

Калінін Є.І.,
Романченко В.М.,
Шуляк М.Л.,
Поляшенко С.О.
Харківський національний
технічний університет
сільського господарства
імені Петра Василенка,
м. Харків, Україна
E-mail: kalininhtusg@gmail.com

БАЛАНСУВАННЯ ВАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ЇХ ДЕФОРМАЦІЙ В ПРОЦЕСІ ЕКСПЛУАТАЦІЇ

УДК 631.317

В роботі розглянуто один з методів рівноваження валів з урахуванням їх деформацій в процесі експлуатації. Звернуто увагу на той факт, що в процесі експлуатації на режимах, які значно нижче резонансних, висувається вимога щодо зниження пружних коливань вала, які негативно впливають на величину переданого крутного моменту і знижують коефіцієнт корисної дії всього передавального ланки.

Встановлено, що при вивченні системи «гнучкий вал», остання повинна розглядатися як система з розподіленими параметрами у вигляді жорсткості і маси. Крім того, визначено, що при балансуванні можна враховувати тільки перші дві гармоніки небалансу.

Ключові слова: гнучкий вал, деформація, гармоніка небалансу, система з розподіленими параметрами

Вступ. Обертання неврівноваженого ротора призводить до виникнення інерційних зусиль, які впливають на опори ротора і призводять до виникнення вібрацій машини. Автори всіх робіт по балансуванню роторів традиційно вважають, що прояв неврівноваженості у вигляді інерційних зусиль не залежить від сталості кутової швидкості його обертання і тому, приймаючи цю швидкість постійною, вважають величини цих зусиль постійними, а напрямок змінним, так як ці зусилля, будучи пов'язаними з незмінною геометрією мас ротора, обертаються разом з ним. Тому динамічні впливи на машину від неврівноваженості її ротаційного агрегату покладаються гармонійними з частотою обертання ротора. Така динамічна модель неврівноваженого ротора на машині адекватна представленню ротора як абсолютно жорсткого тіла, що обертається в абсолютно жорстких опорах з постійною кутовою швидкістю

Аналіз основних публікацій та досліджень. Процес балансування роторів зводиться до визначення величини і місця розташування додаткових мас, які повинні бути прикріплені до місця з тим, щоб звести до мінімуму реакції в опорах [1, 2]. Однак в деяких випадках, навіть при порівняно жорстких валах, що працюють в дорезонансному режимі, умови його роботи вимагають зведення до заданого мінімуму пружних коливань валу, що порушують технологічний процес. При цьому доводиться мати справу з системою, яка має розподілені параметри (масу і жорсткість), яку ми і будемо називати гнучким валом. Під балансуванням гнучкого валу ми розуміємо процес визначення і компенсації відцентрових сил незбалансованих мас останнього [3, 4].

Метою даної роботи є розробка методики балансування гнучкого валу з урахуванням його прогину під час експлуатації.

Вирішення задачі. Введемо дві системи осей з початком їх на геометричній вісі обертання z (рис. 1): нерухомі вісі x , y , z і вісі ξ , η , z , що обертаються разом з валом з кутовою швидкістю ω , яку будемо припускати значно меншою першої власної частоти коливань валу.

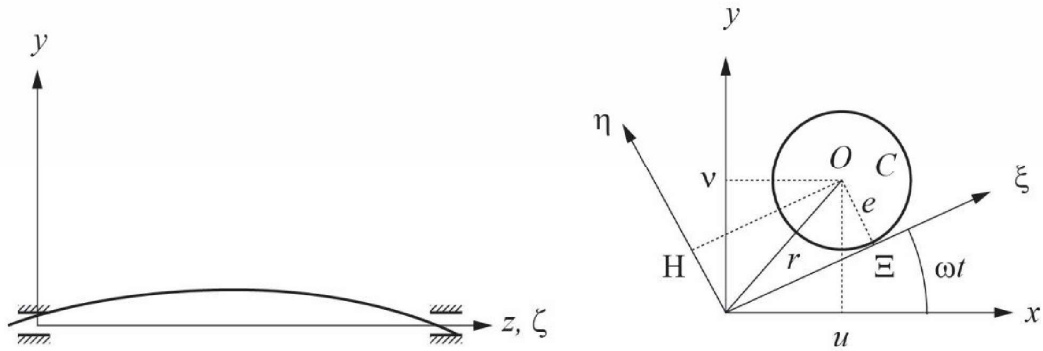


Рис. 1 – Розрахункова схема системи «гнучкий вал»

