у різних випадках його руху.
- 10.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи.
- 10.4. Контрольні запитання.
- 10.5. Порядок розв'язування задач на використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи.
- 10.6. Приклади розв'язування задач .

#### 10.1. Кінетична енергія механічної системи

*Кінетичною енергією  $T$  матеріальної точки називається скалярна додатня величина, яка дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:*

$$T = \frac{mV^2}{2}.$$

*Кінетичною енергією  $T$  механічної системи називається арифметична сума кінетичних енергій усіх точок механічної системи:*

$$T = \sum T_k = \sum \frac{m_k V_k^2}{2}.$$

Кінетична енергія системи не залежить від напрямків швидкостей точок.

Кінетична енергія може дорівнювати нулю, якщо швидкості усіх точок системи дорівнюють нулю.

Кінетична енергія системи характеризує і поступальний, і обертальний рухи системи. Тому теоремою про зміну кінетичної енергії особливо часто користуються при розв'язуванні задач.

Одиницею кінетичної енергії у системі СІ є Джоуль (Дж).

## 10.2. Визначення кінетичної енергії твердого тіла у різних випадках його руху

### 10.2.1. Поступальний рух твердого тіла

При поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок (у тому числі швидкість  $\bar{V}_C$  центра мас тіла) у кожний момент часу рівні між собою; тобто, для будь-якої точки  $\bar{V}_k = \bar{V}_C$ . Отже

$$T_{\text{пост}} = \frac{\sum m_k V_k^2}{2} = \frac{1}{2} \left( \sum m_k \right) \cdot V_C^2,$$

$$T_{\text{пост}} = \frac{1}{2} M V_C^2.$$

*Кінетична енергія твердого тіла при поступальному русі дорівнює половині добутку маси тіла  $M$  на квадрат швидкості його центра мас.*

### 10.2.2. Обертальний рух твердого тіла

Швидкість будь-якої точки твердого тіла, яке обертається з кутовою швидкістю  $\omega$ , дорівнює

$$V_k = \omega \cdot h_k,$$

де  $h_k$  - відстань від точки до осі обертання.

Тоді кінетична енергія тіла визначається відповідно до залежності:

$$T_{\text{об}} = \frac{\sum m_k V_k^2}{2} = \frac{\sum m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_k h_k^2,$$

Оскільки

$$\sum m_k h_k^2 = I_z,$$

то

$$T_{об} = \frac{1}{2} I_z \cdot \omega^2.$$

*Отже кінетична енергія тіла при обертальному русі дорівнює половині добутку моменту інерції тіла відносно осі обертання на квадрат кутової швидкості тіла.*

### 10.2.3. Плоскопаралельний рух твердого тіла

При плоскопаралельному русі швидкості усіх точок тіла в кожний момент часу розподілені так, начебто тіло обертається навколо осі, яка перпендикулярна до площини руху і яка проходить через миттєвий центр швидкостей  $P$ .

У цьому випадку кінетичну енергію тіла можна визначити за формулою:

$$T_{пл} = \frac{1}{2} I_P \cdot \omega^2,$$

де  $I_P$  - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через миттєвий центр швидкостей.

Оскільки (згідно з теоремою Штейнера-Гюйгенса)

$$I_P = I_C + Md^2,$$

де  $I_C$  - момент інерції відносно осі, яка проходить через центр мас тіла і паралельна миттєвій осі обертання, то

$$T_{пл} = \frac{1}{2} (I_C + Md^2) \omega^2 = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M (d^2 \cdot \omega^2),$$

Оскільки  $\omega \cdot d = V_C$ , то остаточно

$$T_{пл} = \frac{1}{2} M V_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2.$$

Таким чином,

у випадку плоскопаралельного руху тіла кінетична енергія складається з кінетичних енергій поступального руху разом зі швидкістю центра мас і обертального руху навколо осі, яка проходить через центр мас перпендикулярно до площини руху.

### 10.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи

#### Диференціальна форма

Диференціал кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на систему:

$$dT = \delta A^{(e)} + \delta A^{(i)}.$$

Похідна за часом від кінетичної енергії механічної системи дорівнює сумі потужностей усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на систему:

$$\frac{dT}{dt} = N^{(e)} + N^{(i)}.$$

#### Інтегральна форма

Зміна кінетичної енергії механічної системи при кінцевому переміщенні її з положення (1) в положення (2) дорівнює сумі робіт на цьому переміщенні усіх зовнішніх і внутрішніх сил, які діють на цю систему

$$T_2 - T_1 = \sum A^{(e)} + \sum A^{(i)}.$$

Якщо механічна система незмінна, то сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю і теорема запишеться так:

$$T_2 - T_1 = \sum A^{(e)}.$$



### 10.4. Контрольні запитання

Що називається кінетичною енергією матеріальної точки?

Що називається кінетичною енергією механічної системи?

Як визначається кінетична енергія твердого тіла у випадку поступального руху?

Як визначається кінетична енергія твердого тіла при обертальному русі?

Як визначається кінетична енергія твердого тіла при плоскопаралельному русі?

Як формулюються теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи?

Чи входять у рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичної енергії системи, внутрішні сили цієї системи?

У якому випадку у рівняння, які виражають теорему про зміну кінетичної системи, не входять внутрішні сили?

Якщо дана ізольована від дії будь-яких зовнішніх сил система таким чином, що на її точки діють тільки внутрішні сили, то чи буде змінюватися кінетична енергія такої системи?

### 10.5. Порядок розв'язування задач на використання теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи

Розв'язування задач за допомогою теореми про зміну кінетичної енергії в інтегральній формі рекомендується проводити у наступній послідовності:

- а) зобразити на рисунку всі зовнішні сили системи;
- б) вирахувати суму робіт усіх зовнішніх сил на переміщенні точок системи;
- в) вирахувати кінетичну енергію системи матеріальних точок у початковому та кінцевому її станах;
- г) користуючись результатами підрахунків за пунктами б) і в), записати теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи і визначити шукану величину.

## 10.6. Приклади розв'язування задач

### Задача № 1

Механізм еліпсографа (рис.10.1) складається з повзунів А і В вагою  $P$  кожний, кривошипа  $OC$  вагою  $2P$ , і лінійки  $AB$  вагою  $3P$ . Кривошип  $OC$  обертається навколо нерухомої осі  $O$ , яка перпендикулярна до площини креслення з кутовою швидкістю  $\omega$ .

Визначити кінетичну енергію механізму еліпсографа, вважаючи, що лінійка  $AB$  і кривошип  $OC$  – однорідні тонкі стержні, а повзуни А і В – матеріальні точки, а також, що  $OC=AC=CB= l$ .

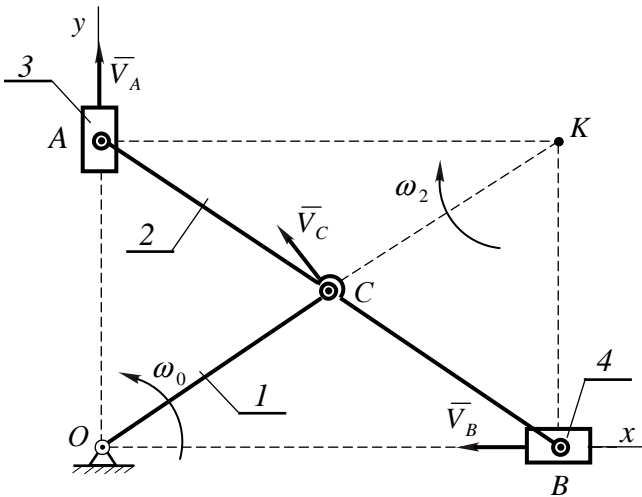


Рис. 10.1

**Розв'язок.** Задана механічна система складається з чотирьох тіл: кривошипа 1, лінійки 2, повзунів 3 і 4.

Кінетична енергія усієї системи дорівнює:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4, \quad (1)$$

де  $T_1$  - кінетична енергія кривошипа 1,

$T_2$  - кінетична енергія лінійки 2,

$T_3, T_4$  - кінетична енергія повзунів 3 та 4.

Кривошип  $OC$  здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі  $Oz$ , яка перпендикулярна до осі рисунка. В цьому випадку кінетична енергія тіла дорівнює

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{Oz} \omega_0^2, \quad \text{де} \quad I_{Oz} = \frac{1}{3} m_1 l^2 = \frac{2}{3} \frac{P}{g} l^2.$$

Тоді

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2. \quad (2)$$

Лінійка 2 рухається плоскопаралельно. Її кінетична енергія дорівнює

$$T_2 = T_{2\text{пост}} + T_{2\text{об}} = \frac{1}{2} m_2 V_C^2 + \frac{1}{2} I_{Cz} \omega_2^2, \quad (3)$$

де  $V_C$  - швидкість точки  $C$ , яка є центром мас лінійки 2,

$\omega_2$  - кутова швидкість лінійки 2,

$I_{Cz}$  - момент інерції лінійки відносно осі  $Cz$ , яка проходить через центр мас лінійки  $C$ .

Для визначення кутової швидкості  $\omega_2$  лінійки 2 використаємо поняття миттєвого центра швидкостей. Як відомо, миттєвий центр швидкостей розташовано на перетині перпендикулярів до швидкостей двох точок тіла, що рухається плоскопаралельно. Тоді у нашому випадку його буде розташовано у точці  $K$ , і швидкість точки  $C$  визначиться:

$$V_C = CK \cdot \omega_2.$$

З другого боку, точка  $C$  належить ланці 1, і її швидкість дорівнює

$$V_C = OC \cdot \omega_0.$$

Тоді, враховуючи, що  $OC=CK$ , отримаємо:

$$OC \cdot \omega_0 = CK \cdot \omega_2, \quad \omega_2 = \omega_0 \frac{OC}{CK} = \omega_0.$$

Момент інерції лінійки відносно осі  $C_z$  дорівнює:

$$I_{Cz} = \frac{m_2}{12} AB^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{P}{g} (2l)^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{3P}{g} 4l^2 = \frac{Pl^2}{g}.$$

З урахуванням одержаних значень  $V_C$ ,  $\omega_2$ ,  $I_{Cz}$  кінетична енергія лінійки 2 дорівнює:

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (l\omega_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{Pl^2}{g} \omega_0^2 = \frac{3}{2} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 = 2 \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2, \quad (4)$$

Підрахуємо кінетичну енергію повзунів 3 і 4, які рухаються поступально:

$$T_3 = \frac{m_3}{2} V_A^2 = \frac{P_3}{2g} V_A^2, \quad T_4 = \frac{1}{2} m_4 V_B^2 = \frac{P_4}{2g} V_B^2.$$

Швидкості точок  $AB$  можна визначити, враховуючи положення миттєвого центра швидкостей лінійки 2:

$$V_A = \omega_2 AK, \quad V_B = \omega_2 BK, \quad \text{де} \quad \omega_2 = \omega_0.$$

Тоді

$$T_3 = \frac{P}{2g} \omega_0^2 (AK)^2, \quad T_4 = \frac{P}{2g} \omega_0^2 (BK)^2,$$

$$T_3 + T_4 = \frac{P}{2g} \omega_0^2 \left[ (AK)^2 + (BK)^2 \right] = \frac{P}{2g} \omega_0^2 (AB)^2 = \frac{P}{2g} \omega_0^2 4l^2;$$

$$T_3 + T_4 = \frac{2P}{g} \omega_0^2 l^2. \quad (5)$$

Підставляючи знайдені вирази (2), (4), (5) в (1), одержимо:

$$T = \frac{1}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 + 2 \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 + 2 \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2 = \frac{13}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2.$$

**Відповідь:**  $T = \frac{13}{3} \frac{P}{g} l^2 \omega_0^2.$

## Задача № 2

На рисунку 10.2 зображено піднімальний механізм лебідки. Вантаж  $A$  вагою  $P_1$  піднімається за допомогою невагомому та нерозтяжного тросу, який перекинута через блок  $C$  і намотано на

барабан  $B$  радіусом  $r$  і вагою  $P_2$ . До барабана прикладений обертальний момент, який є пропорційним квадрату кута повороту  $\varphi$  барабану:

$$M_{об} = a\varphi^2,$$

де  $a$  - сталий коефіцієнт.

**Визначити** швидкість вантажу  $A$  в момент, коли він підніметься на висоту  $h$ . Масу барабана  $B$  рахувати рівномірно розподіленою вздовж його ободу. Блок  $C$  - суцільний диск вагою  $P_3$ . У початковий момент система знаходилась у спокої.

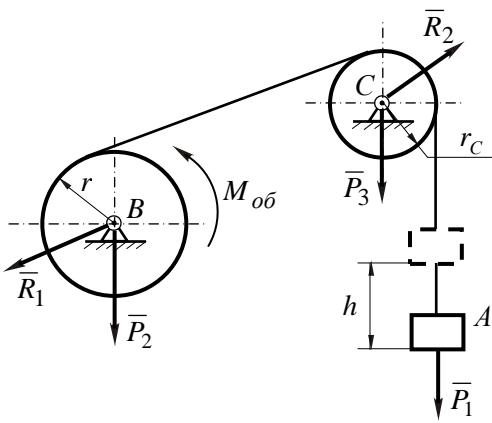


Рис.10.2

**Розв'язок.** Зобразимо на рисунку усі зовнішні сили, які діють на барабан  $B$ , блок  $C$  і вантаж  $A$ : сили тяжіння  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{P}_3$ ; обертальний момент  $M_{об}$ , а також реакції шарнірів  $\bar{R}_1$  і  $\bar{R}_2$ . Внутрішньою силою є натяг троса  $\bar{T}$ .

Запишемо теорему

про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_2 - T_1 = \sum A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum A(\bar{F}_k^{(i)}),$$

де  $T_2$  - кінетична енергія системи у кінцевому положенні;

$T_1$  - кінетична енергія системи у початковому положенні;

$\sum A(\bar{F}_k^{(e)})$  - сума робіт усіх зовнішніх сил на переміщенні  $h$ ;

$\sum A(\bar{F}_k^{(i)})$  - сума робіт усіх внутрішніх сил на переміщенні  $h$ .

Оскільки у початковий момент часу система знаходилася у спокою, то

$$T_1 = 0.$$

У зв'язку з тим, що трос не розтягується і при русі системи знаходиться у натягнутому стані, сума робіт внутрішніх сил системи дорівнює нулю, отже

$$T_2 = \sum A(\bar{F}_k^{(e)}).$$

При піднятті вантажу  $A$  на висоту  $h$  сума робіт дорівнює:

$$\sum A(\bar{F}_k^{(e)}) = A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_3} + A_{R_1} + A_{R_2} + A_{M_{об}}.$$

Оскільки точки прикладання сил  $\bar{P}_3$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{R}_1$  і  $\bar{R}_2$  - нерухомі, то

$$A_{P_3} = A_{P_2} = A_{R_1} = A_{R_2} = 0.$$

Робота сили  $P_1$  дорівнює:

$$A_{P_1} = -P_1 h.$$

Робота обертального моменту у випадку, коли він не змінюється

$$A_{M_{об}} = \varphi \cdot M_{об},$$

де  $\varphi$  - кут повороту тіла під дією моменту.

Оскільки у нашому випадку обертальний момент змінюється, то його робота визначиться наступним чином:

$$dA = M_{об} d\varphi, \quad A = \int_0^{\varphi} M_{об} d\varphi = \int_0^{\varphi} a\varphi^2 d\varphi;$$

$$A_{M_{об}} = \frac{a \cdot \varphi^3}{3}.$$

Визначимо кут  $\varphi$ , на який повернувся барабан  $B$  при підніманні вантажу  $A$  на висоту  $h$ :

$$\varphi = \frac{h}{r}.$$

Отже,

$$A_{M_{об}} = \frac{a \cdot h^3}{3r^3}.$$

Таким чином

$$\sum A(F_k^{(e)}) = \frac{ah^3}{3r^3} - P_1 h = \frac{ah^3 - 3P_1 r^3 h}{3r^3},$$

$$\sum A(F_k^{(e)}) = \frac{1}{3r^3} h (ah^2 - 3P_1 r^3).$$

Перейдемо до підрахування кінетичної енергії системи у кінцевому положенні:

$$T_2 = T_A + T_B + T_C,$$

де  $T_A$  - кінетична енергія вантажу  $A$ ;

$T_C$  - кінетична енергія диска  $C$ ;

$T_B$  - кінетична енергія барабана  $B$ .

Вантаж  $A$  рухається поступально і його кінетична енергія дорівнює:

$$T_A = \frac{m_1 V_A^2}{2} = \frac{P_1 V_A^2}{2g}.$$

Диск  $C$  здійснює обертальний рух, його кінетична енергія визначається з виразу:

$$T_C = \frac{I_C \omega_C^2}{2},$$

де  $I_C$  - момент інерції диска відносно осі обертання;

$\omega_C$  - кутова швидкість диска.

Оскільки диск  $C$  – суцільний, то  $I_C$  дорівнює:

$$I_C = \frac{m_3 r_C^2}{2},$$

де  $r_C$  - радіус диска.

Оскільки лінійна швидкість обода диска дорівнює швидкості вантажу, кутова швидкість обертання  $\omega_C$  буде:

$$\omega_C = \frac{V_A}{r_C}.$$

Отже,

$$T_C = \frac{m_3 r_C^2}{2 \cdot 2} \frac{V_A^2}{r_C^2} = \frac{P_3}{4g} V_A^2.$$

Кінетична енергія барабана  $B$ , оскільки він здійснює обертальний рух, дорівнює:

$$T_B = \frac{I_B \omega_B^2}{2},$$

Оскільки маса барабана  $B$  розподілена по ободу, то:

$$I_B = m_2 r^2 = \frac{P_2}{g} r^2.$$

Кутову швидкість барабана вирахуємо із умови рівності лінійних швидкостей на ободах диска і барабана:

$$\omega_B r = \omega_C r_C.$$

Звідки

$$\omega_B = \omega_C \frac{r_C}{r} = \frac{V_A}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r} = \frac{V_A}{r}.$$

Таким чином

$$T_B = \frac{P_2}{g} \frac{r^2}{2} \cdot \frac{V_A^2}{r^2} = \frac{P_2}{2g} V_A^2.$$

Кінетична енергія системи у кінцевому положенні дорівнює:

$$T_2 = \frac{P_1 V_A^2}{2g} + \frac{P_2 V_A^2}{2g} + \frac{P_3 V_A^2}{4g} = \frac{V_A^2}{4g} (2P_1 + 2P_2 + P_3).$$



Отже, теорема про зміну кінетичної енергії системи має вигляд:

$$\frac{V_A^2}{4g}(2P_1 + 2P_2 + P_3) = \frac{h(ah^2 - 3P_1r^3)}{3r^3}.$$

Розв'язуючи це рівняння відносно  $V_A$ , знаходимо швидкість вантажу  $A$  після того, як він пройде шлях  $h$ :

$$V_A = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gh(ah^2 - 3P_1r^3)}{3r(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$$

**Відповідь:**  $V_A = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{gh(ah^2 - 3P_1r^3)}{3r(2P_1 + 2P_2 + P_3)}}.$

### Задача № 3

Вантаж  $A$  (рис.10.3) вагою  $P_1$ , опускаючись униз за допомогою перекинутого через нерухомий блок  $D$  невагомий та нерозтяжний трос, піднімає угору вантаж  $B$  вагою  $P_2$ , який закріплено до осі рухомого блока  $C$ . Блоки  $C$  і  $D$  вважати однорідними суцільними дисками вагою  $P_3$  кожний.

**Визначити** швидкість вантажу  $A$  у момент, коли він опуститься на висоту  $h$ . Ковзанням на обох блоках і силами опору знехтувати.

У початковий момент система знаходилась у стані спокою.

**Розв'язок.** Зобразимо зовнішні сили, які діють на систему: сили

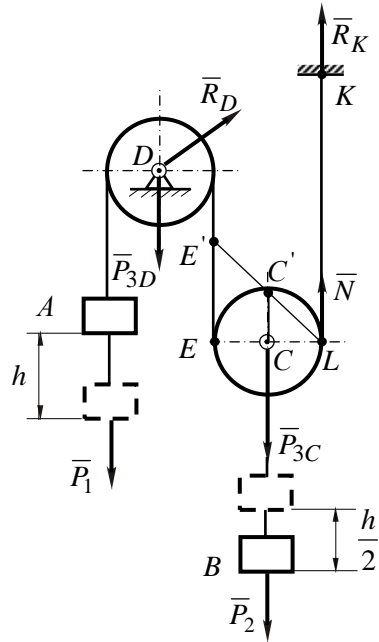


Рис. 10.3

тяжіння  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_{3D}, \bar{P}_{3C}$ ; реакцію шарніра  $\bar{R}_D$  і реакцію у точці  $K$  -  $\bar{R}_K$ . Внутрішньою силою є натяг троса  $\bar{N}$ .

Запишемо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T_2 - T_1 = \sum A(\bar{F}_k^{(e)}) + \sum A(\bar{F}_k^{(i)}).$$

У початковий момент часу система находилася у спокої, отже,  $T_1 = 0$ . Робота внутрішньої сили натягу тросу, дорівнює нулю. Отже,

$$T_2 = \sum A(\bar{F}_k^{(e)}).$$

Сума робіт зовнішніх сил при переміщенні системи у кінцеве положення складає:

$$\sum A(\bar{F}_k^{(e)}) = A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_{3D}} + A_{P_{3C}} + A_{R_D} + A_{R_K}.$$

Робота сил  $\bar{P}_{3D}, \bar{R}_D, \bar{R}_K$  дорівнює нулю, оскільки точки прикладання сил  $\bar{P}_{3D}, \bar{R}_D, \bar{R}_K$  нерухомі.

Отже,

$$\sum A(\bar{F}_k^{(e)}) = A_{P_1} + A_{P_2} + A_{P_{3C}}.$$

Робота сили  $\bar{P}_1$  при опусканні вантажу  $A$  на висоту  $h$  дорівнює:

$$A_{P_1} = P_1 h.$$

Роботу сили тяжіння  $P_3$  блока  $C$  визначимо наступним чином. При опусканні вантажу  $A$  на висоту  $h$  точка  $E$  блока  $C$  піднімається вгору на відстань  $EE'$ , яка дорівнює  $h$ , а центр блока  $C$  на величину  $CC' = \frac{h}{2}$ , оскільки точка  $L$  - миттєвий центр швидкостей блока  $C$ .

Таким чином,

$$A_{P_3C} = -P_3 \frac{h}{2}.$$

Вантаж  $B$  піднімається вгору так само на величину  $\frac{h}{2}$ . Тоді робота сили тяжіння вантажу  $B$  буде дорівнювати:

$$A_{P_2} = -P_2 \cdot \frac{h}{2}.$$

Отже,

$$\sum A \left( \overline{F}_k^{(e)} \right) = P_1 h - P_2 \cdot \frac{h}{2} - P_3 \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{2} (2P_1 - P_2 - P_3).$$

Вирахуємо кінетичну енергію системи у кінцевому положенні:

$$T_2 = T_A + T_C + T_B + T_D.$$

Вантаж  $A$  переміщується поступально і його кінетична енергія дорівнює

$$T_A = \frac{m_1 V_A^2}{2} = \frac{P_1 V_A^2}{2g},$$

де  $V_A$  - швидкість вантажу  $A$  у кінці переміщення.

Блок  $C$  здійснює плоскопаралельний рух. У цьому випадку:

$$T_C = T_{\text{ноcm}} + T_{\text{об}}.$$

Кінетична енергія поступального руху блока  $C$  дорівнює:

$$T_{\text{ноcm}} = \frac{m_3 V_C^2}{2}.$$

Оскільки точка  $L$  - миттєвий центр швидкостей блока  $C$ , а швидкість точки  $E$  дорівнює швидкості вантажу  $A$ , то швидкість обертання блока  $C$ :

$$\omega_C = \frac{V_A}{EL} = \frac{V_A}{2r_C}.$$

Тоді

$$V_C = \omega_C r_C = \frac{V_A}{2r_C} r_C = \frac{V_A}{2}.$$

Таким чином,

$$T_{\text{пост}} = \frac{P_3 \cdot V_A^2}{2g \cdot 4} = \frac{P_3}{8g} V_A^2.$$

Кінетична енергія обертального руху блока  $C$  визначається із рівності:

$$T_{\text{об}} = \frac{I_C \omega_C^2}{2},$$

де  $I_C$  - момент інерції блока  $C$  відносно осі, яка проходить через центр мас  $C$ . Блок  $C$  - суцільний однорідний диск, тому

$$I_C = \frac{1}{2} m_C r_C^2.$$

Тоді

$$T_{\text{об}} = \frac{m_3 r_C^2}{2 \cdot 2} \left( \frac{V_A^2}{4r_C^2} \right) = \frac{P_3 V_A^2}{16g}.$$

Таким чином, кінетична енергія блоку  $C$  дорівнює:

$$T_C = T_{\text{пост}} + T_{\text{об}} = \frac{P_3 V_A^2}{8g} + \frac{P_3 V_A^2}{16g} = \frac{3P_3 V_A^2}{16g}.$$

Блок  $D$  здійснює обертальний рух і його кінетична енергія:

$$T_D = \frac{I_D \omega_D^2}{2}; \quad I_D = \frac{m_3 r_D^2}{2}, \quad \omega_D = \frac{V_A}{r_D},$$

тобто

$$T_D = \frac{m_3 \cdot r_D^2 \cdot V_A^2}{2 \cdot 2 \cdot r_D^2} = \frac{P_3 \cdot V_A^2}{4g}.$$

Вантаж  $B$  здійснює поступальний рух зі швидкістю точки  $C$ , тобто зі швидкістю  $0,5V_A$ . Тому

$$T_B = \frac{m_2}{2} \left( \frac{V_A}{2} \right)^2 = \frac{P_2 V_A^2}{8g}.$$

Отже, кінетична енергія системи  $T_2$  у кінцевому положенні:

$$\begin{aligned} T_2 = T_A + T_C + T_B + T_D &= \frac{P_1 V_A^2}{2g} + \frac{3P_3 V_A^2}{16g} + \frac{P_2 V_A^2}{8g} + \frac{P_3 V_A^2}{4g} = \\ &= \frac{V_A^2}{16g} (8P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_3) = \frac{V_A^2}{16g} (8P_1 + 2P_2 + 7P_3). \end{aligned}$$

Таким чином, теорема про зміну кінетичної енергії системи має вигляд:

$$\frac{V_A^2}{16g} (8P_1 + 2P_2 + 7P_3) = \frac{h}{2} (2P_1 - P_2 - P_3).$$

Знаходимо швидкість вантажу  $A$ , розв'язуючи це рівняння відносно  $V_A$ :

$$V_A = 2\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2P_1 - P_2 - P_3}{8P_1 + 2P_2 + 7P_3}}.$$

**Відповідь:**  $V_A = 2\sqrt{2gh} \cdot \sqrt{\frac{2P_1 - P_2 - P_3}{8P_1 + 2P_2 + 7P_3}}.$

#### Задача № 4

Прямокутна пластинка  $ABCD$  (рис.10.4) зі сторонами  $a$  і  $b$ , і вагою  $P$  обертається навколо вертикальної осі  $z$  з початковою кутовою швидкістю  $\omega_0$ . Кожен елемент пластинки зазнає при цьому опір повітря, напрямком якого перпендикулярний до площини пластинки, а величина пропорційна площі елемента і квадрату його швидкості. Коефіцієнт пропорційності дорівнює  $\mu$ .

**Визначити**, скільки обертів зробить пластинка до тієї миті, коли її кутова швидкість стане удвічі меншою за початкову?

**Розв'язок.** Оскільки сили опору, які прикладені до пластинки, не сталі, а залежать від швидкості, то для розв'язування задачі скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії системи у диференціальній формі:

$$dT = \sum dA. \quad (1)$$

Вирахуємо диференціал кінетичної енергії пластинки. Оскільки пластинка обертається навколо нерухомої осі, то її кінетична енергія дорівнює:

$$T_{об} = I_z \frac{\omega^2}{2},$$

відкіля:

$$dT_{об} = I_z \omega \cdot d\omega,$$

де  $I_z$  - момент інерції пластинки відносно осі  $z$ .

Перейдемо до визначення суми елементарних робіт зовнішніх сил, які діють на пластинку. Це такі сили (рис.10.4):

- сила тяжіння пластинки  $\bar{P}$ ;
- реакції в опорах  $O$  і  $O_1$ :  $\bar{R}_0$  і  $\bar{R}_{0_1}$ ;
- сила опору повітря  $\bar{F}$ .

Отже,

$$\sum dA = dA(\bar{P}) + dA(\bar{R}_0) + dA(\bar{R}_{0_1}) + dA(\bar{F}),$$

де  $dA(\bar{P})$  - елементарна робота сили тяжіння пластинки;

$dA(\bar{R}_0)$ ,  $dA(\bar{R}_{0_1})$  - елементарні роботи реакцій підшипників;

$dA(\bar{F})$  - елементарна робота сили опору  $\bar{F}$ .

Роботи реакцій  $\bar{R}_0$  і  $\bar{R}_{0_1}$  дорівнюють нулю, бо точки їх прикладення нерухомі. Робота сили тяжіння  $\bar{P}$  теж дорівнює нулю у зв'язку з тим, що висота центра ваги пластинки не змінюється.

Таким чином,

$$\sum dA = dA(\bar{F}).$$

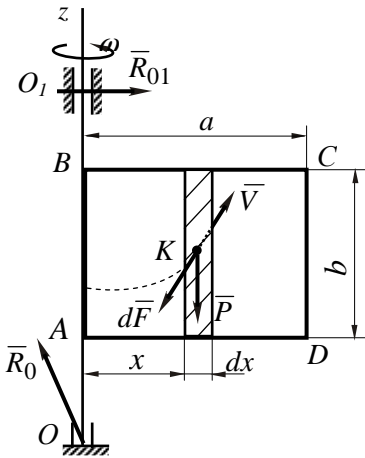


Рис.10.4

Для вирахування роботи сил опору скористаємося формулою для роботи сил, які прикладені до твердого тіла, яке обертається:

$$dA(\bar{F}) = M_z d\varphi,$$

де  $M_z$  - сума моментів усіх прикладених до тіла сил відносно осі обертання;

$d\varphi$  - елементарний кут повороту.

