

Ольшанський В.П.,  
Бурлака В.В.,  
Сліпченко М.В.,  
Харківський національний  
технічний університет сільського  
господарства імені П.Василенка,  
м. Харків, Україна,  
E-mail: teoriyaTMM@gmail.com.

ПРО КОЛИВАННЯ ПІДРЕСОРЕНОГО ТІЛА  
ПРИ УДАРНОМУ ЙОГО НАВАНТАЖЕННІ

УДК 534.1:539.3

*Досліджено коливання системи з одним ступенем вільності, спричинені механічним ударом твердого тіла. Пружна характеристика осцилятора апроксимована відрізками двох прямих ліній. Методом припасовування побудовано аналітичні розв'язки задачі динаміки підресореної платформи для варіантів непружного та частково пружного ударів. Виведено компактні формули для розрахунків переміщення у часі та обчислення максимальних зусиль у деформованих елементах системи. Встановлено умови, за яких крім основного пружного елемента (ресори), піддається деформуванню і додатковий пружний елемент (підресорник). Для порівняння теоретичних результатів розглянуто також енергетичний варіант розв'язку задачі удару. Він дає можливість досить просто обчислити максимальні переміщення і зусилля в системі, підданій удару, без розв'язування диференціального рівняння руху. Наведено приклади розрахунків.*

**Ключові слова:** осцилятор, кусково-лінійна пружна характеристика, механічний удар твердим тілом, переміщення, зусилля в деформованих елементах

**Актуальність.** При механічному ударі в елементах конструкцій можуть виникати великі деформації та напруження, що призводить до передчасної втрати працездатності конструкції або часткового її руйнування. Тому розрахунки на удар відіграють важливу роль при проектуванні деталей машин.

**Аналіз останніх публікацій.** Існує декілька теорій механічного удару, в основу яких покладено різні гіпотези [1 – 4]. Динаміку типових елементів конструкцій при імпульсному або ударному навантаженні досліджували також в [5 – 7]. В інженерній розрахунковій практиці набула поширення технічна теорія удару, яка ґрунтується на енергетичних міркуваннях [8]. В більшості публікацій технічна теорія стосується лінійно пружних систем. Значно менше уваги присвячено дослідженню поведінки нелінійних систем при ударі. Виходячи з цього, тут розглядаємо динаміку осцилятора з кусково-лінійною характеристикою пружності в умовах ударного навантаження.

**Мета статті.** Метою статті є виведення та апробація нових формул для обчислення переміщень та зусиль у нелінійному осциляторі при механічному ударі.

Одержані формули можуть знадобитись для розрахунку переміщень та зусиль в елементах підвіски вантажних транспортних засобів при вертикальному ударному навантаженні падаючими твердими тілами, зокрема при постановці важкого контейнера на кузов підйомним краном.

**Викладення основного матеріалу.** Розглянемо два варіанти механічного удару: непружний вертикальний, коли після удару з'єднуються дві маси і далі здійснюють спільний рух та частково-пружний горизонтальний, коли ударяюче тіло відскакує від осцилятора і рухається окремо.

1. Непружний удар. Припускаємо, що осцилятор має масу  $m$ , яка підресорена основним пружним елементом (ресорою) жорсткістю  $c_1$  та додатковим пружним елементом (підресорником) жорсткістю  $c_2$ . Додатковий пружний елемент підсилювач

включається в роботу, коли деформування (переміщення рухомого кінця) основного елемента перевершує зазор  $x_1$ . Розрахункова схема осцилятора показана на рис. 1.

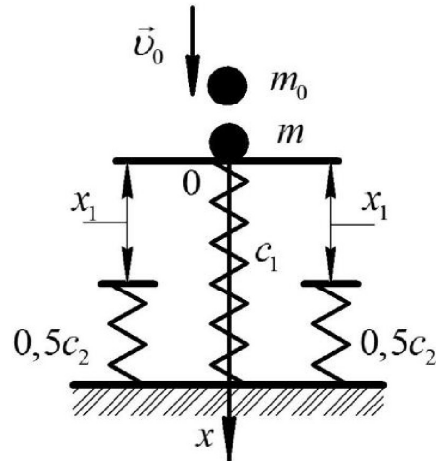


Рис. 1 – Розрахункова схема

Нехай тверде тіло масою  $m_0$  рухається вертикально вниз і вдаряє зі швидкістю  $v_0$  по масі  $m$ , що знаходиться в стані спокою. За теоремою про збереження кількості руху, після миттєвого з'єднання мас (удару), новоутворена маса  $M = m_0 + m$  буде рухатись вниз зі швидкістю:

$$v = m_0 v_0 / M. \quad (1)$$

Переміщення осцилятора  $x(t)$ , спричинені ударом, описуємо диференціальним рівнянням:

$$M\ddot{x} + c_1 x + c_2 (x - x_1) \cdot H(x - x_1) = 0. \quad (2)$$

При початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = v. \quad (3)$$

Тут швидкість  $v$  визначається виразом (1);  $H(x - x_1)$  – одинична функція Хевісайда; крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

