

Адамчук В. В.¹,
Дмитрів І. В.²,
Дмитрів В. Т.²

¹ Національний науковий центр
«Інститут механізації та електрифікації
сільського господарства»,
с.м.т. Глеваха, Київська обл., Україна
² Львівський національний
аграрний університет,
м. Дубляни, Львівська обл., Україна ;
E-mail: Dmytriv_Ihor@ukr.net

МОДЕЛЬ БІСТАБІЛЬНОЇ СТРИБКОПОДІБНОЇ МЕМБРАНИ, ЯК ЕЛЕМЕНТ СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

УДК 681.5

В статті розглянуто математичну модель залежності зусилля деформації мембрани від конструкційних параметрів та характеристики матеріалу. Мембрана виконана у вигляді зацмленої по кінцях стрічки відповідної ширини і товщини з пружного матеріалу і заданого вільного прогину. Приведена схема мембрани в трьох основних положеннях в залежності від величини прогину. Наведена дія сил і згинальних моментів. Складено рівняння рівноваги мембрани відповідно до сил навантаження і виведена аналітична залежність зусилля прогину мембрани від її конструкційних параметрів і характеристик матеріалу. Запропонована залежність для визначення повздовжньої реакції мембрани. Наведено приклад моделювання зусилля F_p , яке створює мембрана залежно від її прогину f та конструкційних параметрів, товщини, ширини і віддалі між кінцями закріплення стрічки мембрани. Максимальний прогин мембрани задається при закріпленні мембрани і відсутності зусилля опору. Матеріал мембрани – бронза марганцева, стрічка катана. Промодельовано зусилля яке створює мембрана залежно від прогину f проводили за наступних параметрів: матеріал мембрани – бронза марганцева, катана; товщина мембрани $h=0,1$ мм; ширина мембрани $b=1,2$ мм; відстань між кінцями закріплення мембрани $2L = 32$ мм; максимальний прогин мембрани $f_0 = 4$ мм. Наведено залежність зусилля яке створюється мембраною при її прогині від віддалі між кінцями її закріплення і площі поперечного перерізу. Для моделювання було використано стрічку бронзову марганцеву катану товщинною $h = 0,4$ мм і шириною $b = 0,4-2$ мм. Віддаль між кінцями закріплення мембрани приймали від 20 до 38 мм, а максимальний прогин мембрани становив $f_0 = 2$ мм. Мембрана має два стабільних діаметрально протилежних стани і один нестабільний стан при якому зусилля мембрани, за її прогину наближеному до нейтрального, рівне нулю і перехід з одного положення в діаметрально протилежне положення відбувається при переході через нестабільне положення стрибкоподібно. Збільшення вільного прогину мембрани веде до зростання зусилля опору мембрани. Характер зростання є лінійним. Максимальне зусилля мембрани відповідає половині вільного її прогину.

Ключові слова: мембрана, згинальний момент, деформація, моделювання, сила, момент інерції, модуль пружності

Вступ, постановка проблеми. Розроблення нескладних в обслуговуванні й функціонування технічних засобів контролю і регулювання динамічних характеристик роботи доїльного обладнання вимагає нового підходу до компонування виконавчих елементів та їх конструкції. Такі елементи повинні відповідати умовам: нескладність у виготовленні; довговічність функціонування; доступність технологічних регулювань.

В доїльному обладнанні важливими характеристиками є частота пульсації доїльного апарата, характер перемикавання тактів в міжстінній камері доїльних стаканів; величина вакуумметричного тиску і його стабільність [1]. Тому доцільно мати виконавчі еле-

менти, які використовуючи фізико-механічні властивості конструкції та матеріалу, дозволять регулювати технічні параметри виконавчої системи та технологічні характеристики процесу, що реалізує доїльне обладнання.