Нехай точка O деякого перетину при відсутності обертання збігалася з геометричною віссю. При обертанні валу ця точка, внаслідок наявності небалансу, отримує переміщення, яке визначається радіус-вектором r . Проекції цього переміщення на вісі x, y позначимо через u, v , а проекції його на вісі ξ, η – через Ξ, H . Очевидно, що:

$$\begin{cases} \Xi = u \cos \omega t + v \sin \omega t; \\ \text{H} = -u \sin \omega t + v \cos \omega t. \end{cases} \quad (1)$$

Небаланс валу в кожному даному перетині визначається відстанню e від точки O до центру ваги перетину C ; його проекції на вісі x, y та ξ, η , які пов'язані між собою співвідношеннями:

$$\begin{cases} e_x = e_\xi \cos \omega t - e_\eta \sin \omega t; \\ e_y = e_\xi \sin \omega t + e_\eta \cos \omega t. \end{cases} \quad (2)$$

Рівняння руху ділянки валу в нерухомих вісях x, y мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} \rho(\ddot{u} - \omega^2 e_x) = -EJu^{IV} - \beta\dot{u}; \\ \rho(\ddot{v} - \omega^2 e_y) = -EJv^{IV} - \beta\dot{v}. \end{cases} \quad (3)$$

Тут E – модуль пружності матеріалу валу; J – момент інерції перерізу; β – коефіцієнт тертя; $\rho = \frac{\gamma S}{g}$ – щільність (маса одиниці довжини); γ – питома вага; S – площа перерізу валу. Всі ці параметри передбачаються постійними.

Вводячи позначення

$$\alpha^4 = \frac{EJg}{\gamma S}, \quad 2h = \frac{\beta g}{\gamma S}. \quad (4)$$

та враховуючи співвідношення (2), перепишемо рівняння (3) наступним чином:

$$\begin{cases} \ddot{u} + 2hu + \alpha^4 u^{IV} = \omega^2 (e_\xi \cos \omega t - e_\eta \sin \omega t); \\ \ddot{v} + 2hv + \alpha^4 v^{IV} = \omega^2 (e_\xi \sin \omega t + e_\eta \cos \omega t). \end{cases} \quad (5)$$

Вважаючи в формулах (5) $e_\xi = e_\eta = 0$, отримаємо рівняння вільних коливань валу. Опори валу при малих переміщеннях мають властивості шарнірів, тому крайові умови мають наступний вигляд:

$$\begin{cases} u(0) = u''(0) - u(l) = u''(l) = 0; \\ v(0) = v''(0) - v(l) = v''(l) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

При цьому отримаємо відомий частинний розв'язок рівнянь (5) для вільних коливань:

$$u^\circ = U_m^\circ(t) \sin \frac{m\pi z}{l}, \quad v^\circ = V_m^\circ(t) \sin \frac{m\pi z}{l}. \quad (7)$$

причому $\frac{m\pi z}{l}$ – форма коливань з номером « m »; l – довжина валу, а функції $U_m^\circ(t)$, $V_m^\circ(t)$ мають вигляд затухаючих коливань, частота яких, внаслідок малості коефіцієнта тертя h , може бути підрахована за формулою:

$$\omega_m = \frac{m^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJg}{\gamma S}}. \quad (8)$$

Формула (8) визначає критичні кутові швидкості валу. Для знаходження вимушених коливань, обумовлених рівняннями (5), представимо складові небалансу e_ξ і e_η розкладеними в ряд за власними функціями (формами) вільних коливань:

$$e_\xi = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi z}{l}, \quad e_\eta = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin \frac{m\pi z}{l}. \quad (9)$$

Тут постійні A_m , B_m – коефіцієнти Фур'є для функцій e_ξ та e_η , що визначаються за формулами:

$$A_m = \frac{2}{l} \int_0^l e_\xi(z) \sin \frac{m\pi z}{l} dz, \quad B_m = \frac{2}{l} \int_0^l e_\eta(z) \sin \frac{m\pi z}{l} dz. \quad (10)$$