У відповідності з (2), (3) при малих  $t$  рух проходить за законом:

$$x(t) = \frac{v}{\omega_1} \sin(\omega_1 t),$$

де  $\omega_1 = \sqrt{c_1 / M}$ .

Якщо виконується умова:

$$\frac{v}{\omega_1} = \frac{m_0 v_0}{M c_1} \leq x_1,$$

то рух осцилятора при любых  $t$  проходить без деформування підресорника.

Деформування цього пружного елемента буде відбуватись лише при виконанні нерівності:

$$\frac{v}{\omega_1} = \frac{m_0 v_0}{\sqrt{M c_1}} > x_1.$$

Таке деформування почнеться в момент часу

$$t = t_1 = \frac{1}{\omega_1} \arcsin \frac{\omega_1 x_1}{v},$$

зі швидкістю:

$$v_1 = \dot{x}(t) = v \cdot \cos(\omega_1 t_1) = \sqrt{v^2 - (\omega_1 x_1)^2}.$$

Для розрахунку подальшого руху осцилятора треба розв'язати диференціальне рівняння:

$$M\ddot{x} + (c_1 + c_2)x = c_2 x_1,$$

при початкових умовах:

$$x(t_1) = x_1; \quad \dot{x}(t_1) = v_1.$$

Ця задача Коші має розв'язок:

$$x(t) = B + A \sin[\omega_2(t - t_1) + \varphi], \quad (4)$$

в якому 
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{M}}; \quad A = \sqrt{\left(\frac{c_1 x_1}{c_1 + c_2}\right)^2 + \left(\frac{v_1}{\omega_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{M v^2}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 c_2 x_1^2}{(c_1 + c_2)^2}};$$

$$B = \frac{c_2 x_1}{c_1 + c_2}; \quad \varphi = \arctg \frac{c_1 x_1 \omega_2}{(c_1 + c_2) v_1}.$$

Згідно з (4), максимальне переміщення коливальної системи становить:

$$\max x(t) = x(t_*) = A + B, \quad (5)$$

причому 
$$t_* = t_1 + \frac{1}{\omega_2} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right).$$

Максимальні зусилля в ресорі  $\max F_1$  і підресорнику  $\max F_2$  далі легко обчислити за формулами:

$$\max F_1 = c_1 (A + B); \quad \max F_2 = c_2 (A + B - x_1).$$

Зазначимо, що коли не цікавиться процесом руху, то формулу (5) можна вивести іншим шляхом, порівнявши кінетичну енергію  $T$ , яку мала система після удару, максимальній потенціальній енергії  $\Pi$  деформації пружних елементів. У нашій задачі:

$$T = \frac{1}{2} M v^2 = \Pi = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} (c_1 + c_2) (x_* - x_1)^2 + c_1 x_1 (x_* - x_1), \quad x_* = x(t_*).$$

Це квадратичне рівняння зводиться до більш компактного:

$$(x_* - x_1)^2 + \frac{2c_1 x_1}{c_1 + c_2} (x_* - x_1) - \frac{M v^2 - c_1 x_1^2}{c_1 + c_2} = 0$$

і має розв'язок:

$$x_* - x_1 = -\frac{c_1 x_1}{c_1 + c_2} + \sqrt{\left(\frac{c_1 x_1}{c_1 + c_2}\right)^2 + \frac{M v^2 - c_1 x_1^2}{c_1 + c_2}}.$$

Звідки випливає, що:

$$x_* = \max x(t) = \frac{c_2 x_1}{c_1 + c_2} + \sqrt{\frac{M v^2}{c_1 + c_2} - \frac{c_1 c_2 x_1^2}{(c_1 + c_2)^2}} = B + A.$$

Отже, розрахунок непружного удару осцилятора з кусково-лінійною характеристикою пружності зводяться до використання компактних формул. Проілюструємо їх використання на числовому прикладі.