В процесі машинного доїння виникає необхідність як у плавній так і стрибкоподібній зміні вакуумметричного тиску у міжстінковій камері доїльного стакана в залежності від інтенсивності молоковіддачі. Зміна вакуумметричного тиску задається постійною часу перехідного процесі від такту стиску до такту ссання і навпаки [2-4]. Одним із елементів задання постійної часу перехідного процесу роботи системи “пульсатор-доїльний стакан” може бути пружна мембрана, як виконавчий елемент з регульованими характеристиками і ввімкнена в ланцюг перемикання тактів пульсатора.

Аналіз стану питання. Найбільш поширені на сьогодні пружинні перетворювачі (стержні, кільця, плоскі пружини, мембрани з жорстким центром, підвісні та спіральні пружини, плоскі мембрани і мембранні коробки, сільфони і трубки Бурдона) не володіють чіткими рекомендаціями до їх застосування в конкретних технологічних умовах [5]. Відсутня загальна методика розрахунку конструкційних параметрів.

Загальні положення теорії пружності дозволяють визначити максимальний прогин при максимальному навантаженні [6; 7]. Проте, наведені дослідження узагальнюють залежність зусилля від наперед заданої де доцільно в формації мембрани, що для технічних засобів регулювання тиску є важливим параметром.

Мета роботи. Аналітично обґрунтувати конструкційні параметри бістабільної хлопаючої мембрани в залежності від зусилля її прогину.

Розроблення моделі бістабільної хлопаючої мембрани. Для створення зусилля використаємо стрічку з пружного матеріалу прямокутного поперечного перерізу з наперед заданою деформацією. Її деформація забезпечується жорстким кріпленням по кінцях (рис. 1) за умови, що довжина стрічки є більшою від віддалі між закріпленням. Для мембрани характерно три основні положення (рис. 1, а): стабільне; проміжне регульоване, відповідає зусиллю, що створює мембрана за її деформації; проміжне нестабільне.

Так як мембрана жорстко закріплена по кінцях і за її прогину створюється зусилля. Деформацію мембрани здійснює прикладена сила F_p (рис. 1).

У результаті дії сили F_p , яка прогинає мембрану, на її кінцях виникатиме реакція N_0 та крутний момент M_0 (рис. 1 б, в).

Враховуючи, що мембрана закріплена по кінцях, кривизну прогину запишемо для максимального значення її прогину f_0 у вигляді [8]:

$$y_0(x) = \frac{f_0}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{2L} \right),$$

або

$$y_0(x) = \frac{f_0}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right), \quad (1)$$

де $2L$ – віддаль між двома закріпленнями кінцями мембрани (рис. 1).

Для заданого прогину f мембрани рівняння (1) матиме вигляд:

$$y(x) = \frac{f}{2} \cdot \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{2L} \right), \quad (2)$$

де x – відстань від кінця закріплення мембрани до точки визначення прогину, м; L – половина віддалі мембрани між двома точками її закріплення, м; f_0, f – максимальний і заданий прогин по середині мембрани, м.

Враховуючи закон Гука для згину [9], радіус кривизни для нейтрального шару та за заданої деформації і замінивши сталий згинальний момент M на змінний згинальний момент $M(x)$, запишемо:

$$\frac{M(x)}{E \cdot J} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_0} \right), \quad (3)$$

де $M(x)$ – змінний згинальний момент, Н·м; E – модуль пружності матеріалу мембрани, Н/м²; J – момент інерції перерізу мембрани відносно її нейтральної осі, м⁴; ρ_0, ρ – відповідно радіус кривизни нейтрального шару за максимального прогину по середині мембрани і за заданого прогину, м.