Щоб визначити  $M_z$ , розіб'ємо пластинку на елементарні прямокутники зі сторонами  $b$  і  $dx$ . Тоді сила опору, яка прикладена до

елементарного прямокутника, буде дорівнювати:

$$dF = \mu \cdot V^2 \cdot b \cdot dx = \mu \cdot b \cdot (\omega x)^2 dx$$

і

$$m_z(d\bar{F}) = -x dF = -\mu \cdot b \cdot \omega^2 \cdot x^3 dx.$$

Отже,

$$M_z = \sum m_z(d\bar{F}),$$

або

$$M_z = -\mu \cdot b \cdot \omega^2 \int_0^a x^3 dx = -\frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 \omega^2,$$

і

$$\sum dA = -\frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 \cdot \omega^2 d\varphi.$$

Таким чином, рівняння (1) приймає вигляд:

$$I_z \omega \cdot d\omega = -\frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 \cdot \omega^2 d\varphi.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$I_z \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 d\varphi,$$

$$\int_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} I_z \frac{d\omega}{\omega} = -\int_0^{\varphi} \frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 d\varphi, \quad I_z \ln \omega \Big|_{\omega_0}^{\frac{\omega_0}{2}} = -\frac{1}{4} \mu \cdot b \cdot a^4 \cdot \varphi;$$

$$I_z \ln \omega \Big|_{\frac{\omega_0}{2}}^{\omega_0} = \frac{\mu \cdot b \cdot a^4}{4} \cdot \varphi, \quad I_z \left[ \ln \omega_0 - \ln \frac{\omega_0}{2} \right] = \frac{\mu \cdot b \cdot a^4}{4} \cdot \varphi,$$

$$I_z \ln 2 = \frac{\mu \cdot b \cdot a^4}{4} \cdot \varphi.$$

Момент інерції пластинки складає:

$$I_z = \frac{ma^2}{3} = \frac{Pa^2}{3g}.$$

Тоді

$$\frac{P \cdot a^2}{3g} \ln 2 = \frac{\mu \cdot b \cdot a^4}{4} \varphi.$$

Звідки знаходимо:

$$\varphi = \frac{4}{3} \frac{P \cdot \ln 2}{\mu \cdot b \cdot a^2 \cdot g}.$$

Число обертів  $N$  складає:

$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2}{3} \frac{P \cdot \ln 2}{\pi \cdot g \cdot \mu \cdot b \cdot a^2}.$$

**Відповідь:** 
$$N = \frac{\varphi}{2\pi} = \frac{2}{3} \frac{P \cdot \ln 2}{\pi \cdot g \cdot \mu \cdot b \cdot a^2}.$$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 38.1, 38.15, 38.24, 38.30 [2].



## Тема 11. ДИНАМІКА ПЛОСКОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

### ЗАНЯТТЯ № 16

#### Зміст

- 11.1. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла.
- 11.2. Контрольні запитання.
- 11.3. Порядок розв'язування задач динаміки плоского руху твердого тіла.
- 11.4. Приклади розв'язування задач.

### 11.1. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла

Із кінематики відомо, що для визначення положення твердого тіла, яке здійснює плоский рух, достатньо задати положення будь-якої його точки, яка приймається за полюс, і кут повороту навколо миттєвої осі обертань, яка проходить через полюс перпендикулярно площині руху.

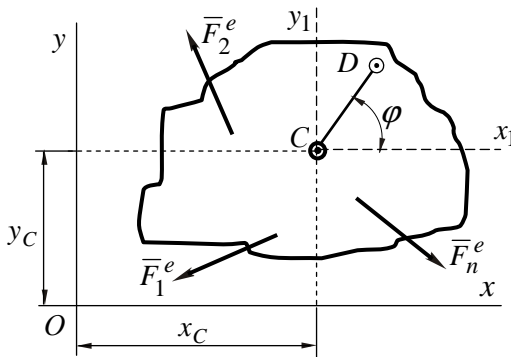


Рис.11.1

Задачі динаміки будуть розв'язуватися найпростіше, якщо за полюс вибрати центр мас  $C$  тіла (рис.11.1) і визначати положення тіла координатами  $x_c$ ,  $y_c$  і кутом  $\varphi$ .

Таким чином, для вивчення плоского руху твердого тіла достатньо скласти три диференціальні рівняння, які

пов'язують величини  $x_c$ ,  $y_c$  і  $\varphi$  із зовнішніми силами, що діють на тіло.

Для визначення руху центра мас використовується теорема про рух центра мас системи:

$$M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e = \bar{R}^e, \quad (11.1)$$

де  $M$  - маса тіла,

$\bar{R}^e$  - головний вектор всіх зовнішніх сил, які діють на тіло,

$\bar{a}_c$  - прискорення центру мас.

Рівняння, яке визначає обертальний рух тіла, одержується із теореми про зміну моменту кількості руху відносно осі, яка проходить через точку  $C$ :

$$\frac{dK_c}{dt} = \sum m_c (\bar{F}_k^e), \quad (11.2)$$

де  $K_c$  - момент кількості руху тіла відносно осі, яка проходить через центр мас,

$\sum m_c (\bar{F}_k^e)$  - головний момент зовнішніх сил, які прикладені до тіла.

Проектуючи рівняння (11.1) на нерухомі осі координат  $Ox$ , а також ураховуючи, що для твердого тіла  $K_c = I_c \omega$ , де  $I_c$  - момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через точку  $C$ , одержують наступні диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла:

$$\left. \begin{aligned} Ma_{cx} &= \sum F_{kx}^e, \\ Ma_{cy} &= \sum F_{ky}^e, \\ I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= I_c \varepsilon = \sum m_c (\bar{F}_k^e), \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

або

$$\left. \begin{aligned} M \frac{d^2 x_c}{dt^2} &= \sum F_{kx}^e, \\ M \frac{d^2 y_c}{dt^2} &= \sum F_{ky}^e, \\ I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= I_c \varepsilon = \sum m_c (\bar{F}_k^e). \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

За допомогою цих рівнянь можна розв'язувати як пряму, так і обернену задачі динаміки.

При невільному русі, коли траєкторія центра мас відома, рівняння руху точки  $C$  зручніше складати у проєкціях на дотичну  $\tau$  і головну нормаль  $n$  до цієї траєкторії, змінний радіус кривизни якої  $\rho_c$ :

$$\left. \begin{aligned} M \frac{dV_c}{dt} &= \sum F_{k\tau}^e, \\ M \frac{V_c^2}{\rho_c} &= \sum F_{kn}^e, \\ I_c \frac{d^2\varphi}{dt^2} &= \sum m_c \left( \bar{F}_k^e \right). \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

## 11.2. Контрольні запитання

Який рух твердого тіла називається плоским?

Який вигляд мають кінематичні рівняння плоского руху твердого тіла?

Який вигляд мають диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла?

Які загальні теореми динаміки механічної системи використовуються для складання цих рівнянь?

Яким видом диференціальних рівнянь плоского руху твердого тіла зручно користуватися, якщо задана траєкторія центру мас тіла?

## 11.3. Порядок розв'язування задач динаміки плоского руху твердого тіла

Вибрати нерухому систему координат, відносно якої розглядається рух тіла.

Зобразити тверде тіло у поточному положенні і показати всі зовнішні сили, які прикладені до нього.

Скласти диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла у формі рівнянь (11.4).

Якщо відома траєкторія центра мас твердого тіла, то зручніше застосувати рівняння (11.5).

У випадку розв'язування прямої задачі шукані зовнішні сили і їх моменти визначаються із систем диференціальних рівнянь (11.4) і (11.5).

У випадку розв'язування зворотної задачі шляхом інтегрування систем (11.4) або (11,5) визначають кінематичні рівняння руху центру мас твердого тіла.

## 11.4. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

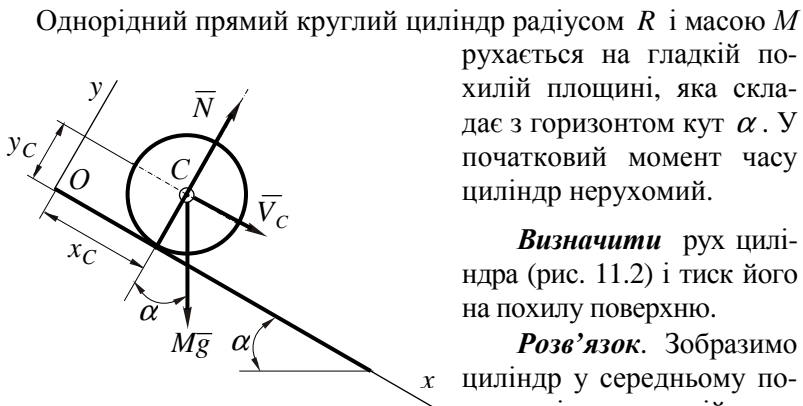


Рис.11.2

Однорідний прямий круглий циліндр радіусом  $R$  і масою  $M$  рухається на гладкій похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ . У початковий момент часу циліндр нерухомий.

**Визначити** рух циліндра (рис. 11.2) і тиск його на похилу поверхню.

**Розв'язок.** Зобразимо циліндр у середньому положенні на похилій площині та покажемо зовнішні сили, які діють на нього:

$M\bar{g}$  - сила тяжіння циліндра,  $\bar{N}$  - нормальна реакція похилої площини. Осі координат вибираємо так, як показано на рис.11.2.

Диференціальні рівняння плоского руху круглого циліндра у даному випадку мають вигляд:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e = Mg \sin \alpha,$$

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e = -Mg \cos \alpha + N,$$

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = \sum m_c (\bar{F}_k^e) = 0,$$

де  $x_c$  і  $y_c$  - координати центра мас циліндра.

Оскільки під час руху  $y_c = R = const$ , то з другого рівняння витікає:

$$0 = -Mg \cos \alpha + N,$$

$$N = Mg \cos \alpha.$$

Із третього рівняння системи знаходимо:  $I_c \frac{d\omega}{dt} = 0$ .

Оскільки

$$I_c \neq 0, \quad \text{то} \quad \frac{d\omega}{dt} = 0 \quad \text{і} \quad \omega = const.$$

Оскільки у початковий момент часу  $\omega(0) = 0$ , то і під час руху  $\omega = 0$ . Це означає, що по гладкій поверхні циліндр буде ковзати без обертання.

Розв'язуючи перше рівняння, знаходимо закон зміни координати  $x_c$ .

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = M \frac{dV_c}{dt} = Mg \sin \alpha; \quad \frac{dV_c}{dt} = g \sin \alpha.$$

Розділимо змінні та проінтегруємо:

$$\int_0^{V_c} dV_c = g \sin \alpha \int_0^t dt; \quad V_c = gt \sin \alpha.$$

Звідси

$$V_c = \frac{dx_c}{dt} = gt \sin \alpha; \quad dx_c = gt \sin \alpha dt; \quad \int_0^{x_c} dx_c = g \sin \alpha \int_0^t t dt.$$

Остаточно,

$$x_c = \frac{1}{2} gt^2 \sin \alpha.$$

Отже, циліндр здійснює поступальний рух.

**Відповідь:**  $x_c = \frac{1}{2}gt^2 \sin \alpha$ ,  $y_c = R$ ,  $N = Mg \cos \alpha$ .

### Задача № 2

Однорідний круглий циліндр з радіусом  $R$  і масою  $M$  (рис.11.3) рухається із стану спокою по шорсткій нерухомій похилій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ . Коефіцієнт тертя ковзання циліндра по площині дорівнює  $f$ .

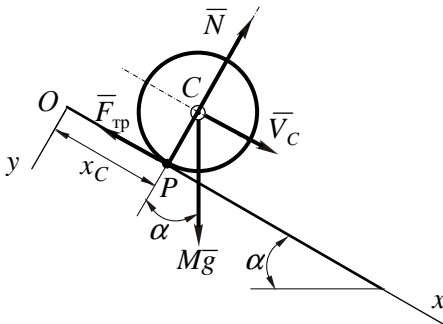


Рис.11.3

До циліндра прикладені такі зовнішні сили:  $M\bar{g}$  - сила тяжіння циліндра;  $\bar{N}$  - нормальна реакція похилої площини;  $\bar{F}_{\text{тр}}$  - сила тертя об шорстку похилу поверхню, яка спрямована у бік, протилежний руху циліндра. Осі координат та усі сили показані на рис.11.3.

Диференціальні рівняння руху циліндра у цьому випадку запишуться у вигляді:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e = Mg \cos \alpha - N, \quad (2)$$

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = \sum m_c (\bar{F}_k^e) = F_{\text{тр}} \cdot R. \quad (3)$$

**Визначити** рівняння руху циліндра і його тиск на похилу поверхню.

**Розв'язок.** До циліндра прикладені такі зовнішні сили:  $M\bar{g}$  - сила тяжіння циліндра;  $\bar{N}$  - нормальна реакція похилої площини;  $\bar{F}_{\text{тр}}$  -

Оскільки під час руху  $y_c = -R$ , то із рівняння (2) випливає:

$$0 = Mg \cos \alpha - N \quad \text{або} \quad N = Mg \cos \alpha.$$

Рівняння (1) і (3) мають три невідомих:  $a_c$ ,  $\omega$  і  $F_{\text{тр}}$ . У нашому випадку не можна визначати  $F_{\text{тр}} = fN$ , оскільки ця рівність має місце, коли точка дотику сковзає вздовж площини, а при коченні, коли проковзування відсутнє, повинно бути  $F_{\text{тр}} \leq fN$ .

Знайдемо ще одне додаткове рівняння. Оскільки точка  $P$  є миттєвим центром швидкостей, то:

$$V_c = \frac{dx_c}{dt} = \omega R. \quad (4)$$

Тоді, з урахуванням рівняння (4), а також значення  $I_c = \frac{1}{2}MR^2$ , рівняння (1) і (3) набудуть вигляду:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = M \frac{dV_c}{dt} = M \frac{d(\omega R)}{dt} = MR \frac{d\omega}{dt} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$I_c \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}MR^2 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} \cdot R.$$

Остаточно

$$MR \frac{d\omega}{dt} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}},$$

$$MR \frac{d\omega}{dt} = 2F_{\text{тр}}.$$

Оскільки ліві частини цих рівнянь однакові, тоді рівні і їх праві частини. Тому:

$$Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 2F_{\text{тр}}, \quad \text{або} \quad F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}Mg \sin \alpha.$$

За законом Кулона

$$F_{\text{тр}} \leq F_{\text{трmax}} = fN = fMg \cos \alpha, \quad \text{або} \quad F_{\text{тр}} \leq fMg \cos \alpha.$$

Отже,

$$\frac{1}{3}Mg \sin \alpha \leq fMg \cos \alpha ,$$

звідки

$$\operatorname{tg} \alpha \leq 3f .$$

Це і є умова кочення циліндра по шорсткій поверхні без проковзування.

Визначимо прискорення центра мас циліндра при такому коченні. Для цього у рівняння (1)

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = Ma_{cx} = Mg \sin \alpha - F_{\text{тр}}$$

підставимо значення сили тертя

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3}Mg \sin \alpha .$$

$$Ma_{cx} = Ma_c = Mg \sin \alpha - \frac{1}{3}Mg \sin \alpha ,$$

$$a_c = g \sin \alpha - \frac{1}{3}g \sin \alpha = \frac{2}{3}g \sin \alpha .$$

Оскільки  $a_c = \frac{dV_c}{dt} = \frac{2}{3}g \sin \alpha$ , то, розділяючи змінні, отримаємо

$$dV_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha \cdot dt .$$

Проінтегруємо цей вираз:

$$\int_0^{V_c} dV = \frac{2}{3}g \sin \alpha \int_0^t dt , \quad V_c = \frac{2}{3}gt \sin \alpha .$$

Оскільки  $V_c = \frac{dx_c}{dt} = \frac{2}{3}gt \sin \alpha$ , то, розділяючи змінні та інтегруючи, отримаємо

$$dx_c = \frac{2}{3}g \sin \alpha \cdot dt ,$$



$$\int_0^{x_c} dx_c = \frac{2}{3} g \sin \alpha \int_0^t t dt,$$

$$x_c = \frac{1}{3} g t^2 \sin \alpha.$$

Визначимо закон обертання циліндра навколо осі. Для цього скористаємося рівнянням (3):

$$\frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} = F_{\text{тр}} \cdot R.$$

Оскільки

$$F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} Mg \sin \alpha,$$

то

$$\frac{1}{2} MR^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{3} MRg \sin \alpha \quad \text{або} \quad \frac{1}{2} R \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{3} g \sin \alpha,$$

відкіля

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{2g}{3R} \sin \alpha.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$d\omega = \frac{2g}{3R} \sin \alpha dt, \quad \int_0^{\omega} d\omega = \frac{2g}{3R} \sin \alpha \int_0^t dt.$$

Закон зміни кутової швидкості має вигляд:

$$\omega = \frac{2g}{3R} t \sin \alpha.$$

Визначимо закон зміни кута обертання:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2g}{3R} t \sin \alpha; \quad \text{або} \quad d\varphi = \frac{2g}{3R} t \sin \alpha dt,$$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{2g}{3R} \sin \alpha \int_0^t t dt,$$

і тоді

$$\varphi = \frac{g \sin \alpha}{3R} t^2.$$

Видно, що закон обертання циліндра навколо його осі не залежить від руху центра мас.

**Відповідь:**  $x_c = \frac{1}{3}gt^2 \sin \alpha$ ,  $y_c = -R$ ,  $\varphi = \frac{g \sin \alpha}{3R}t^2$ ,  $N = Mg \sin \alpha$ .

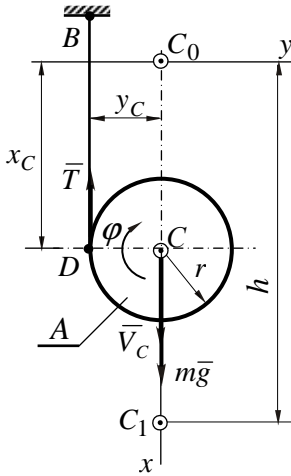


Рис. 11.4

показано на рис.11.4.

Диференціальні рівняння плоского руху у даному випадку мають вигляд:

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e = mg - T, \quad (1)$$

$$m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e = 0, \quad (2)$$

$$I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_c (\bar{F}_k^e) = Tr. \quad (3)$$

Кут повороту циліндра відраховуємо у напрямку за годинниковою стрілкою.

### Задача № 3

Важкий круглий циліндр  $A$  з масою  $m$  і радіусом  $r$  обмотаний посередині невагомою та нерозтяжною ниткою, кінець якої  $B$  закріплено нерухомо. Циліндр падає без початкової швидкості, розмотуючи нитку.

**Визначити** швидкість осі циліндра  $C$  після того, як вісь опуститься на висоту  $h$ , і знайти натяг  $T$  нитки.

**Розв'язок.** До циліндра  $A$  прикладені зовнішні сили:  $m\bar{g}$  - сила тяжіння циліндра;  $\bar{T}$  - натяг нитки.

За початок координат приймемо положення центра мас циліндра  $C_0$  у початковий момент. Напрямок осей  $x$  і  $y$

Оскільки  $\sum F_{ky}^e = 0$ ,  
то з рівняння (2) маємо:

$$\frac{d^2 y_c}{dt^2} = \frac{dV_{cy}}{dt} = 0, \quad \text{і} \quad V_{cy} = \text{const} = 0.$$

Отже, швидкість центра мас буде мати тільки одну складову -  $V_{cx}$  і тому  $V_c = V_{cx}$ .

Рівняння (1) запишемо у вигляді:

$$m \frac{dV_c}{dt} = mg - T. \quad (4)$$

У цьому рівнянні дві невідомих величини -  $V_c$  і  $T$ . Для одержання додаткової умови скористаємося рівнянням (3), яке запишемо у вигляді:

$$I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = Tr,$$

або

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\omega}{dt} = Tr, \quad (5)$$

де  $\frac{mr^2}{2}$  - момент інерції циліндра відносно осі, яка проходить через його центр мас.

Між кутовою швидкістю  $\omega$  і швидкістю центра мас  $V_c$  існує залежність. Оскільки точка  $D$  - миттєвий центр швидкостей циліндра, то

$$V_c = \omega r, \quad \omega = \frac{V_c}{r}.$$

Підставимо значення  $\omega$  у рівняння (5):

$$\frac{mr^2}{2} \frac{d\left(\frac{V_c}{r}\right)}{dt} = Tr, \quad \frac{mr^2}{2} \frac{dV_c}{r dt} = Tr, \quad m \frac{dV_c}{dt} = 2T. \quad (6)$$

Ліві частини рівнянь (4) і (6) рівні, отже, рівні і праві частини:

Звідки: 
$$mg - T = 2T .$$

Відкіля отримаємо

$$T = \frac{1}{3} mg .$$

Підставимо у рівняння (4) значення  $T$ :

$$m \frac{dV_c}{dt} = mg - \frac{1}{3} mg = \frac{2}{3} mg , \quad \frac{dV_c}{dt} = \frac{2}{3} g .$$

Оскільки необхідно визначити швидкість центра мас  $V_c$  як функцію відстані, а не часу, у останньому рівнянні замінімо змінну  $t$  на змінну  $x$ :

$$\frac{dV_c}{dx} \frac{dx}{dt} = V_c \frac{dV_c}{dx} = \frac{2}{3} g .$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$V_c dV_c = \frac{2}{3} g dx , \quad \int_0^{V_c} V_c dV_c = \frac{2}{3} g \int_0^h dx ,$$

та

$$\frac{1}{2} V_c^2 = \frac{2}{3} gh .$$

Остаточно,

$$V_c = \frac{2}{3} \sqrt{3gh} .$$

**Відповідь:** 
$$V_c = \frac{2}{3} \sqrt{3gh} , \quad T = \frac{1}{3} mg .$$

#### Задача № 4

Однорідний стержень  $AB$  довжиною  $l$  і вагою  $P$  (рис.11.5) одним кінцем закріплений за допомогою плоского шарніра у точці  $A$ ; другий кінець стержня утримується ниткою  $BD$ , яка складає із стержнем кут  $90^\circ$ . Стержень складає з горизонтом кут  $\alpha$ .

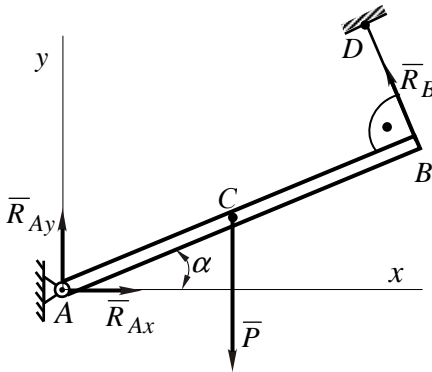


Рис.11.5

**Визначити**, як зміниться тиск стержня на шарнір  $A$ , якщо нитка  $BD$  обірветься.

**Розв'язок.** Спочатку визначимо реакції у шарнірі  $A$  і натяг нитки  $BD$ . На стержень  $AB$  діє плоска система сил: сила тяжіння  $\bar{P}$ , натяг  $\bar{R}_B$  нитки  $BD$ , що направлений від точки  $B$  до точки  $D$ , а також реакція

шарніра  $A$  у вигляді складових  $\bar{R}_{Ax}$  та  $\bar{R}_{Ay}$ , які спрямуємо у бік позитивних напрямків осей  $Ax$  та  $Ay$ .

Складемо рівняння рівноваги плоскої системи сил, що прикладена до стержня  $AB$ :

$$\sum F_{kx} = R_{Ax}^{cm} - R_B \sin \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay}^{cm} + R_B \cos \alpha - P = 0, \quad (2)$$

$$\sum m_A(F_k) = R_B AB - \frac{1}{2} AB \cdot P \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Із рівняння (3) знаходимо натяг нитки  $R_B$ :

$$R_B = \frac{P \cos \alpha}{2}.$$

Підставляючи значення  $R_B$  в рівняння (1) і (2), знаходимо реакції  $R_{Ax}^{cm}$  і  $R_{Ay}^{cm}$ :

$$R_{Ax}^{cm} = R_B \sin \alpha = \frac{P \cos \alpha \sin \alpha}{2} = \frac{P}{4} \sin 2\alpha,$$

$$R_{Ay}^{cm} = P - R_B \cos \alpha = P - \frac{P \cos^2 \alpha}{2} = \frac{P}{2} (2 - \cos^2 \alpha) = \frac{P}{2} (1 + \sin^2 \alpha).$$

Якщо нитка обірветься, то стержень почне здійснювати обертальний рух навколо шарніра  $A$ .

Диференціальні рівняння такого руху, урахувавши, що точка  $A$  нерухома, можна записати у вигляді:

$$\frac{P}{g} \ddot{x}_c = \sum F_{kx} = R_{Ax}, \quad (4)$$

$$\frac{P}{g} \ddot{y}_c = \sum F_{ky} = R_{Ay} - P, \quad (5)$$

$$I_A \ddot{\varphi} = M_A(\bar{P}) = -\frac{Pl}{2} \cos \alpha, \quad (6)$$

де  $x_c$  і  $y_c$  - координати центра мас стержня;

$\varphi$  - кут, який визначає положення стержня у момент розриву нитки  $BD$ ;

$M_A(\bar{P})$  - момент сили тяжіння стержня відносно осі шарніра  $A$ ;

$I_A$  - момент інерції стержня відносно осі шарніра  $A$ .

З рис.11.5 витікає:

$$x_c = \frac{AB}{2} \cos \varphi = \frac{l}{2} \cos \varphi,$$

$$y_c = \frac{AB}{2} \sin \varphi = \frac{l}{2} \sin \varphi.$$

Продиференціюємо ці вирази двічі, враховуючи, що кут  $\varphi$  залежить від часу  $t$ :

$$\dot{x}_c = -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{x}_c = -\frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi);$$

$$\dot{y}_c = \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \ddot{y}_c = \frac{l}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi).$$

Оскільки у момент розриву нитки  $\varphi = \alpha$ ,  $\dot{\varphi} = 0$ , то

$$\ddot{x}_c = -\frac{l}{2} \ddot{\varphi} \sin \varphi, \quad \ddot{y}_c = \frac{l}{2} \ddot{\varphi} \cos \varphi.$$

Підставивши знайдені значення  $\ddot{x}_c$  і  $\ddot{y}_c$  у вирази (4) і (5), одержимо:

$$-\frac{Pl}{2g}\ddot{\phi}\sin\alpha = R_{Ax}, \quad (7)$$

$$\frac{Pl}{2g}\ddot{\phi}\cos\alpha = R_{Ay} - P. \quad (8)$$

Для визначення невідомого значення  $\ddot{\phi}$  скористаємося рівнянням (6), яке для моменту обриву нитки запишеться таким чином:

$$I_A\ddot{\phi} = -\frac{Pl}{2}\cos\alpha,$$

звідки

$$\ddot{\phi} = -\frac{Pl}{2I_A}\cos\alpha.$$

Момент інерції однорідного стержня відносно осі, яка проходить через його кінець:

$$I_A = \frac{ml^2}{3} = \frac{P}{3g}l^2.$$

Тоді

$$\ddot{\phi} = -\frac{P \cdot l \cdot 3g}{2P \cdot l^2}\cos\alpha = -\frac{3g}{2l}\cos\alpha.$$

Підставивши значення  $\ddot{\phi}$  у рівняння (7) і (8), одержимо:

$$R_{Ax} = -\frac{Pl}{2g}\left(-\frac{3g}{2l}\cos\alpha\right)\sin\alpha = \frac{3P}{4}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3P}{8}\sin 2\alpha,$$

$$R_{Ay} = P + \frac{Pl}{2g}\ddot{\phi}\cos\alpha = P + \frac{Pl}{2g}\left(-\frac{3g}{2l}\cos\alpha\right)\cos\alpha = P - \frac{3}{4}P\cos^2\alpha.$$

Отже, зміна реакцій після обриву нитки буде дорівнювати:

$$\Delta R_{Ax} = R_{Ax} - R_{Ax}^{cm} = \frac{3P}{8}\sin 2\alpha - \frac{P}{4}\sin 2\alpha = \frac{P}{8}\sin 2\alpha,$$

$$\begin{aligned} \Delta R_{Ay} &= R_{Ay} - R_{Ay}^{cm} = \left( P - \frac{3}{4} P \cos^2 \alpha \right) - \frac{P}{2} (1 + \sin^2 \alpha) = P - \frac{3}{4} P \cos^2 \alpha - \\ &= \frac{P}{2} - \frac{P}{2} \sin^2 \alpha = \frac{P}{4} (2 - 3 \cos^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{P}{4} (2 \cos^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha) = -\frac{P}{4} \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

**Відповідь:**  $\Delta R_{Ax} = \frac{P}{8} \sin 2\alpha$ ,  $\Delta R_{Ay} = -\frac{P}{4} \cos^2 \alpha$ .

**Задача № 5**

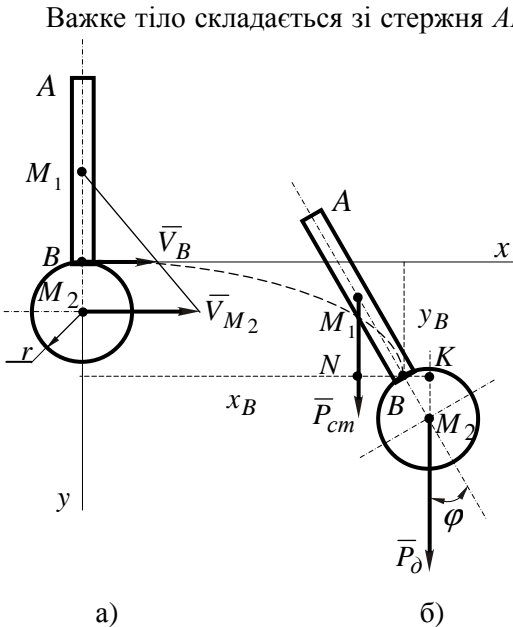


Рис.11.6

Важке тіло складається зі стержня  $AB$  довжиною  $0,8$  м і вагою  $P_{cm} = 1$  Н і прикріпленого до нього диска з радіусом  $r = 0,2$  м і вагою  $P_{\delta} = 2$  Н. У початковий момент при вертикальному положенні стержня тілу надається такий рух, що швидкість центра ваги  $M_1$  стержня дорівнює нулю, а швидкість центра ваги  $M_2$  диска дорівнює  $3,6$  м/с і спрямована по горизонталі праворуч.