Приклад 1. Розглянемо рух осцилятора після удару при:  $m = 900$  кг;  $c_1 = 10^5$  Н/м;  $c_2 = 44 \cdot 10^3$  Н/м;  $m_0 = 100$  кг;  $v_0 = 6$  м/с;  $x_1 = 0,02$  м. Для таких числових даних:  $v = 0,6$  м/с;  $\omega_1 = 10$  с<sup>-1</sup>;  $t_1 = 0,03398$  с;  $v_1 = 0,56569$  м/с;  $\omega_2 = 12$  с<sup>-1</sup>;  $A = 0,04914$  м;  $B = 0,00611$  м;  $\max x(t) = 0,05525$  м;  $\varphi = 0,28652$ ;  $t_* = 0,14100$  с;  $\max F_1 = 5525$  Н;  $\max F_2 = 1551$  Н.

Статичне переміщення осцилятора під дією ваги тіла, що вдаряє  $m_0g$  легко знайти за формулою:

$$x_{\text{ст}} = \begin{cases} \frac{m_0g}{c_1} & m_0g \leq c_1x_1 \\ x_1 + \frac{m_0g - c_1x_1}{c_1 + c_2} & m_0g > c_1x_1, \end{cases}$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння.

Для заданого вище  $m_0$   $m_0g < c_1x_1$  і  $x_{\text{ст}} = 0,00981$  м. Це статичне переміщення значно менше, ніж розраховане вище максимальне динамічне. Коефіцієнт динамічності:  $K_d = \max x(t) / x_{\text{ст}}$  більший 5,6.

2. Виведемо далі формули для розрахунку частково пружного удару по осцилятору, коли маси  $m$  і  $m_0$  після удару рухаються з різними швидкостями по горизонталі. Згідно з теорією Ньютона, після удару маса  $m$  буде рухатись зі швидкістю:

$$u = \frac{m_0v_0(1+K)}{M},$$

де  $K$  – коефіцієнт відновлення.

Моделювання руху осцилятора після удару зводиться до розв'язання рівняння:

$$m\ddot{x} + c_1x + c_2(x - x_1) \cdot H(x - x_1) = 0,$$

при початкових умовах:

$$x(0) = 0; \quad \dot{x}(0) = u.$$

Ця задача аналогічна попередній. Тому, опускаючи подробиці, приводимо кінцеві результати.

При

$$\frac{u}{p_1} = \frac{m_0v_0(1+K)}{Mp_1} \leq x_1, \quad p_1 = \sqrt{c_1/m},$$

осцилятор буде рухатись за законом:

$$x(t) = \frac{u}{p_1} \sin(p_1t),$$

без деформування підресорника.

Якщо:

$$\frac{u}{p_1} > x_1,$$

то деформування підресорника почнеться в момент часу:

$$t = \tau_1 = \frac{1}{p_1} \arcsin \frac{p_1 x_1}{u},$$

зі швидкістю:  $\dot{x}(\tau_1) = u_1 = \sqrt{u^2 - (p_1 x_1)^2}$ .

При  $t > \tau_1$  рух осцилятора буде описуватись виразом:

$$x(t) = B + C \sin [p_2 (t - \tau_1) + \psi],$$

у якому:

$$p_2 = \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}; C = \sqrt{\left(\frac{c_1 x_1}{c_1 + c_2}\right)^2 + \left(\frac{u_1}{p_1}\right)^2}; \psi = \arctg \frac{c_1 x_1 p_2}{(c_1 + c_2) u_1}.$$

Максимальне переміщення становить:

$$\max x(t) = x(\tau_*) = B + C \quad (6)$$

і досягається в момент часу:

$$t = \tau_* = \tau_1 + \frac{1}{p_2} \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right).$$

Для обчислення максимальних зусиль маємо залежності:

$$\max F_1 = c_1 (B + C), \quad \max F_2 = c_2 (B + C - x_1).$$

Зазначимо, що, як і вище, формулу (6) можна також вивести із енергетичних міркувань.