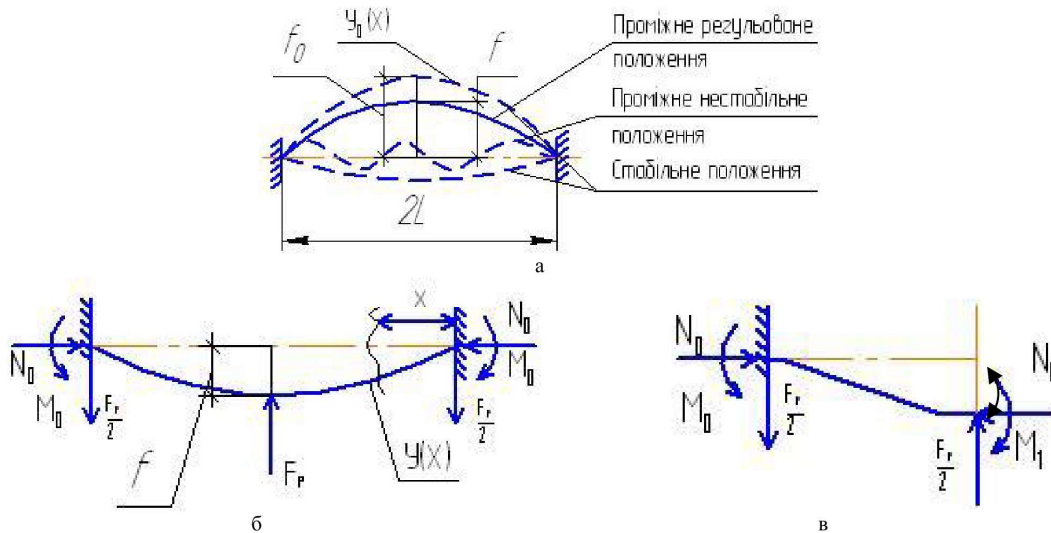


Рис. 1 – Схема бістабільної мембрани (а) та дії сил (б) і згинальних моментів (в):
 $2L$ – віддаль між зашкеленими кінцями мембрани; f_0 – максимальний прогин мембрани посередині за її стабільного положення; f – заданий прогин мембрани посередині за її проміжного положення

Геометрична інтерпретація першої похідної функції $y(x)$ є кут нахилу дотичної до мембрани її горизонталі [9]. Друга похідна функції $y(x)$ – наближене диференціальне рівняння зігнутої осі мембрани [9]:

$$\frac{1}{\rho} = y''(x).$$

Перша і друга похідні рівняння (1):

$$y'_0(x) = \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (4)$$

$$y''_0(x) = \frac{1}{\rho_0} = \frac{f_0}{2} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{L}. \quad (5)$$

Перша і друга похідні рівняння (2) мають вигляд:

$$y'(x) = \frac{f}{2} \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \sin \frac{\pi x}{L}, \quad (6)$$

$$y''(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{f}{2} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{L}. \quad (7)$$

Підставивши значення рівнянь (5) і (7) у рівняння (3) та задавши граничні значення x , одержимо такі залежності:

$$\text{при } x = 0 : \frac{M_0}{E \cdot J} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{f}{2} - \frac{f_0}{2} \right), \quad (8)$$

$$\text{при } x = L : \frac{M_1}{E \cdot J} = - \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot \left(\frac{f}{2} - \frac{f_0}{2} \right). \quad (9)$$

Рівняння рівноваги мембрани відповідно до сил навантаження (рис. 1, в) буде:

$$-M_0 + M_1 + N_0 f - F_p \cdot \frac{L}{2} = 0, \quad (10)$$

де F_p – сила, прикладена до мембрани, Н; N_0 – реакція мембрани, що діє поздовжньо, Н.

Для визначення повздовжньої реакції мембрани розрахуємо зменшення довжини половини дуги мембрани:

$$\Delta L = \int_0^L \sqrt{1 + y_0'^2} \cdot dx - \int_0^L \sqrt{1 + y'^2} \cdot dx. \quad (11)$$

Підставивши в рівняння (11) значення y_0' і y' з рівнянь (4) і (6), отримаємо:

$$\Delta L = \int_0^L \left(\sqrt{1 + \frac{f_0^2 \pi^2}{4L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L}} - \sqrt{1 + \frac{f^2 \pi^2}{4L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L}} \right) \cdot dx. \quad (12)$$