**Визначити** наступний рух тіла, приймаючи до уваги тільки дію сили тяжіння.



**Розв'язок.** Спочатку визначимо положення центра мас тіла. Для цього з точкою  $B$  пов'яжемо систему координат  $xBy$  (рис.11.6,а).

Як видно з рисунка, внаслідок симетрії тіла відносно осі  $By$  центр мас має лежати на цій осі, тобто  $x_c = 0$ . Для визначення другої координати ( $y_c$ ) скористаємося відомим виразом:

$$y_c = \frac{1}{M} \sum m_x y_k.$$

Для випадку, який розглядається, ця формула приймає вигляд:

$$y_c = \frac{1}{m_{cm} + m_\partial} (m_{cm} y_{cm} + m_\partial y_\partial), \quad (1)$$

де  $m_{cm}$  - маса стержня, яка дорівнює  $\frac{P_{cm}}{g}$ ;

$m_\partial$  - маса диска, яка дорівнює  $\frac{P_\partial}{g}$ ;

$y_{cm}$  - координата центра мас (тяжіння) стержня:

$$y_{cm} = -0,5AB = -0,4 \text{ м};$$

$y_\partial$  - координата центра мас (тяжіння) диска:

$$y_\partial = r = 0,2 \text{ м}.$$

З урахуванням наведених співвідношень формула (1) набуде вигляду:

$$y_c = \frac{1}{P_{cm}/g + P_\partial/g} \left[ \frac{P_{cm}}{g} (-0,4) + \frac{P_\partial}{g} \cdot 0,2 \right],$$

або

$$y_c = \frac{-0,4P_{cm} + 0,2P_\partial}{P_{cm} + P_\partial} = \frac{-0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 2}{1 + 2} = 0.$$

Таким чином, центр мас тіла знаходиться у точці з координатами  $C(0,0)$ . Отже, центр мас тіла співпадає з точкою  $B$ , з якою ми пов'язали початок системи координат  $xBy$ .

Для визначення руху тіла, зобразимо його у проміжному положенні на траєкторії (рис.11.6,б) і покажемо діючі на тіло сили:  $\bar{P}_{cm}$  - сила тяжіння стержня і  $\bar{P}_\delta$  - сила тяжіння диска.

Приймаємо за полюс центр мас  $B$ , а за додатний напрямок кута повороту  $\varphi$  - обертання тіла проти ходу годинникової стрілки.

Диференціальні рівняння плоского руху (11.4) у даному випадку приймуть вигляд

$$M \frac{d^2 x_B}{dt^2} = \sum F_{kx}^e = 0, \quad (2)$$

$$M \frac{d^2 y_B}{dt^2} = \sum F_{ky}^e = P_{cm} + P_\delta, \quad (3)$$

$$I_B \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \sum m_B (\bar{F}_k^e) = m_B (\bar{P}_{cm}) - m_B (\bar{P}_\delta). \quad (4)$$

З рівняння (2) витікає:

$$\frac{d^2 x_B}{dt^2} = \frac{dV_{Bx}}{dt} = 0; \quad V_{Bx} = const.$$

Отже, проекція швидкості центра мас на вісь  $Bx$  зберігається сталою під час руху тіла.

Визначимо величину  $V_{Bx}$ . За умовами задачі у початковий момент часу ( $t_0 = 0$ ) швидкість центра ваги  $M_2$  диска дорівнює  $3,6 \text{ м/с}$  і спрямована по горизонталі праворуч, а швидкість центра тяжіння  $M_1$  стержня дорівнює нулю. Отже, точка  $M_1$  є миттєвим центром швидкостей. Тоді (рис. 11.6,а)

$$\frac{V_{M_2}}{V_B} = \frac{M_1 M_2}{M_1 B}; \quad \text{звідки } V_B = V_{M_2} \frac{M_1 B}{M_1 M_2},$$

або

$$V_B = 3,6 \frac{0,4}{0,6} = 2,4 \text{ м/с.}$$

Таким чином,

$$V_{Bx} = \text{const} = 2,4 \text{ м/с.}$$

Визначимо закон руху центра мас у напрямку осі  $Bx$ :

$$V_{Bx} = \frac{dx_B}{dt} = 2,4 \text{ м/с} \Rightarrow dx_B = 2,4 dt \Rightarrow \int dx_B = 2,4 \int dt.$$

$$x_B = 2,4t + C_1.$$

Оскільки при  $t = 0$   $x_{Bo} = 0$ , то  $C_1 = 0$ .

Таким чином

$$x_B = 2,4t. \quad (5)$$

Центр мас у напрямку осі  $x$  рухається рівномірно.

З диференціального рівняння (3) визначимо закон руху центра мас тіла у напрямку осі  $y$ .

Запишемо рівняння (3) у вигляді:

$$\left( \frac{P_{cm}}{g} + \frac{P_{\partial}}{g} \right) \frac{d^2 y_B}{dt^2} = P_{cm} + P_{\partial}, \quad \text{або} \quad \frac{d^2 y_B}{dt^2} = g.$$

Оскільки  $\frac{d^2 y_B}{dt^2} = \frac{dV_{By}}{dt}$ , то останнє рівняння прийме вигляд:

гляд:

$$\frac{dV_{By}}{dt} = g.$$

Розділяючи змінні і інтегруючи, знаходимо залежність швидкості центра мас тіла у напрямку осі  $y$  від часу:

$$dV_{By} = g dt; \quad \int dV_{By} = g \int dt, \quad V_{By} = gt + C_2.$$

Сталу інтегрування  $C_2$  визначаємо за початковими умовами: при  $t = 0$   $V_{By} = 0$ . Отже  $C_2 = 0$ .

Таким чином

$$V_{By} = gt,$$

тобто у напрямку осі  $y$  центр мас рухається рівноприскорено.

Знаходимо закон руху центра мас:

$$V_{By} = \frac{dy_B}{dt} = gt.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо :

$$dy_B = gt dt, \quad \int dy_B = g \int t dt, \quad y_B = \frac{gt^2}{2} + C_3.$$

Сталу інтегрування  $C_3$  визначасмо за початковими умовами: при  $t = 0$   $y_B = 0$ , звідки  $C_3 = 0$ .

Отже, закон руху центра мас тіла у напрямку осі  $y$  має вигляд:

$$y_B = \frac{gt^2}{2}. \quad (6)$$

Вирішуючи разом залежності (5) і (6), знаходимо рівняння траєкторії центра мас.

З виразу (5) витікає, що

$$t = \frac{x_B}{2,4}.$$

Підставивши значення  $t$  у залежність (6), одержимо:

$$y_B = 0,85x_B^2.$$

Таким чином, центр мас тіла (точка  $B$ ) рухається по параболі.

Визначимо закон обертального руху тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла. Для цього рівняння (4) запишемо у вигляді (рис.11.6,б):

$$I_B \frac{d\omega}{dt} = P_{cm} \cdot BN - P_D \cdot BK, \quad (7)$$

де  $BN$  - плече сили  $\bar{P}_{cm}$  відносно точки  $B$ ;

$BK$  - плече сили  $\bar{P}_D$  відносно точки  $B$ .

З рис. 11.6,б знайдемо:

$$BN = BM_1 \sin \varphi = 0,4 \sin \varphi;$$

$$BK = BM_2 \sin \varphi = 0,2 \sin \varphi.$$

Підставляючи у вираз (7) значення  $P_{cm}$ ,  $P_\partial$ ,  $BN$  і  $BK$ , одержимо:

$$I_B \frac{d\omega}{dt} = 1 \cdot 0,4 \sin \varphi - 2 \cdot 0,2 \sin \varphi = 0,$$

звідки, при  $I_B \neq 0$ , витікає:

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad \text{або} \quad \omega = \omega_0 = \text{const.}$$

Отже, при русі у площині  $xBy$ , тіло обертається навколо осі, яка проходить через центр мас, із сталою кутовою швидкістю, яка дорівнює кутовій швидкості  $\omega_0$  у початковий момент часу.

За умовами задачі, при  $t = 0$ , швидкість точки  $M_2$  дорівнювала  $3,6 \text{ м/с}$ . Оскільки точка  $M_1$  - миттєвий центр швидкостей, то

$$V_{M_2} = \omega_0 \cdot M_1 M_2,$$

звідки

$$\omega_0 = \frac{V_{M_2}}{M_1 M_2} = \frac{3,6}{0,6} = 6 \text{ рад/с.}$$

**Відповідь:**  $y_B = 0,85 x_B^2$ ,  $\omega = 6 \text{ рад/с}$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 39.2; 39.3; 39.6 [2].

## Тема 12. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА (метод кінетостатики)

### ЗАНЯТТЯ № 17

#### Зміст

- 12.1. Принцип Даламбера для матеріальної точки і механічної системи
- 12.2. Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду.
- 12.3. Контрольні запитання.
- 12.4. Порядок розв'язування задач на застосування принципу Даламбера.
- 12.5. Приклади розв'язування задач.

### 12.1. Принцип Даламбера для матеріальної точки і механічної системи

#### Принцип Даламбера для матеріальної точки

Розглянемо матеріальну точку  $M$ , яка рухається і на яку діють задана сила  $\vec{F}$  і реакція в'язі  $\vec{N}$  (рис.12.1). Рівнодіюча  $\vec{R}$

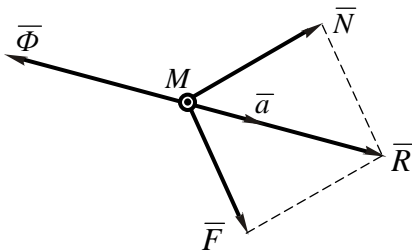


Рис.12.1

сил  $\vec{F}$  і  $\vec{N}$  зобразить-ся діагоналлю паралелограма і, згідно з основним законом динаміки, прискорення точки  $\vec{a}$  буде співпадати за напрямком з  $\vec{R}$ , отже:

$$\vec{R} = m\vec{a} .$$

Додамо до сил  $\vec{F}$  і  $\vec{N}$  ще одну силу, яка має такий самий модуль, що і  $\vec{R}$ , тобто  $m\vec{a}$ , але спрямована протилежно  $\vec{a}$ :

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a} , \quad (12.1)$$

а за модулем:

$$\Phi = ma.$$

*Сила, яка за модулем дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і спрямована протилежно прискоренню, називається силою інерції.*

Сукупність сил  $\bar{R}$  і  $\bar{\Phi}$  дорівнює нулю, тому що вони рівні за модулем і протилежні за напрямком:

$$\bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad \text{або} \quad \bar{N} + \bar{F} + \bar{\Phi} = 0. \quad (12.2)$$

*Отже, при русі матеріальної точки у кожний даний момент часу сукупність заданої сили  $\bar{F}$ , реакції в'язі  $\bar{N}$  і сили інерції  $\bar{\Phi}$  задовольняє умовам рівноваги системи збіжних сил.*

У цьому складається **принцип Даламбера** для матеріальної точки, значення якого полягає у тому, що при його застосуванні до задач динаміки рівняння руху складаються у формі добре відомих рівнянь рівноваги.

При проектуванні векторної рівності (12.1) на декартові осі координат, одержуємо вирази для проекцій сили інерції на ці осі:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_x &= -ma_x = -m \frac{d^2x}{dt^2}, \\ \Phi_y &= -ma_y = -m \frac{d^2y}{dt^2}, \\ \Phi_z &= -ma_z = -m \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Проектуючи ту ж саму векторну рівність на природні осі, одержимо проекції сили інерції на дотичну, нормаль і бінормаль до траєкторії:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_\tau &= -ma_\tau = -m \frac{dV}{dt}, \\ \Phi_n &= -ma_n = -m \frac{V^2}{\rho}, \\ \Phi_b &= -ma_b = 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Складові сили інерції  $\bar{\Phi}_\tau$  і  $\bar{\Phi}_n$ , які спрямовані по дотичній і головній нормалі, називаються, відповідно, **дотичною** (або **тангенціальною**) і **нормальною** (або **відцентровою**) силами інерції.

### Принцип Даламбера для механічної системи

Розглянемо невільну механічну систему, яка складається з  $n$  матеріальних точок. До кожної з точок  $M_k$  цієї системи застосуємо принцип Даламбера:

$$\bar{F}_k + \bar{N}_k + \bar{\Phi}_k = 0, \quad (12.5)$$

де  $k=1,2,3,\dots,n$  - поточний номер точки;

$\bar{F}_k$  - рівнодіюча заданих сил, які прикладені до точки  $M_k$ ;

$\bar{N}_k$  - рівнодіюча реакцій в'язей, які прикладені до цієї точки;

$\bar{\Phi}_k$  - сила інерції точки  $M_k$ .

Рівняння (12.5) показує, що у будь-який момент часу *геометрична сума рівнодіючих заданих сил, реакцій в'язей і сили інерції для кожної точки матеріальної невільної механічної системи дорівнює нулю.*

Це положення називається **принципом Даламбера для невільної механічної системи**.

Складемо всі  $n$  рівнянь (12.5):

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0, \quad (12.6)$$

де  $\sum \bar{F}_k = \bar{F}^*$  - головний вектор заданих сил;



$\sum \bar{N}_k = \bar{N}^*$  - головний вектор реакцій в'язей;

$\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}^*$  - головний вектор сил інерції точок системи.

Тоді:

$$\bar{F}^* + \bar{N}^* + \bar{\Phi}^* = 0. \quad (12.7)$$

Отже, у будь-який момент часу для усякої невіЛЬНОЇ механічної системи геометрична сума головних векторів заданих сил, реакцій в'язей і сил інерції матеріальних точок системи дорівнює нулю.

Проведемо із довільного нерухомого центра  $O$  у кожному точку системи  $M_k$  радіуси-вектори  $\bar{r}_k$ . Помножимо векторно радіус-вектор  $\bar{r}_k$  кожної точки  $M_k$  на суму векторів лівої частини рівності (12.5):

$$(\bar{r}_k \times \bar{F}_k) + (\bar{r}_k \times \bar{N}_k) + (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = 0.$$

Складемо всі  $n$  одержаних рівнянь:

$$\sum (\bar{r}_k \times \bar{F}_k) + \sum (\bar{r}_k \times \bar{N}_k) + \sum (\bar{r}_k \times \bar{\Phi}_k) = 0, \quad (12.8)$$

або

$$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k) + \sum \bar{m}_0 (\bar{N}_k) + \sum \bar{m}_0 (\bar{\Phi}_k) = 0. \quad (12.9)$$

Введемо позначення:

$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k) = \bar{M}_0^F$  - головний момент заданих сил відносно центра  $O$ ;

$\sum \bar{m}_0 (\bar{N}_k) = \bar{M}_0^N$  - головний момент реакцій в'язей відносно центра  $O$ ;

$\sum \bar{m}_0 (\bar{\Phi}_k) = \bar{M}_0^\Phi$  - головний момент сил інерції точок системи відносно центра  $O$ .

Тоді:

$$\overline{M}_0^F + \overline{M}_0^N + \overline{M}_0^\Phi = 0. \quad (12.10)$$

Із рівняння (12.10) випливає: у кожний момент часу для будь-якої невільної механічної системи геометрична сума головних моментів заданих сил, реакцій в'язей і сил інерції матеріальних точок системи відносно довільного нерухомого центра дорівнює нулю.

Якщо розглянути векторні рівняння (12.6) і (12.9) як умови рівноваги довільної просторової системи сил, що прикладені до твердого тіла, то вони еквівалентні шістьом алгебраїчним рівнянням статки, а саме:

1) трьом умовам рівноваги в проекціях сил на осі  $Oxuz$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} + \sum N_{kx} + \sum \Phi_{kx} &= 0, \\ \sum F_{ky} + \sum N_{ky} + \sum \Phi_{ky} &= 0, \\ \sum F_{kz} + \sum N_{kz} + \sum \Phi_{kz} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.11)$$

2) трьом умовам рівноваги моментів сил відносно осей  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ :

$$\left. \begin{aligned} \sum M_x(\overline{F}_k) + \sum M_x(\overline{N}_k) + \sum M_x(\overline{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum M_y(\overline{F}_k) + \sum M_y(\overline{N}_k) + \sum M_y(\overline{\Phi}_k) &= 0, \\ \sum M_z(\overline{F}_k) + \sum M_z(\overline{N}_k) + \sum M_z(\overline{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.12)$$

## 12.2. Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду

Як відомо, систему сил можна привести до сили, яка дорівнює головному вектору і до пари сил з моментом, який дорівнює головному моменту усіх сил системи.

Приведення сил інерції точок твердого тіла дає наступні результати.

1. При поступальному русі тіла сили інерції приводяться до рівнодіючої, яка прикладена у центрі мас  $C$  тіла. Рівнодіюча  $\overline{\Phi}^*$  дорівнює за модулем добутку маси тіла на прискорення центра мас і спрямована протилежно цьому прискоренню:

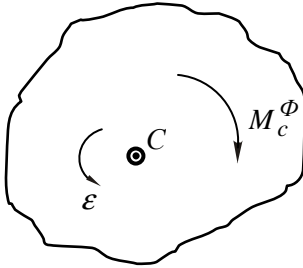


Рис.12.2

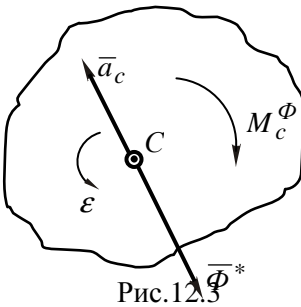


Рис.12.3

мент  $M_c^\Phi$  :

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_c.$$

2. При обертанні тіла навколо осі, яка проходить через центр мас тіла, сили інерції приводяться до однієї пари, яка лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання тіла і має момент (рис.12.2):

$$M_c^\Phi = -I_c \varepsilon,$$

де  $\varepsilon$  – кутове прискорення тіла,

$I_c$  – момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через центр мас.

Напрямок пари сил є протилежним напрямку кутового прискорення  $\varepsilon$ .

3. При плоскому русі сили інерції приводяться до результуючої сили, яка дорівнює  $\bar{\Phi}^*$  і прикладена у центрі мас  $C$  тіла, і до пари сил, яка лежить у площині фігури і має мо-

$$\bar{\Phi}^* = -M\bar{a}_c,$$

$$M_c^\Phi = -I_c \varepsilon.$$

### 12.3. Контрольні запитання

Як визначається за величиною і напрямком сила інерції матеріальної точки?

У чому полягає суть принципу Даламбера для матеріальної точки?

У чому полягає суть принципу Даламбера для механічної системи?

До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його поступальному русі?

До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при його обертанні навколо нерухомої осі, яка проходить через центр мас тіла?

До чого приводяться сили інерції точок твердого тіла при плоскому русі?

### 12.4. Порядок розв'язування задач на застосування принципу Даламбера

Розв'язування задач за допомогою принципу Даламбера (методу кінестатики) рекомендується виконувати у такій послідовності:

Зобразити на рисунку активні сили, які прикладені до кожної матеріальної точки;

Зобразити реакції в'язей;

Додати до активних сил і реакцій в'язей сили інерції матеріальних точок системи;

Вибрати систему координат;

Скласти рівняння рівноваги усіх сил;

Розв'язавши складену систему рівнянь, визначити величини, які шукаються.

### 12.5. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

Автомобіль вагою  $Q = 10 \text{ кН}$  рухається по опуклому мосту зі швидкістю  $V = 10 \text{ м/с}$ , радіус кривини моста  $\rho = 50 \text{ м}$ .

**Визначити** тиск автомобіля на міст у момент, коли він проїжджає його середину (рис.12.4).

**Розв'язок.** На автомобіль діють активна сила тяжіння  $\bar{Q}$  і реакція моста  $\bar{R}$ , яка дорівнює за величиною тиску  $\bar{N}$  автомобіля на міст.

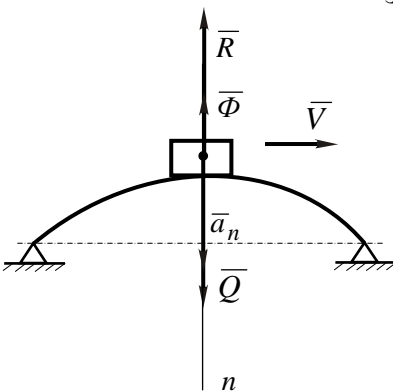


Рис.12.4

Ці сили не зрівноважують одна одну, тому що автомобіль рухається по криволінійній траєкторії з нормальним прискоренням  $a_n = \frac{V^2}{\rho}$ , яке спрямоване до центра кривизни. Якщо до сил  $\bar{Q}$  і  $\bar{R}$  додати силу інерції  $\bar{\Phi}$ , яка спрямована у бік, протилежний напрямку нормального прискорення  $\bar{a}_n$  і яка дорівнює за величиною

$$\Phi = ma_n = \frac{Q}{g} \frac{V^2}{\rho} = \frac{10}{9,81} \cdot \frac{10^2}{50} = 2,04 \text{ кН},$$

то система сил  $\bar{Q}$ ,  $\bar{R}$  і  $\bar{\Phi}$  буде знаходитися у рівновазі, отже:

$$\bar{Q} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0.$$

Оскільки всі сили діють вздовж однієї прямої, яка співпадає з нормаллю  $n$ , то спроектуємо їх на нормаль  $n$ :

$$Q - \Phi - R = 0.$$

Відкіля

$$R = Q - \Phi = 10 - 2,04 = 7,96 \text{ кН}.$$

Тиск  $N$  автомобіля на міст дорівнює за величиною  $R$ :

$$N = R = 7,96 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $N = 7,96 \text{ кН}$ .

## Задача № 2

Вантаж  $M$  вагою  $1 \text{ Н}$ , який підвішений на нитці довжиною  $30 \text{ см}$  у нерухомій точці  $O$ , уявляє собою конічний маятник, тобто описує коло у горизонтальній площині, при цьому нитка складає з вертикаллю кут  $\alpha = 60^\circ$  (рис.12.5).

**Визначити** швидкість вантажу  $V$  і натяг нитки  $T$ .

**Розв'язок.** На вантаж  $M$  діють сила тяжіння  $\bar{G}$  і реакція нитки  $\bar{T}$ . Ці сили не зрівноважуються, тому що вантаж рухається, і рух цей відбувається по криволінійній траєкторії кола з радіусом  $AM$  і з нормальним прискоренням  $a_n$ , яке дорівнює

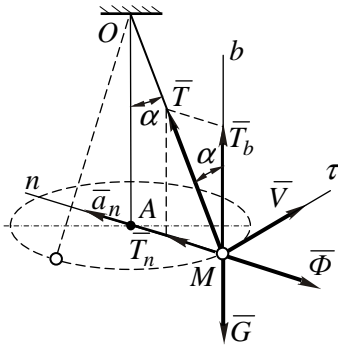


Рис.12.5

$$a_n = \frac{V^2}{\rho} = \frac{V^2}{AM}.$$

Підрахуємо силу інерції вантажу. Сила інерції  $\bar{\Phi}$  спрямована по радіусу  $AM$  у бік, протилежний  $\bar{a}_n$ , і дорівнює за модулем

$$\Phi = ma_n = \frac{G}{g} \frac{V^2}{OM \sin 60^0};$$

$$\Phi = \frac{1}{9,81} \frac{V^2}{0,3 \cdot 0,866} = 0,39V^2.$$

Пов'яжемо з точкою  $M$  природну систему координат  $M\tau bn$ : вісь  $M\tau$  спрямуємо за дотичною у напрямку вектора швидкості  $\bar{V}$ , вісь  $Mn$  за нормаллю і вісь  $Mb$  перпендикулярно до площини, у якій лежать осі  $M\tau$  і  $Mn$ .

Згідно з принципом Даламбера геометрична сума сил  $\bar{G}$ ,  $\bar{T}$  і  $\bar{\Phi}$  дорівнює нулю:

$$\bar{G} + \bar{T} + \bar{\Phi} = 0.$$

Спроєкуємо цю векторну рівність на осі вибраної системи координат:

$$\text{на вісь } Mn: \quad T \cdot \sin \alpha - \Phi = 0,$$

$$\text{на вісь } Mb: \quad T \cdot \cos \alpha - G = 0,$$

$$\text{на вісь } M\tau: \quad 0 \equiv 0.$$

Із другого рівняння визначимо натяг нитки  $T$ :

$$T = \frac{G}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos 60^0} = 2H.$$

Із першого рівняння знаходимо швидкість  $V$  вантажу:

$$T \cdot \sin \alpha = \Phi = 0,39V^2,$$

$$V = \sqrt{\frac{T \sin \alpha}{0,39}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \sin 60^\circ}{0,39}} = 2,1 \text{ м/с.}$$

**Відповідь:**  $T = 2 \text{ Н}$ ,  $V = 2,1 \text{ м/с}$ .

### Задача № 3

**Визначити** опорні реакції під'ятника  $A$  і підшипника  $B$  поворотного крана (рис.12.6) при підніманні вантажу  $E$  вагою  $30 \text{ кН}$  з прискоренням  $\frac{1}{3}g$ . Вага крана дорівнює  $20 \text{ кН}$  і прикладена у його центрі ваги  $C$ . Вага візка  $D$  дорівнює  $5 \text{ кН}$ . Кран і візок нерухомі. Розміри показані на рисунку.

**Розв'язок.** На кран діють сили тяжіння крана  $\bar{P}_K$ , візка  $\bar{P}_D$  і вантажу  $\bar{P}_E$ , а також реакції опор:  $\bar{R}_{Ax}$ ,  $\bar{R}_{Ay}$ ,  $\bar{R}_{Bx}$ .

Для одержання зрівноваженої системи сил додамо силу інерції вантажу  $E$ , який піднімається з прискоренням.

Сила інерції  $\bar{\Phi}_E$  спрямована вертикально вниз і за модулем дорівнює:

$$\begin{aligned} \Phi_E &= m_E a = \frac{P_E}{g} \frac{1}{3} g = \\ &= \frac{P_E}{3} = 10 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Перейдемо, згідно з методом кінестатики, до складання рівнянь рівноваги крана за наявності активних сил, реакцій в'язей і сили інерції. Рівняння рівноваги мають вигляд:

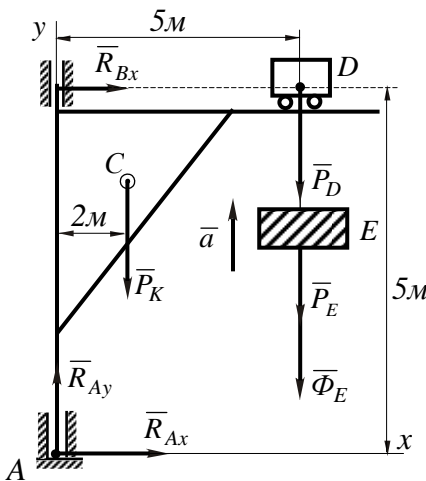


Рис. 12.6

$$\sum F_{kx} = R_{Ax} + R_{Bx} = 0,$$

$$\sum F_{ky} = R_{Ay} - P_D - P_E - P_K - \Phi_E = 0,$$

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = -R_{Bx} \cdot 5 - P_K \cdot 2 - P_D \cdot 5 - P_E \cdot 5 - \Phi_E \cdot 5 = 0.$$

Розв'язуючи ці рівняння, знаходимо невідомі величини:

$$-5R_{Bx} - 2P_K - 5(P_D + P_E + \Phi_E) = 0,$$

$$R_{Bx} = \frac{-20 \cdot 2 - 5(5 + 30 + 10)}{5} = -53 \text{ кН}.$$

$$R_{Ay} = P_D + P_E + P_K + \Phi_E = 5 + 30 + 20 + 10 = 65 \text{ кН},$$

$$R_{Ax} = -R_{Bx} = -(-53) = 53 \text{ кН}.$$

**Відповідь:**  $R_{Ax} = 53 \text{ кН}$ ,  $R_{Ay} = 65 \text{ кН}$ ,  $R_{Bx} = -53 \text{ кН}$ .

#### Задача № 4

Вантаж  $C$  вагою  $G = 1 \text{ кН}$  піднімається за допомогою лебідки вагою  $Q = 0,5 \text{ кН}$  з постійним прискоренням  $a = 2 \text{ м/с}^2$  (рис.12.7). Лебідка встановлена на однорідній горизонтальній балці  $AB$  довжиною 2 метри і вагою  $P = 4 \text{ кН}$ , яка затиснена кінцем  $A$  у стіну. Відстань від осі барабана лебідки до стіни дорівнює  $l = 1,5 \text{ м}$ . Піднімання вантажу спричинюється зовнішньою парою сил  $M$ , яка діє на барабан лебідки.

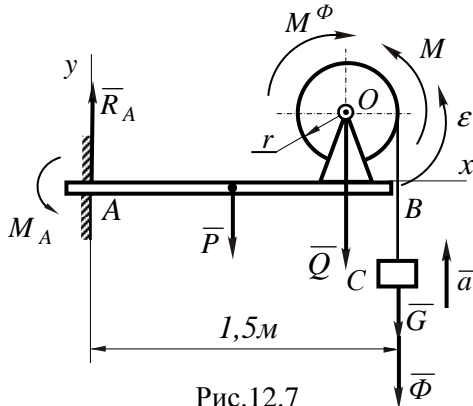


Рис.12.7



**Визначити** реакції защемлення.

**Розв'язок.** На систему діють зовнішні (активні) сили тяжіння: вантажу  $\bar{G}$ , лебідки  $\bar{Q}$ , балки  $\bar{P}$ ; пара сил з моментом  $M$ , а також реакції  $-\bar{R}_A$  у точці  $A$  і пара сил з моментом  $M_A$  (момент защемлення).

Дана система сил не є зрівноваженою.