У відповідності з (9) розв'язок рівнянь (5) також представляється рядами:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(t) \sin \frac{m\pi z}{l}, \quad v = \sum_{m=1}^{\infty} V_m(t) \sin \frac{m\pi z}{l}, \quad (11)$$

причому функції $U_m(t)$ і $V_m(t)$ повинні визначатися з рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{U}_m + 2h\dot{U}_m \frac{m^4 \pi^4 \alpha^4}{l^4} U_m = (A_m \cos \omega t - B_m \sin \omega t) \omega^2; \\ \ddot{V}_m + 2h\dot{V}_m \frac{m^4 \pi^4 \alpha^4}{l^4} V_m = (A_m \sin \omega t - B_m \cos \omega t) \omega^2. \end{cases} \quad (12)$$

Легко бачити, що сталий режим вимушених коливань визначається виразами:

$$\begin{cases} U_m(t) = K_m \cos \omega t - L_m \sin \omega t; \\ V_m(t) = K_m \sin \omega t - L_m \cos \omega t, \end{cases} \quad (13)$$

де

$$K_m = \frac{(m^4 \lambda^2 - 1)A_m + \sigma B_m}{(m^4 \lambda^2 - 1)^2 + \sigma^2}, \quad L_m = \frac{(m^4 \lambda^2 - 1)B_m + \sigma A_m}{(m^4 \lambda^2 - 1)^2 + \sigma^2}. \quad (14)$$

Тут введені позначення $\lambda = \frac{\omega_1}{\omega}$; $\sigma = \frac{2h}{\omega}$; крім того, ми скористалися співвідношенням $\omega_m = m^2 \omega_1$. Зазвичай частота робочих оборотів значно менше першої власної частоти ω_1 (відношення $\frac{\omega_1}{\omega}$ має порядок 3...4,5). Розглядаючи саме такий випадок (далеко від резонансу), ми можемо знехтувати тертям, тобто покласти $\sigma = 0$. Тоді формули (14) значно спростяться:

$$K_m = \frac{A_m}{m^4 \lambda^2 - 1}, \quad L_m = \frac{B_m}{m^4 \lambda^2 - 1}. \quad (15)$$

Підставляючи вирази (15) в систему (13), а (13) в (11), отримаємо:

$$\begin{cases} u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4 \lambda^2 - 1} (A_m \cos \omega t - B_m \sin \omega t) \sin \frac{m\pi z}{l}; \\ v = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4 \lambda^2 - 1} (B_m \cos \omega t + A_m \sin \omega t) \sin \frac{m\pi z}{l}. \end{cases} \quad (16)$$

Якщо перейти тепер до проєкцій переміщень на вісі $\xi\eta$, які обертаються разом з валом, то, відповідно до формул (1), отримаємо:

$$\begin{cases} \Xi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{m^4 \lambda^2 - 1} \sin \frac{m\pi z}{l}; \\ \text{H} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_m}{m^4 \lambda^2 - 1} \sin \frac{m\pi z}{l}. \end{cases} \quad (17)$$

Як видно з (16) або (17), амплітуди коливань гармонік містять в знаменнику порядок гармоніки m в четвертому ступені. Тому при балансуванні ми будемо брати до уваги тільки дві перші гармоніки небалансу і відповідно з рядів (16) і (17) залишимо тільки члени, що відповідають елементам з індексами $m = 1$ і $m = 2$.

Перейдемо тепер безпосередньо до проблеми балансування гнучкого валу, тобто до визначення небалансу і його компенсації додатковими вантажами. Визначення небалансу, очевидно, полягає в знаходженні величин A_m і B_m , які за фізичним змістом є амплітудами гармонік небалансу в його розкладанні за власними функціями. Однак компенсацію цього небалансу ми будемо проводити зосередженими вантажами, поміщаючи їх в деяких перетинах валу, що визначаються значеннями координати z .