Оскільки $\left(\frac{f_0 \pi}{2L}\right)^2 \ll 1$, тоді:

$$\sqrt{1 + \frac{f_0^2 \pi^2}{4L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L}} \approx 1 + \frac{f_0^2 \pi^2}{8L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L}. \quad (13)$$

Аналогічно і для другого члена рівняння (12). Внесемо зміну в рівняння (12) з врахуванням виразу (13), тримаємо:

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^L \left(1 + \frac{f_0^2 \pi^2}{8L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L} - 1 - \frac{f^2 \pi^2}{8L^2} \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) \cdot dx = \\ &= \int_0^L \left(\frac{f_0^2 \pi^2}{8L^2} - \frac{f^2 \pi^2}{8L^2} \right) \cdot \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cdot dx = \frac{\pi^2}{8L^2} (f_0^2 - f^2) \cdot \int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cdot dx \end{aligned} \quad (14)$$

Інтеграл рівняння (14) має вигляд:

$$\int_0^L \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cdot dx = -\frac{1}{4} \sin 2 \frac{\pi x}{L} \Big|_0^L + \frac{1}{2} x \Big|_0^L = -\frac{1}{4} \sin 2\pi + \frac{L}{2} + \frac{1}{4} \sin 0 = \frac{L}{2}. \quad (15)$$

Підставивши значення рівняння (15) в рівняння (14), отримаємо:

$$\Delta L = \frac{\pi^2}{16L} (f_0^2 - f^2). \quad (16)$$

Враховуючи закон Гука зменшення довжини визнаємо з рівняння [9]:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N \cdot dS}{E \cdot A}, \quad (17)$$

де dS – зміна деформації мембрани, м; A – площа поперечного перерізу мембрани, м².

Розпишемо повздовжню реакцію мембрани N :

$$N = N_0 \cdot \cos \varphi + \frac{F_p}{2} \cdot \sin \varphi, \quad (18)$$

де φ – кут між горизонталлю і дотичною до мембрани (лінії дії повздовжньої реакції зусилля мембрани).

Тоді:

$$N \cdot dS = \left(N_0 + \frac{F_p}{2} \cdot \operatorname{tg} \varphi \right) \cdot \frac{dx}{\cos \varphi \cdot dS} = \left(N_0 + \frac{F_p}{2} \cdot y' \right) \cdot dx. \quad (19)$$

Підставимо вираз (19) в рівняння (17) і проінтегруємо:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{\left(N_0 + \frac{F_p}{2} \cdot y' \right)}{E \cdot A} \cdot dx = \frac{N_0 \cdot L}{E \cdot A} + \frac{F_p \cdot f}{E \cdot A \cdot 2} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) \Big|_0^L = \frac{N_0 \cdot L + \frac{F_p \cdot f}{2}}{E \cdot A}. \quad (20)$$

З рівнянь (16) і (20) отримаємо рівняння для визначення поздовжньої реакції N_0 , яку створює мембрана в процесі деформації.

$$N_0 = -\frac{F_p}{2} \cdot \frac{f}{L} + E \cdot A \left(\frac{\pi}{4L} \right)^2 (f_0^2 - f^2). \quad (21)$$

Підставивши в рівняння (10) залежності (8), (9), (21) та провівши алгебраїчні перетворення, отримаємо рівняння для моделювання зусилля F_p , яке створює мембрана в процесі деформації f .

$$F_p = \frac{2 \cdot E \cdot \left[J \cdot \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \cdot (f_0 - f) + A \cdot \left(\frac{\pi}{4L} \right)^2 \cdot (f \cdot f_0^2 - f^3) \right]}{L \cdot \left(1 + \frac{f^2}{L^2} \right)}, \quad (22)$$

де E – модуль пружності матеріалу мембрани, Н/м²; J – момент перерізу мембрани відносно її нейтральної осі, м⁴; L – половина віддалі між двома закріпленими кінцями мембрани, м; f_0, f – максимальний і заданий прогин мембрани, м; A – площа поперечного перерізу мембрани, м².