Згідно з принципом Даламбера, якщо до діючих активних сил і реакцій в'язей додати сили інерції, то нова система сил буде зрівноваженою і до неї можна застосувати рівняння рівноваги для визначення опорних реакцій.

Підрахуємо сили інерції. Сила інерції вантажу  $C$  спрямована протилежно прискоренню  $\bar{a}$  і дорівнює за модулем:

$$\Phi = ma = \frac{G}{g} \cdot a = \frac{1}{9,81} \cdot 2 = 0,204 \text{ кН}.$$

Сили інерції точок барабана лебідки, який обертається, зводяться до пари сил з моментом  $M^\Phi$ , величина якого дорівнює

$$M^\Phi = I_0 \cdot \varepsilon,$$

де  $I_0$  - момент інерції барабана відносно його осі обертання;  
 $\varepsilon$  - кутове прискорення барабана.

Кутове прискорення барабана  $\varepsilon$  можна визначити, використовуючи рівність дотичного прискорення точок обода барабана та прискорення вантажу  $C$ :

$$a_\tau = \varepsilon r = a, \quad \varepsilon = \frac{a}{r}.$$

Отже,

$$M^\Phi = I_0 \cdot \frac{a}{r}.$$

Напрямок моменту  $M^\Phi$  - протилежний напрямку кутового прискорення (за годинниковою стрілкою).

Для визначення реакцій опори  $A$  складемо рівняння рівноваги плоскої системи паралельних щодо осі  $y$  сил, тобто врахуємо, що їх проекції на вісь  $x$  тотожно дорівнюють нулю:

$$\sum F_{ky} = R_A - P - Q - G - \Phi = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \sum m_A(\bar{F}_k) = & M_A - P \frac{AB}{2} - Q \cdot 1,5 - \\ & - (G + \Phi)(1,5 + r) + M - M^\Phi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

З першого рівняння знаходимо реакцію  $R_A$ :

$$R_A = P + Q + G + \Phi = 4 + 0,5 + 1 + 0,204 = 5,7 \text{ кН}.$$

З другого рівняння визначаємо момент защемлення  $M_A$ :

$$\begin{aligned} M_A = & P \frac{AB}{2} + Q \cdot 1,5 + (G + \Phi)(1,5 + r) - M + M^\Phi = \\ = & 4 \cdot 1 + 0,5 \cdot 1,5 + 1(1,5 + r) + 0,204(1,5 + r) - M + I_0 \frac{a}{r} = \\ = & 6,56 + 1,204r - M + I_0 \frac{a}{r}. \end{aligned} \quad (3)$$

Невідомий момент пари сил  $M$  можна визначити, якщо скласти рівняння рівності моментів сил, які прикладені до барабана:

$$M - M^\Phi - G \cdot r - \Phi \cdot r = 0,$$

або

$$M = M^\Phi + G \cdot r + \Phi \cdot r = I_0 \frac{a}{r} + 1,204r.$$

Підставляючи значення  $M$  у рівняння (3), одержимо:

$$M_A = 6,56 + 1,204r - I_0 \frac{a}{r} - 1,204r + I_0 \frac{a}{r},$$

$$M_A = 6,56 \text{ кНм}.$$

**Відповідь:**  $R_A = 5,7 \text{ кН}$ ,  $M_A = 6,56 \text{ кНм}$ .

## Задача № 5

**Визначити** рівняння вимушених коливань електродвигуна вагою  $G=15 \text{ кН}$ , розміщеного посередині балки, статичний прогин якої під дією ваги дорівнює  $0,88 \text{ см}$ , якщо ці коливання спричиняються рівномірним обертанням вала електродвигуна, на якому закріплено вантаж вагою  $G_1=4 \text{ Н}$  на відстані  $r=5 \text{ см}$  від осі обертання і кутова швидкість вала  $\omega=25 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ .

**Розв'язок.** Під час обертання вала електродвигуна вантаж вагою  $G_1$  буде розвивати відцентрову силу інерції  $\bar{\Phi}$  (рис.12.8). Ця сила спрямована по радіусу від центра обертання  $O$ .

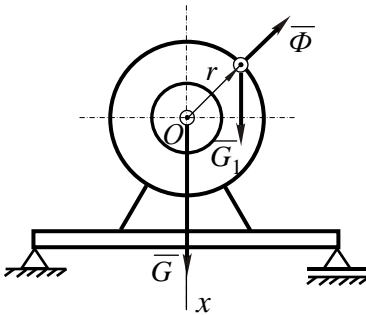


Рис.12.8

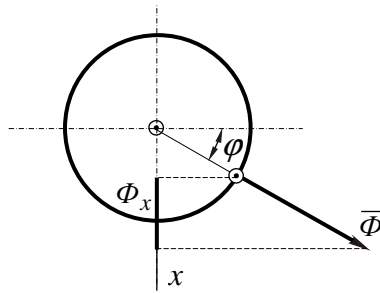


Рис.12.9

За модулем

$$\Phi = m_1 r \omega^2.$$

Проекція сили  $\bar{\Phi}$  на вісь  $x$  змінюється за гармонічним законом (рис.12.9):

$$\Phi_x = \Phi \sin \varphi = \Phi \sin \omega t.$$

Таким чином, у вертикальному напрямку на тіло діє вимушена сила, яка дорівнює

$$\Phi_x = m_1 r \omega^2 \sin \omega t. \quad (1)$$

і під дією якої балка буде здійснювати вимушені коливання за законом:

$$x_2 = A \sin(pt), \quad (2)$$

де  $A$  - амплітуда вимушених коливань;  
 $p$  - частота вимушених коливань, яка дорівнює частоті примушуючої сили, у даному випадку  $p = \omega$ .

Обчислимо частоту власних коливань  $k$  :

$$k = \sqrt{\frac{g}{\delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{981}{0,88}} = 33,4 \text{ c}^{-1}.$$

Оскільки  $p = \omega = 25 \text{ c}^{-1}$ , а  $k = 33,4 \text{ c}^{-1}$ , то маємо вимушені коливання малої частоти і рівняння (2) має вигляд:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin \omega t,$$

де

$$h = \frac{H}{m} = \frac{\Phi_x}{m} = \frac{m_1 r \omega^2}{m} = \frac{G_1 \cdot r \omega^2}{G},$$

$$h = \frac{G_1 r \omega^2}{G} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 25^2}{15000} = 0,833 \text{ см/с}^2,$$

$$k^2 - p^2 = 33,4^2 - 25^2 = 490,6 \text{ c}^{-2}.$$

Отже,

$$x_2 = \frac{0,833}{490,6} \sin 25t = 0,0017 \sin 25t, \text{ см.}$$

**Відповідь:**  $x_2 = 0,0017 \sin 25t, \text{ см.}$

### Задача № 6

Порожниста півкуля з радіусом  $R = 0,5 \text{ м}$  рівномірно обертається навколо своєї вертикальної осі симетрії з кутовою швидкістю  $n = 60 \text{ об/хв}$ . У півкулю кидають кульку вагою  $P = 2 \text{ Н}$  (рис.12.10).

**Визначити** висоту  $h$ , при якій кулька знаходиться у рівновазі відносно півкулі, а також нормальну реакцію з боку півкулі на кульку у цьому положенні, якщо початок координат обрано у точці  $O$ .

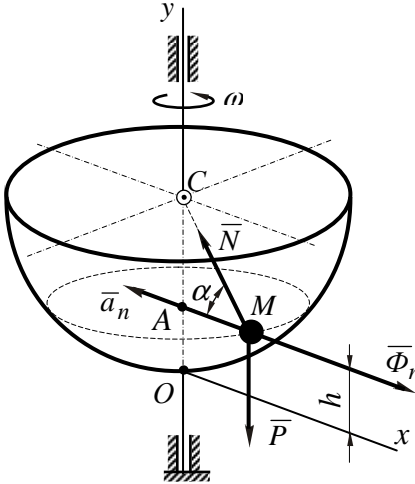


Рис.12.10

**Розв'язок.** Зобразимо кульку  $M$  у довільному положенні, яке визначається кутом  $\alpha$  на внутрішній поверхні порожнистої кулі і покажемо сили, які діють на неї:

$\bar{P}$  - сила тяжіння;

$\bar{N}$  - нормальна реакція поверхні півкулі.

Застосовуючи принцип Даламбера, прикладемо до кульки  $M$  її силу інерції  $\bar{\Phi}$ . Оскільки за умовою задачі півкуля обертається рівномірно, то сила інерції кульки

буде складатися тільки із відцентрової (нормальної) сили інерції  $\bar{\Phi}_n$ , яка направлена перпендикулярно до осі обертання півкулі (рис.12.10).

Тоді, за принципом Даламбера, дана система сил задовільняє умовам рівноваги системи збіжних сил:

$$\bar{P} + \bar{N} + \bar{\Phi}_n = 0. \quad (1)$$

Розташовуючи, як показано на рисунку, координатні осі  $Ox$  і  $Oy$ , спроектуємо векторне рівняння (1) на вибрані осі:

$$\sum F_{kx} = \Phi_n - N \cos \alpha = 0, \quad (2)$$

$$\sum F_{ky} = N \sin \alpha - P = 0.$$

З першого рівняння системи (2) знаходимо нормальну реакцію  $N$ :

$$N = \frac{\Phi_n}{\cos \alpha}, \quad (3)$$

де  $\Phi_n$  - відцентрова сила інерції, яка дорівнює:

$$\Phi_n = ma_n = m\omega^2 \cdot AM = m\omega^2 CM \cos \alpha = m\omega^2 R \cos \alpha .$$

Підставляючи одержаний вираз для  $\Phi_n$  у рівняння (3), будемо мати:

$$N = \frac{m\omega^2 R \cos \alpha}{\cos \alpha} = m\omega^2 R .$$

Оскільки:

$$\omega^2 = \left( \frac{\pi n}{30} \right)^2 = \left( \frac{3,14 \cdot 60}{30} \right)^2 = 39,4 \frac{1}{c^2} ,$$

$$m = \frac{P}{g} = \frac{2}{9,81} \approx 0,2 \text{ кг} ,$$

$$R = 0,5 \text{ м} ,$$

то

$$N = 0,2 \cdot 39,4 \cdot 0,5 = 3,94 \text{ Н} .$$

З рис.12.10 видно , що висота  $h$  дорівнює

$$h = CO - CA = R - R \sin \alpha = R(1 - \sin \alpha) , \quad (4)$$

де  $CO = R$ ,  $CA = R \sin \alpha$  .

Таким чином, визначивши  $\sin \alpha$ , можна підрахувати значення висоти  $h$  .

З другого рівняння системи (2) знаходимо величину  $\sin \alpha$  :

$$\sin \alpha = \frac{P}{N} = \frac{2}{3,94} \approx 0,508 .$$

Підставивши значення  $\sin \alpha$  у рівняння (4), одержимо величину  $h$  :

$$h = R(1 - \sin \alpha) = 0,5(1 - 0,508) = 0,246 \text{ м} .$$

**Відповідь:**  $N = 3,94 \text{ Н}$  ,  $h = 0,246 \text{ м}$  .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 41.8; 41.14; 41.22; 41.24 [2] .

## Тема 13. ПРИНЦИП МОЖЛИВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ

### ЗАНЯТТЯ № 18

#### Зміст

- 13.1. Класифікація в'язей, можливі переміщення.
- 13.2. Принцип можливих переміщень.
- 13.3. Контрольні запитання.
- 13.4. Порядок розв'язування задач за допомогою принципу можливих переміщень.
- 13.5. Приклади розв'язування задач.

#### 13.1. Класифікація в'язей, можливі переміщення

**В'язі** – це тверді тіла, які обмежують рух точок механічної системи.

При відсутності в'язей всі три координати, які визначають положення точки у просторі, незалежні одна від одної і можуть мати будь-які значення.

При наявності в'язей координати точки, яка рухається, не можуть приймати будь-які значення, вони пов'язані певними співвідношеннями – так званими *рівняннями в'язей* - і координати залежать одна від одної.

Якщо точка рухається по заданій поверхні, яка з плином часу не змінює своєї форми і положення у просторі, то рівняння в'язі

$$f(x, y, z) = 0.$$

В'язі, рівняння яких не залежать від часу, називаються *стаціонарними*.

В'язі, в рівняннях яких присутній час, називаються *нестационарними*.

Реакцію в'язі, за правилом, розкладають на дві складові: одну, *силу тертя*  $\vec{F}_{\text{тр}}$ , *дотичну* до траєкторії і спрямовану у бік, протилежний векторові відносної швидкості; другу, *нормальну* реакцію  $\vec{N}$ , *перпендикулярну* до першої. При цьому:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot N,$$

де  $f$  - коефіцієнт тертя ковзання під час руху.

*Голономними* називаються в'язі, які накладають обмеження тільки на положення точок механічної системи і у рівняння яких не входять похідні за часом від координат точок (тобто проекції швидкостей точок).

Якщо на задану механічну систему накладені в'язі, то для точок системи дозволяються не будь-які, а тільки деякі переміщення, які обумовлені рівняннями в'язей (тобто ті, які дозволяються в'язями).

Для *невільної* механічної системи вводиться поняття *можливого або віртуального переміщення*, яке суттєво відрізняється від дійсного переміщення системи:

*Можливими переміщеннями механічної системи називаються будь-які уявні нескінченно малі переміщення її точок, які допускають у даний момент накладені на систему в'язі.*

Таким чином, можливі переміщення точок системи повинні задовольняти двом умовам:

Вони повинні бути нескінченно малими, щоб механічна система не перейшла в положення, коли рівняння рівноваги системи будуть відрізнятися від первісних.

Вони повинні бути такими, щоб зберігалися всі накладені на систему в'язі, бо інакше зміниться вид та функціональне призначення механічної системи (система стане іншою).

Можливі переміщення позначаються буквою  $\delta$ , а проекції на координатні осі -  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , на відміну від дійсних переміщень  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ .

Можливі переміщення точок механічної системи розглядають як величини першого порядку малості, нехтуючи при цьому величинами більш високих порядків малості. Тому криволінійні переміщення точок заміняють прямолінійним відрізком,



який відкладений по дотичній до траєкторій точок, та позначають  $\delta\bar{S}$ .

Так, наприклад, можливим переміщенням важеля  $AB$  (рис.13.1) є його поворот на нескінченно малий кут  $\delta\varphi$  навколо

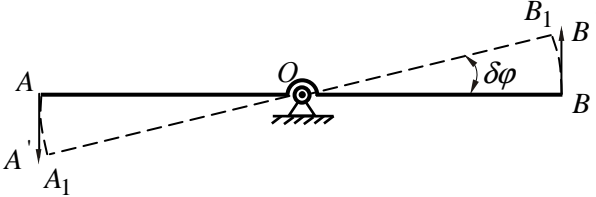


Рис.13.1

точки  $O$ . При цьому повороті точки  $A$  та  $B$  повинні переміститися по дугах кіл  $AA_1$  та  $BB_1$ . З точністю до величини першого порядку малості ці переміщення можна замінити можливими переміщеннями  $\delta\bar{S}_A = \overline{AA'}$  і  $\delta\bar{S}_B = \overline{BB'}$  у вигляді прямолінійних відрізків, які відкладені вздовж дотичних до траєкторій точок (перпендикулярно до  $AB$ ) та які за величиною дорівнюють:

$$\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi; \quad \delta S_B = OB \cdot \delta\varphi.$$

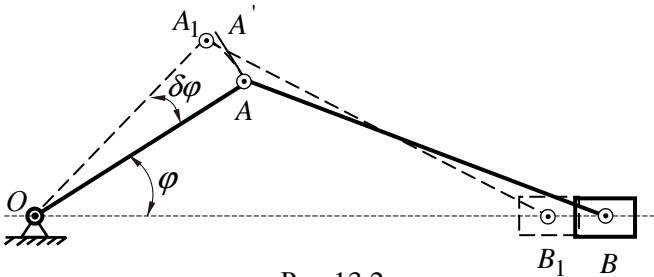


Рис.13.2

Можливим переміщенням кривошипно-повзунного механізму (рис.13.2) є переміщення, яке відповідає повороту кривошипу  $OA$  на нескінченно малий кут  $\delta\varphi$  навколо осі валу. Мож-

ливе переміщення  $\delta S_A$  пальця кривошипу  $A$  представляє собою відрізок дотичної  $AA'$  до дуги кола з центром у точці  $O$ , який дорівнює за величиною  $\delta S_A = OA \cdot \delta\varphi$ . Можливим переміщенням  $\delta S_B$  повзуна  $B$  є нескінченно малий відрізок  $BB_1$  прямолінійної траскторії точки  $B$ .

Можливі переміщення точки або системи не залежать від діючих на точку або систему сил, а залежать тільки від характеру накладених на точку або систему в'язей.

### 13.2. Принцип можливих переміщень

Важлива особливість принципу можливих переміщень полягає в тому, що при його застосуванні *ефект дії в'язей урахується не шляхом введення невідомих наперед реакцій, а шляхом розглядання можливих переміщень*, які можна здійснити точками системи, якщо вивести її з положення, яке вона займає.

Якщо до точки прикладена сила  $\vec{F}$ , то, урахувавши можливі переміщення точки з даного її положення, можна обчислити і величину елементарної роботи на тому чи іншому можливому переміщенні. Ця робота і є можливою елементарною роботою сили.

*Можлива елементарна робота сили виражається скалярним добутком вектора сили  $\vec{F}$  на вектор можливого переміщення, у даному випадку на вектор  $\delta\vec{S}$ :*

$$\delta A = \vec{F} \cdot \delta\vec{S} = F \cdot \delta S \cos(\vec{F}, \delta\vec{S}), \quad (13.1)$$

або у координатній формі:

$$\delta A = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z. \quad (13.2)$$

У зв'язку з поняттям можливої елементарної роботи треба ввести поняття ідеальної в'язі, а саме:

*Ідеальною називається така в'язь, можлива робота реакції якої на кожному можливому переміщенні дорівнює нулю.*

Принцип можливих переміщень дає можливість визначити умови рівноваги точки або матеріальної системи, які знаходяться під дією заданої системи активних сил і при заданих в'язях.

Для системи з утримуючими ідеальними в'язями принцип можливих переміщень формулюється так:

*для рівноваги матеріальної системи, яка знаходиться під дією активних сил і на яку накладено ідеальні в'язі, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи із її положення рівноваги.*

$$\sum \delta A_k^a = \sum (\bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{S}_k) = 0. \quad (13.3)$$

Це рівняння називається **загальним рівнянням статички**, тому що воно може бути застосовано до усіх матеріальних систем незалежно від їх структури. В аналітичній формі загальне рівняння статички (13.3) має вигляд:

$$\sum \delta A_k^a = \sum (\bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{S}_k) = \sum (F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k) = 0, \quad (13.4)$$

де  $F_k^a$  - рівнодіюча активних сил, які прикладені до „ $k$ ”-тої точки системи;

$\delta \bar{S}_k$  - можливе переміщення „ $k$ ”-тої точки системи;

$F_{kx}^a, F_{ky}^a, F_{kz}^a$  - проекції рівнодіючих активних сил на осі декартової системи координат,

$\delta x_k, \delta y_k, \delta z_k$  - преції елементарних переміщень точок прикладення активних сил на осі декартової системи координат.

### 13.3. Контрольні запитання

Як математично виражається наявність в'язей, що накладені на систему?

Які в'язі називаються голономними?

Які в'язі називаються утримуючими?

Які в'язі називаються стаціонарними, нестаціонарними?

Що називається можливими переміщеннями точки і механічної системи?

У чому полягає різниця між можливим переміщенням точки і дійсним?

Що називається можливою роботою сили?

Які в'язі називаються ідеальними?

Як формулюється принцип можливих переміщень для системи?

### 13.4. Порядок розв'язування задач за допомогою принципу можливих переміщень

Зобразити на рисунку активні сили;

Якщо є неідеальні в'язі, додати відповідні реакції в'язей (наприклад, сили тертя);

Надати можливе переміщення одній з точок системи, для чого, якщо система нерухома, надати системі один ступінь вільності.

Виразити можливі переміщення точок прикладання сил в залежності від заданого можливого переміщення;

Обчислити суму робіт усіх сил на відповідних можливих переміщеннях їх точок прикладання і прирівняти цю суму до нуля;

Розв'язавши складене рівняння рівноваги, визначити шукану величину.

### 13.5. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

На гладенькій похилій площині (рис.13.3) лежить вантаж вагою  $P=200\text{ Н}$ , який утримується нерозтяжною ниткою, що перекинута через блок  $A$  і має на кінці вантаж вагою  $Q=100\text{ Н}$ .

**Визначити**, при якому куті  $\beta$  нахилу площини вантажі будуть у рівновазі.

**Розв'язок.** У якості об'єкту дослідження розглянемо механічну систему, яка складається з вантажів  $P$  та  $Q$ , що поєднані

між собою нерозтяжною ниткою. На систему діють активні сили тяжіння  $\bar{P}$  та  $\bar{Q}$ . Усі в'язі, що накладені на систему, є ідеальними, тому відповідні реакції на рисунку не вказуємо.

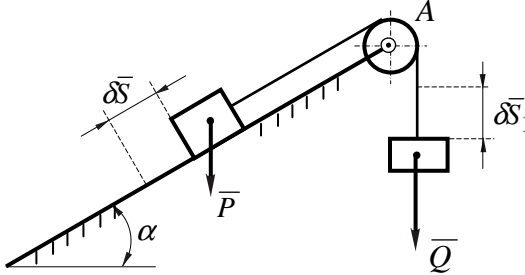


Рис.13.3

Дана механічна система володіє одним ступенем вільності. Дано вантажу  $P$  можливе переміщення  $\delta S$  вздовж похилої площини вниз, тоді вантаж  $Q$  одержить переміщення  $\delta S_1$  по вертикалі вгору, причому ці переміщення

однакові, тобто,

$$\delta S = \delta S_1.$$

Складемо загальне рівняння статки у формі (13.3), яке для даного випадку має вигляд:

$$\sum \delta A_{\kappa}^a = P \cdot \delta S \cdot \cos(\bar{P}, \hat{\delta \bar{S}}) + Q \cdot \delta S_1 \cos(\bar{Q}, \hat{\delta \bar{S}}_1) = 0,$$

або

$$\sum \delta A_{\kappa}^a = P \cdot \delta S \cdot \cos(90^\circ - \alpha) + Q \cdot \delta S_1 \cos 180^\circ = 0,$$

$$\sum \delta A_{\kappa}^a = P \cdot \delta S \cdot \sin \alpha - Q \cdot \delta S_1 = 0.$$

Оскільки  $\delta S = \delta S_1$ , то

$$P \cdot \sin \alpha - Q = 0,$$

звідки

$$\sin \alpha = \frac{Q}{P}, \quad \alpha = \arcsin \frac{Q}{P}.$$

Підставляючи у останнє рівняння числові значення  $P$  та  $Q$ , отримаємо:

$$\alpha = \arcsin \frac{100}{200} = \arcsin 0,5, \text{ або } \alpha = 30^{\circ}.$$

**Відповідь:**  $\alpha = 30^{\circ}$ .

### Задача №2

Однорідний стержень  $OA$  вагою  $P=200 \text{ Н}$  підвішений вертикально за допомогою шарніру  $O$  (рис.13.4).

**Визначити**, яку горизонтальну силу  $Q$  треба прикласти у точці  $A$ , щоб стержень відхилився на кут  $\varphi = 30^{\circ}$ .

**Розв'язок.** Покажемо активні сили, які діють на стержень:

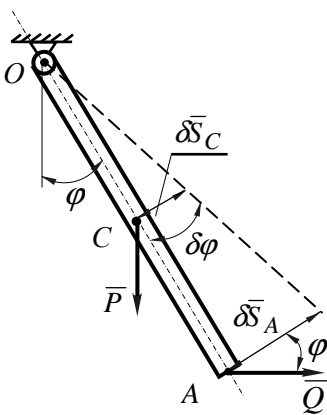


Рис.13.4

$\bar{Q}$  - урівноважуюча сила, яку прикладено у точці  $A$ ;

$\bar{P}$  - сила тяжіння стержня, яку прикладено у центрі тяжіння  $C$ .

Задана механічна система має один ступінь вільності. Її положення визначається кутом  $\varphi$ .

Надамо стержню можливе переміщення, при якому кут  $\varphi$  змінюється на  $\delta\varphi$ . Тоді точка прикладення сили  $\bar{P}$  одержить можливе переміщення  $\delta\bar{S}_C$ , що перпендикулярне до  $OA$ , а точка прикладення сили  $\bar{Q}$  - можливе переміщення  $\delta\bar{S}_A$ , яке також перпендикулярне  $OA$ .

Складемо загальне рівняння статки у формі (13.3):

$$\sum \delta A_k^a = P \cdot \delta S_C \cdot \cos(\bar{P}, \delta\bar{S}_C) + Q \cdot \delta S_A \cos(\bar{Q}, \delta\bar{S}_A) = 0. \quad (1)$$

Оскільки

$$OA=2OC,$$

то

$$\delta S_A = 2\delta S_C.$$

Крім того, як це видно з рис.13.4, кут  $(\bar{P}, \hat{\delta\bar{S}}_C) = 90^\circ + \varphi$ ,

а кут  $(\bar{Q}, \hat{\delta\bar{S}}_A) = \varphi$ .

З урахуванням співвідношень, які отримано, рівняння (1) прийме вигляд:

$$\sum \delta A_k^a = P \cdot \delta S_C \cdot \cos(90^\circ + \varphi) + Q \cdot 2 \cdot \delta S_C \cos \varphi = 0,$$

або

$$-P \cdot \sin \varphi + 2 \cdot Q \cos \varphi = 0,$$

звідки

$$Q = \frac{P}{2} \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Підставляючи у останнє рівняння числові значення  $P$  та  $\varphi$ , отримаємо:

$$Q = \frac{200}{2} \operatorname{tg} 30^\circ = 100 \cdot 0,58 = 58 \text{ Н}.$$

**Відповідь:**  $Q = 58 \text{ Н}$ .

### Задача №3

На балку  $AB$ , яка лежить на двох опорах  $A$  і  $B$ , діє система вертикальних сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ . Основні розміри показано на рис.13.5,а.

**Визначити** реакцію в'язі у шарнірі  $B$ .

**Розв'язок.** Для розв'язування задачі подумки відкидаємо опору  $B$ , замінюючи її дію шуканою реакцією  $\bar{N}_B$  (рис.13.5,б) і додаючи її до числа активних сил. Одержана система має один ступінь вільності.

Надамо системі можливе переміщення у положення, яке показано на рис.13.5,б пунктиром, для чого повернемо балку  $AB$  навколо шарніра  $A$  на кут  $\delta\varphi$ .

Тоді, якщо позначимо через  $\delta S_1, \delta S_2, \delta S_3$  можливі переміщення точок прикладення сил  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ , одержимо:

$$\delta S_1 = a\delta\varphi, \quad \delta S_2 = 2a\delta\varphi, \quad \delta S_B = (2a+b)\delta\varphi, \quad \delta S_3 = 2(a+b)\delta\varphi.$$

Відповідно до принципу можливих переміщень запишемо суму елементарних робіт:

$$\sum \delta A_k^a = -P_1\delta S_1 - P_2\delta S_2 + N_B\delta S_B - P_3\delta S_3 = 0,$$

або

$$[-P_1a - 2P_2a + N_B(2a+b) - 2P_3(a+b)]\delta\varphi = 0.$$

Оскільки  $\delta\varphi \neq 0$ , то нулю дорівнює вираз у квадратних дужках.

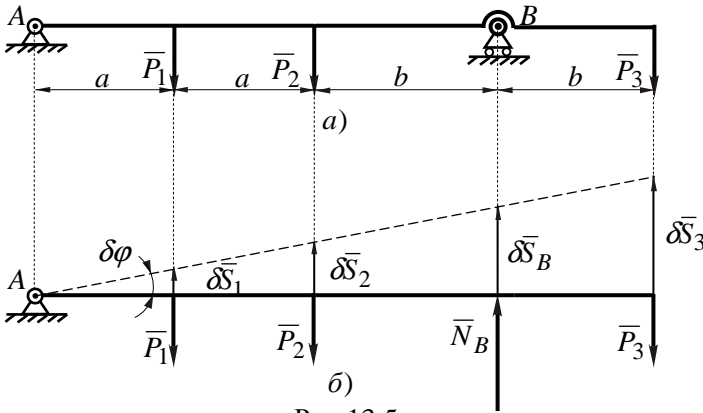


Рис.13.5

Звідки

$$N_B = \frac{P_1a + 2P_2a + 2P_3(a+b)}{2a+b}.$$

**Відповідь:** 
$$N_B = \frac{P_1a + 2P_2a + 2P_3(a+b)}{2a+b}.$$

#### Задача № 4

До середнього шарніра  $B$  колінчастого преса прикладена горизонтальна сила  $\bar{F}$  (рис.13.6).



**Визначити**, нехтуючи вагою стержнів, силу  $\bar{Q}$ , з якою стискається предмет  $G$ , якщо стержень  $AB$  нахилений до горизонту під кутом  $\varphi$  і  $AB = BC = l$ .

**Розв'язок.** Механічною системою, що розглядається, є кільчастий прес  $ABC$ . Всі в'язі, які накладені на прес, рахуємо ідеальними (тому реакції цих в'язей на рис.13.6 не показані).

Взаємодію предмету  $G$  з пресом позначимо силою  $\bar{Q}'$ , яка прикладена до точки  $C$  преса.

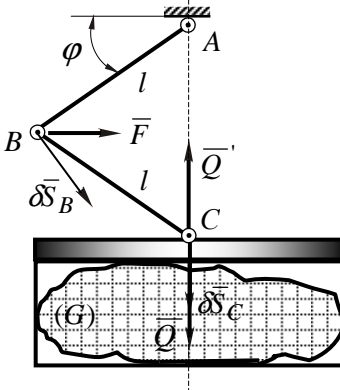


Рис.13.6

Тоді шукана сила тиску  $\bar{Q}$ , згідно з третім законом Ньютона, буде прикладена до вантажу  $G$ .