Знайдемо насамперед спектр гармонік небалансу, одержуваного від зосередженого вантажу q , якій поміщено на відстані r від вісі валу в перерізі $z = \zeta$. Нехай, наприклад, вантаж q_ξ розташований в площині $z\xi$ системи координат, що обертається. Тоді функція $e_\xi(z)$ в формулі (10) буде визначатися співвідношеннями:

$$e_\xi(z) = 0 \text{ при } 0 \leq z < \zeta - \frac{\varepsilon}{2} \text{ або при } \zeta + \frac{\varepsilon}{2} < z \leq l$$

$$e_\xi(z) = \frac{rq_\xi l}{Q\varepsilon} \text{ при } \zeta - \frac{\varepsilon}{2} \leq z \leq \zeta + \frac{\varepsilon}{2},$$

де Q – вага валу; ε – довжина ділянки валу, на якій фактично розподілений вантаж q_ξ .

Провівши обчислення за формулою (10) і спрямовуючи ε до нуля, отримаємо:

$$A_m = \frac{2rq_\xi}{Q} \sin \frac{m\pi\zeta}{l}. \quad (18)$$

Аналогічно, для вантажу q_η , що діє в площині $z\eta$, маємо:

$$B_m = \frac{2rq_\eta}{Q} \sin \frac{m\pi\zeta}{l}. \quad (19)$$

Помістимо, наприклад, вантажі q_ξ та q_η посередині валу $\left(\zeta = \frac{l}{2}\right)$, тоді за формулами (18) і (19) маємо:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{2rq_\xi}{Q}, A_2 = 0, A_3 = -\frac{2rq_\xi}{Q}, A_4 = 0, \dots \\ B_1 = \frac{2rq_\eta}{Q}, B_2 = 0, B_3 = -\frac{2rq_\eta}{Q}, B_4 = 0, \dots \end{cases} \quad (20)$$

після чого за формулами (17) отримаємо наступні значення динамічних прогинів в вісях $\xi\eta$, що обертаються (при цьому припущено, що $\lambda^2 \gg 1$):

$$\Xi \approx \frac{2rq_\xi}{\lambda^2 Q} \left(\sin \frac{\pi z}{l} - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \right);$$

$$\text{H} \approx \frac{2rq_\eta}{\lambda^2 Q} \left(\sin \frac{\pi z}{l} - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi z}{l} + \dots \right).$$

Таким чином, посередині валу вантаж створює динамічні прогини, які з точністю до 1% представляють першу форму пружної лінії вигнутого валу.

Помістимо тепер на валу два однакових вантажу q в перетинах $\zeta_1 = \frac{l}{4}$ і $\zeta_2 = \frac{3l}{4}$ на відстанях $r_1 = r$ і $r_2 = -r$ від вісі (тобто вантажі розташовані на діаметрально протилежних твірних). В цьому випадку коефіцієнти Фур'є, відповідно до формул (10) і (18), будуть:

$$\begin{cases} A_1 = 0, A_2 = \frac{4rq_\xi}{Q}, A_3 = A_4 = A_5 = 0, \dots \\ B_1 = 0, B_2 = \frac{4rq_\eta}{Q}, B_3 = B_4 = B_5 = 0, \dots \end{cases} \quad (21)$$

Отже, два вантажа, які розташовані на діаметрально протилежних твірних в перетинах $\zeta_1 = \frac{l}{4}$ і $\zeta_2 = \frac{3l}{4}$ з дуже високою точністю створюють прогини, що представляють другу форму пружної лінії валу.

Площину, в якій лежить перша форма небалансу, ми можемо знайти, заміривши фазу коливання відносно валу (вібродатчик поміщається в середньому перерізі валу). Направимо вісь ξ системи, що обертається, по радіусу, що проходить через твірну, яка лежить в площині небалансу. При цьому для першої форми небалансу отримаємо:

$$A_1 \neq 0, B_1 = 0.$$

В точці $z = \frac{l}{2}$ знайдемо:

$$\begin{cases} u\left(\frac{l}{2}\right) = A_1 \frac{\cos \omega t}{\lambda^2 - 1}; \\ v\left(\frac{l}{2}\right) = A_1 \frac{\sin \omega t}{\lambda^2 - 1} \end{cases} \quad (22)$$