Один із розмірів поперечного перерізу мембрани визначається з умови міцності матеріалу [9]:

$$\frac{M}{W} + \frac{F_p}{A} \leq [\sigma_{-1}], \quad (23)$$

де M – згинальний момент мембрани, Н·м; W – момент опору, м³; $[\sigma_{-1}]$ – гранично допустимі напруження у разі згину для заданого матеріалу мембрани, Н/м².

Результати моделювання. Моделювання зусилля F_p , яке створюватиме мембрана залежно від прогину f проводили за наступних параметрів: матеріал мембрани – бронза марганцева, катана; товщина мембрани $h = 0,1$ мм; ширина мембрани $b = 1,2$ мм; відстань між краями закріплення мембрани $2L = 32$ мм; максимальний прогин мембрани $f_0 = 4$ мм.

Результати моделювання наведено на рис. 2.

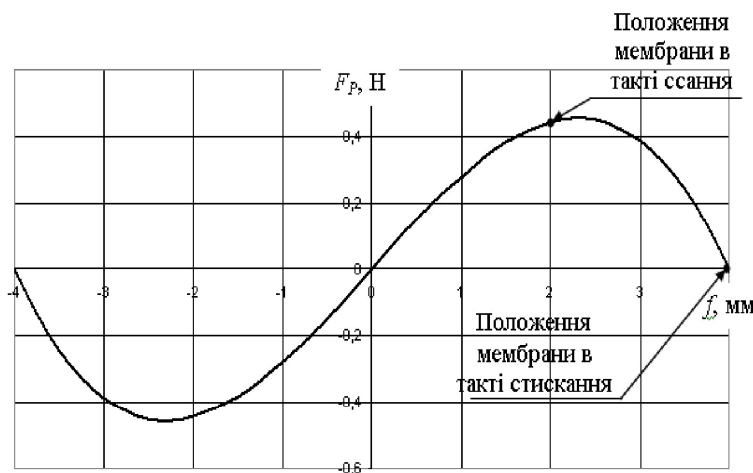


Рис. 2 – Залежність зусилля опору мембрани F_p від прогину f

Залежність зусилля яке створюється мембраною при її прогині від віддалі між краями її закріплення і площі поперечного перерізу наведено на рис. 3.

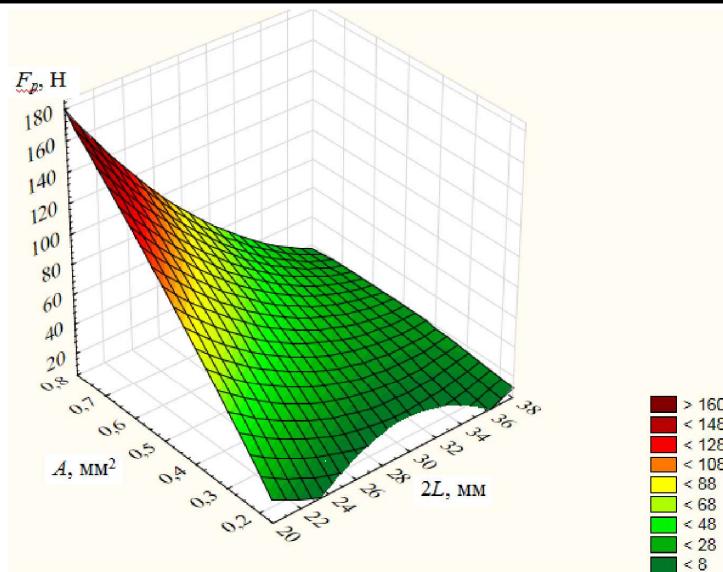


Рис. 3 – Залежність максимального зусилля F_p мембрани від площі поперечного перерізу стрічки A і віддалі $2L$ між защемленими її країв

Для моделювання було використано стрічку бронзову марганцеву катану товщиною $h = 0,4$ мм і шириною $b = 0,4-2$ мм. Віддаль між краями закріплення мембрани приймали від 20 до 38 мм, а максимальний прогин мембрани становив $f_0 = 2$ мм.