Активними силами, які діють на механічну систему є задана сила  $\bar{F}$  і сила  $\bar{Q}'$ .

Система, яка розглядається, має один ступінь вільності. Надамо системі можливе переміщення, повернувши стержень  $AB$  на кут  $\delta\varphi$ . Тоді точка  $B$  здійснює можливе переміщення  $\delta\bar{S}_B$ , а точка  $C$  опуститься вниз на величину  $\delta\bar{S}_C$ .

Складемо загальне рівняння статки у формі:

$$\sum \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{S}_k = 0,$$

яке для даного випадку прийме вигляд:

$$F \delta S_B \cos(\bar{F}, \delta\bar{S}_B) + Q' \delta S_C \cos(\bar{Q}', \delta\bar{S}_C) = 0.$$

Враховуючи, що

$$\cos(\bar{Q}', \delta\bar{S}_C) = \cos 180^\circ = -1,$$

одержимо:

$$F \delta S_B \cos(\bar{F}, \delta \bar{S}_B) - Q' \delta S_C = 0.$$

Звідки

$$Q' = F \cos(\bar{F}, \delta \bar{S}_B) \frac{\delta S_B}{\delta S_C} = 0.$$

Найдемо залежність між  $\delta S_B$  і  $\delta S_C$ , а також кут між векторами  $\bar{F}$  і  $\delta \bar{S}_B$ . Для цього зробимо допоміжний рисунок 13.7.

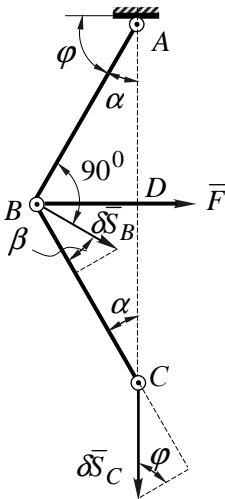


Рис.13.7

Кути  $BAC$  і  $BCA$  рівні між собою. Позначимо їх через  $\alpha$ . Кут  $ABD = \varphi$ . Оскільки точка  $B$  рухається за колом, то переміщення  $\delta \bar{S}_B$  буде дотичне до кола, тобто,  $\delta \bar{S}_B \perp AB$ , і кут між  $\bar{F}$  і  $\delta \bar{S}_B$  дорівнює  $90^\circ - \varphi$ . Отже,

$$\cos(\bar{F}, \delta \bar{S}_B) = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi.$$

Для визначення залежності між  $\delta S_B$  і  $\delta S_C$  скористаємося тією обставиною, що проекції можливих переміщень кінців жорсткого стержня на напрямок самого стержня повинні бути рівними між собою, отже:

$$\delta S_C \cdot \sin \varphi = \delta S_B \cdot \cos \beta,$$

або

$$\frac{\delta S_B}{\delta S_C} = \frac{\sin \varphi}{\cos \beta}.$$

Знайдемо кут  $\beta$ .

$$\angle \beta = (180^\circ - 2\alpha) - 90^\circ = 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - 2(90^\circ - \varphi) = 2\varphi - 90^\circ,$$

а

$$\cos \beta = \cos(2\varphi - 90^\circ) = \sin 2\varphi.$$

Отже,  
Остаточно,

$$\frac{\delta S_B}{\delta S_C} = \frac{\sin \varphi}{\sin 2\varphi} = \frac{\sin \varphi}{2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi} = \frac{1}{2 \cos \varphi}.$$

$$Q' = F \sin \varphi \frac{1}{2 \cos \varphi} = \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \varphi.$$

Оскільки за модулем  $Q = Q'$ , то і  $Q = \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \varphi$ .

**Відповідь:**  $Q = \frac{1}{2} F \operatorname{tg} \varphi$ .

### Задача № 5

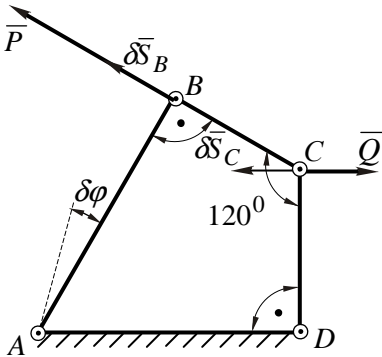


Рис.13.8

До шарнірів  $B$  і  $C$  механічної системи  $ABCD$ , наведеної на рис.13.8, прикладені дві сили  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$ , які перпендикулярні до стержнів  $AB$  і  $CD$ , відповідно.

**Визначити** силу  $Q$  при рівновазі системи, рахуючи силу  $P$  відомою, якщо  $\angle ABC = 90^0$ ,  $\angle BCD = 120^0$  (рис.13.8). Масами стержнів  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  знехтувати.

**Розв'язок.** Надамо системі можливе переміщення, для чого повернемо стержень  $AB$  на кут  $\delta\varphi$ .

Тоді можливе переміщення  $\delta\bar{S}_B$  точки  $B$  буде перпендикулярним до  $AB$ , а можливе переміщення  $\delta\bar{S}_C$  точки  $C$  перпендикулярним до  $CD$  (рис.13.8).

Складемо загальне рівняння статички у формі:

$$\sum \bar{F}_k^a \cdot \delta\bar{S}_k = 0,$$

яке для даного механізму має вигляд:

$$P\delta S_B \cos\left(\bar{P}^\wedge, \delta\bar{S}_B\right) + Q\delta S_C \cos\left(\bar{Q}^\wedge, \delta\bar{S}_C\right) = 0,$$

де

$$\cos\left(\bar{P}^\wedge, \delta\bar{S}_B\right) = \cos 0^\circ = 1, \quad \cos\left(\bar{Q}^\wedge, \delta\bar{S}_C\right) = \cos 180^\circ = -1.$$

Тоді

$$P\delta S_B - Q\delta S_C = 0.$$

Враховуючи, що проєкції можливих переміщень двох точок твердого тіла на пряму, яка їх з'єднує, дорівнюють одна одній (див. попередню задачу), то

$$\delta S_B = \delta S_C \cdot \cos 30^\circ.$$

Підставляючи цей вираз у попередню рівність, одержимо

$$P\delta S_C \cos 30^\circ - Q\delta S_C = 0,$$

звідки після скорочення отримаємо:

$$Q = P \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$$

**Відповідь:**  $Q = \frac{\sqrt{3}}{2} P.$

### Задача № 6

Два невагомих стержні  $AB$  і  $BC$  з'єднані шарніром  $B$ , до якого прикладена вертикальна сила  $\bar{Q}$ , що спрямована вниз. Кінець  $C$  прикріплено шарнірно до стіни, а кінець  $A$  шарнірно з'єднано з повзуном, який може без тертя ковзати по полу (рис.13.9). Усі в'язі вважати голономними та утримуючими.

**Визначити**, яку горизонтальну силу  $\bar{P}$  необхідно прикласти до повзуна, щоб система знаходилася у рівновазі при заданих кутах  $\alpha$  і  $\beta$ ?

**Розв'язок.** Оскільки усі в'язі утримуючі, то система має одну ступінь вільності. Надамо системі можливе переміщення.



$$\frac{\delta S_B}{\delta S_A} = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha - \beta)},$$

отже після підстановки:

$$P = Q \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

**Відповідь:**  $P = Q \frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$

### Задача № 7

Механізм (рис.13.10), розташований у горизонтальній площині, складається із невагомих стержнів 1,2,3, з'єднаних між собою і нерухомою опорою шарнірами, та повзунів  $B$  і  $D$ . До повзуна  $B$  прикріплена пружина з коефіцієнтом жорсткості  $c$ , до повзуна  $D$  прикладена сила  $\bar{Q}$ , а до стержня 1 (кривошипу) пара сил з моментом  $M$ .

**Визначити** деформацію пружини  $\lambda$  у стані рівноваги механізму, якщо  $M = 150 \text{ Нм}$ ,  $Q = 350 \text{ Н}$ ,  $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $u = 120^\circ$ ,  $l_1 = O_1A = 0,4 \text{ м}$ ,  $AE = ED$ ,  $c = 125 \text{ Н/см}$ .

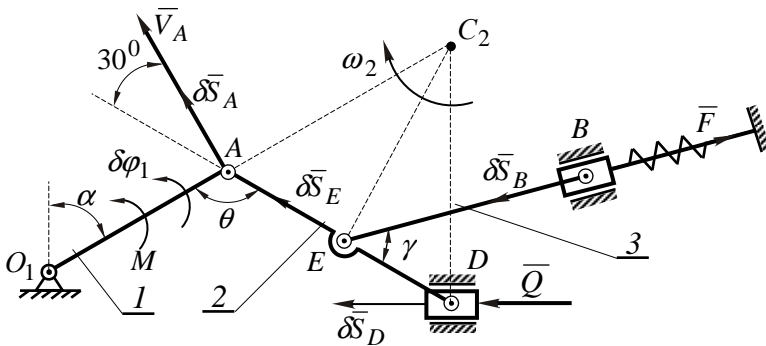


Рис.13.10

**Розв'язок.** Для розв'язування задачі скористаємося принципом можливих переміщень:

$$\sum \delta A_k^a = 0, \quad (1)$$

де  $\delta A_k^a$  - елементарні роботи активних сил на відповідних можливих переміщеннях.

На механізм діють задані активні сили: сила  $\bar{Q}$ , сила пружності пружини  $\bar{F}$ , величина якої відома за напрямком і невідома за модулем, а також пара сил з моментом  $M$ .

Сила пружності пружини  $\bar{F}$  повинна утримувати механізм у стані рівноваги.

Якщо за допомогою принципу можливих переміщень буде визначена сила  $F$ , то  $\lambda$  знайдемо із співвідношення  $F = c\lambda$ , а саме:

$$\lambda = \frac{F}{c}.$$

Для складання рівняння (1) надамо механізму можливі переміщення. Механізм, зображений на рис.13.10, має один ступінь вільності: достатньо привести до руху одну ланку, як всі інші його ланки будуть здійснювати ті або інші рухи.

Введемо наступні позначення для переміщень ланок, до яких прикладені активні сили:

$\delta\varphi_1$  - поворот стержня 1 навколо осі  $O_1$ ;

$\delta\bar{S}_D, \delta\bar{S}_B$  - переміщення повзунів  $D$  і  $B$ , відповідно.

Оскільки механізм має один ступінь вільності, то із переміщень  $\delta\varphi_1, \delta\bar{S}_D, \delta\bar{S}_B$  будь-яке одне може бути вибране за незалежне переміщення, тоді інші будуть знаходитися у залежності від нього.

Для розв'язування даної задачі зручно вибрати у якості незалежного можливого переміщення  $\delta\varphi_1$  і знайти вирази залежностей  $\delta\bar{S}_D$  і  $\delta\bar{S}_B$  від  $\delta\varphi_1$ .

Залежність між можливими переміщеннями даного механізму така ж сама, як між відповідними швидкостями точок ланок

механізму при його русі, що дає можливість скористатися відомими із кінематики співвідношеннями.

Спочатку визначаємо можливе переміщення точки  $A$  кривошипа 1.

Швидкість точки  $A$  направлена перпендикулярно до  $AB$  у бік  $\delta\varphi_1$ , отже можливе переміщення  $\delta\bar{S}_A$  спрямоване так само і за величиною дорівнює:

$$\delta S_A = l_1 \delta\varphi_1, \quad \delta\bar{S}_A \perp O_1A.$$

Напрямок можливого переміщення  $\delta\bar{S}_D$  відомий, його показано на рисунку. Величину  $\delta\bar{S}_D$  визначаємо із рівності проєкцій  $\delta\bar{S}_A$  і  $\delta\bar{S}_D$  на пряму  $AD$ :

$$\delta S_D \cdot \cos \alpha = \delta S_A \cos 30^0, \quad \delta S_D \cdot \cos 30^0 = \delta S_A \cos 30^0,$$

$$\delta S_D = \delta S_A = l_1 \delta\varphi_1.$$

Для того, щоб визначити  $\delta S_B$  спочатку знайдемо  $\delta S_E$ . Для цього побудуємо миттєвий центр обертання (швидкостей)  $C_2$  стержня 2 ( на перетині перпендикулярів до  $\delta\bar{S}_A$  і  $\delta\bar{S}_D$ , проведених із точок  $A$  і  $D$ ) та покажемо напрямок повороту  $\omega_2$  стержня 2 навколо  $C_2$ , враховуючи напрямки  $\delta\bar{S}_A$  або  $\delta\bar{S}_D$ .

Оскільки  $\angle C_2AD = \angle C_2DA = 60^0$ , то  $\triangle AC_2D$  - рівнобічний і  $C_2E$  у ньому - висота, оскільки  $AE = ED$ . Тоді переміщення  $\delta\bar{S}_E$ , перпендикулярне до  $C_2E$ , буде спрямоване за прямою  $ED$ .

Скористаємося знову тим, що проєкції  $\delta\bar{S}_E$  і  $\delta\bar{S}_A$  на пряму  $EA$  повинні бути рівними одна одній.

$$\delta S_E = \delta S_A \cos 30^0 = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30^0.$$

І нарешті, з умови рівності проєкцій  $\delta\bar{S}_A$  і  $\delta\bar{S}_E$  на пряму  $BE$ , знайдемо і зобразимо  $\delta\bar{S}_B$ :

$$\delta S_B = \delta S_E \cos 60^0 = l_1 \delta\varphi_1 \cos 30^0 \cdot \cos 60^0 = 0,43 l_1 \delta\varphi_1.$$



Складемо для механізму рівняння (1):

$$M \delta\varphi_1 + Q \delta S_D - F \delta S_B = 0.$$

Підставимо у це рівняння значення  $\delta\bar{S}_B$  і  $\delta\bar{S}_D$ :

$$M \delta\varphi_1 + Q l_1 \delta\varphi_1 - F \cdot 0,43 l_1 \delta\varphi_1 = \delta\varphi_1 (M + l_1 Q - 0,43 l_1 F) = 0.$$

Оскільки  $\delta\varphi_1 \neq 0$ , то

$$M l_1 + l_1 Q - 0,43 l_1 F = 0,$$

звідки

$$F = \frac{M + l_1 Q}{0,43 \cdot l_1} = \frac{150 + 0,4 \cdot 350}{0,43 \cdot 0,4} = 1700 \text{ Н.}$$

Визначаємо

$$\lambda = \frac{F}{c} = \frac{1700}{125} = 13,6 \text{ см.}$$

**Відповідь:**  $\lambda = 13,6 \text{ см.}$

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 46.1; 46.2; 46.17; 46.19; 46.21 [2].

## Тема 14. ЗАГАЛЬНЕ РІВНЯННЯ ДИНАМІКИ

### ЗАНЯТТЯ № 19

#### Зміст

- 14.1. Загальне рівняння динаміки.
- 14.2. Порядок розв'язування задач на застосування загального рівняння динаміки.
- 14.3. Приклади розв'язування задач.

#### 14.1. Загальне рівняння динаміки

Закони Ньютона установлені для вільної матеріальної точки і вільної матеріальної системи. Однак, частіше зустрічаються невольні системи. Ця обставина суттєво ускладнює використання законів Ньютона для розв'язування задач динаміки невольних механічних систем, а часто і зовсім не дозволяє розв'язувати такі задачі.

Необхідність розв'язування задач динаміки невольних механічних систем у зв'язку з їх важливим практичним значенням обумовила розробку ряду методів розв'язку таких задач.

У цьому першорядне значення належить загальним принципам і загальним рівнянням механіки.

Із принципів раніше були розглянуті наступні.

**Принцип Даламбера.** Він полягає у тому, що

*у кожний момент часу зрівноважуються між собою діючі на “k”-ту точку невольної матеріальної системи активні сили  $\bar{F}_k$ , реакції в'язей  $\bar{N}_k$  і сили інерції  $\bar{\Phi}_k$ , які прикладені до цих точок. Цей принцип записується формулою 12.6:*

$$\sum \bar{F}_k + \sum \bar{N}_k + \sum \bar{\Phi}_k = 0. \quad (14.1)$$

**Принцип можливих переміщень.** Він у найбільш загальній формі установлює умови рівноваги невольних матеріальних систем і полягає у тому, що

для рівноваги матеріальної системи, яка підкоряється ідеальним стаціонарним в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт, які здійснюються активними силами  $\bar{F}_k^a$  на можливих переміщеннях  $\delta\bar{S}_k$  точок механічної системи, дорівнювала нулю:

$$\sum \left[ F_k^a \cdot \delta S_k \cdot \cos \left( \hat{\bar{F}}_k^a, \delta \bar{S}_k \right) \right] = 0. \quad (14.2)$$

Принцип можливих переміщень дає загальний метод розв'язування задач статyki. З іншого боку, принцип Даламбера дозволяє використовувати методи статyki для розв'язування задач динаміки. Отже, застосовуючи ці два принципи одночасно, можна одержати загальний метод розв'язування задач динаміки, який має назву **загального рівняння динаміки**:

при русі системи з ідеальними в'язями у кожний даний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні системи буде дорівнювати нулю

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{ih}, \quad (14.3)$$

де  $\sum \delta A_k^a$  - сума елементарних робіт активних сил на можливих переміщеннях точок прикладення цих сил;

$\sum \delta A_k^{ih}$  - сума елементарних робіт сил інерції точок системи на їх можливих переміщеннях.

Рівняння (14.3) у розгорнутій формі можна записати у вигляді:

$$\sum F_k^a \cdot \delta S_k \cos \left( \hat{\bar{F}}_k^a, \delta \bar{S}_k \right) + \sum \Phi_k \cdot \delta S_k \cdot \cos \left( \hat{\bar{\Phi}}_k, \delta \bar{S}_k \right) = 0. \quad (14.4)$$

## 14.2. Порядок розв'язування задач на застосування загального рівняння динаміки

Установити, рух якої невільної системи розглядається.  
Визначити характер в'язей, які накладені на систему, ураховуючи властивість ідеальних в'язей.  
Позначити активні сили, які діють на точки системи.  
Визначити можливі переміщення системи.  
Умовно прикласти до точок системи сили інерції і підрахувати їх величину.  
Скласти суму робіт активних сил і сил інерції на установлених переміщеннях системи.  
Із одержаного співвідношення знайти шукані величини.

Застосувати загальне рівняння динаміки до розв'язування задач необхідно у тому випадку, коли за умовою задачі за відомими активними силами необхідно визначити прискорення системи (лінійне або кутове), а також сили, які діють на точки системи.

## 14.3. Приклади розв'язування задач

### Задача №1

Вантаж  $A$  вагою  $P$ , опускаючись по похилій гладкій площині, яка складає з горизонтом кут  $\alpha$ , призводить до обертання барабана  $B$  вагою  $Q$  з радіусом  $r$  за допомогою невагомої нитки, що не розтягується, (рис.14.1).

**Визначити** кутове прискорення барабана, якщо рахувати барабан однорідним круглим циліндром. Масою нерухомого блока  $C$  знехтувати.

**Розв'язок.** Дана невіольна система складається з вантажу  $A$  і барабана  $B$ , сили тяжіння (активні сили) яких  $\bar{P}$  і  $\bar{Q}$  - задані. Зв'язком між вантажем і барабаном є невагома нитка, яка не розтягується. Зовнішніми в'язями по відношенню до системи є похила поверхня, а також підшипники  $O_1$  і  $O_2$ .

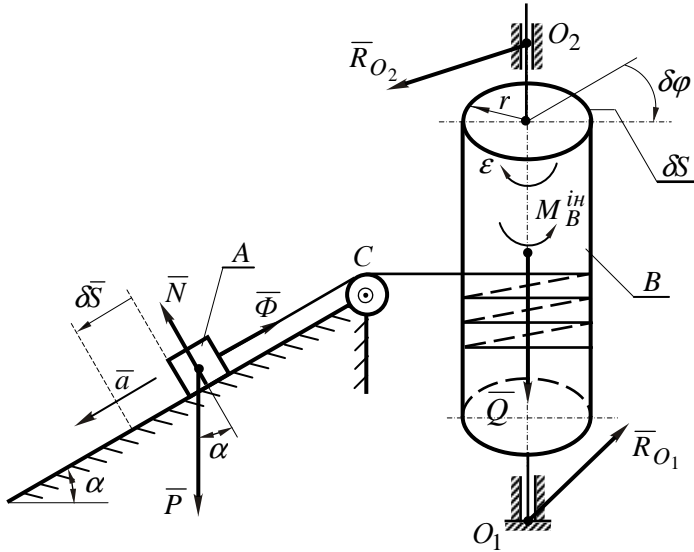


Рис. 14.1

Визначимо можливі переміщення системи. Для барабана можливим переміщенням буде кут повороту  $\delta\varphi$ , для поступального руху вантажу  $A$  можливе переміщення  $\delta\bar{S}$ . Установимо залежність між величинами  $\delta\varphi$  і  $\delta\bar{S}$ .

При переміщенні вантажу вниз на величину  $\delta\bar{S}$ , нитка змотується з барабана на ту ж саму величину  $\delta\bar{S}$ , а барабан повернеться на кут  $\delta\varphi$ . Тобто

$$\delta\bar{S} = r\delta\varphi.$$

Прикладемо до невільної механічної системи сили інерції. Якщо вантаж  $A$  опускається з прискоренням  $\bar{a}$ , направленим униз по похилій поверхні, то сила інерції вантажу  $\bar{\Phi}$  направлена у протилежний бік. Момент сил інерції  $M_B^{ih}$  барабана направлений так, як показано на рисунку 14.1, у бік, протилежний кутовому прискоренню  $\varepsilon$ .

Складемо загальне рівняння динаміки системи у формі (14.3):

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{ih} = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad \sum \delta A_k^a &= P \delta S \cos(\bar{P}, \hat{\delta \bar{S}}), \\ \sum \delta A_k^{ih} &= \Phi \delta S \cos(\bar{\Phi}, \hat{\delta \bar{S}}) - M_B^{ih} \cdot \delta \varphi. \end{aligned}$$

Тоді:

$$P \delta S \cos(\bar{P}, \hat{\delta \bar{S}}) - \Phi \delta S \cos(\bar{\Phi}, \hat{\delta \bar{S}}) - M_B^{ih} \delta \varphi = 0. \quad (1)$$

Реакції  $\bar{N}$ ,  $\bar{R}_{O_1}$  і  $\bar{R}_{O_2}$  роботи на елементарному переміщенні не виконують.

Рівняння (1) з урахуванням напрямків сил і можливих переміщень запишемо у вигляді:

$$P \delta S \cos(90^\circ - \alpha) - \Phi \delta S \cos 180^\circ - M_B^{ih} \delta \varphi = 0,$$

або

$$P \delta S \sin \alpha - \Phi \delta S - M_B^{ih} \frac{\delta S}{r} = 0. \quad (2)$$

Визначимо величини  $\Phi$  і  $M_B^{ih}$ , виражаючи при цьому лінійне прискорення вантажу через кутове прискорення барабана:

$$\Phi = \frac{P}{g} a, \quad M_B^{ih} = I_{O_1 O_2} \varepsilon, \quad a = \varepsilon r,$$

де  $I_{O_1 O_2} = \frac{Q r^2}{2g}$  - момент інерції барабана відносно осі  $O_1 O_2$ ;

$\varepsilon$  - кутове прискорення барабана.

Підставляючи усі ці дані у рівняння (2), одержимо:

$$P \delta S \sin \alpha - \frac{P}{g} \varepsilon r \delta S - \frac{Q r^2}{g \cdot 2} \varepsilon \frac{\delta S}{r} = 0.$$

Оскільки  $\delta S \neq 0$ , то будемо мати:

$$2Pg \sin \alpha - 2P\varepsilon r - Qr\varepsilon = 0.$$

Звідки визначаємо кутове прискорення барабана:

$$\varepsilon = \frac{2Pg \sin \alpha}{(2P + Q) \cdot r}.$$

**Відповідь:**  $\varepsilon = \frac{2Pg \sin \alpha}{(2P + Q) \cdot r}$ .

### Задача № 2

Два зубчастих колеса 1 і 2 з радіусами  $r_1$  і  $r_2$  знаходяться у зовнішньому зачепленні. Моменти інерції коліс відносно їх осей обертання дорівнюють, відповідно,  $I_{O_1}$  і  $I_{O_2}$ .

**Визначити** кутове прискорення колеса 1, якщо до нього прикладений обертальний момент  $m_0$ . Силами опору знехтувати (рис.14.2).

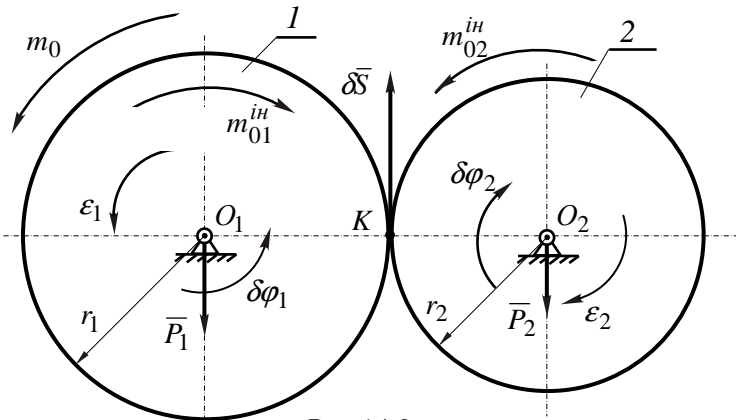


Рис.14.2

**Розв'язок.** Дана механічна система складається з двох зубчастих коліс 1 і 2, які обертаються навколо осей  $O_1$  і  $O_2$ . Пара зубчастих коліс є системою з одним ступенем вільності, оскільки кут повороту одного з коліс визначає положення другого колеса. Активними силами є сили тяжіння  $\bar{P}_1$  і  $\bar{P}_2$ , обертальний момент  $m_0$ .

Надамо можливе кутове переміщення  $\delta\varphi_1$  колесу 1, тоді колесо 2 здійснить можливе переміщення  $\delta\varphi_2$ .

Залежність між  $\delta\varphi_1$  і  $\delta\varphi_2$  може бути одержана за допомогою можливого переміщення  $\delta S$  точки  $K$  дотику коліс. Оскільки точка  $K$  належить обом зубчастим колесам, то

$$\delta S = r_1 \delta\varphi_1 = -r_2 \delta\varphi_2,$$

звідки

$$\delta\varphi_2 = -\frac{r_1}{r_2} \delta\varphi_1.$$

Знак мінус показує, що можливі переміщення  $\delta\varphi_1$  і  $\delta\varphi_2$  направлені у різні боки.

Визначимо сили інерції частин механічної системи. При обертанні коліс навколо нерухомих осей їх сили інерції приводяться до пар сил, моменти яких протилежні за знаком кутовим прискоренням і дорівнюють за модулем добуткам моментів інерції відносно осей обертання на модулі відповідних кутових прискорень.

Кутові прискорення пов'язані співвідношенням, яке випливає з рівності тангенціальних прискорень в місці стикання коліс 1 та 2:

$$r_1 \varepsilon_1 = -r_2 \varepsilon_2, \quad \text{або} \quad \varepsilon_2 = -\frac{r_1}{r_2} \varepsilon_1, \quad (2)$$

(мінус введений тому, що колеса обертаються в різні боки).

Момент пари сил інерції колеса 1 дорівнює:

$$m_{01}^{ih} = -I_{01} \cdot \varepsilon_1, \quad (3)$$

Момент пари сил інерції колеса 2:

$$m_{02}^{ih} = -I_{02} \cdot \varepsilon_2. \quad (4)$$

З урахуванням залежності (2) одержимо  $m_{02}^{ih} = I_{02} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_1$ .

Для складання загального рівняння динаміки необхідно підрахувати суму робіт активних сил і сил інерції на можливих переміщеннях точок системи і прирівняти цю суму до нуля:



$$m_0 \delta\varphi_1 + m_{01}^{in} \delta\varphi_1 + m_{02}^{in} \delta\varphi_2 = 0.$$

Робота сил тяжіння  $P_1$  і  $P_2$  дорівнює нулю, оскільки точки прикладання цих сил нерухомі.

Скориставшись формулами (1), (3) і (4), після скорочення на  $\delta\varphi$ , одержимо:

$$m_0 \delta\varphi_1 - I_{01} \varepsilon_1 \delta\varphi_1 - I_{02} \frac{r_1}{r_2} \varepsilon_1 \frac{r_1}{r_2} \delta\varphi_1 = 0,$$

$$m_0 - I_{01} \varepsilon_1 - I_{02} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \varepsilon_1 = 0,$$

$$\varepsilon_1 \left[ I_{01} + I_{02} \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] = m_0.$$

Звідси визначимо шукане кутове прискорення зубчастого колеса 1:

$$\varepsilon_1 = \frac{m_0}{I_{01} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 I_{02}}.$$

**Відповідь:** 
$$\varepsilon_1 = \frac{m_0}{I_{01} + \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 I_{02}}.$$

### Задача № 3

На трикутній призмі, бокові грані якої створюють з горизонтом кути  $\alpha$  і  $\beta$ , розміщені два вантажі  $A$  і  $B$ , котрі важать  $G_1$  і  $G_2$ , відповідно. Вони зв'язані між собою невагомою ниткою, яка не розтягується і перекинута через блок  $C$  (рис.14.3). Коефіцієнт тертя ковзання дорівнює  $f$ .

**Визначити** прискорення вантажів і натяг нитки. Масою блока знехтувати.

**Розв'язок.** Дана механічна система складається з двох вантажів, які рухаються поступально. Нитка, маса якої не враховується, є в'язною. Система має одну ступінь вільності.

Допустимо, що вантаж  $A$  рухається вниз з прискоренням  $\bar{a}$ , а вантаж  $B$  – вверх, причому прискорення вантажу  $B$  дорівнює прискоренню вантажу  $A$ , оскільки нитка не розтягується. Покажемо задані сили – сили тяжіння  $\bar{G}_1$  і  $\bar{G}_2$ , нормальні реакції бокових граней призми  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$  і сили тертя  $\bar{F}_{\text{тр}1}$  і  $\bar{F}_{\text{тр}2}$  (рис.14.3).