Нехай амплітуда коливань, яка заміряна в середньому перерізі валу, буде C_1 , тоді з будь-якого співвідношення формул (22) знайдемо:

$$C_1 = \frac{A_1}{\lambda^2 - 1} \text{ та } A_1 = (\lambda^2 - 1)C_1. \quad (23)$$

Якщо ми хочемо збалансувати першу форму небалансу вантажем, поміщеним в середньому перерізі валу, то по (20) маємо:

$$A_1 = \frac{2rq_1}{Q}. \quad (24)$$

Порівнюючи вирази (23) та (24), знайдемо:

$$q_1 = \frac{C_1(\lambda^2 - 1)}{2r} Q. \quad (25)$$

Обчисливши за (25) величину вантажу q_1 і закріпивши його на валу в протифазі зі знайденим напрямком першої форми небалансу, ми скомпенсуємо цю форму і, отже, можемо вважати, що після цього величина A_1 обернулась в нуль. Тоді коливання валу будуть визначатися лише другою формою небалансу.

Помістимо тепер вібрдатчик в перерізі валу $z = \frac{l}{4}$ і визначимо фазу коливання по відношенню до валу. Тоді знайдемо площину діаметрального перерізу валу, в якому лежить друга форма небалансу.

Спрямуємо вісь ξ , що обертається разом з валом, за відповідним напрямком в площині другої форми. Як і в першому випадку, отримаємо:

$$A_2 \neq 0, B_2 = 0.$$

В перерізі валу $z = \frac{l}{4}$ будемо мати:

$$\begin{cases} u\left(\frac{l}{4}\right) = A_2 \frac{\cos \omega t}{16\lambda^2 - 1}; \\ v\left(\frac{l}{4}\right) = A_2 \frac{\sin \omega t}{16\lambda^2 - 1} \end{cases} \quad (26)$$

Нехай амплітуда коливань валу, яка заміряна в перерізі $z = \frac{l}{4}$, буде C_2 , тоді з (26):

$$C_2 = \frac{A_2}{16\lambda^2 - 1}. \quad (27)$$

Якщо для компенсації другої форми помістимо на валу два вантажі q_2 в перетинах $\frac{l}{4}$ і $\frac{3l}{4}$ (у відповідних напрямках, визначених при вимірі фази коливань), то по (21) будемо мати:

$$A_2 = \frac{4rq_2}{Q}. \quad (28)$$

Порівнюючи залежності (27) і (28), знайдемо величини вантажів q_2 , що компенсують другу гармоніку:

$$q_2 = \frac{(16\lambda^2 - 1)C_2Q}{4r}. \quad (29)$$

Зауважимо, що при практичній роботі немає необхідності робити обчислення вантажів q_1 і q_2 за формулами (25) і (29).

Процес балансування можна робити в такий спосіб. Наприклад, для компенсації першої форми встановлюємо датчик в середньому перерізі валу і скомпенсовуємо показання реєструючого приладу будь-якою синусоїдальною напругою. Тоді ми будемо мати як би збалансований по першій формі вал.

Помістимо тепер в середньому перерізі валу відомий вантаж q_1^* на відстані r від осі. Для нього по (25) отримаємо:

$$q_1^* = \frac{C_1^*(\lambda^2 - 1)Q}{2r},$$

де C_1^* – амплітуда коливань, яка заміряна вібрдатчик і формується контрольним вантажем q_1^* . Якщо тепер прибрати вантаж q_1^* і заміряти справжню амплітуду коливань, то по (25) маємо:

$$q_1 = \frac{C_1(\lambda^2 - 1)Q}{2r}.$$

З цих залежностей вага балансуючого вантажу:

$$q_1 = q_1^* \frac{C_1}{C_1^*}. \quad (30)$$

Якщо вантаж q_1 остаточно буде закріплений на іншому радіусі R , то

$$q_1 = q_1^* \frac{C_1}{C_1^*} \cdot \frac{r}{R}. \quad (31)$$

Аналогічно для другої форми, проводячи ті ж міркування, отримасмо величину двох балансуючих вантажів:

$$q_2 = q_2^* \frac{C_2}{C_2^*} \cdot \frac{r}{R}, \quad (32)$$

де q_2^* – вага кожного з двох контрольних вантажів, які розміщені в перетинах валу $z = \frac{l}{4}$ і $\frac{3l}{4}$ після фіктивного врівноваження валу.