Висновок. Аналіз результатів моделювання показав, що із збільшенням вільного прогину f_0 мембрани і зменшенням віддалі $2L$ між защемленими краями зусилля прогину зростає лінійно. Мембрана має два стабільних діаметрально протилежних стани і один нестабільний стан при якому зусилля мембрани, за її прогину наближеному до нейтрального, рівне нулю і перехід з одного положення в діаметрально протилежне положення відбувається при переході через нестабільне положення стрибкоподібно. Збільшення вільного прогину мембрани веде до зростання зусилля опору мембрани. Характер зростання є лінійним. Максимальне зусилля мембрани відповідає половині вільного її прогину.

Література:

1. Дмитрів І. В. Аналіз режимних характеристик доїльних апаратів при машинному доїнні корів. *Механізація та електрифікація сільського господарства* : Міжвідомчий тематичний науковий збірник. Вип. № 97. Глеваха, 2013. С. 576-581.
2. Adamchuk V., Dmytriv V., Dmytriv I. Experimental studies of duration of air pumping out from the „TEAT CUP - PULSATOR” system. *An International quarterly journal on economics in technology new technologies and modeling processes*. Lublin – Rzeszow, 2015. Vol. 4, №4. P. 3-6.
3. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В. Результати експериментальних досліджень тривалості наповнення повітрям системи „доїльний стакан - пульсатор”. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. Серія: техніка та енергетика АПК. К., 2015. Вип.. 212/2. 142 – 148.
4. Дмитрів В., Дмитрів І. Моделирование времени истечения воздуха из ограниченного пространства. *Motrol. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture*. Lublin – Rzeszow. 2013. Vol. 15, № 4. P. 193-197.
5. Туричин А. М., Новицкий П. В., Левшина Е. С. и др. Электрические измерения неэлектрических величин. под ред. П.В. Новицкого. [5-е, изд., перераб. и доп.]. Л.: Энергия, 1975. 576 с.

6. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В. Мембрана електромагнітного пульсатора як часозадаючий елемент перехідних процесів в доільному апараті. *Вісник Харківського нац. техн. університету с. г. ім. Петра Василенка*. Вип. 108 “Технічні системи і технології тваринництва” Харків: ХНТУСГ, 2012. С. 183-188.
7. Дмитрів І. В. Моделювання характеристик плоскої мембрани електромагнітного пульсатора. *Механізація та електрифікація сільського господарства* : Міжвідомчий тематичний науковий збірник. Випуск № 98. том 2. Глеваха, 2013. С. 510-515.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластини и оболочки. пер. с. англ. под. ред. Г.С. Шапиро. Изд. 3-е. М.: Книжный дом „Либроком”, 2009. 640 с.
9. Посацький С. Л. Опір матеріалів. Львів: Видавництво Львівського університету, 1963. 360 с.