Модулі сил тертя дорівнюють:

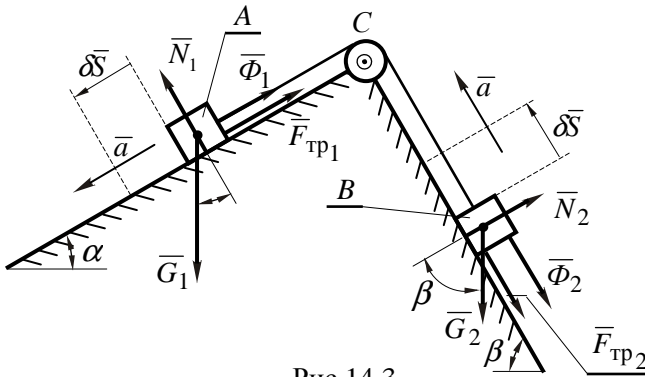


Рис.14.3

$$F_{\text{тр}1} = fN_1, \quad F_{\text{тр}2} = fN_2,$$

де  $N_1 = G_1 \cos \alpha, \quad N_2 = G_2 \cos \beta.$

Тому  $F_{\text{тр}1} = fG_1 \cos \alpha, \quad F_{\text{тр}2} = fG_2 \cos \beta.$

Сили тертя направлені у боки, протилежні напрямкам руху вантажів.

Оскільки вантажі рухаються поступально, то рівнодіючі сил інерції прикладені у центрах мас тіл, а їх модулі дорівнюють:

$$\Phi_1 = m_1 a = \frac{G_1}{g} \cdot a, \quad \Phi_2 = m_2 a = \frac{G_2}{g} \cdot a.$$

Прикладемо до вантажів умовно сили інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$ , спрямувавши їх протилежно прискоренню  $\bar{a}$ .

Надамо подумки системі можливе поступальне переміщення  $\delta\bar{S}$ , наприклад, у бік руху вантажів.

Складемо загальне рівняння динаміки, у яке не увійдуть нормальні реакції граней призми  $\bar{N}_1$  і  $\bar{N}_2$ , напрямки яких перпендикулярні до можливих переміщень вантажів:

$$\begin{aligned} G_1\delta S \cos(\bar{G}_1, \delta\bar{S}) + G_2\delta S \cos(\bar{G}_2, \delta\bar{S}) + F_{\text{тр}1}\delta S \cos(\bar{F}_{\text{тр}1}, \delta\bar{S}) + \\ + F_{\text{тр}2}\delta S \cos(\bar{F}_{\text{тр}2}, \delta\bar{S}) + \Phi_1\delta S \cos(\bar{\Phi}_1, \delta\bar{S}) + \\ + \Phi_2\delta S \cos(\bar{\Phi}_2, \delta\bar{S}) = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$G_1\delta S \cos(\bar{G}_1, \delta\bar{S}) = G_1\delta S \cos(90^\circ - \alpha) = G_1\delta S \sin \alpha,$$

$$G_2\delta S \cos(\bar{G}_2, \delta\bar{S}) = G_2\delta S \cos(90^\circ + \beta) = -G_2\delta S \sin \beta,$$

$$\Phi_1\delta S \cos(\bar{\Phi}_1, \delta\bar{S}) = \frac{G_1}{g} a\delta S \cos 180^\circ = -\frac{G_1}{g} a\delta S,$$

$$\Phi_2\delta S \cos(\bar{\Phi}_2, \delta\bar{S}) = \frac{G_2}{g} a\delta S \cos 180^\circ = -\frac{G_2}{g} a\delta S,$$

$$F_{\text{тр}1} \cdot \delta S \cos(\bar{F}_{\text{тр}1}, \delta\bar{S}) = fG_1\delta S \cos \alpha \cos 180^\circ = -G_1 f \cos \alpha \cdot \delta S,$$

$$F_{\text{тр}2} \cdot \delta S \cos(\bar{F}_{\text{тр}2}, \delta\bar{S}) = fG_2\delta S \cos \beta \cos 180^\circ = -G_2 f \cos \beta \cdot \delta S.$$

Тоді рівняння (1) прийме вигляд:

$$G_1 \delta S \sin \alpha - G_2 \delta S \sin \beta - \frac{G_1}{g} a \delta S - \frac{G_2}{g} a \delta S - G_1 f \delta S \cos \alpha - G_2 f \delta S \cos \beta = 0.$$

Після скорочення на  $\delta S$  одержимо:

$$G_1 \sin \alpha - G_2 \sin \beta - \frac{G_1}{g} a - \frac{G_2}{g} a - G_1 f \cos \alpha - G_2 f \cos \beta = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо прискорення  $a$ :

$$\frac{G_1 + G_2}{g} \cdot a = G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta),$$

$$a = g \frac{G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2}. \quad (2)$$

Якщо

$$G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta) > 0,$$

то вантажі рухаються у прийнятному напрямку.

Для визначення натягу  $\bar{T}$  нитки, розріжемо її біля вантажу  $A$ , тоді сила  $\bar{T}$  стане зовнішньою. Далі застосуємо принцип Даламбера у проекції на вісь  $x$  (рис.14.4):

$$T + \Phi_1 - G_1 \sin \alpha + F_{\text{тр}1} = 0, \quad (3)$$

звідки

$$T = -\Phi_1 + G_1 \sin \alpha - F_{\text{тр}1} = G_1 \sin \alpha - f G_1 \cos \alpha - \frac{G_1}{g} a,$$

$$T = G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{G_1}{g} a. \quad (4)$$

Підставивши у рівняння(4) значення  $a$  із рівняння (2), після перетворень одержимо:

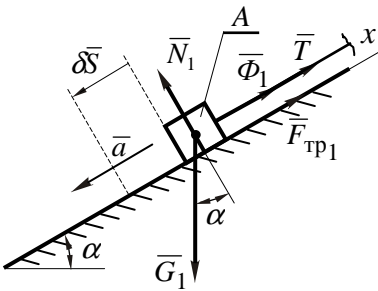


Рис.14.4

$$\begin{aligned}
 T &= G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \\
 &\quad - \frac{G_1}{g} \cdot g \frac{G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2(\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2} = \\
 &= G_1[(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \frac{G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2(\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2}] = \\
 &= \frac{G_1}{G_1 + G_2} [G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) + G_2(\sin \alpha - f \cos \alpha) - \\
 &\quad - G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) + G_2(\sin \beta + f \cos \beta)].
 \end{aligned}$$

Остаточно

$$T = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} [\sin \alpha + \sin \beta + f(\cos \beta - \cos \alpha)].$$

**Відповідь:**  $a = g \frac{G_1(\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2(\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2},$

$$T = \frac{G_1 \cdot G_2}{G_1 + G_2} [\sin \alpha + \sin \beta + f(\cos \beta - \cos \alpha)]$$

#### Задача № 4

Механічна система (рис.14.5) складається із обмотаних нерозтяжною та невагомою ниткою блока 1 з радіусом  $R_1 = 0,2 \text{ м}$  і ступінчастого шківів 2 (радіуси ступенів  $R_2 = 0,3 \text{ м}$ ,  $r_2 = 0,15 \text{ м}$ , радіус інерції відносно осі обертання  $\rho_2 = 0,2 \text{ м}$ , вага шківів  $P_2 = 30 \text{ Н}$ ), а також із вантажів 3 (вагою  $P_3 = 40 \text{ Н}$ ) і 4 (вагою  $P_4 = 20 \text{ Н}$ ), які прикріплені до цієї нитки.

Система рухається у вертикальній площині під дією сил тяжіння і пари сил з моментом  $M = 16 \text{ Нм}$ , що прикладений до блоку 1, вага якого приймається рівною нулю.

**Визначити** прискорення  $a_3$  вантажу 3, нехтуючи тертям.

**Розв'язок.** Розглядується рух механічної системи з одним ступенем вільності. В'язі, накладені на систему – ідеальні.

Для визначення прискорення  $a_3$  тіла 3, застосуємо загальне рівняння динаміки (14.3):

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^{in}, \quad (1)$$

де  $\sum \delta A_k^a$  - сума елементарних робіт активних сил,  
 $\sum \delta A_k^{in}$  - сума елементарних робіт сил інерції.

Зобразимо на рисунку 14.5 активні сили  $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$  - сили тяжіння, і пару сил з моментом  $M$ , які діють на тіла механічної системи. Задасмося напрямком прискорення  $\bar{a}_3$  тіла 3, визначимо напрямок прискорення  $\varepsilon_2$  ступінчастого шківа 2 і прискорення  $\bar{a}_4$  вантажу 4.

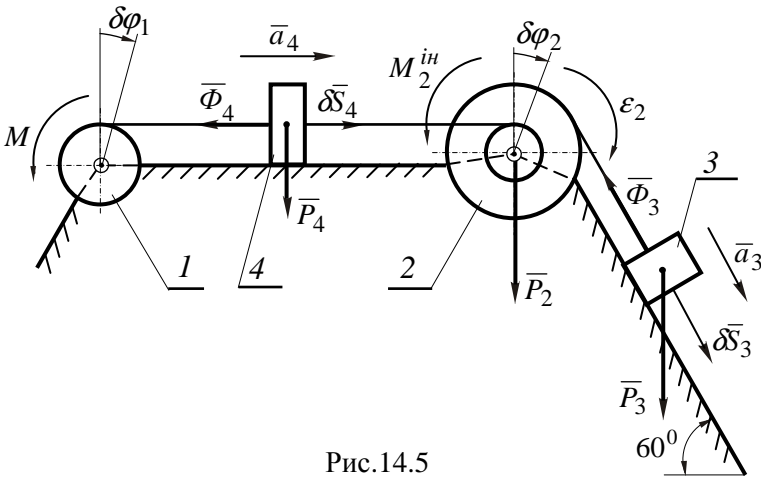


Рис.14.5

Напрямок сил інерції  $\bar{\Phi}_3, \bar{\Phi}_4$  і пари сил інерції з моментом  $M_2^{in}$  зображені на рис.14.5.

Визначаємо величини  $\bar{\Phi}_3, \bar{\Phi}_4$  і  $M_2^{in}$ :

$$\Phi_3 = \frac{P_3}{g} a_3; \quad \Phi_4 = \frac{P_4}{g} a_4; \quad M_2^{in} = \frac{P_2}{g} \rho^2 \varepsilon_2, \quad (2)$$

де  $\frac{P_2}{g} \rho^2$  - момент інерції шківів 2.

Надамо шківу 2 можливе переміщення  $\delta\varphi_2$ , з яким пов'язані можливі переміщення інших тіл системи і складемо рівняння (1):

$$\left( P_3 \sin 60^\circ - F_3^{in} \right) \delta S_3 - M_2^{in} \delta\varphi_2 - F_4^{in} \delta S_4 - M \delta\varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Виразимо всі можливі переміщення через  $\delta\varphi_2$ :

$$\delta S_3 = R_2 \delta\varphi_2, \quad \delta S_4 = r_2 \delta\varphi_2, \quad \delta\varphi_1 = \frac{\delta S_4}{R_1} = \frac{r_2}{R_1} \delta\varphi_2. \quad (4)$$

Підставимо значення (2) і (4) у рівняння (3):

$$\begin{aligned} & \left( P_3 \sin 60^\circ - \frac{P_3}{g} a_3 \right) R_2 \delta\varphi_2 - \frac{P_2}{g} \rho^2 \varepsilon_2 \delta\varphi_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 \delta\varphi_2 - M \frac{r_2}{R_1} \delta\varphi_2 = \\ & = \left[ \left( P_3 \sin 60^\circ - \frac{P_3}{g} a_3 \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho^2 \varepsilon_2 - \frac{P_4}{g} a_4 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] \delta\varphi_2 = 0. \end{aligned}$$

Величини  $\varepsilon_2$  і  $a_4$ , які входять в останнє рівняння, виразимо через шукану величину  $a_3$ :

$$\varepsilon_2 = \frac{a_3}{R_2}; \quad a_4 = \varepsilon_2 r_2 = \frac{r_2}{R_2} a_3.$$

Тоді

$$\left[ \left( P_3 \sin 60^\circ - \frac{P_3}{g} a_3 \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho^2 \frac{a_3}{R_2} - \frac{P_4}{g} \frac{r_2}{R_2} a_3 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] \delta\varphi_2 = 0.$$

Оскільки  $\delta\varphi_2 \neq 0$ , то

$$\left[ \left( P_3 \sin 60^\circ - \frac{P_3}{g} a_3 \right) R_2 - \frac{P_2}{g} \rho^2 \frac{a_3}{R_2} - \frac{P_4}{g} \frac{r_2}{R_2} a_3 r_2 - M \frac{r_2}{R_1} \right] = 0.$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно  $a_3$ :

$$\left( \frac{P_3}{g} R_2 + \frac{P_2 \rho_2^2}{g \cdot R_2} + \frac{P_4 r_2^2}{g R_2} \right) a_3 = P_3 R_2 \sin 60^\circ - M \frac{r_2}{R_1};$$

$$a_3 = \frac{P_3 R_2 \sin 60^\circ - M \frac{r_2}{R_1}}{P_3 R_2 + P_2 \frac{\rho_2^2}{R_2} + \frac{P_4 r_2^2}{R_2}} \cdot g.$$

З урахуванням числових значень одержимо:

$$a_3 = \frac{40 \cdot 0,3 \cdot 0,866 - 16 \frac{0,15}{0,2}}{40 \cdot 0,3 \cdot 30 \frac{0,2^2}{0,3} + 20 \frac{0,15^2}{0,3}} \cdot 9,81 = -0,9 \text{ м/с}^2.$$

Знак „мінус” показує на те, що прискорення вантажу 3 і прискорення інших тіл спрямовані протилежно показаним на рис.14.5.

**Відповідь:**  $a_3 = -0,9 \text{ м/с}^2$ .

### Задача № 5

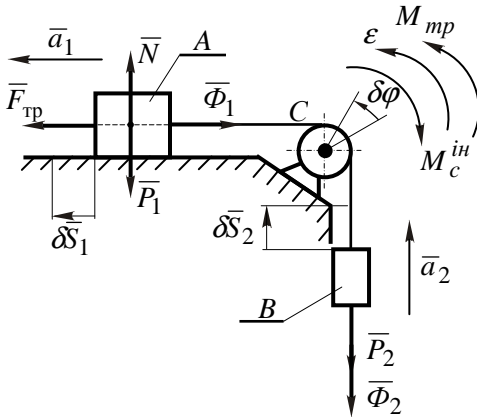


Рис.14.6

Механічна система, що складається з двох вантажів А та В вагою  $P_1$  і  $P_2$ , зв'язаних нерозтяжною абсолютно гнучкою ниткою, а також однорідного диска С вагою  $P_3$  і радіусом  $R$  (рис. 14.6), знаходиться в русі (вантаж В рухається вниз).

**Визначити** величину прикладеного до диска гальмуючого моменту



$M_{mp}$ , необхідного для того, щоб зупинити систему протягом заданого часу  $t_1$ , якщо в момент початку гальмування (при  $t = 0$ ) швидкість вантажу  $B$  була  $V_0$ .

При розв'язуванні задачі врахувати силу тертя  $F_{mp}$  між вантажем  $A$  і столом, якщо коефіцієнт тертя дорівнює  $f$ .

**Розв'язок.** Накладена на вантаж  $A$  в'язь не ідеальна, але загальним рівнянням динаміки скористатися можна, якщо включити силу тертя в число активних сил. Вантажі  $A$ ,  $B$  і диск  $C$  здійснюють рівномірно уповільнений рух із заданими прискореннями

$$a_1 = a_2 = \frac{V_0}{t_1}, \quad \varepsilon = \frac{\omega}{t_1} = \frac{V_0}{Rt_1}.$$

Зображуємо діючі на систему активні сили  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$  і  $\bar{F}_{mp}$ , а також сили інерції  $\bar{\Phi}_1$  і  $\bar{\Phi}_2$  вантажів  $A$  і  $B$ , і момент сил інерції  $M_C^{in}$  диска  $C$ . У випадку, який розглядається, маємо:

$$\Phi_1 = \frac{P_1}{g} a_1 = \frac{P_1 V_0}{g t_1}, \quad \Phi_2 = \frac{P_2}{g} a_2 = \frac{P_2 V_0}{g t_1},$$

$$M_C^{in} = I_C \cdot \varepsilon = \frac{P_3 R V_0}{2 g t_1},$$

де

$$I_C = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} R^2.$$

Дана система сил має один ступінь вільності, обумовлений кутом повороту  $\varphi$  диска  $C$ . Тоді можливі переміщення системи будуть

$$\delta \varphi \quad \text{та} \quad \delta S_1 = \delta S_2 = R \cdot \delta \varphi,$$

де  $S_1$  і  $S_2$  відраховуються уздовж траєкторії вантажів  $A$  і  $B$ .

Складаючи загальне рівняння динаміки (14.4), одержимо:

$$\left(-F_{mp.} + \Phi_1\right) \cdot \delta S_1 + \left(P_2 + \Phi_2\right) \cdot \delta S_2 + \left(-M_{mp.} + M_C^{in}\right) \cdot \delta \varphi = 0.$$

Підставимо в це рівняння значення  $\delta S_1$ ,  $\delta S_2$ ,  $F_{mp.}$ ,  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ ,  $M_C^{in}$ :

$$\left[ \left( -fP_1 + \frac{P_1V_0}{gt_1} + P_2 + \frac{P_2V_0}{gt_1} \right) R - M_{mp.} + \frac{P_3RV_0}{2gt_1} \right] \delta \varphi = 0.$$

Оскільки  $\delta \varphi \neq 0$ , то нулю дорівнює вираз в квадратних дужках.

Тоді

$$M_{mp.} = R(P_2 - fP_1) + \frac{V_0R}{gt_1} \left( P_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_3 \right).$$

**Відповідь:**  $M_{mp.} = R(P_2 - fP_1) + \frac{V_0R}{gt_1} \left( P_1 + P_2 + \frac{1}{2}P_3 \right).$

Задачі, рекомендовані для самостійної роботи: 47.1; 47.3; 47.7 [2].

## Тема 15. ТЕОРІЯ УДАРУ

### ЗАНЯТТЯ № 20

#### Зміст

- 15.1. Явище удару. Основне рівняння теорії удару.
- 15.2. Удар тіла об нерухому перешкоду.
- 15.3. Прямий центральний удар двох тіл (удар куль).
- 15.4. Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл.
- 15.5. Контрольні запитання.
- 15.6. Порядок розв'язування задач.
- 15.7. Розв'язування задач.

#### 15.1. Явище удару. Основне рівняння теорії удару

З механічної точки зору явище удару характеризується тим, що *швидкості точок механічної системи (твердого тіла) змінюються на кінцеву величину за дуже малий проміжок часу*, який складає тисячні і менші частки секунди, за який відбувається удар.

Оскільки при ударі кінцева зміна швидкостей відбувається за дуже малий проміжок часу, то прискорення, що виникають, будуть дуже великими, отже, при ударі діють і дуже великі сили.

Сили, які виникають під час удару і які діють, хоч і у дуже малий проміжок часу, на тіла, які стикаються, мають кінцеву величину і називаються **ударними силами**. Дуже малий проміжок часу, за який здійснюється удар, називається **часом удару**.

Імпульси ударних сил за час удару називаються **ударними імпульсами**.

Оскільки ударні сили дуже великі і за час удару змінюються від нуля до дуже великого значення, а потім знову падають до нуля, то в теорії удару за міру механічної взаємодії тіл, які стикаються, розглядаються не ударні сили, а їх ударні імпульси, які є кінцевими величинами.

Основне рівняння теорії удару для матеріальної точки випливає з теореми про зміну кількості руху матеріальної точки і має вигляд:

$$m\bar{U} - m\bar{V} = \bar{S}, \quad (15.1)$$

де  $\bar{V}$  - швидкість точки на початку удару;

$\bar{U}$  - швидкість точки у кінці удару;

$\bar{S}$  - імпульс ударної сили.

Знаючи масу точки, її швидкість на початку удару і ударний імпульс, з рівняння (15.1) можна визначити швидкість точки після удару:

$$\bar{U} = \bar{V} + \frac{1}{m} \bar{S}. \quad (15.2)$$

## 15.2. Удар тіла об нерухому перешкоду

*Центральним ударом тіла об нерухому перешкоду називають такий удар, коли нормаль до поверхні тіла у точці його контакту з перешкодою проходить через центр мас тіла.*

Якщо швидкість  $\bar{V}$  центра мас тіла на початку удару спрямована за нормаллю  $n$  до перешкоди, то удар буде *прямим*, у іншому випадку *косим*.

### Випадок прямого удару

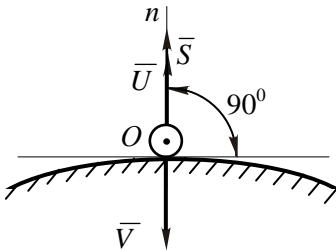


Рис.15.1

Після удару тіло (куля) набуває швидкості  $\bar{U}$ , яка направлена за нормаллю у протилежний бік (рис.15.1).

У цьому випадку модуль швидкості у кінці удару пропорційний модулю швидкості на початку удару:

$$U = kV, \quad (15.3)$$

де  $k$  - коефіцієнт відновлення під час удару.

**Коефіцієнт відновлення  $k$**  залежить від матеріалу тіла (кулі) та нерухомої поверхні і характеризує природу тіл, які стикаються.

Значення коефіцієнта відновлення для різних тіл визначається експериментальним шляхом.

Розрізняють три випадки:

$k = 0$ , і отже, швидкість після удару  $\bar{U} = 0$ . Це *абсолютно непружний удар*;

$k = 1$ , і отже, швидкість у кінці удару за модулем дорівнює швидкості на початку удару; такий удар називається *абсолютно пружним*;

$0 < k < 1$ , у цьому разі  $U < V$ . Це характеризує *не зовсім пружний удар*.

Знаючи масу тіла  $m$ , швидкість до удару і коефіцієнт відновлення, можна визначити ударний імпульс:

$$S = m(k+1)V. \quad (15.4)$$

### Випадок косого удару

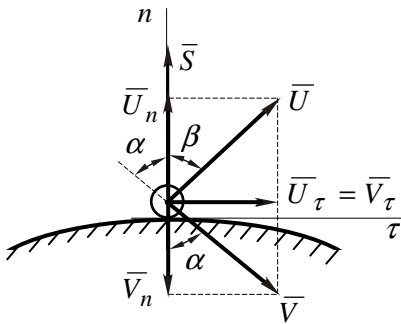


Рис.15.2

У цьому випадку швидкість  $\bar{V}$  центра мас тіла на початку удару складає з нормаллю до поверхні кут  $\alpha$ , а швидкість  $\bar{U}$  у кінці удару кут  $\beta$  (рис.15.2).

У випадку, який розглядається, діючою на тіло (кулю) силою буде нормальна реакція поверхні. Імпульс цієї реакції  $\bar{S}$ .

Для нормальних складових швидкостей у відповідності з рівнянням (15.3):

$$|U_n| = k|V_n|.$$

Таким чином, основні залежності для косого удару мають вигляд (рис.15.2):

$$U_\tau = V_\tau, \quad U_n = -kV_n, \quad S = m|V_n|(1+k). \quad (15.5)$$

Із співвідношень (15.5) можна знайти модуль і напрямок швидкості у кінці удару і ударний імпульс, якщо величини  $m$ ,  $V$ ,  $\alpha$  і  $k$  відомі.

Коефіцієнт відновлення при *косому ударі* є відношенням тангенса кута падіння  $\alpha$  до тангенсу кута відбивання  $\beta$  (рис.15.2):

$$k = \frac{|U_n|}{|V_n|} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Оскільки  $k < 1$ , то  $\alpha < \beta$ , тобто кут падіння завжди менший за кут відбивання.

### 15.3. Прямий центральний удар двох тіл (удар куль)

*Прямим центральним ударом двох тіл називається такий удар, при якому точка стикання тіл лежить на прямій, яка з'єднує їх центри мас, а швидкості центрів мас направлені вздовж цієї лінії (рис.15.3).*

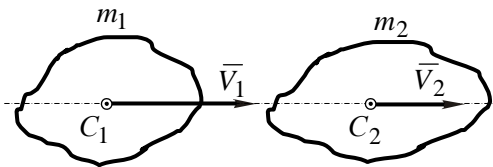


Рис.15.3

Швидкості тіл до удару позначені  $\bar{V}_1$  і  $\bar{V}_2$ .

Швидкості тіл після удару позначені  $\bar{U}_1$  і  $\bar{U}_2$ .

Для випадку *не зовсім пружного удару* залежність між швидкостями  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $U_1$  і  $U_2$  має вигляд:

$$U_1 - U_2 = -k(V_1 - V_2). \quad (15.6)$$

Закон збереження кількості руху системи (тіл  $C_1$  і  $C_2$ ) запишеться у вигляді:

$$m_1 U_1 + m_2 U_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2. \quad (15.7)$$

Із рівнянь(15.6) і (15.7) одержуються алгебраїчні значення абсолютних швидкостей у кінці удару:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= V_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2}(1+k)(V_1 - V_2), \\ U_2 &= V_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(1+k)(V_1 - V_2). \end{aligned} \right\} \quad (15.8)$$

Ударний імпульс, що діє на тіла, які дотикаються, дорівнює:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= m_1(U_1 - V_1) = -(1+k)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2), \\ S_2 &= -S_1. \end{aligned} \right\} \quad (15.9)$$

### Абсолютно непружний удар ( $k = 0$ )

У цьому випадку, коли

$$U_1 = U_2 = \frac{m_1 V_1 + m_2 V_2}{m_1 + m_2}, \quad (15.10)$$

обидва тіла після удару рухаються з однаковими швидкостями.

Діючі на тіла ударні імпульси дорівнюють:

$$S_2 = -S_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2).$$

### Абсолютно пружний удар ( $k = 1$ )

У цьому випадку:

$$\left. \begin{aligned} U_1 &= V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2), \\ U_2 &= V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \end{aligned} \right\} \quad (15.11)$$

Діючі на тіла ударні імпульси дорівнюють:

$$S_2 = -S_1 = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2). \quad (15.12)$$

Якщо стикаються тіла з однаковою масою, то

$$U_1 = V_2; \quad U_2 = V_1.$$

Таким чином, у цьому випадку тіла обмінюються швидкостями.

### 15.4. Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл

Якщо удар не зовсім пружний, то тіла, які стикаються, не миттєво та не повністю відновлюють свої форми у кінці удару. Отже, частина кінетичної енергії, якою володіли ці тіла на початку удару, витрачається на залишкову їх деформацію, а також на нагрівання цих тіл.

Величина втраченої кінетичної енергії при *абсолютно непружному ударі* ( $k = 0$ ) визначається з виразу:

$$T_0 - T_1 = \frac{1}{2} m_1 (V_1 - U)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - U)^2, \quad (15.13)$$

де  $T_0$  - кінетична енергія системи на початку удару;

$T_1$  - кінетична енергія у кінці удару;

$V_1, V_2$  - швидкості тіл до удару;

$U$  - спільна швидкість після удару.

Якщо удар *не є абсолютно непружним* ( $k > 0$ ), то величина втраченої кінетичної енергії визначається рівністю:

$$T_0 - T_1 = \frac{1-k}{1+k} \left[ \frac{1}{2} m_1 (V_1 - U_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2 - U_2)^2 \right]. \quad (15.14)$$

### 15.5. Контрольні запитання

У чому полягає характерна особливість явища удару?

Чому замість ударних сил у теорії удару фігурують ударні імпульси?

Як записати основне рівняння теорії удару для матеріальної точки?

Що називається коефіцієнтом відновлення?



У яких межах знаходяться числові значення коефіцієнта відновлення?

На що витрачається кінетична енергія при ударі?

Яка залежність між кутами падіння і відбивання при ударі об гладку нерухому поверхню?

Як визначається втрачена при ударі кінетична енергія у випадку:

- абсолютно непружного,
- непружного ударів?

### 15.6. Порядок розв'язування задач

Задачі про визначення швидкостей тіл, які стикаються при прямому центральному ударі.

Спрямувати вісь  $n$  уздовж лінії центрів мас тіл, що стикаються.

Обчислити проекції початкових швидкостей  $V_{1n}$ ,  $V_{2n}$  тіл, які стикаються, на вісь  $n$ .

У випадку непружного удару вирахувати за формулою (15.10) проекції загальної швидкості на вісь  $n$  у кінці удару тіл, які стикаються.

У випадку пружного удару вирахувати проекції на вісь  $n$  швидкості за формулами (15.11) і (15.12).

Визначити швидкості обох тіл у кінці удару.

Вирахувати імпульс миттєвої (ударної) сили за формулою (15.9).

У випадку удару об нерухому площину можна скористатися наведеними формулами, якщо рахувати у них масу нерухомої площини нескінченно великою, а швидкість до удару рівною нулю, тобто  $m_2 = \infty$ ,  $V_2 = 0$ .

### 15.7. Приклади розв'язування задач

#### Задача №1

Важка кулька без початкової швидкості (рис.15.4) падає з висоти  $H=1,5\text{ м}$  і після удару об горизонтальну перешкоду піднімається на висоту  $h=0,8\text{ м}$ .

**Визначити** коефіцієнт відновлення при ударі.

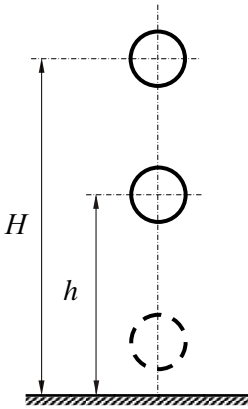


Рис.15.4

**Розв'язок.** У задачі розглядається випадок прямого удару у перешкоду. За відомою формулою Галілея можна одержати швидкість кульки на початку удару –  $V$  та після удару –  $U$  :

$$V = \sqrt{2gH} \quad \text{та} \quad U = \sqrt{2gh}.$$

Оскільки

$$k = \frac{U}{V},$$

то

$$k = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}} = \sqrt{\frac{0,8}{1,5}} = 0,73.$$

Відповідь:  $k = 0,73$ .

### Задача №2

Сталева куля вагою  $P = 2H$ , падаючи з висоти  $H = 4\text{ м}$ , ударяється об сталеву плиту, яку розташовано горизонтально (рис.15.4).