Висновки. На основі розробленої методики балансування гнучких валів, можна зробити висновок, що для того, щоб збалансувати дві форми в кривій небалансу валу, потрібно, взагалі кажучи, шість вантажів. Однак, якщо відомі площині, в яких розташована перша і друга форми небалансу, то можна обмежитися трьома вантажами.

Література:

1. Чистяков В.К. Динамика поршневых и комбинированных двигателей внутреннего сгорания: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности «Двигатели внутреннего сгорания» / В.К. Чистяков. – М.: Машиностроение, 1989. – 255 с.
2. Беркович Д.М. Силы инерции в технике и их уравнивание: научное издание / Д.М. Беркович. – М.; Киев: Машгиз, 1963. – 101 с
3. Теория и практика уравнивания машин и приборов: научное издание / под ред. В. А. Щепетильникова. – М.: Машиностроение, 1970. – 440 с.
4. Теория и конструкция балансировочных машин: научное издание / Под ред. В. А. Щепетильникова. – М.: Машгиз, 1963. – 444 с.
5. Калінін Є.І. Формування умови стійкості лінійної системи при випадкових збуреннях її параметрів / Є.І. Калінін, В.М. Романченко, Г.П. Юр'єва // Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів – 2017. – № 7. – С. 100 -108.
6. Калінін Є.І. Дослідження перехідних процесів в коробці змінних передач мобільного енергетичного засобу / Є.І. Калінін, М.Л. Шуляк, І.О. Шевченко // Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка. – 2016. – Вип. 168. – С. 73-79.

Summary

Kalinin E.I., Romanchenko V.M., Shuljak M.L., Poljashenko S.O. Balancing of shafts taking into account their deformations during operation

In the article one of the methods of equilibration of shafts taking into account their deformations in the process of operation is considered. Attention is drawn to the fact that during operation at modes that are significantly lower than the resonant ones, a requirement is put forward to

reduce the elastic vibrations of the shaft, which negatively affect the magnitude of the transmitted torque and reduce the efficiency of the entire transmission link.

It is established that when studying the "flexible shaft" system, the latter should be considered as a system with distributed parameters in the form of rigidity and mass. In addition, it is determined that in balancing, only the first two harmonics of unbalance can be taken into account.

Keywords: *flexible shaft, deformation, harmonic of unbalance, system with distributed parameters*

References

1. Chistyakov V.K. Dinamika porshnevnyh i kombinirovannyh dvigatelej vnutrennego sgoraniya: uchebnik dlya studentov vuzov, obuchayushihsia po specialnosti «Dvigateli vnutrennego sgoraniya» / V.K. Chistyakov. – M.: Mashinostroenie, 1989. – 255 s.
2. Berkovich D.M. Sily inercii v tehnikе i ih uravnoveshivanie: nauchnoe izdanie / D.M. Berkovich. – M.; Kiev: Mashgiz, 1963. – 101 s
3. Teoriya i praktika uravnoveshivaniya mashin i priborov: nauchnoe izdanie / pod red. V. A. Shepetilnikova. – M.: Mashinostroenie, 1970. – 440 s.
4. Teoriya i konstrukciya balansirovochnykh mashin: nauchnoe izdanie / Pod red. V. A. Shepetilnikova. – M.: Mashgiz, 1963. – 444 s.
5. Kalinin Ye.I. Formuvannya umovi stijkosti liniynoyi sistemi pri vipadkovih zburennyah yiyi parametriv / Ye.I. Kalinin, V.M. Romanchenko, G.P. Yur'yeva // Tehnichnij servis agropromislovogo, lisovogo ta transportnogo kompleksiv – 2017. – № 7. – S. 100 -108.
6. Kalinin Ye.I. Doslidzhennya perehidnih procesiv v korobci zminnih peredach mobil-nogo energetichnogo zasobu / Ye.I. Kalinin, M.L. Shulyak, I.O. Shevchenko // Visnik HNTUSG im. Petra Vasilenka. – 2016. – Vip. 168. – S. 73-79.