Приклад 2. Проведемо розрахунок руху осцилятора масою:  $m = 800$  кг та попередніми  $c_1, c_2, x_1$  при горизонтальному ударі тілом, у якого  $m_0 = 10$  кг;  $v_0 = 20$  м/с;  $K = 0,5$ . Для цих вихідних даних одержуємо:  $u = 0,37037$  м/с;  $p_1 = 11,18034$  с<sup>-1</sup>;  $\tau_1 = 0,05798$  с;  $u_1 = 0,29525$  м/с;  $p_2 = 13,41641$  с<sup>-1</sup>;  $C = 0,02602$  м;  $\max x(t) = 0,03213$  м;  $\psi = 0,56299$ ;  $\tau_* = 0,13310$  с;  $\max F_1 = 3213$  Н;  $\max F_2 = 533,7$  Н.

#### Висновки:

1. Задача руху осцилятора з кусково-лінійною характеристикою пружності при ударі має замкнутий аналітичний розв'язок в елементарних функціях і його побудовано в роботі.

2. Обчислення основних динамічних параметрів руху зводиться до використання компактних формул, вірогідність яких підтверджена числовими розрахунками.

#### Література:

1. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – Москва: Госстройиздат, 1965. – 447 с.
2. Кильчевский Н.А. Теория соударения твердых тел / Н.А. Кильчевский. – Киев: Наукова думка, 1969. – 247 с.
3. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем / А.П. Филиппов. – Москва: Машиностроение, 1970. – 734 с.
4. Пановко Я.Г. Введение в теорию механического удара / Я.Г. Пановко. – Москва: Наука, 1977. – 232 с.

5. Филиппов А.П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А.П. Филиппов, Ю.С. Воробьев, Я.Г. Янютин. – Киев: Наукова думка, 1978. – 183 с.
6. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин, И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарапата. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с.
7. Ольшанский В.П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В.П. Ольшанский, Л.Н. Тищенко, С.В. Ольшанский. – Харьков: Мискдрук, 2012. – 320 с.
8. Писаренко Г.С. Опір матеріалів / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – Київ: Вища школа, 2004. – 655 с.

### Summary

**Olshanskiy V.P., Burlaka V.V., Slipchenko M.V.** On oscillations of a springsed body under shock loading

*The oscillations of systems with one degree of freedom caused by mechanical shock of a solid body are investigated. The elastic characteristic of the oscillator is approximated by segments of two straight lines. The addition method is used to construct analytical solutions to the problem of the dynamics of a sprung platform for variants of inelastic and partially elastic shocks. Compact formulas are derived for calculating the time of displacement and calculating the maximum forces in the deformed elements of the system. Conditions are established for which, in addition to the main elastic element (springs), an additional elastic element (sub-springs) is deformed. For comparison of theoretical results, the energy variant of the solution of the shock problem is also considered. It makes it possible to calculate simply the maximum displacements and forces in the impacted system without solving the differential equation of motion. Examples of calculations are given.*

**Keywords:** oscillator, piecewise linear elastic characteristic, mechanical impact by a solid body, displacements, forces in deformed elements.

### References

1. Goldsmit V. Udar. Teoriya i fizicheskie svoystva soudaryaemih tel / V. Goldsmit. – Moskva: Gosstroyizdat, 1965. – 447 s.
2. Kilchevskiy N.A. Teoriya soudareniya tverdyih tel / N.A. Kilchevskiy. – Kiev: Naukova dumka, 1969. – 247 s.
3. Filippov A.P. Kolebaniya deformiruemyih sistem / A.P. Filippov. – Moskva: Mashinostroenie, 1970. – 734 s.
4. Panovko Ya.G. Vvedenie v teoriyu mehanicheskogo udara / Ya.G. Panovko. – Moskva: Nauka, 1977. – 232 s.
5. Filippov A.P. Deformirovanie elementov konstruktsiy pod deystviem udarnih i impulsnyih nagruzok / A.P. Filippov, Yu.S. Vorobev, Ya.G. Yanyutin. – Kiev: Naukova dumka, 1978. – 183 s.
6. Yanyutin E.G. Zadachi impulsnogo defomirovaniya elementov konstruktsiy / E.G. Yanyutin, I.V. Yanchevskiy, A.V. Voropay, A.S. Sharapata. – Harkov: HNADU, 2004. – 392 s.
7. Olshanskiy V.P. Kolebaniya stержnej i plastin pri mehanicheskom udare / V.P. Olshanskiy, L.N. Tischenko, S.V. Olshanskiy. – Harkov: Miskdruk, 2012. – 320 s.
8. Pisarenko G.S. Opir materialiv / G.S. Pisarenko, O.L. Kvitka, E.S. Umanskiy. – Kiyiv: Vischa shkola, 2004. – 655 s.