**Визначити** ударний імпульс та середнє значення ударної реакції, якщо час удару становить  $\tau = 0,0002\text{ с}$  і коефіцієнт відновлення  $k = \frac{5}{9}$ .

**Розв'язок.** У задачі розглядається центральний удар у нерухому перешкоду. Оскільки коефіцієнт відновлення  $0 < k < 1$ , то у даному випадку центральний удар є не зовсім пружним.

Для визначення ударного імпульсу  $S$  скористуємося залежністю (15.4):

$$S = m(k + 1)V, \quad (1)$$

де  $m$  – маса кулі,

$V$  – швидкість кулі у момент початку удару.

Визначимо швидкість кулі у момент удару. При вільному падінні кулі з висоти  $H$ , його швидкість наприкінці падіння дорівнює

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 4} = 8,86 \text{ м/с.}$$

Після підстановки у рівняння (1) значень  $m$ ,  $k$  та  $V$  отримуємо:

$$S = \frac{2}{9,81} \cdot \left(\frac{5}{9} + 1\right) \cdot 8,86 = 2,8 \text{ Н}\cdot\text{с.}$$

Величина середньої ударної реакції  $N_{CP}$  визначимо з виразу:

$$N_{CP} = \frac{S}{\tau} = \frac{2,8}{0,0002} = 14000 \text{ Н} = 14 \text{ кН.}$$

**Відповідь:**  $S = 2,8 \text{ Н}\cdot\text{с}$ ,  $N_{CP} = 14000 \text{ Н} = 14 \text{ кН}$ .

### Задача № 3

Швидкості центрів ваги двох куль, які рухаються назустріч одна одній, дорівнюють  $V_1 = 15 \text{ м/с}$ ,  $V_2 = 20 \text{ м/с}$ . Маса першої кулі  $m_1 = 30 \text{ кг}$ .

**Визначити** масу другої кулі  $m_2$ , а також значення ударного імпульсу  $S$ , якщо після непружного удару ( $k = 0$ ) кулі зупинилися.

**Розв'язок.** З умов задачі витікає, що рух куль представляє собою прямий центральний удар двох тіл. Спрямуємо вісь  $n$  по лінії центрів  $C_1C_2$  (рис.15.5).

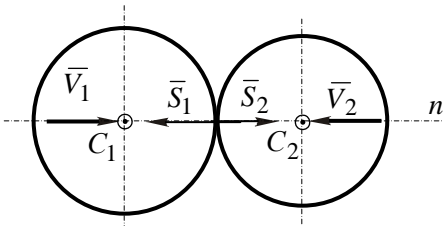


Рис.15.5

Визначимо проекції швидкостей  $\vec{V}_1$  і  $\vec{V}_2$  на вісь  $n$ :

$$V_{1n} = 15 \text{ м/с},$$

$$V_{2n} = 20 \text{ м/с}.$$

Удар двох куль, який розглядається, є *абсолютно непружним* ( $k = 0$ ), тому швидкості куль після удару будуть рівні між собою, тобто  $U_{1n} = U_{2n} = U$ , а оскільки за умовою задачі кулі зупинилися, одержимо

$$U_{1n} = U_{2n} = U = 0.$$

Використовуючи закон збереження кількості руху системи (15.7), запишемо:

$$m_1 V_{1n} + m_2 (-V_{2n}) = m_1 U_1 + m_2 U_2 = 0.$$

Звідки

$$m_2 = m_1 \frac{V_{1n}}{V_{2n}} = 30 \frac{15}{20} = 22,5 \text{ кг}.$$

Для визначення ударного імпульсу скористаємося формулою (15.9):

$$S_1 = S_2 = (1+k) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (V_{1n} - V_{2n}).$$

З урахуванням числових даних знаходимо:

$$S = S_1 = S_2 = (1+0) \frac{30 \cdot 22,5}{30 + 22,5} [15 - (-20)] = 450 \text{ кгм/с (Н} \cdot \text{с)}.$$

**Відповідь:**  $m_2 = 22,5 \text{ кг}$ ,  $S = 450 \text{ кгм/с (Н} \cdot \text{с)}$ .

#### Задача № 4

Куля вагою  $P_1 = 50 \text{ Н}$  рухається зі швидкістю  $V_1 = 15 \text{ м/с}$ , поперед неї рухається у тому ж самому напрямку зі швидкістю  $V_2 = 2 \text{ м/с}$  куля вагою  $P_2 = 80 \text{ Н}$ .

**Визначити** швидкості куль у кінці удару, якщо коефіцієнт відновлення  $k = 0,5$ .

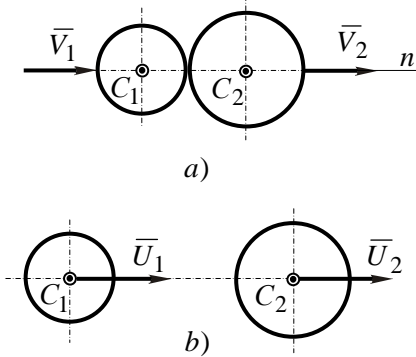


Рис.15.6

Для удару на вісь  $n$  визначимо за формулами (15.8):

$$U_{1n} = V_{1n} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} (1+k)(V_{1n} - V_{2n}),$$

$$U_{2n} = V_{2n} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} (1+k)(V_{1n} - V_{2n}).$$

З урахуванням числових значень знаходимо:

$$U_{1n} = 15 - \frac{\frac{P_2}{g}}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g}} (1+0,5)(15-2) = 15 - \frac{80}{50+80} \cdot 1,5 \cdot 13 = 3,0 \text{ м/с},$$

$$U_{2n} = 2 + \frac{\frac{P_1}{g}}{\frac{P_1}{g} + \frac{P_2}{g}} (1+0,5)(15-2) = 2 + \frac{50}{50+80} \cdot 1,5 \cdot 13 = 9,5 \text{ м/с}.$$

Звідси витікає, що швидкість першої кулі зменшилася, а другої збільшилася. При цьому кулі продовжують рухатися у тому ж напрямку, на що вказують знаки отриманих швидкостей (рис.15.6,б).

**Відповідь:**  $U_{1n} = 3,0 \text{ м/с}$ ,  $U_{2n} = 9,5 \text{ м/с}$ .

**Розв'язок.** У даному випадку відбувається не зовсім пружний удар куль. Спрямуємо вісь  $n$  по лінії центрів  $C_1 C_2$ . Визначимо проекції на цю вісь швидкостей  $\bar{V}_1$  і  $\bar{V}_2$  до удару (рис.15.6,а):

$$V_{1n} = 15 \text{ м/с}, \quad V_{2n} = 2 \text{ м/с}.$$

Оскільки розглядається не зовсім пружний удар, то проекції швидкостей куль після

## Задача № 5

Дві кулі рухаються назустріч одна одній з рівними за модулем швидкостями. Після удару одна з куль залишилась у спокої.

**Визначити** співвідношення мас куль і швидкість другої кулі після удару (рис.15.7), рахуючи удар прямим центральним і абсолютно пружним,

**Розв'язок.** Нехай швидкості куль до удару  $V_1 > 0$  і  $\bar{V}_2 = -\bar{V}_1$ ,

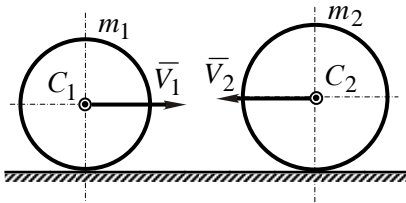


Рис.15.7

а після удару -  $U_1$ , яка за умовами дорівнює нулю, та  $U_2$ . Оскільки у задачі розглядається абсолютно пружний прямий центральний удар, то швидкості куль після удару визначаємо за залежностями (15.11):

$$U_1 = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2),$$

$$U_2 = V_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(V_1 - V_2).$$

З урахуванням даних задачі з першого рівняння одержимо:

$$0 = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2}[V_1 - (-V_1)] = V_1 - \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \cdot 2V_1,$$

або

$$V_1(m_1 + m_2) - 4m_2V_1 = 0.$$

Звідси:

$$m_1 + m_2 = 4m_2; \quad \frac{m_1}{m_2} = 3.$$

Таким чином, куля, яка зупинилася, втричі більша за масою.

З другої формули знаходимо  $U_2$  :

$$U_2 = -V_1 + 2 \frac{\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} [V_1 - (-V_1)];$$

$$U_2 = -V_1 + 2 \frac{3}{3+1} \cdot 2V_1 = -V_1 + \frac{12}{4} V_1 = -V_1 + 3V_1 = 2V_1.$$

Одержаний результат означає, що друга куля змінила напрямок швидкості на зворотній, бо знак її ми отримали той же, що має початкова швидкість першої кулі, а модуль швидкості збільшився вдвічі.

**Відповідь:**  $U_2 = 2V_1, \quad \frac{m_1}{m_2} = 3.$

### Задача № 6

Вільно падаюча куля масою  $m$  стикається з нерухомою похилою поверхнею, яка розташована під кутом  $\alpha$  до горизонту.

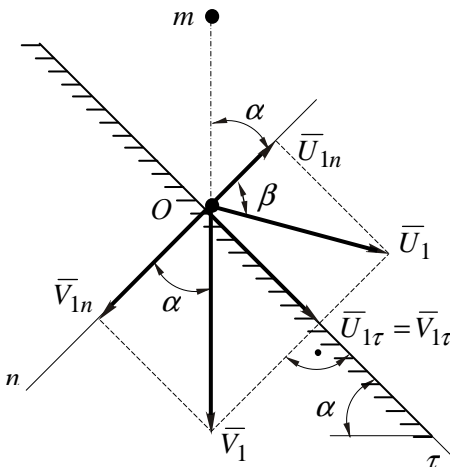


Рис.15.8

**Визначити** напрямок швидкості кульки у кінці пружного удару, якщо  $\alpha = 30^\circ$ ,  $k = 0,8$ .

Кульку і площину вважати ідеально гладкими.

**Розв'язок.** З точкою  $O$  стикання кульки з поверхнею пов'яжемо систему координат  $On\tau$ : вісь  $O\tau$  спрямуємо по похилій площині вниз, вісь  $On$  - перпендикулярно до похилої площини (рис.15.8).

Проекції швидкості кульки на початок удару дорівнюють:

$$V_{1n} = V_1 \cos \alpha, \quad V_{1\tau} = V_1 \sin \alpha.$$

Швидкість кульки після удару позначимо як  $U_1$ , а кут відбивання між віссю  $On$  і вектором  $\bar{U}_1$  - через  $\beta$ .

Оскільки розглядається випадок косоного удару, то проекції на осі  $n$  і  $\tau$  швидкості  $\bar{U}_1$  кульки після удару визначаються за залежністю (15.5):

$$U_{1\tau} = V_{1\tau} = V_1 \sin \alpha, \quad U_{1n} = -kV_{1n} = -kV_1 \cos \alpha.$$

З рис. 15.8 видно, що:

$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{U_{1\tau}}{U_{1n}} \right|.$$

Підставляючи сюди значення  $U_{1\tau}$  і  $U_{1n}$ , одержимо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{V_1 \sin \alpha}{kV_1 \cos \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{k}.$$

З урахуванням числових значень величин, одержимо:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ}{0,8} = 0,722,$$

$$\beta = \operatorname{arctg} 0,722 \cong 36^\circ.$$

У випадку абсолютно пружного удару ( $k=1$ ) кут падіння  $\alpha$  дорівнює куту відбиття  $\beta$ :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{тобто} \quad \beta = \alpha.$$

**Відповідь:**  $\beta \cong 36^\circ$ .

### Задача № 7

Дві кулі з масами  $m_1 = 2 \text{ кг}$  і  $m_2 = 3 \text{ кг}$  підвішені так, як показано на рис. 15.9. Перша куля відхиляється на кут  $\alpha = 60^\circ$  і відпускається без початкової швидкості. Після удару друга куля відхиляється на кут  $\beta = 40^\circ$ .



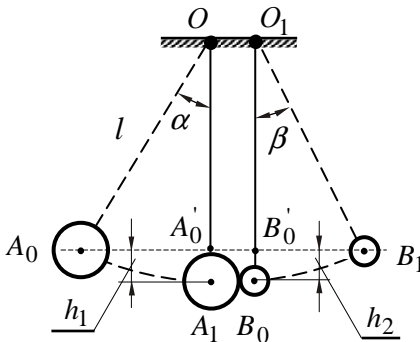


Рис.15.9

**Визначити** коефіцієнт відновлення для куль під час удару.

**Розв'язок.** Визначимо швидкість  $V_1$  першої кулі у момент удару. Для цього скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії кулі на переміщенні  $A_0A_1$ :

$$T_1 - T_0 = \sum A_k,$$

де  $T_0$  - кінетична енергія кулі у положенні  $A_0$ ;

$T_1$  - кінетична енергія кулі у положенні  $A_1$ ;

$\sum A_k$  - сума робіт прикладених до кулі сил на переміщенні  $A_0A_1$ .

Запишемо вирази для  $T_0$ ,  $T_1$  і  $\sum A_k$ :

$$T_0 = \frac{m_1 V_0^2}{2} = 0; \text{ (оскільки куля починає рух без початкової швидкості).}$$

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}, \quad \text{де } V_1 \text{ - швидкість у положенні } A_1.$$

$$\sum A_k = A(\bar{P}_1) = P_1 h_1 = P_1 (A_1 O - A_0 O),$$

де  $P_1 = m_1 g$  - сила тяжіння першої кулі.

Вважаючи, що  $A_0 O = A_1 O = l$ , з рис.15.9 витікає:

$$h_1 = A_1 O - A_0 O = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha).$$

Отже,

$$\sum A_k = m_1 g l (1 - \cos \alpha).$$

Таким чином, теорема про зміну кінетичної енергії першої кулі на переміщенні  $A_0A_1$  запишеться у вигляді:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} = m_1 g l (1 - \cos \alpha).$$

Звідси:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{2gl2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2\sqrt{gl} (\sin 30^\circ) = \sqrt{gl}. \end{aligned}$$

Застосовуючи ту ж саму теорему про зміну кінетичної енергії для другої кулі на переміщенні  $B_0B_1$ , знаходимо швидкість центра другої кулі у кінці удару:

$$U_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\beta}{2} = 2\sqrt{gl} \sin 20^\circ = 0,68\sqrt{gl}.$$

У даній задачі розглядається прямий центральний удар двох куль. У цьому випадку закон збереження кількості руху системи з двох куль має вигляд (15.7):

$$m_1V_1 + m_2V_2 = m_1U_1 + m_2U_2, \quad (1)$$

а залежність між швидкостями  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $U_1$  і  $U_2$  визначається за формулою (15.6):

$$U_1 - U_2 = -k(V_1 - V_2), \quad (2)$$

де  $V_1$  - швидкість першої кулі до удару;

$V_2$  - швидкість другої кулі до удару;

$U_1$  - швидкість першої кулі після удару;

$U_2$  - швидкість другої кулі після удару.

З проведених розрахунків і умов задачі витікає:

$$V_1 = \sqrt{gl}, \quad U_2 = 0,68\sqrt{gl}, \quad V_2 = 0.$$

Швидкість першої кулі після удару  $U_1$  невідома.

Таким чином, рівняння (1) і (2) з урахуванням того, що  $V_2 = 0$ , набудуть вигляду:

$$m_1V_1 = m_1U_1 + m_2U_2, \quad (3)$$

$$U_1 - U_2 = -kV_1. \quad (4)$$

Розв'язуємо останні рівняння відносно коефіцієнта відновлення  $k$ . Для цього з рівняння (4) виразимо невідому швидкість  $U_1$ :

$$U_1 = U_2 - kV_1$$

і підставимо у рівняння (3):

$$m_1 V_1 = m_1 (U_2 - kV_1) + m_2 U_2 = m_1 U_2 - m_1 k V_1 + m_2 U_2.$$

Звідки

$$k m_1 V_1 = m_1 U_2 + m_2 U_2 - m_1 V_1 = (m_1 + m_2) U_2 - m_1 V_1,$$

$$k = \frac{(m_1 + m_2) U_2}{m_1 V_1} - 1,$$

або

$$k = \frac{(m_1 + m_2) 0,68 \sqrt{gl}}{m_1 \sqrt{gl}} - 1,$$

$$k = \frac{(m_1 + m_2) 0,68}{m_1} - 1.$$

З врахуванням значень мас куль, одержимо:

$$k = \frac{(2+3) \cdot 0,68}{2} - 1 = 0,7.$$

**Відповідь:**  $k = 0,7$ .

Задачі, які рекомендуються для самостійної роботи: 44.1; 44.6; 44.8; 44.13; 44.14 [2].

## ДОДАТКИ

### 1. Найпростіші алгебраїчні формули

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b);$$

$$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2);$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

### 2. Формула коренів квадратного рівняння

Рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$ , де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – дійсні числа і  $a \neq 0$ , має такі корені:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### 3. Градуси – радіани

Перехід від градусів у радіани:  $\alpha(\text{рад}) = 0,0175 \cdot \alpha(\text{град})$ .

Перехід від радіан у градуси:  $\alpha(\text{град}) = 57,3 \cdot \alpha(\text{рад})$ .

### 4. Формули подвійного кута

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

### 5. Формули ділення аргументу навпіл

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}.$$

### 6. Формули зниження степеня

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

### 7. Формули додавання аргументу

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta};$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

### 8. Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2};$$

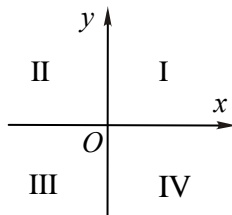
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

### 9. Знаки тригонометричних функцій по квадрантах

Функція	Квадрант			
	I	II	III	IV
sin	+	+	-	-
cos	+	-	-	+
tg	+	-	+	-
ctg	+	-	+	-



**10. Значення тригонометричних функцій деяких кутів**

$\alpha$	<i>град</i>	0	15	30	45	60	75	90	180
	<i>рад</i>	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$
$\sin \alpha$		0	0,26	0,50	0,71	0,87	0,97	1	0
$\cos \alpha$		1	0,97	0,87	0,71	0,50	0,26	0	-1
$tg \alpha$		0	0,27	0,58	1,00	1,73	3,73	$\infty$	0
$ctg \alpha$		$\infty$	3,73	1,73	1,00	0,58	0,27	0	$\infty$

**11. Формули зведення**

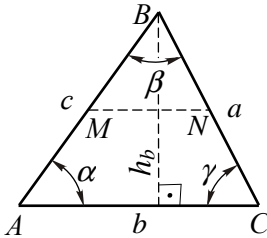
Функція	Аргумент $x$				
	$-\alpha$	$\pi/2 \pm \alpha$ ( $90^\circ \pm \alpha$ )	$\pi \pm \alpha$ ( $180^\circ \pm \alpha$ )	$3\pi/2 \pm \alpha$ ( $270^\circ \pm \alpha$ )	$2\pi \pm \alpha$ ( $360^\circ \pm \alpha$ )
$\sin x$	$-\sin \alpha$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$
$\cos x$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$tg x$	$-tg \alpha$	$\mp ctg \alpha$	$\pm tg \alpha$	$\mp ctg \alpha$	$\pm tg \alpha$
$ctg x$	$-ctg \alpha$	$\mp tg \alpha$	$\pm ctg \alpha$	$\mp tg \alpha$	$\pm ctg \alpha$

**12. Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad tg \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad ctg \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$tg \alpha \cdot ctg \alpha = 1; \quad 1 + tg^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + ctg^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

### 13. Співвідношення в довільному та прямокутному трикутниках



$a, b, c$  – сторони трикутника;

$\alpha, \beta, \gamma$  – внутрішні кути трикутника;

$MN$  – середня лінія трикутника;

$h_b$  – висота трикутника, що опущена на сторону  $b$ ;

Сума кутів трикутника:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Нерівності трикутника:

$$b - c < a < b + c;$$

$$a - c < b < a + c;$$

$$a - b < c < a + b.$$

Теорема синусів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}.$$

Теорема косинусів:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

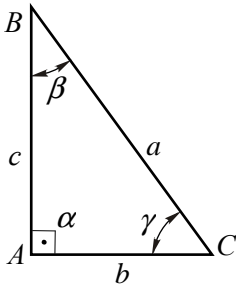
Площа трикутника:

$$S = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона),}$$

де  $p = (a + b + c)/2$  – півпериметр трикутника.

*Прямокутний трикутник:*



$b$  і  $c$  – катети,  $a$  – гіпотенуза;

$\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta + \gamma = 90^\circ$ ;

$S = \frac{1}{2}bc$  – площа трикутника;

$a^2 = b^2 + c^2$  – теорема Піфагора.

Якщо  $\beta = 30^\circ$  то  $b = \frac{a}{2}$ .

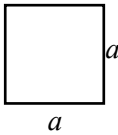
$\sin \gamma = \frac{c}{a}$ ;       $\cos \gamma = \frac{b}{a}$ ;       $tg \gamma = \frac{c}{b}$ ;       $ctg \gamma = \frac{b}{c}$ ;

$\sin \beta = \frac{b}{a}$ ;       $\cos \beta = \frac{c}{a}$ ;       $tg \beta = \frac{b}{c}$ ;       $ctg \beta = \frac{c}{b}$ ;

$c = a \cdot \sin \gamma = a \cdot \cos \beta$ ;       $b = a \cdot \sin \beta = a \cdot \cos \gamma$ .

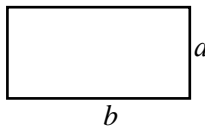
**14. Площа ( $S$ ) геометричних фігур**

Квадрат



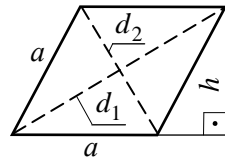
$S = a^2$ .

Прямокутник



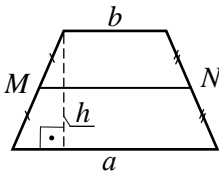
$S = a \cdot b$ .

Ромб



$S = h \cdot a = d_1 \cdot d_2 / 2$ .

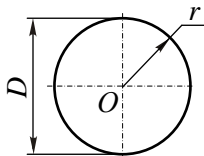
Трапеція



$S = h \cdot (a + b) / 2$ ;

Середня лінія:  
 $MN = (a + b) / 2$ .

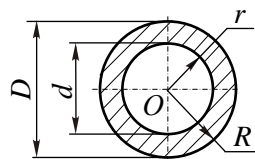
Коло і круг



$S = \pi r^2 = \pi D^2 / 4$ ;

Довжина кола:  
 $L = 2\pi r = \pi D$ .

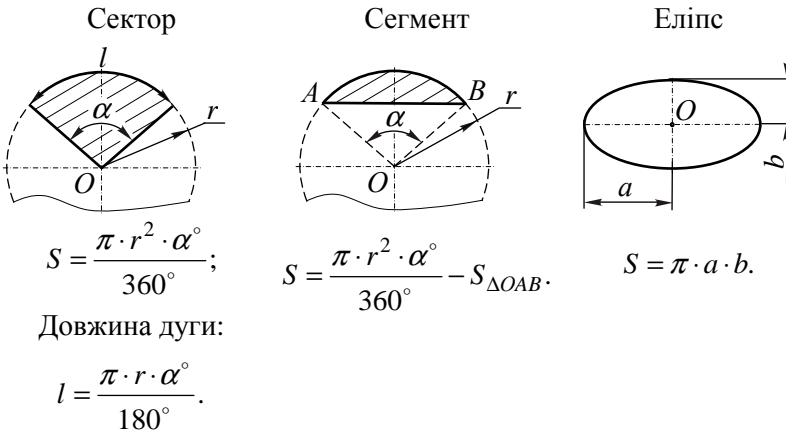
Кільце



$S = \pi(R^2 - r^2) =$

$= \pi(D^2 - d^2) / 4$ .





### 15. Визначення похідної від функції

Використовуються позначення:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad \dot{s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad \text{якщо } s = f(t), \text{ де } t - \text{ час.}$$

Похідну від функції  $y = f(x)$  в точці  $x_0$  позначають символом  $f'(x_0)$ , або  $y'(x_0)$ .

По визначенню:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{або} \quad y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

### 16. Правила диференціювання функцій

Якщо  $c = const$  (стала величина),  $u = u(x)$  та  $v = v(x)$  – функції, які можуть бути здиференційовані по  $x$ , то:

1.  $c' = 0$ ;
2.  $x'_x = 1$ ;
3.  $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ ;
4.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;
5.  $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ ;
6.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$ .

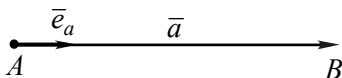
**17. Похідні та диференціали елементарних функцій**

	<b>Похідні</b>	<b>Диференціали</b>
1.	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$dx^n = nx^{n-1} dx$
2.	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$d(\sqrt{x}) = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$
3.	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$
4.	$(e^x)' = e^x$	$de^x = e^x dx$
5.	$(a^x)' = a^x \ln a, (a > 0)$	$d(a^x) = a^x \ln a dx, (a > 0)$
6.	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$d(\ln x) = \frac{dx}{x}$
7.	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$d(\log_a x) = \frac{dx}{x \ln a}$
8.	$(\sin x)' = \cos x$	$d(\sin x) = \cos x dx$
9.	$(\cos x)' = -\sin x$	$d(\cos x) = -\sin x dx$
10.	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$d(\operatorname{tg} x) = \frac{dx}{\cos^2 x}$
11.	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{dx}{\sin^2 x}$
12.	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arcsin x) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
13.	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d(\arccos x) = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
14.	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arctg} x) = \frac{dx}{1+x^2}$
15.	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{dx}{1+x^2}$

### 18. Таблиця невизначених інтегралів

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1).$  2.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
3.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0).$  4.  $\int e^x dx = e^x + C.$
5.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$  6.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$
7.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$  8.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
9.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$  10.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
11.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$  12.  $\int \ln x dx = x \ln x - x + C.$
13.  $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$
14.  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$
15.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C.$
16.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$

### 19. Вектор



$$\bar{a} = a \cdot \bar{e}_a, \text{ або } \overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \bar{e}_{AB},$$

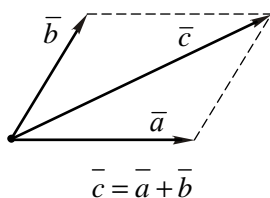
де  $a \equiv |\bar{a}|$  – модуль або довжина вектора;

$\bar{e}_a = \frac{\bar{a}}{a}$  – одиничний вектор або орт даного вектора.

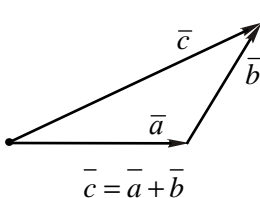
## 20. Додавання векторів

Вектори додаються за правилами:

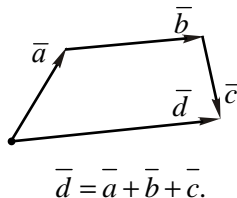
а) паралелограма;



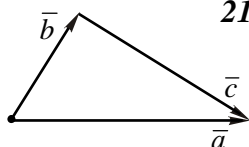
б) трикутника;



в) замикаючої



## 21. Віднімання векторів



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}, \text{ якщо } \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

## 22. Координатна форма вектора

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k},$$

де  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – орти (взаємно перпендикулярні), які утворюють праву трійку координатних осей  $Ox, Oy, Oz$ ;

$a_x, a_y, a_z$  – проекції вектора на осі координат.

## 23. Проекції вектора на координатні осі

Якщо задані кути  $\alpha, \beta, \gamma$  ( $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \pi$ ), утворені вектором  $\vec{a}$  відповідно з координатними осями  $Ox, Oy, Oz$ , то:

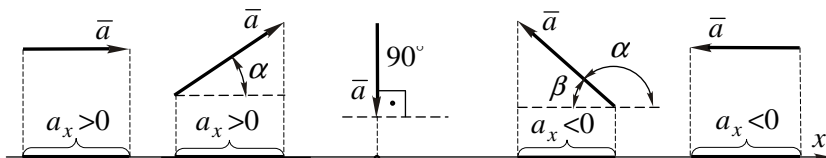
$$a_x = a \cos \alpha;$$

$$a_y = a \cos \beta;$$

$$a_z = a \cos \gamma.$$

Приклади:

$$\alpha = 0; \quad 0 < \alpha < 90^\circ; \quad \alpha = 90^\circ; \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ; \quad \alpha = 180^\circ;$$



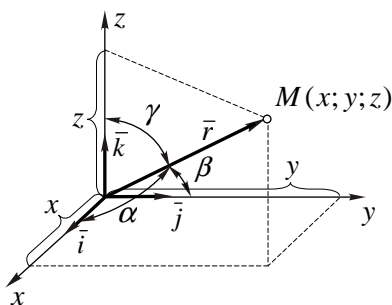
$$a_x = a. \quad a_x = a \cos \alpha. \quad a_x = 0. \quad a_x = a \cdot \cos \alpha = -a \cdot \cos \beta. \quad a_x = -a.$$

### 24. Напрямні косинуси

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{a}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{a}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{a};$$

причому  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ .

### 25. Радіус-вектор точки, його модуль та напрямні косинуси



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r};$$

$$\cos \beta = \frac{y}{r};$$

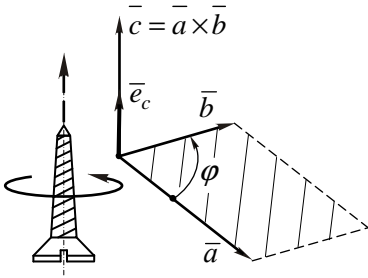
$$\cos \gamma = \frac{z}{r}.$$

### 26. Скалярний добуток векторів (скаляр)

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \varphi, \quad \text{де } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

### 27. Векторний добуток векторів

$$\vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a} \cdot \vec{b}] = \vec{c}$$



Вектор  $\vec{c}$  направлений перпендикулярно до площини, в якій лежать вектори, що перемножуються. Його напрям визначається за правилом правого гвинта: якщо обернути головку гвинта по найкоротшій відстані від першого множника до другого, то напрям руху самого гвинта дає напрям вектора  $\vec{c}$ .