Summary

V. Adamchuk, I. Dmytriv, V. Dmytriv. Model of a bistable jump membrane as an element of a control system

In the article the mathematical model of the dependence of the deformation effort of the membrane on the structural parameters and material characteristics is considered. The membrane is executed in the form of a pinched tape at the ends of the appropriate width and thickness of the elastic material and given free deflection. The diagram of the membrane is presented in three basic positions, depending on the value of the deflection. The effect of forces and bending moments is given. The equilibrium equation of the membrane is made according to the load forces and the analytical dependence of the meltdown deflection effort on its constructional parameters and material characteristics is generated. Proposed dependence for determining the longitudinal membrane response. An example is given of the simulation of the F_p effort, which creates a membrane depending on its deflection f and structural parameters, thickness, width and distance between the edges of fixing the membrane tape. The maximum deflection of the membrane is determined by fixing the membrane and the absence of resistance force. Material of the membrane - manganese bronze, ribbon rolled. The modeling of the F_p effort, which will create the membrane depending on the deflection f , was carried out according to the following parameters: membrane material - manganese bronze, ribbon rolled; membrane thickness $h = 0,1$ mm; membrane width $b = 1,2$ mm; the distance between the edges of the membrane fixing $2L = 32$ mm; maximum deflection of the membrane $f_0 = 4$ mm. The dependence of the effort created by the membrane at its deflection from the distance between the edges of its fastening and the cross-sectional area is given. For modeling a tape of bronze manganese ribbon rolled with a thickness of $h = 0,4$ mm and a width of $b = 0,4-2$ mm was used. The distance between the edges of fastening the membrane was taken from 20 to 38 mm, and the maximum deflection of the membrane was $f_0 = 2$ mm. The analysis of the simulation results showed that with increasing free deflection f_0 of the membrane and decreasing the distance $2L$ between the clamped edges, the forging effort increases linearly. The membrane has two stable diametrically opposite states and one unstable state in which the membrane's effort, at its deflection near the neutral, is equal to zero, and the transition from one position to a diametrically opposite position occurs when passing through an unstable position with a leap. Increasing the free deflection of the membrane leads to an increase in the resistance of the membrane. The growth pattern is linear. The maximum membrane effort corresponds to half of its free deflection.

Keywords: membrane, bending moment, deformation, modeling, force, moment of inertia, modulus of elasticity

References

1. Dmytriv I. V. Analiz rezhymnykh kharakterystyk doilnykh aparativ pry mashynnomu doinni koriv. Mekhanizatsiia ta elektryfikatsiia silskoho hospodarstva : Mizhvidomchyi tematychnyi naukovyi zbirnyk. Vyp. № 97. Hlevakha, 2013. S. 576-581.
2. Adamchuk V., Dmytriv V., Dmytriv I. Experimental studies of duration of air pumping out from the „TEAT CUP - PULSATOR” system. *An International quarterly journal on economics in technology new technologies and modeling processes*. Lublin – Rzeszow, 2015. Vol. 4, №4. P. 3-6.
3. Dmytriv V. T., Dmytriv I. V. Rezultaty eksperymentalnykh doslidzhen tryvalosti napovnennia povitriam systemy „doilnyi stakan - pulsator”. Naukovyi visnyk Natsionalnoho universytetu bioresursiv i pryrodokorystuvannia Ukrainy. Serii: tekhnika ta enerhetyka APK. K., 2015. Vyp.. 212/2. 142 – 148.
4. Dmitriv V., Dmitriv I. Modelirovanie vremeni istecheniya vozduha iz ogranichenogo prostranstva. Motrol. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture. Lublin – Rzeszow. 2013. Vol. 15, # 4. P. 193-197.
5. Turichin A. M., Novitskiy P. V., Levashina E. S. i dr. Elektricheskie izmereniya neelektricheskikh velichin. pod red. P.V. Novitskogo. [5-e, izd., pererab. i dop.]. L.: Energiya, 1975. 576 s.
6. Dmytriv V. T., Dmytriv I. V. Membrana elektromahnitnoho pulsatora yak chasozadaiuchy element perekhidnykh protsesiv v doilnomu aparati. Visnyk Kharkivskoho nats.tekhnich. universytetu s. h. im. Petra Vasylenka. Vyp. 108 “Tekhnichni systemy i tekhnolohii tvarynnytstva” Kharkiv: KhNTUSH, 2012. S. 183-188.
7. Dmytriv I. V. Modeliuvannia kharakterystyk ploskoi membrany elektromahnitnoho pulsatora. Mekhanizatsiia ta elektryfikatsiia silskoho hospodarstva : Mizhvidomchyi tematychnyi naukovyi zbirnyk. Vypusk № 98. tom 2. Hlevakha, 2013. S. 510-515.
8. Timoshenko S. P., Voynovskiy S. Plastini i obolochki. per. s. angl. ya. pod. red. G.S. Shapiro izd. 3-e. Kriger. M.: Knizhnyi dom „Librokom”, 2009. 640 s.
9. Posatskiy S. L. Opir materialiv. Lviv: Vydavnytstvo Lvivskoho universytetu, 1963. 360 s.