Модуль векторного добутку

$$|\vec{c}| = c = a \cdot b \cdot \sin \varphi, \text{ де } \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

### 28. Деякі фізичні сталі (константи)

Швидкість світла у вакуумі	$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$
Гравітаційна стала	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}.$
Прискорення вільного падіння (середнє)	$g = 9,807 \text{ м/с}^2.$
Маса Землі	$M_3 = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг}.$
Середній радіус Землі	$R_3 = 6,37 \cdot 10^6 \text{ м}.$

### 29. Моменти інерції

#### 1. Моменти інерції мас, розподілених по лінії

• Дуга кола з центральним кутом  $2\alpha$ , рад (рис. 1).

$$I_x = \frac{1}{2} MR^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

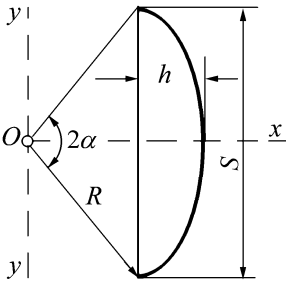


Рис. 1

$$I_y = \frac{1}{2}MR^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

де  $M$  - маса лінії.

$$I_0 = I_x + I_y = MR^2,$$

де  $I_0$  - полярний момент інерції відносно точки  $O$ , дорівнює моменту інерції відносно осі, що проходить через точку  $O$  перпендикулярно до площини  $Oxy$ .

• Для повного кола ( $2\alpha = 2\pi$ ):

$$I_x = I_y = \frac{1}{2}MR^2, \quad I_0 = MR^2.$$

## 2. Моменти інерції мас, розподілених по площині

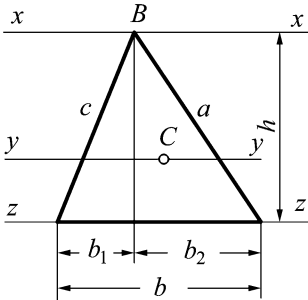


Рис.2

• Трикутник (рис. 2):

$$I_x = \frac{1}{2}Mh^2, \quad I_y = \frac{1}{18}Mh^2,$$

$$I_z = \frac{1}{6}Mh^2, \quad I_h = \frac{1}{6}M \frac{b_1^3 + b_2^3}{b_1 + b_2},$$

$$I_C = \frac{1}{36}M(a^2 + b^2 + c^2),$$

де  $a$ ,  $b$ ,  $c$  - довжини сторін трикутника;

$h$  - висота трикутника при основі  $b$ ;

$C$  - центр ваги трикутника;

$I_h$  - момент інерції відносно осі, що проходить у площині трикутника через вершину  $B$  перпендикулярно до протилежної сторони;

$I_C$  - полярний момент інерції.

Для будь-якої осі, що проходить через центр ваги і лежить у площині трикутника,

$$I_C = \frac{1}{12} M (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2),$$

де  $l_1, l_2, l_3$  - відстані вершин трикутника від даної осі.

• **Чотирикутник** (рис. 3)

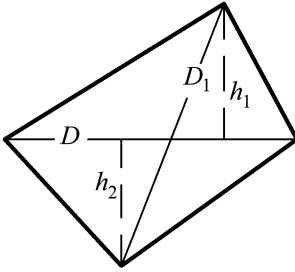


Рис. 3

Момент інерції  $I_D$  відносно діагоналі  $D$  визначається за формулою:

$$I_D = \frac{1}{6} M \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1 + h_2}.$$

Для паралелограма:

$$I_D = \frac{1}{24} MD^2 \sin^2 \varphi.$$

Для ромба:

$$I_D = \frac{1}{24} MD^2.$$

Для прямокутника (рис. 4) зі сторонами  $h$  і  $b$ :

$$I_x = \frac{1}{12} Mh^2, \quad I_y = \frac{1}{12} Mb^2,$$

$$I_b = \frac{1}{3} Mh^2,$$

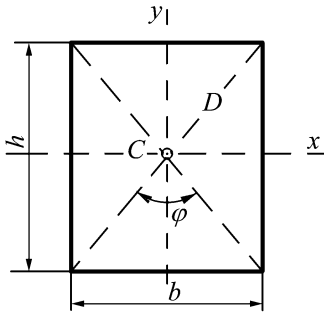


Рис. 4

$$I_D = \frac{1}{24} MD^2 \sin^2 \varphi, \quad I_C = \frac{1}{12} M (b^2 + h^2).$$

Для квадрата моменти інерції визначають з відповідних формул для моментів інерції прямокутника, якщо в них покласти  $b = h$ .



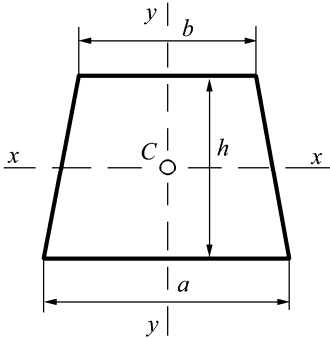


Рис. 5

• **Рівнобедрена трапеція** (рис. 5):

$$I_x = \frac{1}{18} M h^2 \cdot \frac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2},$$

$$I_a = \frac{1}{6} M h^2 \cdot \frac{a+3b}{a+b},$$

$$I_b = \frac{1}{6} M h^2 \cdot \frac{3a+b}{a+b},$$

$$I_y = \frac{1}{24} M \cdot (a^2 + b^2).$$

• **Правильний многокутник**

Для будь-якої осі, що проходить через точку  $O$  і лежить у площині многокутника,

$$I_x = I_y = I_D = \frac{1}{24} M (6R^2 - a^2),$$

$$I_0 = 2I_x,$$

де  $a$  - сторона многокутника;

$R$  - радіус описаного кола.

• **Круг**

Для будь-якої осі, що проходить через центр круга в його площині

$$I_D = \frac{1}{4} M R^2, \quad I_C = 2I_D.$$

• **Півкруг**

Для будь-якого діаметра

$$I_D = \frac{1}{4} M R^2.$$

Полярний момент площини півкруга відносно його центра  $O$

$$I_0 = \frac{1}{2} M R^2.$$

Полярний момент площини відносно центра ваги  $C$  площини півкруга

$$I_C = \frac{1}{2}MR \left( 1 - \frac{32}{9\pi^2} \right).$$

• **Кругове кільце:**

$$I_D = \frac{1}{4}M(R^2 + r^2), \quad I_0 = 2I_D,$$

де  $R$  - зовнішній радіус кільця;  
 $r$  - внутрішній радіус кільця.

Осі проходять через центр кільця.

• **Круговий сектор (рис. 1):**

$$I_x = \frac{1}{2}MR^2 \left( 1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right), \quad I_y = \frac{1}{2}MR^2 \left( 1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right),$$

$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2.$$

Якщо за полюс узяти центр ваги  $C$  сектора, то

$$I_C = \frac{1}{2}MR^2 \left[ 1 - \frac{8 \sin^2 \alpha}{9(2\alpha)^2} \right].$$

• **Круговий сегмент (рис. 1):**

$$I_x = \frac{1}{4}MR^2 \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

$$I_y = \frac{1}{4}MR^2 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right),$$

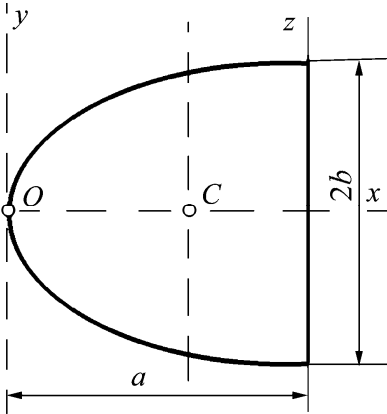
$$I_0 = \frac{1}{2}MR^2 \left( 1 + \frac{1}{6} \frac{2 \sin 2\alpha - \sin 4\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} \right).$$

- **Еліпс** з півосями  $a$  і  $b$  та з центром  $O$  :

$$I_a = \frac{1}{4}Mb^2, \quad I_b = \frac{1}{4}Ma^2,$$

$$I_0 = \frac{1}{4}M(a^2 + b^2).$$

- **Парабола** (рис. 6):



$$I_x = \frac{1}{5}Mb^2, \quad I_y = \frac{3}{7}Ma^2.$$

$$I_z = \frac{8}{35}Ma^2, \quad I_C = \frac{12}{175}Ma^2,$$

де  $I_C$  - момент інерції відносно осі, яка проходить через центр ваги і паралельно осі  $z$ .

Рис. 6

### 3. Моменти інерції мас, розподілених по об'єму

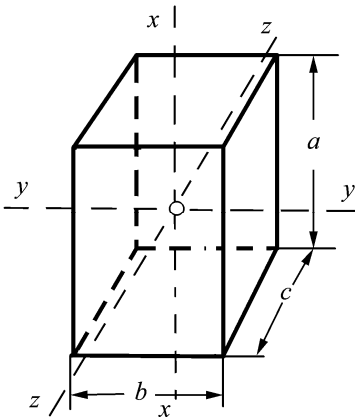


Рис. 7

Моменти інерції даються відносно осей, що проходять через центр ваги тіла. Отже, якщо ці моменти інерції відомі, то знайти моменти інерції відносно інших осей можна, користуючись формулою 21.15.

- **Прямокутний паралелепіпед** з ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рис. 7):

$$I_x = \frac{1}{12}M(b^2 + c^2),$$

$$I_y = \frac{1}{12}M(a^2 + c^2),$$

$$I_z = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2).$$

- **Куб** зі стороною  $a$  :

$$I_x = I_y = I_z = \frac{1}{6}Ma^2 .$$

- **Прямий круговий циліндр:**

$$I_x = \frac{1}{2}MR^2 ,$$

$$I_y = I_z = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2) ,$$

де  $R$  - радіус циліндра;  
 $h$  - висота циліндра.

Початок координат знаходиться в центрі ваги циліндра.  
 Вісь  $x$  спрямована по осі циліндра.

- **Порожнистий циліндр:**

$$I_x = \frac{1}{2}M(R^2 + r^2) , \quad I_y = \frac{1}{4}M\left(R^2 + r^2 + \frac{1}{3}h^2\right) ,$$

де  $R$  і  $r$  - зовнішній і внутрішній радіуси основи циліндра;  
 $h$  - висота циліндра.

Початок координат знаходиться у центрі ваги циліндра,  
 вісь  $x$  спрямована по осі циліндра.

- **Пряма піраміда**

Основа – прямокутник зі сторонами  $a$  і  $b$ . Початок координат у центрі ваги піраміди, вісь  $Ox$  проходить через вершину, вісь  $Oy$  паралельна стороні  $a$  основи:

$$I_x = \frac{1}{20}M(a^2 + b^2) , \quad I_y = \frac{1}{20}M\left(b^2 + \frac{3}{4}h^2\right) .$$

- **Прямий круговий конус:**

$$I_x = \frac{3}{10}MR^2 , \quad I_y = \frac{3}{20}M\left(R^2 + \frac{1}{4}h^2\right) ,$$

де  $R$  - радіус основи;  
 $h$  - висота конуса.

Початок координат у центрі ваги, вісь  $Ox$  спрямована по осі конуса.

• **Зрізаний прями́й круговий конус:**

$$I_x = \frac{3}{10} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3},$$

де  $R$  і  $r$  - радіуси основ;  
 $Ox$  - вісь конуса.

• **Куля**

Момент інерції відносно діаметра:

$$I = \frac{2}{5} MR^2.$$

• **Порожниста куля:**

$$I = \frac{2}{5} M \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

• **Оболонка кулі:**

$$I = \frac{2}{3} MR^2.$$

• **Півкуля**

Якщо початок координат збігається з центром ваги півкулі, що лежить на відстані  $\frac{3}{8}R$  від геометричного центра кулі, і вісь  $x$  проходить через центр кулі, то

$$I_x = \frac{2}{5} MR^2, \quad I_y = \frac{83}{320} MR^2,$$

де  $M$  - маса півкулі.

- **Кульовий сегмент** (рис. 1):

$$I_x = \frac{M(2R^2 - 1,5Rh + 0,3h^2)h}{3R - h},$$

де  $h$  - висота сегмента.

- **Кульовий сектор** (рис. 1):

$$I_x = \frac{1}{5}Mh(3R - h),$$

де  $h$  - висота відповідного сегмента.

- **Еліпсоїд**

Моменти інерції відносно головних осей  $2a$ ,  $2b$  і  $2c$  визначаються за формулами:

$$I_a = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2),$$

$$I_b = \frac{1}{5}M(a^2 + c^2),$$

$$I_c = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2).$$

- **Параболоїд обертання** (рис. 6):

$$I_x = \frac{1}{3}Mb^2,$$

$$I_c = \frac{1}{18}M(3b^2 + h^2).$$

- **Тор** (рис. 8)

Якщо перетин кільця - коло радіуса  $a$ , то

$$I_x = M\left(R^2 + \frac{3}{4}a^2\right),$$

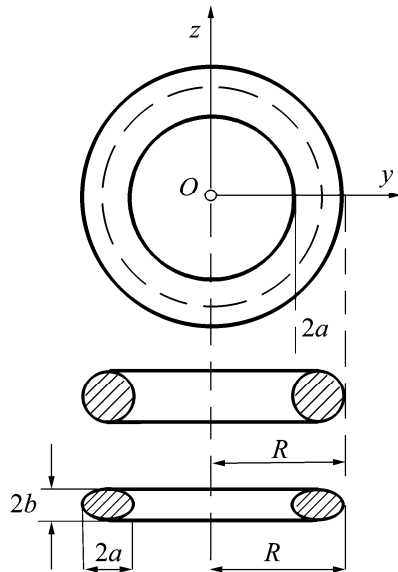


Рис. 8

$$I_y = \frac{1}{2} M \left( R^2 + \frac{5}{4} a^2 \right).$$

Якщо перетин кільця - еліпс, то

$$I_x = M \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 \right),$$

$$I_y = \frac{1}{2} M \left( R^2 + \frac{3}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \right).$$

Тут  $a \neq b$  - напівосі еліпса; їхнє розташування показано на рис. 8.

Початок координат у центрі симетрії кільця, вісь  $Ox$  спрямована по осі обертання.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2-х т.-М.:Наука,1961.-т.2.-624с.
2. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике.- М.:Наука, 1973.-448с.
3. Дронник Ю.М., Кучеренко С.И., Мазоренко Д.И., Тищенко Л.Н. Теоретическая механика. Краткий справочник. – Харьков, 2007.-360с.
4. Дронник Ю.М., Кучеренко С.И., Тищенко Л.М. Теоретична механіка. Курс лекцій.- Харків:Око, 2002.- 456с.
5. Мохір О.П., Тищенко Л.М., Кучеренко С.И., Бурлака В.В. Основи математики та фізики для теоретичної механіки. - Харків: Око, 2000.-344с.
6. Путьята Т.В., Фрадлін Б.Н. Методика розв'язування задач з теоретичної механіки.- К.:Рад.шк., 1955.-391с.
7. Булгаков В.М., Литвинов О.І., Войтюк Д.Г. Інженерна механіка. Частина І. Теоретична механіка. – Вінниця: Нова книга, 2006. – 504 с.



## ЗМІСТ

Вступ .....	3
<b>РОЗДІЛ ПЕРШИЙ</b>	
<b>КІНЕМАТИКА</b> .....	
<b>Тема 1 Кінематика точки</b> .....	5
Заняття 1. Координатний спосіб означення руху .....	5
1.1 Траєкторія і рівняння руху точки .....	5
1.2. Визначення швидкості і прискорення точки .....	7
1.3. Порядок розв'язування задач .....	8
1.4. Контрольні запитання .....	9
1.5. Приклади розв'язування задач.....	9
Заняття 2. Природний спосіб означення руху точки .....	17
1.6. Природний спосіб означення руху точки.....	17
1.7. Визначення швидкості і прискорення .....	18
1.8. Контрольні запитання.....	19
1.9. Приклади розв'язування задач.....	20
<b>Тема 2. Поступальний та обертальний види руху</b> <b>твердого тіла</b> .....	29
Заняття 3	
2.1. Поступальний рух твердого тіла.....	29
2.2. Обертальний рух твердого тіла.....	30
2.3. Рівномірний та рівнозмінний обертальний рух.....	32
2.4. Швидкість та прискорення точок тіла, що обертається .....	32
2.5. Контрольні запитання.....	33
2.6. Приклади розв'язування задач.....	34
<b>Тема 3. Складний рух точки</b> .....	42
Заняття 4	
3.1. Відносний, переносний і абсолютний рух точки .....	42
3.2. Відносні, переносні та абсолютні швидкості і прискорення.....	43
3.3. Додавання швидкостей та прискорень.....	44
3.4. Прискорення Кориоліса.....	45
3.5. Контрольні запитання.....	49
3.6. Приклади розв'язування задач.....	50
<b>Тема 4. Плоский рух тіла</b> .....	66
Заняття 5	
4.1. Рівняння плоского руху .....	66
4.2. Швидкості точок плоскої фігури. Миттєвий центр швидкостей .....	67

4.3. Порядок розв'язування задач .....	72
4.4. Контрольні запитання .....	73
4.5. Приклади розв'язування задач .....	73
<b>Заняття 6</b>	
4.6. Прискорення точок плоскої фігури .....	81
4.7. Порядок розв'язування задач .....	83
4.8. Контрольні запитання .....	83
4.9. Приклади розв'язування задач .....	84
<b>Заняття 7</b>	
4.10. План швидкостей .....	94
4.11. Порядок розв'язування задач .....	97
4.12. Контрольні запитання .....	97
4.13. Приклади розв'язування задач .....	98
<b>Заняття 8</b>	
4.14. План прискорень .....	111
4.15. Контрольні запитання .....	115
4.16. Приклади розв'язування задач .....	116

## **РОЗДІЛ ДРУГИЙ**

### **СТАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА** .....

<b>Тема 1. В'язі</b> .....	130
<b>Заняття 1</b>	
1.1. Основні поняття та аксіоми статички .....	130
1.2. Реакції в'язей .....	132
1.3. Види навантажень .....	136
1.4. Контрольні запитання .....	137
1.5. Розв'язок задач .....	138
<b>Тема 2. Система збіжних сил на площині</b> .....	145
<b>Заняття 2</b>	
2.1. Геометрична умова рівноваги системи збіжних сил .....	145
2.2. Геометричний метод розв'язування .....	147
2.3. Аналітичні умови рівноваги .....	147
2.4. Контрольні запитання .....	150
2.5. Приклади розв'язування задач .....	150
<b>Тема 3. Просторова система збіжних сил</b> .....	159
<b>Заняття 3</b>	
3.1. Система збіжних сил у просторі .....	159
3.2. Аналітичні умови рівноваги .....	161
3.3. Порядок розв'язування задач .....	161
3.4. Приклади розв'язування задач .....	162

<b>Тема 4. Довільна плоска система сил</b> .....	172
Заняття 4	
4.1. Момент сили відносно точки .....	172
4.2. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил .....	175
4.3. Порядок розв'язування задач .....	176
4.4. Контрольні запитання .....	176
4.5. Приклади розв'язування задач .....	176
<b>Тема 5. Рівновага складеної конструкції</b> .....	186
Заняття 5.	
5.1. Порядок розв'язування задач .....	186
5.2. Приклади розв'язування задач .....	187
<b>Тема 6. Розрахунок зусиль в стержнях ферми</b> .....	198
Заняття 6	
6.1. Прості ферми .....	198
6.2. Визначення зусиль в стержнях ферми .....	199
6.3. Порядок розв'язування задач .....	201
6.4. Контрольні запитання .....	203
6.5. Приклади розв'язування задач .....	203
<b>Тема 7. Довільна просторова система сил</b> .....	211
Заняття 7	
7.1. Момент сили відносно осі .....	211
7.2. Умови рівноваги довільної просторової системи сил .....	212
7.3. Порядок розв'язування задач .....	213
7.4. Контрольні запитання .....	213
7.5. Приклади розв'язування задач .....	213
<b>Тема 8. Рівновага тіла з урахуванням сил тертя</b> .....	228
Заняття 8.	
8.1. Закони тертя ковзання .....	228
8.2. Порядок розв'язування задач .....	230
8.3. Контрольні запитання .....	231
8.4. Приклади розв'язування задач .....	231
<b>Тема 9. Центр ваги</b> .....	242
Заняття 9.	
9.1. Центр паралельних сил .....	242
9.2. Центр ваги .....	243
9.3. Центри ваги деяких плоских однорідних фігур .....	246
9.4. Контрольні запитання .....	249
9.5. Приклади розв'язування задач .....	249

**РОЗДІЛ ТРЕТІЙ**

<b>ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ</b> .....	258
<b>Тема 1. Пряма задача динаміки точки</b> .....	259
Заняття 1	
1.1. Основні закони динаміки.....	259
1.2. Рівняння руху матеріальної точки у декартовій і природній системах відліку.....	260
1.3. Дві основні задачі динаміки матеріальної точки.....	261
1.4. Контрольні запитання.....	261
1.5. Порядок розв'язування прямої задачі динаміки вільної матеріальної точки .....	262
1.6. Приклади розв'язування задач.....	262
<b>Тема 1. Пряма задача динаміки точки (продовження)</b> .....	273
Заняття 2 .....	273
<b>Тема 2. Обернена задача динаміки</b> .....	288
Заняття 3.	
2.1. Обернена задача динаміки.....	288
2.2. Порядок розв'язування оберненої задачі динаміки .....	290
2.3. Контрольні запитання.....	291
2.4. Приклади розв'язування задач.....	291
<b>Тема 2. Обернена задача динаміки (продовження)</b> .....	306
Заняття 4. ....	306
<b>Тема 3. Коливання матеріальної точки</b> .....	325
Заняття 5.	
3.1. Вільні гармонічні коливання матеріальної точки .....	325
3.2. Вплив сталожі сили на вільні коливання.....	327
3.3. Контрольні запитання.....	327
3.4. Порядок розв'язування задач на вільні коливання .....	328
3.5. Приклади розв'язування задач.....	328
<b>Тема 3. Коливання матеріальної точки (продовження)</b> .....	342
Заняття 6.	
3.6. Затухаючі коливання матеріальної точки .....	342
3.7. Контрольні запитання.....	346
3.8. Приклади розв'язування задач.....	347
<b>Тема 3. Коливання матеріальної точки (продовження)</b> .....	361
Заняття 7.	
3.9. Вимушені коливання матеріальної точки без урахування опору .....	361
3.10. Контрольні запитання.....	366
3.11. Приклади розв'язування задач .....	367

<b>Тема 4. Відносний рух матеріальної точки</b> .....	378
Заняття 8	
4.1. Відносний рух матеріальної точки .....	378
4.2. Контрольні запитання.....	381
4.3. Порядок розв'язування задач динаміки відносного руху матеріальної точки .....	381
4.4. Приклади розв'язування задач .....	382

## РОЗДІЛ ЧЕТВЕРТИЙ

### ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ.....

<b>Тема 5. Геометрія мас</b> .....	398
Заняття 9	
5.1. Механічна система. Центр мас механічної системи .....	398
5.2. Порядок розв'язування задач на визначення центра мас механічної системи .....	399
5.3. Приклади розв'язування задач .....	400
<b>Геометрія мас (продовження)</b> .....	411
Заняття 10.	
5.4. Моменти інерції твердого тіла відносно осі .....	411
5.5. Момент інерції деяких однорідних тіл.....	414
5.6. Контрольні запитання.....	415
5.7. Приклади розв'язування задач.....	415
<b>Тема 6. Теорема про рух центра мас механічної системи</b> .....	426
Заняття 11.	
6.1. Теорема про рух центра мас.....	426
6.2. Закон збереження руху центра .....	428
6.3. Контрольні запитання.....	429
6.4. Порядок розв'язування задач на застосування теорему про рух центра мас.....	429
6.5. Приклади розв'язування задач.....	429
<b>Тема 7. Теорема про зміну кількості руху точки і механічної системи</b> .....	445
Заняття 12.	
7.1. Імпульс сили.....	445
7.2. Теорема про зміну кількості руху точки і системи .....	446
7.3. Закон збереження кількості руху системи .....	450
7.4. Контрольні запитання.....	450
7.5. Порядок розв'язування задач на застосування теорему про зміну кількості руху точки і механічної системи 451	
7.6. Приклади розв'язування задач.....	451

<b>Тема 8. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і механічної системи</b> .....	463
Заняття 13	
8.1. Теорема про зміну моменту кількості руху точки і механічної системи .....	463
8.2. Диференціальне рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої осі.....	466
8.3. Контрольні запитання.....	468
8.4. Порядок розв'язування задач на застосування теореми про зміну кількості руху точки і механічної системи.....	468
8.5. Приклади розв'язування задач.....	469
<b>Тема 9. Робота і потужність сили</b> .....	482
Заняття 14.	
9.1. Робота сили.....	482
9.2. Потужність сили.....	486
9.3. Контрольні запитання.....	487
9.4. Порядок розв'язування задач на визначення роботи і потужності сили .....	487
9.5. Приклади розв'язування задач.....	488
<b>Тема 10. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи</b> .....	500
Заняття 15	
10.1. Кінетична енергія механічної системи.....	500
10.2. Визначення кінетичної енергії твердого тіла у різних випадках його руху .....	501
10.3. Теорема про зміну кінетичної енергії механічної системи.....	503
10.4. Контрольні запитання.....	504
10.5. Порядок розв'язування задач з використанням теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи .....	504
10.6. Приклади розв'язування задач .....	505
<b>Тема 11 Динаміка плоского руху твердого тіла</b> .....	520
Заняття 16	
11.1. Диференціальні рівняння плоского руху твердого тіла .....	520
11.2. Контрольні запитання.....	522
11.3. Порядок розв'язування задач динаміки плоского руху твердого тіла .....	522
11.4. Приклади розв'язування задач.....	523
<b>Тема 12 Принцип Даламбера (метод кінетостатики)</b> .....	541
Заняття 17	
12.1. Принцип Даламбера для матеріальної точки і механічної системи .....	541

12.2. Приведення сил інерції точок твердого тіла до найпростішого вигляду.....	545
12.3. Контрольні запитання.....	546
12.4. Порядок розв'язування задач на застосування принципу Даламбера.....	547
12.5. Приклади розв'язування задач.....	547
<b>Тема 13 Принцип можливих переміщень</b> .....	<b>558</b>
Заняття 18	
13.1. Класифікація в'язей, можливі переміщення.....	558
13.2. Принципи можливих переміщень.....	561
13.3. Контрольні запитання.....	562
13.4. Порядок розв'язування задач за допомогою принципу можливих переміщень.....	563
13.5. Приклади розв'язування задач.....	563
<b>Тема 14. Загальне рівняння динаміки</b> .....	<b>577</b>
Заняття 19	
14.1. Загальне рівняння динаміки.....	577
14.2. Порядок розв'язування задач на застосування загального рівняння динаміки.....	579
14.3. Приклади розв'язування задач.....	579
<b>Тема 15. Теорія удару</b> .....	<b>594</b>
Заняття 20	
15.1. Явище удару. Основне рівняння теорії удару.....	594
15.2. Удар тіла в нерухому перешкоду.....	595
15.3. Прямий центральний удар двох тіл (удар куль).....	597
15.4. Втрата кінетичної енергії при непружному ударі двох тіл.....	599
15.5. Контрольні запитання.....	599
15.6. Порядок розв'язування задач.....	600
15.7. Приклади розв'язування задач.....	600
<b>ДОДАТКИ</b> .....	<b>611</b>
1. Найпростіші алгебраїчні формули.....	611
2. Формула коренів квадратного рівняння.....	611
3. Градуси – радіани.....	611
4. Формули подвійного кута.....	611
5. Формули ділення аргументу навпіл.....	612
6. Формули зниження степені.....	612
7. Формули додавання аргументу.....	612
8. Формули перетворення суми тригонометричних функцій в добуток.....	612
9. Знаки тригонометричних функцій по квадрантах.....	612

10. Значення тригонометричних функцій деяких кутів .....	613
11. Формули зведення .....	613
12. Формули, які пов'язують функції одного і того ж аргументу.....	613
13. Співвідношення в довільному та прямокутному трикутниках.....	614
14. Площа ( $S$ ) геометричних фігур .....	615
15. Визначення похідної від функції.....	616
16. Правила диференціювання функцій.....	616
17. Похідні та диференціали елементарних функцій.....	617
18. Таблиця невизначених інтегралів.....	618
19. Вектор .....	618
20. Додавання векторів.....	619
21. Віднімання векторів.....	619
22. Координатна форма вектора .....	619
23. Проекції вектора на координатні осі.....	619
24. Напрявні косинуси .....	620
25. Радіус-вектор точки, його модуль та напрямні косинуси. ....	620
26. Скалярний добуток векторів (скаляр).....	620
27. Векторний добуток векторів.....	621
28. Деякі фізичні сталі (константи) .....	621
29. Моменти інерції .....	621
1. Моменти інерції мас, розподілених по лінії .....	621
2. Моменти інерції мас, розподілених по площині .....	622
3. Моменти інерції мас, розподілених по об'єму .....	626
<b>ЛІТЕРАТУРА</b> .....	<b>631</b>
<b>ЗМІСТ</b> .....	<b>632</b>



Навчальне видання

Булгаков Володимир Михайлович  
Бурлака Володимир Васильович  
Лукач Василь Степанович  
Дроннік Юрій Михайлович  
Кучеренко Сергій Іванович  
Мазоренко Дмитро Іванович  
Тіщенко Леонід Миколайович

## **ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА** **ПОСІБНИК ДЛЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**

Редактор *Василюк В.І.*  
Коректор *Сіренко Т.В.*  
Комп'ютерна верстка *Лисенко Л.І.*

---

Підписано до друку 16.01.2009 р. Формат 60x84/16  
Гарнітура Computer modern. Ум. др. арк. 40,5  
Зам. № 004

---

Папір офсетний.  
Тираж 500 прим.



Віддруковано ПП Лисенко М.М.  
м. Ніжин, вул. Шевченка, 26. Тел.: 8 (067) 4412124  
E-mail: [milanik@land.ru](mailto:milanik@land.ru)

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру  
суб'єктів видавничої справи  
серія ДК №2776 від 26.02.2007 р.